arXiv:2301.01289v2 [physics.flu-dyn] 7 May 2023

有限水深空间准周期水波

JON WILKENING 和 XINYU ZHAO

摘要。我们对有限水深条件下的空间准周期重力-毛细波进行了数值研究，涵盖初值问题和行波两种情形。我们采用欧拉方程的准周期共形映射公式，其中一维准周期函数表示为高维环面上的周期函数。我们计算了背景流和准周期底边界存在时自由表面波的时间演化，并观察到自由表面上准周期图样的形成。我们计算了两类准周期行波：一类是从零振幅解分岔而来的小振幅波，另一类是从有限振幅周期行波分岔而来的较大振幅波。我们推导了第一类波的弱非线性近似，并研究了相关的小除数问题。我们发现，第二类波呈现出显著的非线性行为，例如，由于准周期模态的激活，其波峰和波谷相对于对应的周期波发生了非周期性偏移。

1. 引言

不可压缩流体上的自由表面波在流体动力学的许多领域中都有应用。例如，海浪预报 [36, 60], 、模拟流体越过障碍物以及具有不同形状的底边界时的运动 [5, 28, 66], ，以及研究极端波浪事件（如怪波）中的风浪相互作用 [38]。这些模型由欧拉方程描述，通常在周期边界条件下研究，或假设解在无穷远处衰减至零 [4, 32, 37]。然而，对于许多值得研究的问题而言，这些假设并不充分。例如，周期波可能与空间周期不同的底边界相互作用；周期行进波的次谐波扰动也可能振幅增大，进而形成准周期波。为解决这些问题，我们近期提出了研究准周期边界条件下欧拉方程的方法 [72, 73] ；具体而言，我们研究了二维无限水深中的空间准周期波，并开发了计算这类波的数值算法。本文将此前的工作扩展到有限水深情形，并讨论准周期情形下的初值问题和行波问题。

有限水深水体中的水波呈现出有趣的非线性动力学。数值研究表明，当波振幅小于流体深度的约 1/10 [55, 57] 时，有限水深自由表面波中可能出现费米-帕斯塔-乌拉姆复现。变化的底边界可能导致水波显著放大。实验和数值研究均表明，当波从较深区域向较浅区域传播、经过倾斜海底时，异常巨浪的活动会增加 [20, 63]。在长波逼近垂直壁面的情形下，底边界的突然变化可能导致壁面上出现很大的爬高，或引发波浪破碎；这种情况通常发生在波峰

加利福尼亚大学伯克利分校数学系，伯克利，加利福尼亚州 94720，美国 麦克马斯特大学数学与统计系，汉密尔顿，安大略省，加拿大 L8S 4K1电子邮箱地址：wilkening@berkeley.edu, zhaox171@mcmaster.ca。

翻卷 [33, 65]时。旋转波流与变化的底边界相互作用，会形成随时间变化的开尔文猫眼结构 [28]。

水波的准周期动力学近来引起了广泛关注。Berti 和 Montalto [9], Baldi 等人 [6], Berti 等人 [7, 8], 以及 Feola 和 Giuliani [26] 运用纳什-莫泽理论，证明了小振幅时间准周期水波的存在性。在数值研究方面，Wilkening 计算出了新的相对周期 [69]和行进-驻波 [70] 水波族。尽管物理机制不同，时间准周期波和空间准周期波具有相似的数学结构，因为二者都可以用高维环面上的周期函数来表述。Damanik 和 Goldstein [17] 证明了KdV方程小振幅空间准周期解的整体存在性和唯一性。Oh [49] 和 Dodson等人 [19] 证明了非线性薛定谔方程空间准周期解的局部存在性。

我们最初受到材料科学中准晶体结构的启发。Bli- nov [10]使用薛定谔方程的拟周期解来描述准晶体中非相互作用电子的电子结构。为研究电子如何在准晶体中运动，Torres 等人。[61] 通过振动一个底边界呈准周期变化的盛液体的浅盘，产生了准周期驻波；随后，他们将一个横向波脉冲传过流体，形成一种非周期图案，其中波峰之间的间距并不恒定。他们的观察启发我们提出以下问题：在准周期底边界存在的情况下，如何计算自由表面波的精确动力学？要回答这个问题，需要在拟周期框架下研究自由表面波问题。

我们对准周期水波感兴趣的另一个原因，源于有限水深下重力-毛细波的色散关系：

$$c^2 = (gk^{-1} + \tau k)\tanh(kh). \tag{1.1}$$

这里， c 是相速度， k 是波数， g 是重力加速度， τ 是表面张力系数，h 是流体的水深。已知， [62] 当$\tau/(g\mathrm{h}^2) < 1/3$,时，存在 c_{crit}一个介于 0 和$\sqrt{g\mathrm{h}}$ 之间的值，使得对于任意给定的相速度$c > c_{\mathrm{crit}}$，都存在两个不同的正波数满足色散关系（1.1），分别记为 k_1 和 k_2。由这两个波数对应的波任意叠加而成的波，是线性化行波问题的一个解。如果 k_1 和 k_2 成有理数关系，则线性解在空间上是周期的，并与已深入研究的 Wilton波纹 [1, 2, 62, 75]有关。另一方面，如果 k_1 和 k_2 成无理数关系，则线性解在空间上是准周期的，因此自然可以据此寻找非线性准周期行波解。Bridges 和 Dias [13] 率先借助空间哈密顿结构研究了这些空间准周期行波，并构造了它们的弱非线性近似。最近，我们 [72] 采用水波方程的保角映射公式，计算了深水情形下全非线性问题的高精度数值解。这些计算在二维环面上进行，并通过 $u(\alpha) = \tilde{u}(k_1\alpha、k_2\alpha)$从中提取一维准周期函数。其计算挑战与计算时间周期驻波 [42, 68, 71]时遇到的挑战类似。主要区别在于，驻波可以表述为一个非线性两点边值问题，从而将未知数的数量从 $O(N^2)$ 减少到 $O(N)$ 个初始自由度；而准周期行波有 $O(N^2)$ 个未知数，但其目标函数更简单，主要计算成本来自相对廉价的二维快速傅里叶变换。在本研究中，我们旨在将这些技术进一步拓展到有限水深水体情形。

接下来 [72,73], 我们采用自由表面欧拉方程的保角映射公式 [15,21–24,34,40,77]。在有限水深情形下，具有弯曲自由表面和不平底边界的流体区域被保角映射到水平条带，而非下半平面。由于保角映射依赖于时间，尽管底边界在物理空间中固定不动，但底边界在保角空间中的表示会随时间变化。Ruban [54,56] 固定了条带宽度，并通过两个保角映射的复合将条带映射到流体区域——第一个映射保持实轴不变，第二个映射将实数线映射到底边界。Viotti 等 [66], Flamarion等 [27,29] 以及 Ribeiro 等 [53] 则让条带宽度随时间变化，以使物理空间和保角空间中的波长保持一致。他们采用不动点迭代法计算不同时刻的底部轮廓。为了使水波在物理空间和保角空间中具有相同的准周期，我们也让条带宽度成为随时间变化的变量。然而，与 [29,66], 不同，我们利用保角映射的解析性质，直接计算底部轮廓的时间演化，这与 [54,56]类似。与无限水深情形一样 [72,73], ，我们引入有限水深准周期希尔伯特变换，以关联保角映射的实部和虚部，并计算自由表面上的运动学边界条件。这些希尔伯特变换是傅里叶乘子算子，在准周期情形下比直接在物理空间中计算狄利克雷—诺伊曼算子 [16] 更容易，例如使用边界积分方法 [5]。

在计算变化的底边界上方自由表面波的动力学时，通常假设自由表面波与底边界的空间周期相同，或者一个是另一个的整数倍。本文研究一种新的情形：二者的空间周期呈无理数关系。具体而言，在第4.1节给出的一个例子中，我们计算初始周期为 2π 的周期性自由表面波，在周期为 $2\sqrt{2}\pi$的周期性底边界存在时的时间演化。我们发现，周期波会变成准周期波，每个波峰和波谷在与底边界相互作用时都以不同的方式演化。我们还计算了背景流和准周期底边界存在时，初始平坦自由表面的时间演化。与Torres 等人 [61], 的实验类似，我们也观察到，背景流与准周期底边界之间的相互作用会使自由表面波形成准周期图样。波峰和波谷呈非对称分布，且相邻波峰之间的距离并不恒定。

在第4.2节中，我们计算两类准周期行波解：一类波从零振幅解处分岔，另一类波从有限振幅周期行波解处分岔。对于第一类，我们利用零解附近的线性化来确定初始分岔方向，并得到一个由流体深度以及对应于波数 k_1 和 k_2的傅里叶系数所规定的三参数解族；这些系数称为基傅里叶系数。与深水情形类似 [72], ，当基傅里叶系数的振幅较小时，解的振幅也较小，且接近线性解。对于第二类，我们围绕一个有限振幅的 2π周期行波对控制方程进行线性化。在这种情况下，为确定分岔方向，我们在该线性算子的核中采用以下形式的准周期函数：

$$\delta\eta(\alpha) = e^{ik\alpha}\eta_0(\alpha) + c.c., \tag{1.2}$$

其中 η_0 与周期行进波具有相同的波长，记号 $c.c.$表示前一项的复共轭，并且本文中设定 $k = 1/\sqrt{2}$ 。

Chen 和 Saffman 已采用该方法计算具有 $k = 1/2$ 和$k = 1/3$ 的次级周期分岔 [14]；Vanden-Broeck 则研究了具有 $k = 1/9$ 的情形 [64]。在本文中，我们获得了从一种周期行进波分岔而来的准周期行波，该周期行进波的第一傅里叶模态与第五傅里叶模态发生共振。此周期行进波是 Wilton 涟漪问题的一个解，其波峰看起来像“猫耳朵”。分岔产生的波仍保留这一特征；然而，受准周期方向上的傅里叶模态影响，相邻“耳朵”之间的距离不再恒定。

本文结构如下。在第 2 节中，我们定义有限水深准周期希尔伯特变换，并推导底边界不一定平坦时保角空间中准周期自由表面波的运动方程。在第 3 节中，我们推导平坦底边界有限水深水体中准周期行波的控制方程，并建立这些波的弱非线性近似，探讨小除数在计算逐次近似中的作用。在第4 节中，我们采用傅里叶伪谱方法计算初值问题和行波问题的解，并展示若干数值例子。遵循 [72,73]，中的思路，我们将一维准周期问题提升到高维周期环面上，并在那里进行计算。我们将行波问题表述为一个超定非线性最小二乘问题，并通过 Levenberg-Marquardt 方法的一种变体求解 [48,71]。对于初值问题，我们考虑一种自然的设定：准周期初始条件和底边界均定义在物理空间中。附录 A 中介绍了将它们变换到保角空间的方法。

2. 运动方程

2.1. **物理空间中的控制方程**。 有限水深下的重力-毛细波由自由表面欧拉方程控制 [37,76]。在二维情况下，它们可写为

$$\eta^{\mathrm{s}}(x,0) = \eta_0^{\mathrm{s}}(x), \qquad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \qquad t = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{xx} + \Phi_{yy} &= 0, & \eta^{\mathrm{b}}(x) < y < \eta^{\mathrm{s}}(x,t), \\ \Phi &= \varphi, & y = \eta^{\mathrm{s}}(x,t), \\ \nabla\Phi \cdot \boldsymbol{n} &= 0, & y = \eta^{\mathrm{b}}(x), \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\eta_t^{\mathrm{s}} = \Phi_y - \eta_x^{\mathrm{s}}\Phi_x, \qquad y = \eta^{\mathrm{s}}(x,t), \tag{2.3}$$

$$\varphi_t = \Phi_y\eta_t^{\mathrm{s}} - \frac{1}{2}\Phi_x^2 - \frac{1}{2}\Phi_y^2 - g\eta^{\mathrm{s}} + \tau\frac{\eta_{xx}^{\mathrm{s}}}{\left(1+(\eta_x^{\mathrm{s}})^2\right)^{3/2}} + C(t), \qquad y = \eta^{\mathrm{s}}(x,t), \tag{2.4}$$

其中 x 是水平坐标，y 是垂直坐标，t 是时间，$\Phi(x,\ y,\ t)$ 是流体的速度势，$\eta^{\mathrm{s}}(x,\ t)$ 是自由表面高程，$\eta^{\mathrm{b}}(x)$ 是固定的底部轮廓，g 是重力引起的垂直加速度，而 τ 是表面张力系数；对于重力波，该系数为零。方程（2.3）是运动学边界条件，（2.4）是动力学边界条件。式（ $C(t)$ 2.4）中的函数是任意积分常数，可以依赖于时间，但不能依赖于空间。我们关注变化的底边界存在时水波的动力学；换言之，底部轮廓不是常函数。当底边界平坦时，通常假设不存在背景流。事实上，在这种情况下，系统具有伽利略不变性，这意味着可以通过在运动参考系中观察系统来消除任何背景流。

然而，当底边界变化时，情况并非如此；背景流与底边界之间的相互作用会产生有趣的非线性动力学。因此，在速度势中加入一个世俗增长项，将背景流纳入问题描述是有意义的；否则，速度势在空间上是周期或准周期的。

2.2. **有限水深准周期希尔伯特变换**。如 [25,44], 准周期实解析函数 $f(\alpha)$ 定义为如下形式的函数

$$f(\alpha)=\tilde{f}(\boldsymbol{k}\alpha),\qquad \tilde{f}(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\hat{f}_j e^{i\langle j,\boldsymbol{\alpha}\rangle},\qquad \alpha\in\mathbb{R},\ \ \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^d, \tag{2.5}$$

其中，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的标准内积，$\tilde{f}$ 是定义在 d 维环面 $\mathbb{T}^d:=\mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$ 上的周期实解析函数。我们假设 $d\geqslant 2$，使得 f 可以是真正的准周期函数。向量 $\boldsymbol{k}$ 的各个分量称为 f 的基本波数（或基本频率），并要求它们在 $\mathbb{Z}$ 上线性无关。给定一个准周期函数 f，式（2.5）中的相应 f 和 $\boldsymbol{k}$ 并不唯一。事实上，如果 $\boldsymbol{K}$ 是任意一个 $d\times d$ 幺模矩阵，那么 $\tilde{f}'(\boldsymbol{\alpha})=\tilde{f}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{\alpha})$ 也满足式（2.5），其中 $\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{k}$。为简单起见，我们假设给定了 $\boldsymbol{k}$，以及 f 或 $\tilde{f}$，以确定其表示。给定 $\boldsymbol{k}$，可以从 f 重构 $\tilde{f}$ 及其傅里叶系数 $\hat{f}_j$，具体如下

$$\hat{f}_j=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(\alpha)e^{-i\langle j,k\rangle\alpha}d\alpha,\qquad \boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d. \tag{2.6}$$

有关上述平均公式的详细讨论，请参阅 [11] 。我们假设 $\tilde{f}(\boldsymbol{\alpha})$ 是实解析的，这等价于满足以下条件：$\hat{f}_{-j}=\hat{f}_j$ 对于 $\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d$，存在正数 M 和 γ，使得 $|\hat{f}_j|\leqslant Me^{-\gamma|\boldsymbol{j}|}$，即傅里叶模态 $\hat{f}_j$ 以指数衰减，当 $\|\boldsymbol{j}\|\to\infty$ 时。接下来，我们介绍一些作用于 f 和 $\tilde{f}$ 上的算子。

定义 2.1。投影算子 P 和 P_0 定义如下：

$$P=\mathrm{id}-P_0,\qquad P_0[f]=P_0[\tilde{f}]=\hat{f}_{\boldsymbol{0}}=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\tilde{f}(\boldsymbol{\alpha})\,d\alpha_1\cdots d\alpha_d. \tag{2.7}$$

注意，P 投影到零均值函数空间，而 P_0 返回平均值。P 和 P_0 有两种形式：一种作用于定义在 $\mathbb{R}$ 上的准周期函数，另一种作用于定义在 $\mathbb{T}^d$ 上的环面函数。

定义 2.2。作用于 f 或 $\tilde{f}$ 上的导数算子 ∂_α 定义如下：

$$\partial_\alpha f(\alpha)=\partial_\alpha\tilde{f}(\boldsymbol{k}\alpha),\qquad \partial_\alpha\tilde{f}(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{\boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0}}i\langle\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle\hat{f}_j e^{i\langle\boldsymbol{j},\boldsymbol{\alpha}\rangle}. \tag{2.8}$$

为简化记号，我们用 f_α（或 $\tilde{f}_\alpha$）表示 $\partial_\alpha f$（或 $\partial_\alpha\tilde{f}$）。也可以将 $\partial_\alpha\tilde{f}$ 理解为 $\tilde{f}$ 沿特征方向 $\boldsymbol{k}$ 的方向导数。

定义 2.3. 我们引入四种有限水深准周期希尔伯特变换 $H^{\tanh},H^{\coth},H^{\mathrm{csch}},H^{\mathrm{sech}}$，它们作用于 f 和 $\tilde{f}$，定义如下 [51,66]

$$H^{\mathrm{op}}[f](\alpha)=H^{\mathrm{op}}[\tilde{f}](\boldsymbol{k}\alpha),\qquad H^{\mathrm{op}}[\tilde{f}](\boldsymbol{\alpha})=\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}i\hat{H}^{\mathrm{op}}\hat{f}_j e^{i\langle j,\boldsymbol{\alpha}\rangle}, \tag{2.9}$$

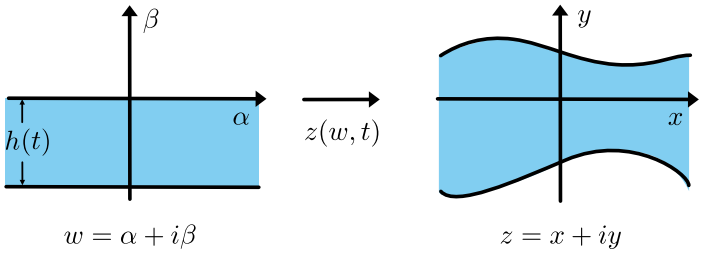

图1. 时变保角映射。

ˆ 其中 op = 为 tanh，coth、sech 或 csch，符号 H^{op} 定义为

$$\hat{H}_j^{\tanh} = i\tanh\big(\langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle h\big), \qquad \hat{H}_j^{\coth} = \begin{cases} (-i)\coth\big(\langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle h\big), & \boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0},\\ 0 & \boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}, \end{cases}$$
$$\hat{H}_j^{\mathrm{sech}} = \mathrm{sech}\big(\langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle h\big), \qquad \hat{H}_j^{\mathrm{csch}} = \begin{cases} i\,\mathrm{csch}\big(\langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle h\big) & \boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0},\\ 0 & \boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{2.10}$$

这里 h 是一个正参数，将在第 2.3节讨论。

我们注意到

$$\lim_{h\to\infty}\hat{H}_j^{\tanh} = i\,\mathrm{sgn}\big(\langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle\big), \qquad \lim_{h\to\infty}\hat{H}_j^{\coth} = -i\,\mathrm{sgn}\big(\langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle\big). \tag{2.11}$$

后者与 [72,73] 中引入的准周期希尔伯特变换一致（在深水情况下），而前者是其伪逆。

2.3. **准周期共形映射**。 图 1展示了一个时变保角映射

$$z(w,t) = x(\alpha,\beta,t) + iy(\alpha,\beta,t), \qquad w = \alpha+i\beta, \tag{2.12}$$

将复平面中的无限条带

$$S_h = \{\alpha+i\beta \,:\, \alpha\in\mathbb{R},\, -h(t)<\beta<0\} \tag{2.13}$$

映射到流体区域

$$\Omega_f = \{(x,y) \,:\, x\in\mathbb{R},\, \eta^{\mathrm{b,phys}}(x) < y < \eta^{\mathrm{s,phys}}(x,t)\}. \tag{2.14}$$

为避免歧义，我们用 $\eta^{\mathrm{s,phys}}$ 和 $\eta^{\mathrm{b,phys}}$ 分别表示物理空间中的自由表面高程和底部轮廓，而后续则用 η^{s} 和 η^{b} 表示保角变量。

我们假设 $z(w,t)$ 可连续延拓至 S_h，并将条带域的顶边界和底边界分别映射到自由表面和流体区域的底边界。记

$$\begin{aligned} \zeta^{\mathrm{s}}(\alpha,t) &= z|_{\beta=0}(\alpha,t) = x(\alpha,0,t) + iy(\alpha,0,t) = \xi^{\mathrm{s}}(\alpha,t) + i\eta^{\mathrm{s}}(\alpha,t),\\ \zeta^{\mathrm{b}}(\alpha,t) &= z|_{\beta=-h(t)}(\alpha,t) = x(\alpha,-h(t),t) + iy(\alpha,-h(t),t) = \xi^{\mathrm{b}}(\alpha,t) + i\eta^{\mathrm{b}}(\alpha,t), \end{aligned} \tag{2.15}$$

我们有

$$\eta^{\mathrm{s,phys}}(\xi^{\mathrm{s}}(\alpha,t),t) = \eta^{\mathrm{s}}(\alpha,t), \qquad \eta^{\mathrm{b,phys}}(\xi^{\mathrm{b}}(\alpha,t)) = \eta^{\mathrm{b}}(\alpha,t). \tag{2.16}$$

为后续推导保角空间中的控制方程，我们对（ α 和 t ）2.15）两边分别求导，得到

$$x_\alpha = \xi^{\mathrm{s}}_\alpha, \qquad y_\alpha = \eta^{\mathrm{s}}_\alpha, \qquad x_t = \xi^{\mathrm{s}}_t, \qquad y_t = \eta^{\mathrm{s}}_t, \qquad (\beta=0) \tag{2.17}$$

以及

$$x_\alpha = \xi^{\mathrm{b}}_\alpha, \qquad y_\alpha = \eta^{\mathrm{b}}_\alpha, \qquad y_\alpha h_t + x_t = \xi^{\mathrm{b}}_t, \qquad -x_\alpha h_t + y_t = \eta^{\mathrm{b}}_t, \qquad (\beta = -h(t)) \tag{2.18}$$

其中我们在最后两个等式中使用柯西-黎曼关系 $x_\alpha = y_\beta$ 和 $y_\alpha = -x_\beta$。对式（2.16）关于 α 和 t 求导，得到

$$\eta^{\mathrm{s,phys}}_x \xi^{\mathrm{s}}_\alpha = \eta^{\mathrm{s}}_\alpha, \qquad \eta^{\mathrm{s,phys}}_x \xi^{\mathrm{s}}_t + \eta^{\mathrm{s,phys}}_t = \eta^{\mathrm{s}}_t. \tag{2.19}$$

and

$$\eta^{\mathrm{b,phys}}_x \xi^{\mathrm{b}}_\alpha = \eta^{\mathrm{b}}_\alpha, \qquad \eta^{\mathrm{b,phys}}_x \xi^{\mathrm{b}}_t = \eta^{\mathrm{b}}_t. \tag{2.20}$$

我们感兴趣的是 当 η^{s} 和 η^{b} 是具有（2.5形式的准周期函数时 ），

$$\begin{aligned} \eta^{\mathrm{s}}(\alpha, t) &= \tilde{\eta}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{k}\alpha, t), \qquad \tilde{\eta}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{\alpha}, t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \hat{\eta}^{\mathrm{s}}_j(t) e^{i\langle j, \boldsymbol{\alpha}\rangle}, \\ \eta^{\mathrm{b}}(\alpha, t) &= \tilde{\eta}^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{k}\alpha, t), \qquad \tilde{\eta}^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\alpha}, t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \hat{\eta}^{\mathrm{b}}_j(t) e^{i\langle j, \boldsymbol{\alpha}\rangle}, \end{aligned} \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d, \tag{2.21}$$

其中 $\boldsymbol{k}$ 是固定的，且其分量在 $\mathbb{Z}$上线性无关。这不同于通常的保角映射框架 [21,22,40,41,43,77],，在该框架中 η^{s} 以及（若存在） η^{b}都假设为周期函数。利用 y 是在 S_h 上定义的调和函数，且 y 的边界值由 $y|_{\beta=0} = \eta^{\mathrm{s}}$ 和 $y|_{\beta=-h} = \eta^{\mathrm{b}}$给出这一事实，可得

$$y = \frac{1}{h}(\hat{\eta}^{\mathrm{s}}_{\boldsymbol{0}} - \hat{\eta}^{\mathrm{b}}_{\boldsymbol{0}})\beta + \hat{\eta}^{\mathrm{s}}_{\boldsymbol{0}} + \sum_{j\neq\boldsymbol{0}} \frac{\sinh\left(\langle j, \boldsymbol{k}\rangle(\beta + h)\right)}{\sinh\left(\langle j, \boldsymbol{k}\rangle h\right)} \hat{\eta}^{\mathrm{s}}_j e^{i\langle j,\boldsymbol{k}\rangle\alpha} - \sum_{j\neq\boldsymbol{0}} \frac{\sinh\left(\langle j, \boldsymbol{k}\rangle\beta\right)}{\sinh\left(\langle j, \boldsymbol{k}\rangle h\right)} \hat{\eta}^{\mathrm{b}}_j e^{i\langle j,\boldsymbol{k}\rangle\alpha}. \tag{2.22}$$

y的调和共轭函数，即 x，可利用柯西-黎曼方程 2.22从 $(x_\alpha = y_\beta, \quad x_\beta = -y_\alpha,$

$$x = \frac{1}{h}(\hat{\eta}^{\mathrm{s}}_{\boldsymbol{0}} - \hat{\eta}^{\mathrm{b}}_{\boldsymbol{0}})\alpha + x_0 - \sum_{j\neq\boldsymbol{0}} i\frac{\cosh\left(\langle j, \boldsymbol{k}\rangle(\beta + h)\right)}{\sinh\left(\langle j, \boldsymbol{k}\rangle h\right)} \hat{\eta}^{\mathrm{s}}_j e^{i\langle j,\boldsymbol{k}\rangle\alpha} + \sum_{j\neq\boldsymbol{0}} i\frac{\cosh\left(\langle j, \boldsymbol{k}\rangle\beta\right)}{\sinh\left(\langle j, \boldsymbol{k}\rangle h\right)} \hat{\eta}^{\mathrm{b}}_j e^{i\langle j,\boldsymbol{k}\rangle\alpha}. \tag{2.23}$$

这里， x_0 是一个仅依赖于时间的积分常数，我们可以自由选择。给定任意时刻的Ω_f，要确定映射 z，需要指定两个自由参数：h 和 x_0。我们设

$$h = \hat{\eta}^{\mathrm{s}}_{\boldsymbol{0}} - \hat{\eta}^{\mathrm{b}}_{\boldsymbol{0}}, \qquad x_0 = 0. \tag{2.24}$$

因此， （2.22）和（2.23）中的首项分别就是 α 和 β。当流体区域沿 h x 呈周期性时，也可以用同样的方式选择 [66]，使波长在保角映射下保持不变。另一种做法是令 $h = 1$，这与周期情形下 [54, 56] 中的做法相同。令 $x_0 = 0$ 需要对时间演化方程中的一个参数作出特定选择 [73]；这一点将在第 2.5节讨论。在此之前，我们在表示式中将 $x_0(t)$ 保留为一个随时间变化的参数。

比较（2.22）和（2.23），我们注意到 x 和 y 在 S_h 的顶部和底边界处的值由（2.9）中的准周期希尔伯特变换联系起来，

$$\begin{aligned} \xi^{\mathrm{s}}(\alpha, t) &= \alpha + x_0(t) + H^{\coth}[\eta^{\mathrm{s}}](\alpha, t) + H^{\mathrm{csch}}[\eta^{\mathrm{b}}](\alpha, t), \\ \xi^{\mathrm{b}}(\alpha, t) &= \alpha + x_0(t) - H^{\mathrm{csch}}[\eta^{\mathrm{s}}](\alpha, t) - H^{\coth}[\eta^{\mathrm{b}}](\alpha, t). \end{aligned} \tag{2.25}$$

相应的环面函数如下文（2.53）所示。

2.4. **准周期复速度势**。令 $\Phi^{\mathrm{phys}}(x,\ y,\ t)$ 表示第 2.1 节中物理空间里的速度势，并令 $W^{\mathrm{phys}}(x+iy,\ t) = \Phi^{\mathrm{phys}}(x,\ y,\ t) + i\Psi^{\mathrm{phys}}(x,\ y,\ t)$ 表示复速度势，其中 Ψ^{phys} 是流函数。利用保角映射（2.12），我们将这些函数拉回到条带域 S_h 并定义

$$W(w,t) = \Phi(\alpha,\beta,t) + i\Psi(\alpha,\beta,t) = W^{\mathrm{phys}}(z(w,t),t), \qquad w = \alpha + i\beta. \tag{2.26}$$

我们记作 $\varphi^{\mathrm{s}} = \Phi|_{\beta=0}$，$\varphi^{\mathrm{b}} = \Phi|_{\beta=-h}$，$\psi^{\mathrm{s}} = \Psi|_{\beta=0}$，$\psi^{\mathrm{b}} = \Psi|_{\beta=-h}$ 并利用（2.15）得到

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathrm{s}}(\alpha,t) &= \Phi^{\mathrm{phys}}(\xi^{\mathrm{s}}(\alpha,t),\eta^{\mathrm{s}}(\alpha,t),t) = \varphi^{\mathrm{s,phys}}(\xi^{\mathrm{s}}(\alpha,t),t),\\
\varphi^{\mathrm{b}}(\alpha,t) &= \Phi^{\mathrm{phys}}(\xi^{\mathrm{b}}(\alpha,t),\eta^{\mathrm{b}}(\alpha,t),t),\\
\psi^{\mathrm{s}}(\alpha,t) &= \Psi^{\mathrm{phys}}(\xi^{\mathrm{s}}(\alpha,t),\eta^{\mathrm{s}}(\alpha,t),t) = \psi^{\mathrm{s,phys}}(\xi^{\mathrm{s}}(\alpha,t),t),\\
\psi^{\mathrm{b}}(\alpha,t) &= \Psi^{\mathrm{phys}}(\xi^{\mathrm{b}}(\alpha,t),\eta^{\mathrm{b}}(\alpha,t),t),
\end{aligned} \tag{2.27}$$

其中 $\varphi^{\mathrm{s,\ phys}}$，$\psi^{\mathrm{s,\ phys}}$ 表示 Φ^{phys} 和 Ψ^{phys} 在自由表面上的取值。参照 [66]对周期情形的处理，我们假设存在一个水平平均速度为$\mathcal{U}$的背景流，并且 φ^{s} 的准周期部分与 η^{s} 具有相同的准周期 η^{b}

$$\varphi^{\mathrm{s}}(\alpha,t) = \mathcal{U}\alpha + \tilde{\varphi}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{k}\alpha,t), \qquad \tilde{\varphi}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{\alpha},t) = \sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d} \hat{\varphi}^{\mathrm{s}}_{\boldsymbol{j}}(t)e^{i\langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{\alpha}\rangle}, \qquad \alpha\in\mathbb{R},\ \ \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^d. \tag{2.28}$$

根据（2.2），底边界是一条流线，因此 ψ^{b} 是一个常数函数（或仅为时间的函数）。考虑到在 Φ 和Ψ中添加常数（或时间函数）不会影响流体运动，我们令 $\hat{\varphi}^{\mathrm{s}}_{\boldsymbol{0}} = 0$ 和

$$\psi^{\mathrm{b}} = 0. \tag{2.29}$$

由于 Φ 和 Ψ 是满足边界条件（2.28）和（2.29）的调和共轭函数，我们得到

$$\begin{aligned}
\Phi &= \mathcal{U}\alpha + \sum_{\boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0}} \hat{\varphi}_{\boldsymbol{j}} \frac{\cosh\left(\langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle(\beta+h)\right)}{\cosh\left(\langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle h\right)} e^{i\langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle\alpha},\\
\Psi &= (\beta+h)\mathcal{U} + \sum_{\boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{0}} i\hat{\varphi}_{\boldsymbol{j}} \frac{\sinh\left(\langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle(\beta+h)\right)}{\cosh\left(\langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle h\right)} e^{i\langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

比较 $\beta = 0$ 处和 $\beta = -\boldsymbol{h}$ 处的 Φ 与 Ψ 的值，我们得出结论：

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathrm{s}}(\alpha,t) &= \mathcal{U}\alpha + H^{\coth}[\psi^{\mathrm{s}}](\alpha,t), \qquad \psi^{\mathrm{s}}_{\alpha}(\alpha,t) = H^{\tanh}[\varphi^{\mathrm{s}}_{\alpha}](\alpha,t),\\
\varphi^{\mathrm{b}}_{\alpha}(\alpha,t) &= \mathcal{U} + H^{\mathrm{sech}}[\varphi^{\mathrm{s}}_{\alpha}](\alpha,t) = \mathcal{U} - H^{\mathrm{csch}}[\psi^{\mathrm{s}}_{\alpha}](\alpha,t).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

2.5. **保角空间中的控制方程**。现在，我们推导有限水深且底边界不一定平坦时，采用保角映射公式描述准周期表面水波运动的方程。这是对 [73], 中结果的扩展，其中流体深度为无穷大。由于保角映射随时间变化，尽管物理空间中的底部轮廓固定不变，共形域中条带的宽度以及保角空间中底边界的参数化（分别记为 $\boldsymbol{h}(t)$ 和 $\zeta^{\mathrm{b}}(\alpha,\ t)$）都会随时间变化。因此，除了自由表面之外，还需要共形空间中 $\boldsymbol{h}$ 和 ζ^{b} 的时间演化方程来描述流体区域的演化。这是深水和有限水深水体的保角映射公式之间的主要区别。

首先，我们使用链式法则得到

$$\frac{dW}{dw}=\frac{dW^{\text{phys}}}{dz}\cdot\frac{dz}{dw}\qquad\Rightarrow\qquad \Phi_x^{\text{phys}}+i\Psi_x^{\text{phys}}=\frac{\Phi_\alpha+i\Psi_\alpha}{x_\alpha+iy_\alpha}. \tag{2.32}$$

由于 $\Phi_y^{\text{phys}}=-\Psi_x^{\text{phys}}$，我们可以用 Φ_α 和 Ψ_α 表示流体速度，即 Φ^{phys} 的梯度

$$\Phi_x^{\text{phys}}=\frac{\Phi_\alpha x_\alpha+\Psi_\alpha y_\alpha}{x_\alpha^2+y_\alpha^2},\qquad \Phi_y^{\text{phys}}=\frac{\Phi_\alpha y_\alpha-\Psi_\alpha x_\alpha}{x_\alpha^2+y_\alpha^2}. \tag{2.33}$$

在自由表面上计算 (2.33)，得到

$$\Phi_x^{\text{phys}}\Big|_{z=\zeta^{\text{s}}(\alpha,t)}=\frac{\varphi_\alpha^{\text{s}}\xi_\alpha^{\text{s}}+\psi_\alpha^{\text{s}}\eta_\alpha^{\text{s}}}{J^{\text{s}}},\quad \Phi_y^{\text{phys}}\Big|_{z=\zeta^{\text{s}}(\alpha,t)}=\frac{\varphi_\alpha^{\text{s}}\eta_\alpha^{\text{s}}-\psi_\alpha^{\text{s}}\xi_\alpha^{\text{s}}}{J^{\text{s}}},\quad J^{\text{s}}=(\xi_\alpha^{\text{s}})^2+(\eta_\alpha^{\text{s}})^2. \tag{2.34}$$

接下来，我们在保角空间中推导运动学边界条件。定义函数

$$\vartheta:=\frac{z_t}{z_w}=\frac{x_tx_\alpha+y_ty_\alpha}{x_\alpha^2+y_\alpha^2}+i\frac{y_tx_\alpha-x_ty_\alpha}{x_\alpha^2+y_\alpha^2}, \tag{2.35}$$

只要 z_w 与零保持一定距离，它就在 S_h 上全纯。在 2.35）中令$\beta=0$，并令 $\beta=-h(t)$，再利用（2.17）、（2.18），将 x 和 y 的导数替换为 ξ^{s} 和 η^{s}的导数，便得到

$$\text{Re}\,\vartheta\Big|_{\beta=0}=\frac{\xi_t^{\text{s}}\xi_\alpha^{\text{s}}+\eta_t^{\text{s}}\eta_\alpha^{\text{s}}}{J^{\text{s}}},\qquad \text{Im}\,\vartheta\Big|_{\beta=0}=\frac{\eta_t^{\text{s}}\xi_\alpha^{\text{s}}-\xi_t^{\text{s}}\eta_\alpha^{\text{s}}}{J^{\text{s}}}, \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}\text{Re}\,\vartheta\Big|_{\beta=-h(t)}&=\frac{\xi_t^{\text{b}}\xi_\alpha^{\text{b}}+\eta_t^{\text{b}}\eta_\alpha^{\text{b}}}{J^{\text{b}}},\\ \text{Im}\,\vartheta\Big|_{\beta=-h(t)}&=\frac{\eta_t^{\text{b}}\xi_\alpha^{\text{b}}-\xi_t^{\text{b}}\eta_\alpha^{\text{b}}}{J^{\text{b}}}+h_t,\end{aligned}\qquad J^{\text{b}}=(\xi_\alpha^{\text{b}})^2+(\eta_\alpha^{\text{b}})^2. \tag{2.37}$$

此外，将（2.19）和（2.34）代入（2.3），得到

$$\eta_t^{\text{s}}\xi_\alpha^{\text{s}}-\xi_t^{\text{s}}\eta_\alpha^{\text{s}}=-\psi_\alpha^{\text{s}}. \tag{2.38}$$

因此我们有

$$\text{Im}\,\vartheta\Big|_{\beta=0}=-\frac{\psi_\alpha^{\text{s}}}{J^{\text{s}}}. \tag{2.39}$$

将（2.20）代入（2.37），可得 $\eta_t^{\text{b}}\xi_\alpha^{\text{b}}-\xi_t^{\text{b}}\eta_\alpha^{\text{b}}=0$，因此

$$\text{Im}\,\vartheta\Big|_{\beta=-h(t)}=h_t. \tag{2.40}$$

由于 h_t 不依赖于空间变量，类似于（2.31），$\text{Re}\,\vartheta|_{\beta=0}$和 $\text{Re}\,\vartheta|_{\beta=-h(t)}$可以由 $\text{Im}\,\vartheta|_{\beta=0}$ 确定，精确到一个加法常数（该常数可能依赖于时间，但不依赖于空间），如下所示：

$$\frac{\xi_t^{\text{s}}\xi_\alpha^{\text{s}}+\eta_t^{\text{s}}\eta_\alpha^{\text{s}}}{J^{\text{s}}}=-H^{\coth}\left[\frac{\psi_\alpha^{\text{s}}}{J^{\text{s}}}\right]+C_1,\qquad \frac{\xi_t^{\text{b}}\xi_\alpha^{\text{b}}+\eta_t^{\text{b}}\eta_\alpha^{\text{b}}}{J^{\text{b}}}=H^{\text{csch}}\left[\frac{\psi_\alpha^{\text{s}}}{J^{\text{s}}}\right]+C_1. \tag{2.41}$$

由于 ϑ 是一个 h 在 S_h 上定义的全纯函数，利用柯西积分定理，我们得到

$$\int_{-a+i(\epsilon-h)}^{a+i(\epsilon-h)}+\int_{a+i(\epsilon-h)}^{a-i\epsilon}+\int_{a-i\epsilon}^{-a-i\epsilon}+\int_{-a-i\epsilon}^{-a+i(\epsilon-h)}\vartheta(w)\,dw=0,\qquad a,\epsilon>0. \tag{2.42}$$

将等式两边2.42除以 $2a$ 并取极限 $a \to \infty$， $\epsilon \to 0^+$，我们得到

$$\hat{\vartheta}_{\mathbf{0}} = P_0[\vartheta(\alpha)] = P_0[\vartheta(\alpha - ih)], \tag{2.43}$$

其中在第一个等式中我们使用了（2.6）。将（2.39）和（2.40）代入（2.43），得到条带宽度的时间演化方程 S_h

$$h_t = -P_0\left[\frac{\psi^{\mathrm{s}}_\alpha}{J^{\mathrm{s}}}\right]. \tag{2.44}$$

最后，结合（2.36）、（2.37）和（2.41），我们得到保角空间中自由表面和底边界上的运动学边界条件

$$\begin{pmatrix}\xi^{\mathrm{s}}_t\\ \eta^{\mathrm{s}}_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi^{\mathrm{s}}_\alpha & -\eta^{\mathrm{s}}_\alpha\\ \eta^{\mathrm{s}}_\alpha & \xi^{\mathrm{s}}_\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-H^{\coth}\left[\frac{\psi^{\mathrm{s}}_\alpha}{J^{\mathrm{s}}}\right] + C_1\\ -\frac{\psi^{\mathrm{s}}_\alpha}{J^{\mathrm{s}}}\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\xi^{\mathrm{b}}_t\\ \eta^{\mathrm{b}}_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi^{\mathrm{b}}_\alpha\\ \eta^{\mathrm{b}}_\alpha\end{pmatrix}\left(H^{\mathrm{csch}}\left[\frac{\psi^{\mathrm{s}}_\alpha}{J^{\mathrm{s}}}\right] + C_1\right). \tag{2.45}$$

由于 ξ^{s} 和 ξ^{b} 可由 η^{s} 和 η^{b} 根据（2.25）确定，且只相差一个加法常数 x_0，因此要追踪流体区域的演化，我们只需演化$\boldsymbol{h}$、 η^{s} 和 η^{b}。比较（2.23）和（2.45），可知自由参数 x_0 与 C_1 之间满足常微分方程

$$\frac{dx_0}{dt} = P_0\left[\xi^{\mathrm{s}}_\alpha\left(-H^{\coth}\left[\frac{\psi^{\mathrm{s}}_\alpha}{J^{\mathrm{s}}}\right] + C_1\right) + \frac{\eta^{\mathrm{s}}_\alpha\psi^{\mathrm{s}}_\alpha}{J^{\mathrm{s}}}\right]. \tag{2.46}$$

因此， $x_0(t)$ 由 C_1 和 $x_0(0)$唯一确定。关于 C_1 的几种选择已在 [73]中作了详细讨论。本文中，我们选择 C_1 和 $x_0(0)$ 如下

$$C_1 = P_0\left[\xi^{\mathrm{s}}_\alpha H^{\coth}[\psi^{\mathrm{s}}_\alpha/J^{\mathrm{s}}] - \eta^{\mathrm{s}}_\alpha\psi^{\mathrm{s}}_\alpha/J^{\mathrm{s}}\right], \qquad x_0(0) = 0. \tag{2.47}$$

这确保了 $x_0(t) = 0$ 对于 $t \geqslant 0$，并免去了显式求解常微分方程（2.46）的需要。

现在，我们由（2.4）在保角空间中推导自由表面的动力学边界条件。对（2.27）中的第一个方程关于 t求导，得到

$$\varphi^{\mathrm{s}}_t = \varphi^{\mathrm{s},\mathrm{phys}}_x\xi^{\mathrm{s}}_t + \varphi^{\mathrm{s},\mathrm{phys}}_t, \tag{2.48}$$

其中 $\varphi^{\mathrm{s}}_{,x}{}^{\mathrm{phys}}$ 可表示为 Φ^{phys} 的梯度的函数，如下所示

$$\varphi^{\mathrm{s},\mathrm{phys}}_x = \Phi^{\mathrm{phys}}_x + \Phi^{\mathrm{phys}}_y\eta^{\mathrm{s},\mathrm{phys}}_{x_2}. \tag{2.49}$$

由（2.32）可知，在 $\beta = 0$处 $\left|\nabla\Phi^{\mathrm{phys}}\right|^2 = \left(\left(\varphi^{\mathrm{s}}_\alpha\right)^2 + \left(\psi^{\mathrm{s}}_\alpha\right)^2\right)/J^{\mathrm{s}}$。将（2.45）、（2.48）和（2.49）代入（2.4），可得

$$\varphi^{\mathrm{s}}_t = \underbrace{\left(\Phi^{\mathrm{phys}}_x, \Phi^{\mathrm{phys}}_y\right)\begin{pmatrix}\xi^{\mathrm{s}}_\alpha & -\eta^{\mathrm{s}}_\alpha\\ \eta^{\mathrm{s}}_\alpha & \xi^{\mathrm{s}}_\alpha\end{pmatrix}}_{\left(\varphi^{\mathrm{s}}_\alpha, -\psi^{\mathrm{s}}_\alpha\right)}\begin{pmatrix}-H^{\coth}\left[\psi^{\mathrm{s}}_\alpha/J^{\mathrm{s}}\right] + C_1\\ -\psi^{\mathrm{s}}_\alpha/J^{\mathrm{s}}\end{pmatrix} - \frac{\left(\varphi^{\mathrm{s}}_\alpha\right)^2 + \left(\psi^{\mathrm{s}}_\alpha\right)^2}{2J^{\mathrm{s}}} - g\eta^{\mathrm{s}} + \tau\kappa + C, \tag{2.50}$$

其中 κ 为平均曲率，其表达式为

$$\kappa = \frac{\xi^{\mathrm{s}}_\alpha\eta^{\mathrm{s}}_{\alpha\alpha} - \eta^{\mathrm{s}}_\alpha\xi^{\mathrm{s}}_{\alpha\alpha}}{\left(J^{\mathrm{s}}\right)^{3/2}}, \tag{2.51}$$

且 C 是任意积分常数，可以依赖时间但不依赖空间。在本文的讨论中，我们选择 C 使得 $P_0[\varphi^{\mathrm{s}}_t] = 0$。总之，（2.44）、（2.45）和（2.50）是保角空间中有限水深拟周期重力-毛细波的控制方程。

接下来， [73], 我们不再直接求解这些定义在实数线上的方程，而是将问题提升到更高维的环面上 $\mathbb{T}^d$，并计算

相应环面函数的时间演化；然后沿特征方向对环面函数求值，从而得到实数线上的准周期函数。利用定义2.2和2.3中准周期导数和希尔伯特变换算子的环面版本，我们由 $\mathbb{T}^d$ 根据（2.44）、（2.45）和（2.50）得到控制方程，

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\eta}_t^{\mathrm{s}} = \left(-H^{\coth}[\tilde{\chi}^{\mathrm{s}}] + C_1\right)\tilde{\eta}_\alpha^{\mathrm{s}} - \tilde{\xi}_\alpha^{\mathrm{s}}\tilde{\chi}^{\mathrm{s}}, \qquad \tilde{\eta}_t^{\mathrm{b}} = \left(H^{\operatorname{csch}}[\tilde{\chi}^{\mathrm{s}}] + C_1\right)\tilde{\eta}_\alpha^{\mathrm{b}}, \qquad h_t = -P_0[\tilde{\chi}^{\mathrm{s}}],\\
&\tilde{\varphi}_t^{\mathrm{s}} = P\left[\frac{\left(\tilde{\psi}_\alpha^{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(\tilde{\varphi}_\alpha^{\mathrm{s}} + \mathcal{U}\right)^2}{2\tilde{J}^{\mathrm{s}}} + \left(C_1 - H^{\coth}[\tilde{\chi}^{\mathrm{s}}]\right)\left(\tilde{\varphi}_\alpha^{\mathrm{s}} + \mathcal{U}\right) - g\tilde{\eta}^{\mathrm{s}} + \tau\tilde{\kappa}\right]\\
&\tilde{\xi}^{\mathrm{s}} = H^{\coth}[\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}] + H^{\operatorname{csch}}[\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}], \qquad \tilde{\psi}^{\mathrm{s}} = H^{\tanh}[\tilde{\varphi}^{\mathrm{s}}],\\
&\tilde{J}^{\mathrm{s}} = \left(1 + \tilde{\xi}_\alpha^{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(\tilde{\eta}_\alpha^{\mathrm{s}}\right)^2, \qquad \tilde{\chi}^{\mathrm{s}} = \frac{\tilde{\psi}_\alpha^{\mathrm{s}}}{\tilde{J}^{\mathrm{s}}},\\
&\tilde{\kappa} = \frac{\left(1 + \tilde{\xi}_\alpha^{\mathrm{s}}\right)\tilde{\eta}_{\alpha\alpha}^{\mathrm{s}} - \tilde{\eta}_\alpha^{\mathrm{s}}\tilde{\xi}_{\alpha\alpha}^{\mathrm{s}}}{(\tilde{J}^{\mathrm{s}})^{3/2}}, \qquad C_1 = P_0\left[\left(1 + \tilde{\xi}_\alpha^{\mathrm{s}}\right)H^{\coth}[\tilde{\chi}^{\mathrm{s}}] - \tilde{\eta}_\alpha^{\mathrm{s}}\tilde{\chi}^{\mathrm{s}}\right].
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

我们注意到，$\tilde{\varphi}$定义在 $\mathbb{T}^d$上，仅表示 φ的准周期部分。定义中还包含额外项 $\mathcal{U}\alpha$ （见2.28），用于计入背景流（若存在）。类似地，ξ^{s} 和 ξ^{b} 由 $\tilde{\xi}^{\mathrm{s}}$ 和 $\tilde{\xi}^{\mathrm{b}}$ 通过

$$
\xi^{\mathrm{s}}(\alpha, t) = \alpha + \tilde{\xi}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{k}\alpha, t), \qquad \xi^{\mathrm{b}}(\alpha, t) = \alpha + \tilde{\xi}^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{k}\alpha, t),
\tag{2.53}
$$

其中，$\tilde{\xi}^{\mathrm{s}}$ 由（2.52）给出，$\tilde{\xi}^{\mathrm{b}}$ 由下式给出

$$
\tilde{\xi}^{\mathrm{b}} = -H^{\operatorname{csch}}[\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}] - H^{\coth}[\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}].
\tag{2.54}
$$

根据（2.53），我们有

$$
\xi_\alpha^{\mathrm{s}}(\alpha, t) = 1 + \tilde{\xi}_\alpha^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{k}\alpha, t), \qquad \xi_\alpha^{\mathrm{b}}(\alpha, t) = 1 + \tilde{\xi}_\alpha^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{k}\alpha, t),
\tag{2.55}
$$

˜这就是 $(1+\xi_\alpha^{\mathrm{s}})$ 在（2.52）中的多个位置出现的原因。我们还注意到，（$H^{\coth}$、H^{csch} 和 $H^{\tanh}$ ）中的算子随2.52中的$\boldsymbol{h}(t)$一起随时间变化。

注 2.4. 修改 [73], 的分析可以证明，若 ζ^{s} 和 ζ^{b} 是单射，则$\eta^{\mathrm{s}、\mathrm{phys}}$ 和 $\eta^{\mathrm{b}、\mathrm{phys}}$ 也都是具有相同准周期的准周期函数。此外，相应的环面函数 $\tilde{\eta}^{\mathrm{s}、\mathrm{phys}}$ 和 $\tilde{\eta}^{\mathrm{b}、\mathrm{phys}}$ 可由 $\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}$ 和 $\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}$ 通过下式得到

$$
\tilde{\eta}^{\mathrm{s,phys}}(\boldsymbol{x}, t) = \tilde{\eta}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x}, t), t), \qquad \tilde{\eta}^{\mathrm{b,phys}}(\boldsymbol{x}, t) = \tilde{\eta}^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{x}, t), t),
\tag{2.56}
$$

其中 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{s}}$和 $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{b}}$ 满足

$$
\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x}, t) + \tilde{\xi}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x}, t), t) = 0, \qquad \tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{x}, t) + \tilde{\xi}^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{x}, t), t) = 0.
\tag{2.57}
$$

在数值计算中，对于任意给定的 t，可以将（2.56）表述为一个非线性最小二乘问题，并使用 Levenberg-Marquardt 方法求解 [71], ，相关讨论见附录 A。

注 2.5。 由于底边界是静止的，质量守恒要求平均水面高度（记作

$$
\mu = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\tilde{\eta}^{\mathrm{s,phys}}\,dx_1\cdots dx_d = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}(1 + \tilde{\xi}_\alpha^{\mathrm{s}})\,d\alpha_1\cdots d\alpha_d,
\tag{2.58}
$$

是一个与时间无关的常数。事实上，对 $\mu_t = 0$ 的第二个公式˜(2.58)在积分号下求导，对项 $\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}\xi_{\alpha t}^{\mathrm{s}}$ 关于 α分部积分，并利用˜(2.38)，同时注意到，由于 ($\xi_\alpha^{\mathrm{s}} = 1 + \xi_\alpha^{\mathrm{s}}$ 2.53)，。通常假设 $\mu = 0$，不过对于

行波，先假设 $\hat{\eta}_{\mathbf{0}}^{\mathrm{s}}=0$ 计算该波，然后在最后调整 $\hat{\eta}_{\mathbf{0}}^{\mathrm{s}}$ 和 $\hat{\eta}_{\mathbf{0}}^{\mathrm{b}}$ 以达到 $\mu=0$，这样做更方便。

注2.6. 控制方程（2.52）在流体区域的底边界为平坦时仍然成立：$\eta^{\mathrm{b},\,\mathrm{phys}}(x)=-h^{\mathrm{phys}}$。在通常情况下，$\mu=0$，$h^{\mathrm{phys}}$ 是物理空间中流体的平均水深。否则，平均水深为 $\mu+h^{\mathrm{phys}}$。由（2.24），可得

$$h^{\mathrm{phys}}=-\eta^{\mathrm{b}}=-\hat{\eta}_{\mathbf{0}}^{\mathrm{b}}=h-\hat{\eta}_{\mathbf{0}}^{\mathrm{s}}, \tag{2.59}$$

这是一个与 α 和 t 无关的常数，尽管h 和 $\hat{\eta}_{\mathbf{0}}^{\mathrm{s}}$ 随时间变化。此外，ξ^{s}与 η^{s} 的关系为

$$\xi^{\mathrm{s}}=\alpha+H^{\coth}[\eta^{\mathrm{s}}]. \tag{2.60}$$

因此，当底边界为平坦时，只需演化 $\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}$、$\tilde{\varphi}^{\mathrm{s}}$ 和h。

注2.7. 尽管我们在准周期情形下推导了（2.52），但如果令 $d=1$和 $\boldsymbol{k}=(1)$，这些方程对周期问题仍然成立。要得到 $\mathbb{T}$上的控制方程，只需在（2.52）中用相应的周期希尔伯特变换替换准周期希尔伯特变换，这些周期希尔伯特变换可通过在（2.10）中将 $\langle \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\rangle$ 替换为 j （2.10）中进行相应替换。若$d>1$，则可假设（2.52）中的每个环面函数都与 α_2、.....、 α_d无关，从而将周期问题嵌入准周期问题。

3. 准周期行波

3.1. **准周期行波的控制方程**。对于行波，系统应当是平移不变的，因此我们假设底边界是平坦的。根据备注2.6，在这种情况下，我们只需考虑表面变量。因此，为简化记号，本节中我们省略这些变量的上标“s”。此外，如第 2.1 节所述，我们将讨论限定在实验室坐标系中，并假设不存在背景流。

由于底边界是平坦的，ξ、η 与 φ、ψ 之间满足希尔伯特变换关系

$$\xi=\alpha+H^{\coth}[\eta],\qquad \xi_\alpha=1+H^{\coth}[\eta_\alpha],\qquad \varphi=H^{\coth}[\psi],\qquad \varphi_\alpha=H^{\coth}[\psi_\alpha]. \tag{3.1}$$

我们假设该波以速度 c从左向右行进；因此，有

$$\eta^{\mathrm{phys}}(x,t)=\eta_0^{\mathrm{phys}}(x-ct),\qquad \varphi^{\mathrm{phys}}(x,t)=\varphi_0^{\mathrm{phys}}(x-ct). \tag{3.2}$$

分别对 (3.2) 两边关于 x 和 t 求导，可知行波解满足

$$\eta_t^{\mathrm{phys}}=-c\eta_x^{\mathrm{phys}},\qquad \varphi_t^{\mathrm{phys}}=-c\varphi_x^{\mathrm{phys}}. \tag{3.3}$$

将 (2.19) 的第二个方程代入 (3.3) 的第一个方程，并将方程两边乘以 ξ_α^{s}，得到

$$\eta_t\xi_\alpha-\xi_t\eta_\alpha=-c\eta_\alpha. \tag{3.4}$$

比较（3.4）和（2.38），我们得出行波解满足

$$\psi_\alpha=c\eta_\alpha \tag{3.5}$$

在保角空间中。对 $H^{\coth}$ 的两边3.5应用希尔伯特变换，我们得到

$$\varphi_\alpha=c(\xi_\alpha-1). \tag{3.6}$$

将 φ^{phys} 的行波条件代入3.3，再代入2.48，并利用2.49将$\varphi_x^{\mathrm{phys}}$ 表示为 Φ^{phys}的梯度，我们得到

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \left(\Phi_x^{\mathrm{phys}} + \Phi_y^{\mathrm{phys}}\eta_x^{\mathrm{phys}}\right)(\xi_t - c) = \frac{\varphi_\alpha}{\xi_\alpha}\left(\xi_\alpha\left(-H^{\coth}\left[\frac{\psi_\alpha}{J}\right] + C_1\right) + \eta_\alpha\frac{\psi_\alpha}{J} - c\right)\\ &= \frac{\varphi_\alpha}{\xi_\alpha}\left(\xi_\alpha\left(-H^{\coth}\left[\frac{\psi_\alpha}{J}\right] + C_1\right) + \frac{c\left(\eta_\alpha\right)^2}{J} - c\right) = \varphi_\alpha\left(-H^{\coth}\left[\frac{\psi_\alpha}{J}\right] + C_1 - \frac{c\xi_\alpha}{J}\right).\end{aligned} \tag{3.7}$$

这里在第二个等式中，我们使用（2.19）中的第一个方程，将 η_x^{phys} 改写为 $\eta_\alpha^{\mathrm{s}}/\xi_\alpha^{\mathrm{s}}$ ，并分别利用（2.34）和（2.45）代入 Φ^{phys} 和 ξ_t 的梯度。在第三个等式中，我们利用（3.5）将 ψ_α 替换为 $c\eta_\alpha$。将（3.5）和（3.7）代入（2.50），得到

$$\frac{c}{J}\left(\varphi_\alpha\xi_\alpha + \psi_\alpha\eta_\alpha\right) - \frac{1}{2J}\left((\varphi_\alpha)^2 + (\psi_\alpha)^2\right) - g\eta + \tau\kappa + C = 0. \tag{3.8}$$

利用（3.5）和（3.6）分别将 φ_α 和 ψ_α 表示为 ξ_α 和 η_α的函数，我们得到行波的控制方程

$$P\left[\frac{c^2}{2J} + g\eta - \tau\kappa\right] = 0, \tag{3.9}$$

其中，我们在（3.8）中选择积分常数 C，使得 P_0 作用于（3.8）左端时结果为零。由于（3.9）与时间无关，（3.9）的解可视为行波的初始条件。由（3.1）和（2.51）可知， J 和 κ 由 η确定；因此，（3.9）中的未知数为 τ、 c 和 η。尽管我们主要关注 η 为准周期的情形，但当η 为周期时，控制方程（3.9）仍然成立。由于投影算子的作用，将 η 修改一个常数不会影响（3.9）；因此，我们假设 $P_0[\eta] = 0$。本文聚焦于具有偶对称的行波

$$\eta(\alpha) = \eta(-\alpha). \tag{3.10}$$

我们利用 ξ 由 η 根据（3.1）计算得出 ξ 是奇函数。文献 [30,67,78] 研究了周期情形下的非对称行波。

与初值问题一样，我们先求解 $\tilde{\eta}$ 在 $\mathbb{T}^d$ 上的解，然后根据 η 利用 $\tilde{\eta}$（2.21）重构。环面上的行波控制方程为

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}[\tau, b, \tilde{\eta}] = P\left[\frac{b}{2\tilde{J}} + g\tilde{\eta} - \tau\tilde{\kappa}\right] = 0,\\ &\tilde{\xi} = H^{\coth}[\tilde{\eta}], \qquad \tilde{J} = \left(1 + \tilde{\xi}_\alpha\right)^2 + \tilde{\eta}_\alpha^2, \qquad \tilde{\kappa} = \frac{\left(1 + \tilde{\xi}_\alpha\right)\tilde{\eta}_{\alpha\alpha} - \tilde{\eta}_\alpha\tilde{\xi}_{\alpha\alpha}}{\tilde{J}^{3/2}},\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中 $b = c^2$ 和 $\mathcal{R}$ 称为残差函数。我们将保角空间中的条带宽度$\boldsymbol{h}$ 视为固定参数，并在 $\mathcal{R}$的参数列表中省略它；见下文注释3.1 。在零解 $\tilde{\eta} = 0$附近对（3.11）线性化，得到

$$bH^{\coth}[\delta\tilde{\eta}_\alpha] - g\delta\tilde{\eta} + \tau\delta\tilde{\eta}_{\alpha\alpha} = 0, \tag{3.12}$$

其中 $\delta\tilde{\eta}$ 表示 $\tilde{\eta}$的变分。将 $\delta\tilde{\eta}$ 在（3.12）中表示为傅里叶级数，可得线性化问题的色散关系

$$b\coth(\langle \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle h)\langle \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle - g - \tau(\langle \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\rangle)^2 = 0, \qquad \boldsymbol{j} \in Z^d. \tag{3.13}$$

由于 $\boldsymbol{k}$ 的各项在线性空间 $\mathbb{Z}$上线性无关，给定 b 和 τ，至多存在两个线性无关的向量 $\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2 \in \mathbb{Z}^d$ 满足色散关系 [13]。为简单起见，我们考虑 $d = 2$的基本情形；因此， η 具有两个准周期，且 $\tilde{\eta}$ 定义为

在 $\mathbb{T}^2$ 上。不失一般性，我们还假设 $\boldsymbol{j}_1 = (1,0)^T, \boldsymbol{j}_2 = (0,1)^T$ 和 $\boldsymbol{k} = (1,k)^T$，其中 k 是一个正的无理数。

总而言之，我们研究如下形式的准周期行波

$$\eta(\alpha) = \tilde{\eta}(\alpha, k\alpha), \qquad \tilde{\eta}(\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}} \hat{\eta}_{j_1,j_2} e^{i(j_1\alpha_1+j_2\alpha_2)}. \tag{3.14}$$

我们还假设，$\tilde{\eta}$ 在保角空间中的 $\mathbb{T}^2$ 是偶函数且均值为零，这与对 η的假设一致。因此，$\tilde{\eta}$ 的傅里叶系数满足

$$\hat{\eta}_{0,0} = 0, \qquad \hat{\eta}_{j_1,j_2} = \hat{\eta}_{-j_1,-j_2} \in \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

如果希望获得物理空间中均值为零的解，请参阅下面的注 3.1 。在假设（3.14）和（3.15）下，我们可以将准周期行波问题置于一个分岔问题的框架中，其核为二维，并由线性化问题（3.12）的解张成：

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{\text{lin}}(\alpha_1,\alpha_2) &= \hat{\eta}_{1,0}(e^{i\alpha_1}+e^{-i\alpha_1}) + \hat{\eta}_{0,1}(e^{i\alpha_2}+e^{-i\alpha_2}), \\ b_{\text{lin}} = c_{\text{lin}}^2 &= \frac{g(k^2-1)}{k(k\coth(h)-\coth(kh))}, \qquad \tau_{\text{lin}} = \frac{g(k\coth(kh)-\coth(h))}{k(k\coth(h)-\coth(kh))}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

我们将 $\hat{}\eta_{1,0}$ 和 $\hat{}\eta_{0,1}$ 称为基傅里叶系数，并将相应的傅里叶模态$e^{\pm i\alpha_1}$ $e^{\pm i\alpha_2}$ 称为基傅里叶模态。非线性解可以看作从零振幅解分岔而来。我们通常将基傅里叶系数选作分岔参数，并将其固定为非零值，以确保所得到的解确实是准周期的。在有限水深情况下，h 是第三个参数。

如 [74], 所示，大振幅准周期行波解通常可以通过搜索有限振幅周期行波的次级分岔来找到。围绕周期解对（3.11）进行线性化，得到

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{R} &= P\left[\frac{\delta b}{2\tilde{J}} - \frac{1}{2\tilde{J}^2} b\delta\tilde{J} + g\delta\tilde{\eta} - \delta\tau\tilde{\kappa} - \tau\delta\tilde{\kappa}\right], \\ \delta\tilde{\xi}_\alpha &= H^{\coth}[\delta\tilde{\eta}_\alpha], \qquad \delta\tilde{J} = 2\left((1+\tilde{\xi}_\alpha)\delta\tilde{\xi}_\alpha + \tilde{\eta}_\alpha\delta\tilde{\eta}_\alpha\right), \\ \delta\tilde{\kappa} &= -\frac{3}{2}\tilde{\kappa}\frac{\delta\tilde{J}}{\tilde{J}} + \frac{1}{\tilde{J}^{3/2}}\left(\delta\tilde{\xi}_\alpha\tilde{\eta}_{\alpha\alpha} + (1+\tilde{\xi}_\alpha)\delta\tilde{\eta}_{\alpha\alpha} - \delta\tilde{\eta}_\alpha\tilde{\xi}_{\alpha\alpha} - \tilde{\eta}_\alpha\delta\tilde{\xi}_{\alpha\alpha}\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

令 q 表示三元组 $(\tau,\ b,\ \tilde{\eta})$ 并令 $\mathfrak{q}^{\text{per}}(s)$ 表示嵌入准周期框架中的一个单参数周期行波族，其中假设 $\tilde{\eta}(\alpha_1,\ \alpha_2)$ 与 α_2无关。这里 s 是振幅参数（例如$\hat{}\eta_{1,\ 0}$），为简单起见，我们固定 τ，并令保角空间中的条带宽度h 与 s无关。该族中的每个解 $q = \mathfrak{q}^{\text{per}}(s)$ 都满足 $\mathcal{R}(q) = 0$。在 [74], 中，提出了一种算法，利用二次收敛的根区间夹逼技术来定位分岔点，[12] 以找到带符号的最小奇异值的零点

$$\chi(s) = \operatorname{sgn}\left(\det\left(\mathcal{J}^{\text{qua}}(s)\right)\right)\sigma_{\min}\left(\mathcal{J}^{\text{qua}}(s)\right). \tag{3.18}$$

这里，$\mathcal{J}^{\text{qua}}(s)$ 是受限雅可比矩阵的傅里叶截断，该矩阵由线性化（3.17）得到，且仅应用于以下形式的准周期扰动方向：$\delta q = (0,\ 0,\ \delta\tilde{\eta}^{\text{qua}})$，其中 $\delta\tilde{\eta}^{\text{qua}}$ 具有 2D 傅里叶模态 $\widehat{\delta\tilde{\eta}}^{\text{qua}}_{j_1\ j_2}$。当且仅当 $j_2 \in \{1$时，所有这些模态均为零；$-1\}$。这一构造基于周期势上的布洛赫-傅里叶扰动理论 [39]。在 $\chi(s)$的零点处，$\mathcal{J}$qua(s) 具有一个核，该核给出一个分岔方向 $\delta\tilde{\eta}^{\text{qua}}$，使我们能够切换

从主周期分支切换到行波的次级准周期分支。我们将 $\tilde{\eta}^{\mathrm{per}} + \epsilon\delta\tilde{\eta}^{\mathrm{qua}}$（其中 ϵ 是通过经验选取的）用作该次级分支上解的初始猜测，然后利用数值延拓追踪该分支，使其超出围绕主分支进行线性化所适用的范围。关于无限水深情形下分岔问题的分析与计算，详见 [74]。

注 3.1. 通过令 $\hat{\eta}_{0,0} = 0$ 并固定保角空间中的条带宽度 h，我们简化了利用保角映射公式计算准周期行波的过程。根据 (2.59)，这会使物理空间中的底边界垂直位置为 $\eta^{\mathrm{b}} = -\mathrm{h}^{\mathrm{phys}} = -\mathrm{h}$。然而，当 $\hat{\eta}_{0,0} = 0$ 时，(2.58) 中的平均水面高度 μ 通常不为零，因此流体实际水深为 $\mu + \mathrm{h}$。若有需要，在计算出 $\hat{\eta}_{0,0} = 0$ 时的解后，可以通过 (2.58) 计算 μ，并在物理空间中将自由表面和底边界的垂直位置均移动 $-\mu$。这不会改变参数 h，因此仍然是一个行波。计算新波的 μ 和 $\mathrm{h}^{\mathrm{phys}}$ 时，前者将为零，后者将为流体实际水深。这个平移后的解满足

$$\hat{\eta}_{0,0} = -P_0[(P[\tilde{\eta}])(1+\tilde{\xi}_\alpha)]. \tag{3.19}$$

另一种选择是指定 $\mu = 0$、$\mathrm{h}^{\mathrm{phys}}$、$\hat{\eta}_{1,0}$ 和 $\hat{\eta}_{0,1}$，并使用 Levenberg–Marquardt 求解器求解 $\hat{\eta}_{0,0}$ 和 h，以及其余的傅里叶模态 $\hat{\eta}_{j_1,j_2}$。这需要将 (2.59) 中的 $\mathrm{h} = \mathrm{h}^{\mathrm{phys}} + \hat{\eta}_{0,0}$ 以及 (3.19) 作为附加约束条件纳入 (3.11)。

3.2. **准周期行波的弱非线性近似**。 虽然本研究主要关注计算有限水深下完全非线性、随时间变化的行进水波方程的准周期解，但考察小振幅准周期行波的弱非线性近似中如何出现小除数，也很有启发性。在以往的研究中，为了证明时间准周期水波的存在，必须运用纳什-莫泽理论谨慎处理这类小除数 [35, 51] 以证明时间准周期水波的存在 [6–9, 26]。此处我们关注空间准周期性。

如第3.1节所述，从零解分岔而来的行波解构成一个三参数族，其分岔参数为$\hat{\eta}_{1,0}$、$\hat{\eta}_{0,1}$和h。在弱非线性模型中，我们将h 视为常数，并令这两个傅里叶系数取振幅参数ϵ的固定非零倍数，目标是用它们表示b、τ 以及 $\tilde{\eta}$ 的其他傅里叶系数。考虑 b、τ 和 $\tilde{\eta}$的如下渐近展开

$$\begin{aligned} b &= b^{(0)} + \epsilon b^{(1)} + \epsilon^2 b^{(2)} + \epsilon^3 b^{(3)} + O(\epsilon^4), \\ \tau &= \tau^{(0)} + \epsilon\tau^{(1)} + \epsilon^2\tau^{(2)} + \epsilon^3\tau^{(3)} + O(\epsilon^4), \\ \tilde{\eta} &= \epsilon\tilde{\eta}^{(1)} + \epsilon^2\tilde{\eta}^{(2)} + \epsilon^3\tilde{\eta}^{(3)} + O(\epsilon^4). \end{aligned} \tag{3.20}$$

将（3.20）代入（3.11），并消去 ϵ^n 关于 $n = 0$、1、2 的系数，可得

$$\begin{aligned} &O(1): P\left[\tfrac{1}{2}b^{(0)}\right] = 0, \\ &O(\epsilon): P\left[\tfrac{1}{2}b^{(1)} + g\tilde{\eta}^{(1)} - b^{(0)}H^{\coth}\left[\tilde{\eta}_\alpha^{(1)}\right] - \tau^{(0)}\tilde{\eta}_{\alpha\alpha}^{(1)}\right] = 0, \\ &O(\epsilon^2): P\Big[\tfrac{1}{2}b^{(2)} + g\tilde{\eta}^{(2)} - b^{(0)}H^{\coth}\left[\tilde{\eta}_\alpha^{(2)}\right] - \tau^{(0)}\tilde{\eta}_{\alpha\alpha}^{(2)} - b^{(1)}H^{\coth}\left[\tilde{\eta}_\alpha^{(1)}\right] - \tau^{(1)}\tilde{\eta}_{\alpha\alpha}^{(1)} \\ &\qquad + b^{(0)}\left(\tfrac{3}{2}\left(H^{\coth}\left[\tilde{\eta}_\alpha^{(1)}\right]\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(\tilde{\eta}_\alpha^{(1)}\right)^2\right) + \tau^{(0)}\left(2H^{\coth}\left[\tilde{\eta}_\alpha^{(1)}\right]\tilde{\eta}_{\alpha\alpha}^{(1)} + H^{\coth}\left[\tilde{\eta}_{\alpha\alpha}^{(1)}\right]\tilde{\eta}_\alpha^{(1)}\right)\Big] = 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

由于投影使（3.21）中的常数项消失，第二个方程本质上与线性化（3.12）相同；因此，我们有

$$\tilde\eta^{(1)} = \tilde\eta_{\rm lin} = \hat\eta_{1,0}e^{i\alpha_1} + \hat\eta_{0,1}e^{i\alpha_2} + c.c., \qquad b^{(0)} = b_{\rm lin}, \qquad \tau^{(0)} = \tau_{\rm lin}. \tag{3.22}$$

利用投影算子的性质以及 $P_0[\tilde\eta] = 0$这一假设，我们将（3.21）中的第三个方程改写为

$$\begin{aligned}&\underbrace{g\tilde\eta^{(2)} - b^{(0)}H^{\coth}\big[\tilde\eta^{(2)}_\alpha\big] - \tau^{(0)}\tilde\eta^{(2)}_{\alpha\alpha}}_{A^{(2)}}\ \underbrace{-b^{(1)}H^{\coth}\big[\tilde\eta^{(1)}_\alpha\big] - \tau^{(1)}\tilde\eta^{(1)}_{\alpha\alpha}}_{B^{(2)}}\\ &= \underbrace{P\left[b^{(0)}\left(-\frac{3}{2}\left(H^{\coth}\big[\tilde\eta^{(1)}_\alpha\big]\right)^2 + \frac{1}{2}\big(\tilde\eta^{(1)}_\alpha\big)^2\right) - \tau^{(0)}\left(2H^{\coth}\big[\tilde\eta^{(1)}_\alpha\big]\tilde\eta^{(1)}_{\alpha\alpha} + H^{\coth}\big[\tilde\eta^{(1)}_{\alpha\alpha}\big]\tilde\eta^{(1)}_\alpha\right)\right]}_{C^{(2)}}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

将 $\tilde\eta^{(1)}$、 $\tilde b^{(0)}$ 和 $\tilde\tau^{(0)}$ 代入 $C^{(2)}$，并利用（3.22），得到

$$C^{(2)} = \hat C^{(2)}_{2,0}e^{i(2\alpha_1)} + \hat C^{(2)}_{0,2}e^{i(2\alpha_2)} + \hat C^{(2)}_{1,1}e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} + \hat C^{(2)}_{1,-1}e^{i(\alpha_1-\alpha_2)} + c.c., \tag{3.24}$$

其中， $C^{(2)}$ 的傅里叶系数为

$$\begin{aligned}\hat C^{(2)}_{2,0} &= g\hat\eta^2_{1,0}\frac{3(k^2+1)\coth^2(h) - 6k\coth(kh)\coth(h) + k^2 - 1}{2k(\coth(kh) - k\coth(h))},\\ \hat C^{(2)}_{0,2} &= -gk\hat\eta^2_{0,1}\frac{3(k^2+1)\coth^2(kh) - 6k\coth(kh)\coth(h) - k^2 + 1}{2(\coth(kh) - k\coth(h))},\\ \hat C^{(2)}_{1,1} &= -g\hat\eta_{1,0}\hat\eta_{0,1}\frac{(k^2+2k)\coth^2(kh) - (2k+1)\coth^2(h) + (-k^2+1)\coth(kh)\coth(h) - k^2 + 1}{\coth(kh) - k\coth(h)},\\ \hat C^{(2)}_{1,-1} &= g\hat\eta_{1,0}\hat\eta_{0,1}\frac{(k^2-2k)\coth^2(kh) + (2k-1)\coth^2(h) + (k^2-1)\coth(kh)\coth(h) - k^2 + 1}{\coth(kh) - k\coth(h)}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

我们注意到， $A^{(2)}$ 关于 $\tilde\eta^{(2)}$ 是线性的，而 $A^{(2)}$ 的傅里叶系数可表示为

$$\hat A^{(2)}_{j_1,j_2} = \hat S_{j_1,j_2}\hat\eta^{(2)}_{j_1,j_2}, \tag{3.26}$$

ˆ其中，符号$S_{j_1,\ j_2}$定义为

$$\begin{aligned}\hat S_{j_1,j_2} &= g - b^{(0)}\coth((j_1+kj_2)h)(j_1+kj_2) + \tau^{(0)}(j_1+kj_2)^2\\ &= \tfrac{g}{k}\left(k + \tfrac{k^2-1}{\coth(kh)-k\coth(h)}\coth((j_1+kj_2)h)(j_1+kj_2) + \tfrac{\coth(h)-k\coth(kh)}{\coth(kh)-k\coth(h)}(j_1+kj_2)^2\right).\end{aligned} \tag{3.27}$$

根据定义，ˆ$S_{\pm1,\ 0}$和 ˆ$S_{0,\ \pm1}$均为零，因此我们知道 ˆ$A^{(2)}_{\pm1,\ 0} = $ˆ$A^{(2)}_{0\ ,\ \pm1} = 0$。我们还注意到，$B^{(2)}$ 关于 $\tilde\eta^{(1)}$ 呈线性关系，其傅里叶系数为

$$\hat B^{(2)}_{j_1,j_2} = \hat Q^{(1)}_{j_1,j_2}\hat\eta^{(1)}_{j_1,j_2}, \qquad \hat Q^{(n)}_{j_1,j_2} = -b^{(n)}\coth((j_1+kj_2)h)(j_1+kj_2) + \tau^{(n)}(j_1+kj_2)^2, \tag{3.28}$$

其中 $(j_1,\ j_2) = (\pm1,\ 0), (0,\ \pm1)$ 根据（3.22）。结合（3.25）、（3.26）和（3.28），我们得到

$$b^{(1)} = \tau^{(1)} = 0, \qquad \hat\eta^{(2)}_{j_1,j_2} = \begin{cases}\frac{C^{(2)}_{j_1,j_2}}{\hat S_{j_1,j_2}}, & |j_1| + |j_2| = 2,\\ 0, & |j_1| + |j_2| \neq 2.\end{cases} \tag{3.29}$$

在深水情况下，通过令h 趋于无穷大，可以得到准周期行波的渐近展开。在这种情况下，$\tilde\eta^{(1)}$、 $b^{(0)}$ 和 $\tau^{(0)}$ 的表达式为

$$\tilde\eta^{(1)} = \hat\eta_{1,0}e^{i\alpha_1} + \hat\eta_{0,1}e^{i\alpha_2} + c.c., \qquad b^{(0)} = g + \frac{g}{k}, \qquad \tau^{(0)} = \frac{g}{k} \tag{3.30}$$

而 $\tilde{\eta}^{(2)}$、 $b^{(1)}$ 和 $\tau^{(1)}$ 的表达式为

$$\tilde{\eta}^{(2)} = \hat{\eta}^{(2)}_{2,0}e^{i(2\alpha_1)} + \hat{\eta}^{(2)}_{0,2}e^{i(2\alpha_2)} + \hat{\eta}^{(2)}_{1,1}e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} + \hat{\eta}^{(2)}_{1,-1}e^{i(\alpha_1-\alpha_2)} + c.c., \qquad b^{(1)} = \tau^{(1)} = 0,$$

$$\begin{aligned} \hat{\eta}^{(2)}_{2,0} &= -g\hat{\eta}^2_{1,0}\frac{(2k-1)/k}{\hat{S}_{2,0}}, & \hat{\eta}^{(2)}_{0,2} &= g\hat{\eta}^2_{0,1}\frac{k(k-2)}{\hat{S}_{0,2}}, \\ \hat{\eta}^{(2)}_{1,1} &= -g\hat{\eta}_{1,0}\hat{\eta}_{0,1}\frac{(k+1)}{\hat{S}_{1,1}}, & \hat{\eta}^{(2)}_{1,-1} &= -g\hat{\eta}_{1,0}\hat{\eta}_{0,1}\frac{(k+1)}{\hat{S}_{1,-1}}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

其中

$$\hat{S}_{j_1,j_2} = \frac{g}{k}(|j_1 + kj_2| - k)(|j_1 + kj_2| - 1). \tag{3.32}$$

尽管我们在弱非线性模型中只推导到二阶，但仍可通过归纳法继续计算更高阶项。假设我们已得到$n-1$ 的 $\tilde{\eta}$ 阶项，以及 $n-2$ 的 b 阶项，其中 τ。消去（3.11）中的 ϵ^n 系数，可得

$$g\tilde{\eta}^{(n)} - b^{(0)}H^{\coth}\left[\tilde{\eta}^{(n)}_{\alpha}\right] - \tau^{(0)}\tilde{\eta}^{(n)}_{\alpha\alpha} - b^{(n-1)}H^{\coth}\left[\tilde{\eta}^{(1)}_{\alpha}\right] - \tau^{(n-1)}\tilde{\eta}^{(1)}_{\alpha\alpha} = C^{(n)}, \tag{3.33}$$

其中， $C^{(n)}$ 取决于 $\{b^{(j)}\}_{0\leqslant j\leqslant n-2}$, $\{\tau^{(j)}\}_{0\leqslant j\leqslant n-2}$ 和 $\{\tilde{\eta}^{(j)}\}_{0\leqslant j\leqslant n-1}$。比较上述方程两边的傅里叶系数，可得

$$\hat{S}_{j_1,j_2}\hat{\eta}^{(n)}_{j_1,j_2} + \hat{Q}^{(n-1)}_{j_1,j_2}\hat{\eta}^{(1)}_{j_1,j_2} = \hat{C}^{(n)}_{j_1,j_2}, \tag{3.34}$$

其中$\hat{S}_{j_1,\ j_2}$ 以及$\hat{Q}^{(n-1)}_{j_1\ j_2}$，分别由（3.27）和（3.28）给出。最终，我们可以将$b^{(n-1)}$， $\tau^{(n-1)}$ 以及 $\tilde{\eta}^{(n)}$ 的傅里叶系数表示如下：

$$\begin{aligned} \hat{\eta}^{(n)}_{j_1,j_2} &= \frac{\hat{C}^{(n)}_{j_1,j_2}}{\hat{S}_{j_1,j_2}}, & (j_1,j_2) &\neq (\pm1,0),\,(0,\pm1), \\ b^{(n-1)} &= \frac{\frac{\hat{C}^{(n)}_{0,1}}{\hat{\eta}_{0,1}} - k^2\frac{\hat{C}^{(n)}_{1,0}}{\hat{\eta}_{1,0}}}{k(k\coth(h) - \coth(kh))}, & \tau^{(n-1)} &= \frac{\coth(h)\frac{\hat{C}^{(n)}_{0,1}}{\hat{\eta}_{0,1}} - k\coth(kh)\frac{\hat{C}^{(n)}_{1,0}}{\hat{\eta}_{1,0}}}{k(k\coth(h) - \coth(kh))}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

注意到， $\tilde{\eta}^{(n)}$ 的傅里叶系数是通过除以 $\hat{S}_{j_1,j_2}$ 得到的，其中 $(j_1,j_2)\neq(\pm1,0),(0,\pm1)$。如果 $\hat{S}_{j_1,j_2}$ 可以任意趋近于零，相应的项 $\hat{\eta}^{(n)}_{j_1},_{j_2}$ 就可能被大幅放大，从而令人质疑展开式（3.20）的性质。这被称为小除数问题。在深水情形下，从（3.32）可以清楚看出，某些 $\hat{S}_{j_1,j_2}$ 会随着 $|j_1|$, $|j_2|$ 无界增大而趋于零。推测起来，如果 k 足够无理并满足丢番图条件 [44]，那么（3.20）可能成为一个渐近级数

$$|k - j_1/j_2| > C|j_2|^{-\nu}, \qquad j_1\in\mathbb{Z},\ j_2\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \tag{3.36}$$

其中 C 是一个正常数，且 $\nu > 2$。不过，也可能只有当 ϵ 足够小时，精确的数学解才存在，而这些取值构成一个完全不连通的类康托尔集 [35]，，即使假设（3.36）成立也是如此。要解决这些问题，还需要开展更多研究。

有限水深流体的情况则更加复杂，因为 $\hat{S}_{j_1,\ j_2}$ 中的表达式涉及双曲余切函数。不过，这个公式又变得

在浅水情况下更为简单，此时 h 很小。将 $\coth(h)$ 和 $\coth(kh)$在（3.27）中关于 $h = 0$进行洛朗展开，得到

$$\hat{S}_{j_1,j_2} = \frac{gh^4}{45}(|j_1 + kj_2|^2 - k^2)(|j_1 + kj_2|^2 - 1) + O(h^6). \tag{3.37}$$

我们注意到，$\hat{S}_{j_1,\ j_2}$由于因子h^4在（3.37）中，可能非常小。因此，在浅水区，从零振幅解分岔出的准周期行波的振幅必定很小；若弱非线性理论要能预测其行为，则 ϵ 至多为 $O(h^4)$。

4. 数值方法与结果

与上文第3 节一样，我们将讨论重点放在具有两个准周期的准周期函数上。所有计算均针对 $\mathbb{T}^2$上的环面函数进行；一维准周期函数将根据式（2.5）由环面函数重构。设 $f(\alpha)$ 为具有两个准周期的准周期函数，并令 f 表示 $\mathbb{T}^2$上的相应周期函数，

$$f(\alpha) = \tilde{f}(\alpha, k\alpha), \qquad \tilde{f}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}} \hat{f}_{j_1,j_2} e^{i(j_1\alpha_1 + j_2\alpha_2)}, \qquad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{T}^2. \tag{4.1}$$

遵循 [72,73]，，我们采用伪谱方法，并用两种方式表示 f：

(1) 通过环面 $\mathbb{T}^2$上均匀 $M_1 \times M_2$ 网格中的 $\tilde{f}$值，

$$\tilde{f}_{m_1,m_2} = \tilde{f}(2\pi m_1/M_1\ , 2\pi m_2/M_2), \qquad 0 \leqslant m_1 < M_1\ , 0 \leqslant m_2 < M_2. \tag{4.2}$$

(2) 通过 f的截断二维傅里叶级数，其傅里叶系数为

$$\hat{f}_{j_1,j_2} = \frac{1}{M_2} \sum_{m_2=0}^{M_2-1} \left(\frac{1}{M_1} \sum_{m_1=0}^{M_1-1} \tilde{f}_{m_1,m_2} e^{-2\pi i j_1 m_1/M_1} \right) e^{-2\pi i j_2 m_2/M_2}, \tag{4.3}$$

其中 $0 \leqslant j_1 \leqslant M_1/2, -M_2/2 < j_2 \leqslant M_2/2$。

我们使用二维 FFTW 库的“r2c”和“c2r”版本，在这两种形式之间进行快速转换。在 (2.52) 和 (3.11) 中，乘积、幂和商均在网格上逐点计算，而导数和希尔伯特变换则根据定义 2.2和 2.3在傅里叶空间中计算。本文中，我们对所有数值$k = 1/\sqrt{2}$例子均采用此设置。

4.1. **有限水深空间准周期波的时间演化**。 为计算空间准周期波的时间演化，我们在 $\mathbb{T}^2$ 上对 (2.52) 进行离散化，并采用 Dormand 和 Prince 的五阶显式龙格–库塔方法 [31,73]。水波的初始条件以物理空间中的形式给出，这在实际应用中更为自然；我们使用附录 A中描述的方法计算保角映射，将初始条件转换到保角空间。下文讨论的数值例子均为重力波，但我们的数值方法也适用于表面张力非零的情况。

图 2展示了一个自由表面波的时间演化过程：该波初始时为平面，并在背景流和准周期底边界的作用下发展出准周期动力学。在物理空间中，底边界参数化为

$$\eta^{\mathrm{b,phys}}(x) = -1 + 0.2\cos(x) + 0.2\cos(x/\sqrt{2}) \tag{4.4}$$

以及式（2.28）中的背景流平均速度为 $\mathcal{U} = 1$。在计算中，我们采用$M_1 = M_2 = 512$ ，并计算波从 $t = 0$ 到 $t = 3$的时间演化，时间步长为

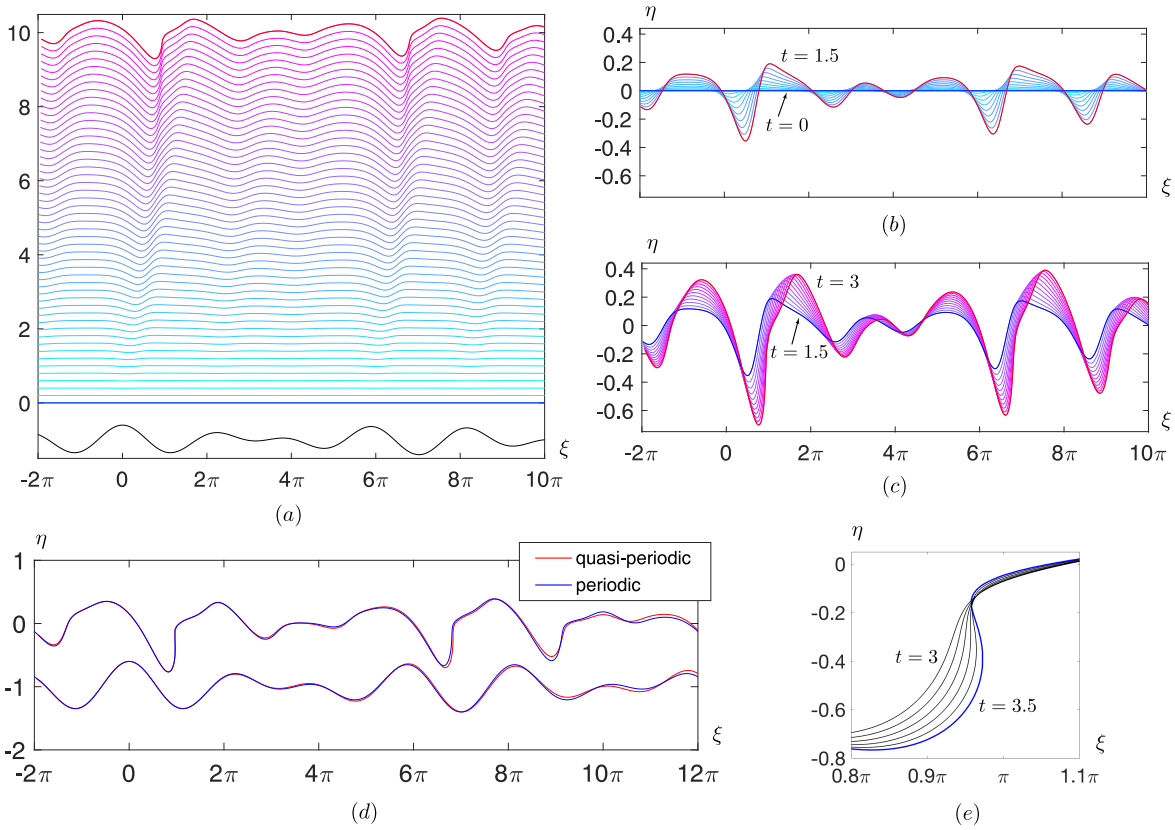

图 2. 面板 (a)–(c) 展示了在背景流和准周期底边界作用下，初始平坦自由表面的时间演化，从 $t = 0$ 到 $t = 3$ 。在面板 (a) 中，底边界以黑色绘出，并向上作了空间平移，平移量为 (4.5)，以便将各条曲线彼此分开。面板 (b) 和 (c) 展示了未经此类平移的自由表面细节。在面板 (d) 中，我们将该解进一步演化至 $t = 3。5$，并将其与空间范围相同、底边界形状相似的周期性计算进行比较。两种波都在$\xi = \pi$ 和 $t = 3。3$附近发生翻卷。面板 (e) 展示了翻卷周期波从 $t = 3$ 到$t = 3。5$ 的演化。

$\Delta t = 10^{-5}$ 步。在图 (a) 中，黑线表示底边界，蓝线表示 $t = 0$ 时的平坦自由表面。为了更清楚地区分不同时刻自由表面的形状，我们对每条曲线都施加向上的空间平移。相邻两条曲线的时间间隔为 0.06，我们绘制

$$\eta^{s}(\alpha, t_n) + 10t_n/3, \qquad t_n = 0.06n, \quad n = 0, 1, \ldots, 50. \tag{4.5}$$

由于背景流和准周期底边界的作用，自由表面波从左向右移动，并在底边界波峰前方形成波峰；底边界使流体向上偏转。面板 (b) 和 (c) 分别展示了自由表面从 $t = 0$ 到 $t = 1。5$ 以及从 $t = 1。5$ 到 $t = 3$ 的时间演化快照，均未作 (4.5) 所示的向上平移；两个面板中相邻曲线的时间间隔均为 0.15。

在图 2的（d）面板中，我们进一步将准周期波从 $t = 3$ 演化至 $t = 3。5$，使用相同的 512×512 环面空间网格，并以红线绘出 $t = 3。5$ 时的自由表面。我们发现，该波在 $\xi = \pi$ 附近于 $t = 3。308$时发生翻转。不过，在 $t = 3。5$时，准周期波的分辨率不足，网格点间距较大，以至于图中可以看到离散的线段

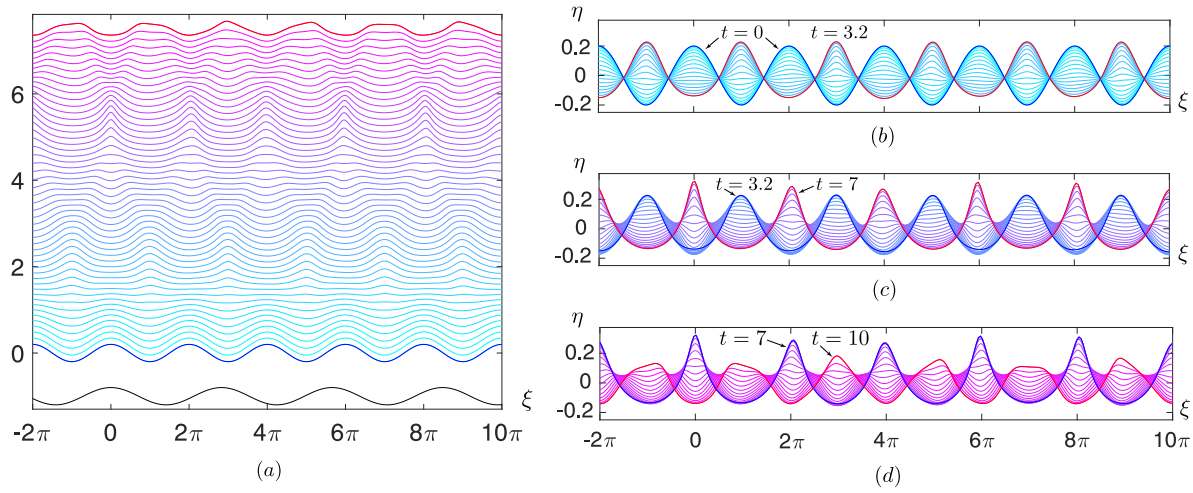

图3. 从 $t = 0$ 到 $t = 10$ 的时间演化：初始为静止状态、无背景流的周期自由表面，在一个周期性底边界上演化；该底边界的空间周期与自由表面的初始周期成无理数比例。(a) 面板展示了不同时刻的自由表面，并向上平移（4.8）；底边界以黑色绘制。(b)、(c) 和 (d) 面板展示了未平移的自由表面演化细节。

在 $\xi = \pi$ 附近的图中，以及在 $\xi = \pi$ 和 $\xi = 7\pi$附近可见的小幅振荡。在无限深度情形下，[73], 将网格细化至 4096×4096 足以分辨发生翻转的空间准周期波，使傅里叶模态在所有时刻均衰减至 10^{-12}。这里，我们不再将网格细化到超过 512×512，而是在相同的初始条件和背景流下，计算具有周期性底边界的周期波的时间演化

$$\eta^{\mathrm{b,phys}}(x) = -1 + 0.2\cos(x) + 0.2\cos(5x/7), \tag{4.6}$$

其中，$5/7$ 是 $k = 1/\sqrt{2}$的有理近似。周期性计算采用空间分辨率 $M = 32768$（使用了 16385 个傅里叶模态）。$t = 3.5$ 时刻的周期波自由表面在 (d) 面板中以蓝线绘出。我们观察到，(d) 面板中的两列波彼此相似，但由于底边界不同，并不完全相同。当 $|x|$取更大值时，两者差异会显著增大，因为此时 $\cos(x/\sqrt{2})$ 与 $\cos(5x/7)$相差更远。该周期波在时刻$t = 3.288$ 附近的 $\xi = \pi$ 处发生翻转。我们在 (e) 面板中展示了从 $t = 3$ 到 $t = 3.5$ 的翻转点附近周期波的时间演化，相邻曲线之间的时间间隔为 $\Delta t = 0.1$。

图3 展示了一个初始周期性自由表面波的时间演化过程。该波处于周期性底边界的作用下，且底边界的空间周期与初始条件呈无理数关系。在物理空间中，初始自由表面和底边界由下式给出

$$\eta_0^{\mathrm{s,phys}}(x) = 0.2\cos(x), \qquad \eta^{\mathrm{b,phys}}(x) = -1 + 0.2\cos(x/\sqrt{2}). \tag{4.7}$$

在图 (a) 中，初始自由表面和底边界分别以蓝色和黑色曲线表示。如图所示，两者都是周期性的，且底边界的波长长于自由表面的波长。我们在计算中使用 $M_1 = M_2 = 256$，并以时间步长 $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$ 将水波从 $t = 0$ 演化至 $t = 10$。在 $t = 0$，流体静止，速度势为零。在图 (a) 中，我们绘出了自由表面的时间演化，并沿空间方向向上平移

$$\eta^{\mathrm{s}}(\alpha, t_n) + 0.75t_n, \qquad t_n = 0.2n, \quad n = 0, 1, \ldots, 50. \tag{4.8}$$

自由表面在重力作用下变平，又因惯性而再次上升，这与驻水波的振荡类似 [42,68]。可以观察到，对于 $t>0$，表面波的波峰和波谷并不对称；但在 $x=0$，由于初始条件具有偶对称性，波峰和波谷对称。在图 (b)、(c) 和 (d) 中，我们绘出了自由表面未经向上平移的时间演化快照（4.8），时间范围为 $t=0$ 至 $t=3$。2；时间范围为 $t=3$。2至 $t=7$；以及时间范围为 $t=7$ 至 $t=10$。相邻两条曲线之间的时间间隔为 0.2。可以观察到，波像驻波一样上下振荡。然而，由于表面波与底边界之间存在准周期相互作用，在任一给定时刻，不同波峰的高度各不相同。

4.2. **空间准周期行波**。我们将行波问题表述为一个非线性最小二乘问题，并使用一种 Levenberg–马夸特算法的变体求解 [48,71,72]。在第 3.1 节中，我们引入了残差函数 $\mathcal{R}$（3.11）中的残差函数，它取决于 τ、b、$\tilde{\eta}$，并证明了行波问题的解就是 $\mathcal{R}[\tau、\ b、\ \tilde{\eta}]=0$ 的解。在计算中，我们将 τ、b 以及 $\tilde{\eta}$ 的傅里叶系数作为未知数，记为 $\hat{}\eta$，并定义如下标量目标函数

$$\mathcal{F}[\tau,b,\hat{\eta}] := \frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\mathcal{R}^2[\tau,b,\hat{\eta}]\,d\alpha_1\,d\alpha_2. \tag{4.9}$$

注意，求解（3.11）等价于求目标函数 $\mathcal{F}[\tau、\ b、\hat{}\eta]$ 的零点。对于未知数 $\hat{}\eta$，我们仅改变首项傅里叶系数 $\hat{}\eta_{j_1、\ j_2}$，其中 $|j_1|\leqslant N_1<M_1/2$, $|j_2|\leqslant N_2<M_2/2$，并将其余傅里叶系数设为零。根据假设（3.15），我们也令 $\hat{}\eta_{0、\ 0}=0$，并要求傅里叶系数 $\hat{}\eta_{j_1、\ j_2}$ 为实数且满足 $\hat{}\eta_{-j_1、\ -j_2}=\hat{}\eta_{j_1、\ j_2}$。因此，独立的首项傅里叶系数的数量为 $N_{\text{tot}}=N_1(2N_2+1)+N_2$。如第 3.1 节所述，在计算由零振幅解分岔而来的准周期行波解时，我们选择 $\hat{}\eta_{1、\ 0}$、$\hat{}\eta_{0、\ 1}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 作为分岔参数，并在最小化 $\mathcal{F}$ 时将它们固定为非零振幅。因此，需要计算 N_{tot} 个参数，并将它们存储在向量 $\boldsymbol{p}$ 中，如下所示

$$p_1=\tau,\quad p_2=\hat{\eta}_{1,1},\quad p_3=b,\quad p_4=\hat{\eta}_{1,-1},\quad p_5=\hat{\eta}_{0,2}\ ,\ \dots\ ,\ p_{N_{\text{tot}}}=\hat{\eta}_{1,-N_2}. \tag{4.10}$$

傅里叶模态按螺旋顺序排列，使低频模态出现在列表前面，并将 $\hat{}\eta_{1,}\mathbf{0}$、$\hat{}\eta_{0,}\mathbf{1}$ 替换为 τ 和 b；详情见 [72]。我们的目标是在给定 $\hat{}\eta_{1,}\mathbf{0}$ 和 $\hat{}\eta_{0,}\mathbf{1}$ 的情况下，求出 $\boldsymbol{p}$，使得 $\mathcal{F}[\boldsymbol{p};\ \hat{}\eta_{1,}\mathbf{0}、\ \hat{}\eta_{0,1}]=0$，其中我们对式 (4.9) 中 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{R}$ 的参数顺序进行了重新排列。在计算中，函数 $\mathcal{R}$ 在 $M_1\times M_2$个网格点处求值，因此共有 M_1M_2 个方程，超过了未知数的数量。因此，这是一个超定的非线性最小二乘问题。

目标函数 $\mathcal{F}$ 通过对 $\mathcal{R}$ 在$\mathbb{T}^2$上应用梯形法则近似计算得到，该近似具有谱精度，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{p}) &= \frac{1}{2}r(\boldsymbol{p})^T r(\boldsymbol{p}) \approx \mathcal{F}\left[\boldsymbol{p};\hat{\eta}_{1,0},\hat{\eta}_{0,1}\right], \\ r_m(\boldsymbol{p}) &= \frac{\mathcal{R}\left[\boldsymbol{p};\hat{\eta}_{1,0},\hat{\eta}_{0,1}\right](\alpha_{m_1},\alpha_{m_2})}{\sqrt{M_1M_2}}, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} m=1+m_1+M_1m_2 \\ \alpha_{m_i}=2\pi m_i/M_i \end{pmatrix}, \quad 0\leqslant m_i<M_i. \tag{4.11}$$

选择参数 p_j，使用 Levenberg-Marquardt 方法 [48,71] 使 $f(\boldsymbol{p})$ 最小化。该方法需要一个雅可比矩阵 $\partial r_m/\partial p_j$，，我们通过求解变分方程（3.17）来计算该矩阵。我们有 $\frac{\partial r_m}{\partial p_j}=\delta\mathcal{R}(\alpha_{m_1},\alpha_{m_2})/\sqrt{M_1M_2}$，其中 $m=1+m_1+M_1\overline{m_2}$，雅可比矩阵的第 j 列对应于根据扰动方向在（4.10）中将 δp_j 设为 1、其余项设为 0：$\delta\tau$、δb 或 $\delta\hat{}\eta_{j_1,\ j_2}$。

我们利用$N_x = N_y = 75$和 $M_x = M_y = 200$计算从零解分岔而来的准周期行波解。我们固定$\hat{\eta}_{1,0} = \hat{\eta}_{0,1} = 10^{-5}$，选择$h$ 作为延拓参数，并将h 从 3 逐渐减小到 0.5，步长为 $\Delta h = 0.01$，从而得到一族拟周期解。在图4的（a）面板中，我们绘出了 $h = 0.5$ 和 $h = 3$ 时解的自由表面波形。这两个解之间的差异很小，因为它们都是从零解分岔而来的小振幅分岔，且在线性阶施加了相同的振幅参数 $\hat{\eta}_{1,0}$ 和 $\hat{\eta}_{0,1}$。在这个例子中，我们将解限制在线性区域附近，以考察使用 Levenberg-Marquardt 方法计算的全非线性方程行波解，是否如弱非线性理论所预测的那样。尽管波形彼此接近，但两个解的 h 值（3 和 0.5）以及 τ 值（1.23088845108 和 0.0812490184995）差别很大。

在图 4(b) 中，我们绘出了计算所得解的主要傅里叶系数 $|\hat{\eta}_{2,0}|$,$|\hat{\eta}_{0,2}|$, $|\hat{\eta}_{1,1}|$ 和 $|\hat{\eta}_{1,-1}|$ 的绝对值随 h 的变化，其中 $\hat{\eta}_{1,}0$ 和 $\hat{\eta}_{0,}1$ 固定为 10^{-5}。这些傅里叶系数随 h 增大而减小。在图 4(c) 中，我们绘出了与这四个傅里叶系数对应的、定义于 (3.27) 中的除数 S_{j_1,j_2} 的绝对值；它们随 h 减小而减小。傅里叶系数和 S_{j_1,j_2} 的变化趋势与弱非线性近似 (3.31) 一致，其中傅里叶系数是通过除以 S_{j_1,j_2} 得到的。因此，S_{j_1,j_2} 的值越小，傅里叶系数就越大。请注意，我们考察的是通过 Levenberg-Marquardt 方法最小化 (4.11) 中的 $f(\boldsymbol{p}) \approx \mathcal{F}[\boldsymbol{p}; \hat{\eta}_{1,}0, \hat{\eta}_{0,}1]$ 所得到的欧拉方程 (3.11) 的行波解，是否如弱非线性模型 (3.31) 所预测的那样；我们并未直接求解 (3.31)。

图 4 的 (d) 和 (e) 面板展示了行波解中 $|\hat{\eta}_{j_1,j_2}|$ 与 $|\hat{S}_{j_1,j_2}|$ 随 $2 \leqslant |j_1| + |j_2| \leqslant 75$ 的关系，分别对应 $\mathrm{h} = 0.5$ 和 $\mathrm{h} = 3$。由于最大的傅里叶系数固定为 10^{-5}，预计舍入误差约为 10^{-20}。然而，两个面板中都可见的“舍入误差底限”却似乎会随着 $|S_{j_1,j_2}|$ 减小而线性增大。这表明，尽管这并非弱非线性计算，Levenberg-Marquardt 方法中的舍入误差仍会被除数 S_{j_1,j_2} 的倒数放大。$|\hat{\eta}_{j_1,j_2}|$ 高于舍入误差底限的“活跃”模态似乎都得到了充分分辨。若细化计算网格，同时保持 $N_x = N_y = 75$ 不变并将 M_x 和 M_y 从 200 增至 300，所得图形几乎完全相同。事实上，(d) 和 (e) 面板绘制的就是这一更精细网格上的数据。在面板 (e) 中，当 $\mathrm{h} = 3$ 时，只有少数活跃模态 $\hat{\eta}_{j_1,j_2}$，且它们都对应于满足 $2 \leqslant |j_1| + |j_2| \leqslant 5$ 的低频模态。但在面板 (d) 中，当 $\mathrm{h} = 0.5$ 时，则有许多活跃的低频和中频模态，分别用红色和黑色标记表示。这与 (3.37) 和面板 (c) 一致：弱非线性理论中的小除数随 h 减小而减小。我们为此计算选定的固定值 $\hat{\eta}_{1,0} = \hat{\eta}_{0,1} = 10^{-5}$ 在 $\mathrm{h} = 3$ 时似乎足够小，因此可以用弱非线性理论计算解；但在 $\mathrm{h} = 0.5$ 时又足够大，以至于必须采用 Levenberg-Marquardt 方法求解。

接下来，我们寻找有限水深下有限振幅周期行波的拟周期分岔。我们采用一种新方法，该方法针对深水情形的详细描述见 [74]，，用于定位分岔点。具体而言，我们使用雅可比矩阵 $\mathcal{J}^{\mathrm{qua}}(s)$（如（3.18）所示）的带符号的最小奇异值 $\chi(s)$ 作为分岔“测试函数”，它在分岔点处改变符号。当找到 的零点时，方程（3.18）的雅可比矩阵 $\mathcal{J}^{\mathrm{qua}}(s)$ 的核也能提供准周期分支的搜索方向 $\delta\tilde{\eta}^{\mathrm{qua}}$。我们使用 $\tilde{\eta}^{\mathrm{per}} + \epsilon\delta\tilde{\eta}^{\mathrm{qua}}$以及经验选定的 ϵ 值，作为 Levenberg–Marquardt 求解器的初始猜测。随后，我们通过数值延拓沿此分支继续追踪，超出围绕周期行波进行线性化的范围。我们不再使用 $\hat{\eta}_{1,0}$、$\hat{\eta}_{0,1}$ 和 h 作为延拓参数，

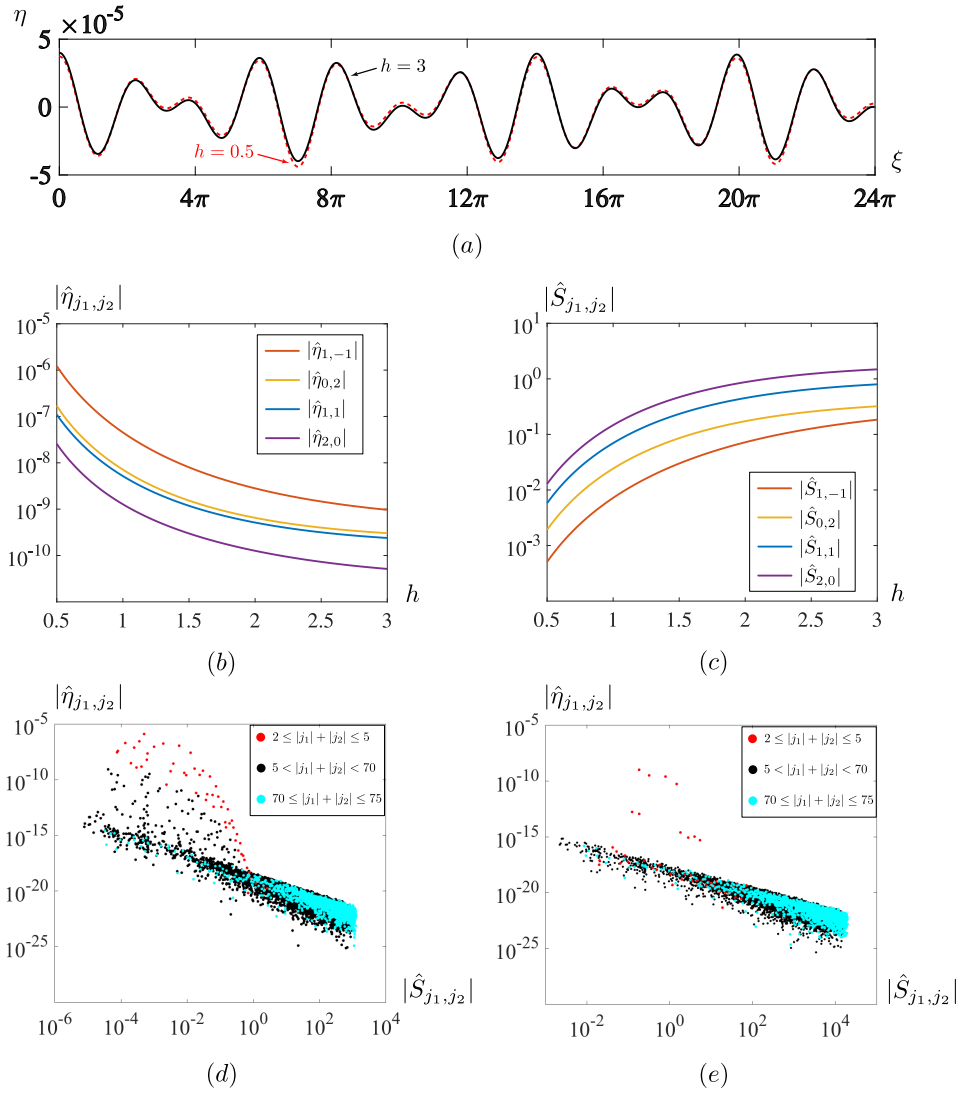

图 4. 从零解分岔出的准周期行进重力-毛细波。(a) 两个解的表面高程函数，其中 h = 0.5（红色虚线）和 h = 3.0（黑色实线）。(b) 准周期行波解的傅里叶系数 $\hat{\eta}_{2,0}$、$\hat{\eta}_{0,2}$、$\hat{\eta}_{1,1}$、$\hat{\eta}_{1,-1}$ 的振幅，其中 $\hat{\eta}_{1,0}$ 和 $\hat{\eta}_{0,1}$ 固定为 10^{-5}。(c) 弱非线性模型 (3.31) 中由 (3.27) 定义的相应除子 S_{j_1,j_2} 的绝对值。这里我们通过最小化 (4.11) 中的 $f(\boldsymbol{p})$ 来求解 (3.11)，并检验该解是否如 (3.31) 所预测的那样变化。(d) 和 (e) 图显示了在 h = 0.5 和 h = 3 两种情况下，$2 \leqslant |j_1| + |j_2| \leqslant 75$ 的 $|\hat{\eta}_{j_1,j_2}|$相对于 $|\hat{S}_{j_1,j_2}|$ 的变化。

而是使用 τ、h 和傅里叶模态 $\hat{\eta}_{0,\ 1}$。为简单起见，我们固定 τ 和 h，仅改变傅里叶模态，从而得到一个准周期解的单参数族。

图 5 和 6 展示了两个从周期行波分支分岔出的准周期重力-毛细波。保角空间中的流体深度为 $h = 0.1$。我们设定 $\tau = 0.00327672209262$，使周期波的第一傅里叶模态与第五傅里叶模态发生共振，这对应于 Wilton 涟漪问题的解 [1, 3, 62]。对于周期行波，我们设定 $M = 300, N = 100$，并使用 $s = \hat{\eta}_1$ 作为延拓参数。搜索分岔时，在 $\mathbb{T}$ 上计算一维波，并将其嵌入 $\mathbb{T}^2$ 中，因此 $\hat{\eta}_1$ 变为 $\hat{\eta}_{1,\ 0}$。我们计算了振幅为 s 的周期波，范围从

从 10^{-5} 到 2×10^{-4}，其中 $\Delta s = 10^{-5}$。通过追踪 $\chi(s)$ 的符号，我们发现当 s 属于区间 $[10^{-5}, 2\times10^{-5}]$, $[4\times10^{-5}, 5\times10^{-5}]$, $[7\times10^{-5}, 8\times10^{-5}]$,$[1.1\times10^{-4}, 1.2\times10^{-4}]$ 和 $[1.7\times10^{-4}, 1.8\times10^{-4}]$时，$\chi(s)$ 存在一个零点。我们重点讨论第一个和最后一个区间，并使用 [74] 中描述的数值算法确定这些区间内的 $\chi(s)$ 的零点，即分岔点。在双精度下，这些零点及其对应的 χ 值为

$$\begin{aligned} s_1 &= 1.83810709940\times10^{-5}, \qquad \chi(s_1) = -7.8\times10^{-15}, \\ s_2 &= 1.72625902886\times10^{-4}, \qquad \chi(s_2) = 4.8\times10^{-15}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

图中以黑色虚线绘出了 s_1 和 s_2 处的周期解，分别见图 5和 6的(a)面板。这些周期解展现了不同波长的傅里叶模态之间的非线性相互作用。与正弦波的波峰不同，我们观察到 s_1处周期波的波峰上有细小的细波。随着周期解振幅增大，这种非线性特征会更加明显。对于 s_2处、在 $x = 2\pi n$ 附近且 $n \in \mathbb{Z}$时的周期解，存在一个平坦的平台，波峰移至平台边缘，形成有趣的“猫耳”结构。波峰处的这些非线性特征可归因于毛细力的作用。图5 和6的(b)面板展示了这些周期行波的环面函数等高线图。我们观察到，振幅较大的周期波对应的黄色区域宽度更大；与之相应，该波的波峰也更宽。

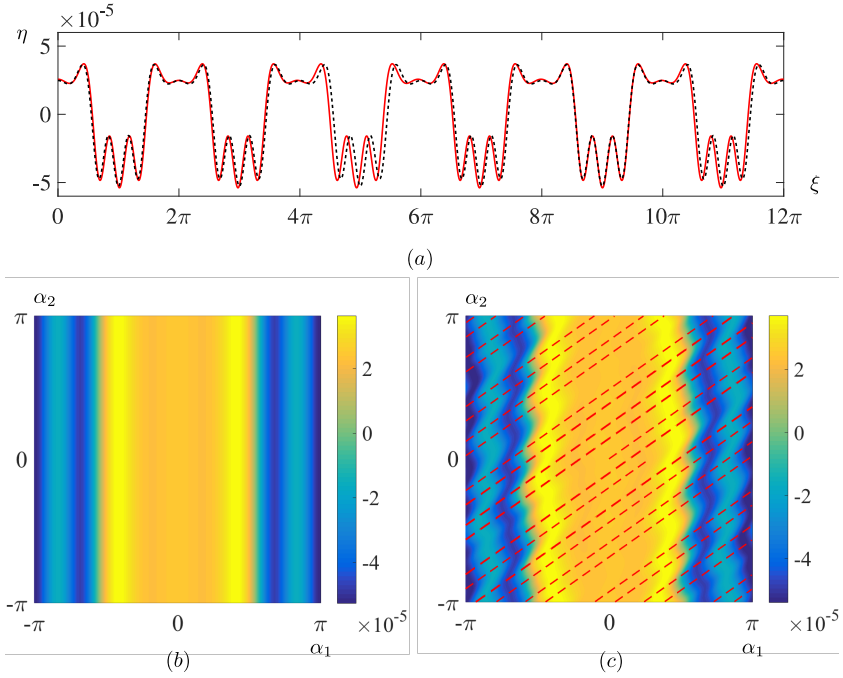

图5. 从周期性行进重力-毛细波分岔出的拟周期波。(a) 展示了发现分岔的周期行波，以及我们在拟周期分岔分支上计算得到的最大振幅解。黑色点线表示周期波，红线表示拟周期波。(b) 和 (c) 分别展示了周期波和拟周期波的环面函数等高线图。(a) 中的一维拟周期波是沿着 (c) 中以红色虚线绘出的斜率为 $k = 1/\sqrt{2}$, 的特征线，从对应的环面函数中提取出来的。

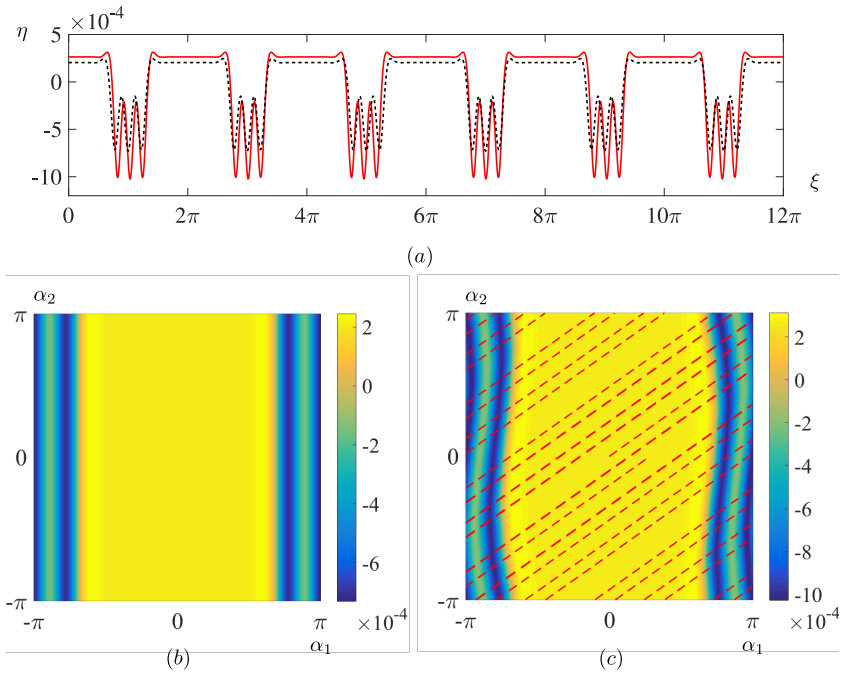

图6。 从较大振幅的周期性行进重力-毛细波产生的拟周期分岔。各面板所展示的信息与图5相同。

我们计算了与主周期分支相交于 s_1 和 s_2 的次级拟周期分岔支，并分别在图5和图6中展示相应结果。在两次计算中，我们设定 $M_x = 300, M_y = 150, N_x = 100, N_y = 50$，并使用 $\hat{\eta}_{0,1}$ 作为延拓参数。我们沿着这两条准周期分支继续计算，直至 $\hat{\eta}_{0,1} = 7 \times 10^{-5}$和 $\hat{\eta}_{0,1} = 1.1 \times 10^{-4}$；相应的准周期行波以红线绘于图5和图6的(a)面板中。对于这些解，目标函数分别最小化至 2.14×10^{-27} 和 5.03×10^{-28}。在图5的(a)面板中，拟周期波在 $\xi = 3\pi, 5\pi, 7\pi, 11\pi$ 附近的波谷振荡超前于周期波，而在 $\xi = \pi$附近则滞后于周期波，这体现了次级分岔的拟周期特征。

我们还观察到，由于拟周期方向上的傅里叶模态被激活，图5（a）中的拟周期波振幅明显大于周期波。在图5和6（c）中，我们展示了（a）中的拟周期行波所对应的环面函数等高线图。与周期解不同，拟周期解依赖于 α_2。例如，可以看到黄色和蓝色区域沿 α_2 方向的变化。此外，图5中的这种变化具有较强的振荡性，增加了计算分岔分支上更大振幅拟周期波的难度。通过沿斜率为 $1/\sqrt{2}$的红色虚线对相应的环面函数求值，即可得到一维拟周期波。图5和6（a）中，如果（c）中的虚线穿过黄色区域，就会出现波峰；如果穿过蓝色区域，则会出现波谷。由于黄色区域发生变化，拟周期波的波峰宽度不再恒定。例如，在图6（a）中，拟周期波的波峰在 $\xi = 6\pi$附近比周期波更宽，8π 而在 $\xi = 4\pi$附近更窄，10π。

5. 结论

本文对空间拟周期情形下的二维有限水深自由表面波进行了数值研究。具体而言，我们研究了初值问题和行波问题。对于初值问题，我们在保角空间中推导了存在背景流和非平坦底边界时的水波控制方程。如备注2.7所述，该推导在拟周期和周期情形下均成立。受Torres等人 [61]研究存在准周期底边界时空间拟周期表面波的实验启发，我们计算了背景流作用下、准周期底边界上初始平坦自由表面的时间演化。我们还发现，波会形成准周期图样，其中相邻波峰之间的距离并非常数。

接下来，我们计算了从零振幅波或有限振幅周期行波分岔而来的空间准周期行波。受以下观察结果的启发： [72,74] 准周期行波的傅里叶系数沿某些方向衰减得更慢，我们推导出了支配小振幅ˆ准周期行波的弱非线性方程，见第 3.2 节，并发现弱非线性解的傅里叶系数公式中存在一个除数 $S_{j_1,\ j_2}$ 。例如，在深水情况下，该除数为

$$\hat{S}_{j_1,j_2} = \frac{g}{k}(|j_1 + kj_2| - k)(|j_1 + kj_2| - 1). \tag{5.1}$$

由于 $1/\hat{S}_{j_1,j_2}$无界，预计沿方向 $|j_1 + kj_2| - k = 0$和 $|j_1 + kj_2| - 1 = 0$ 的傅里叶系数会比其他方向衰减得更慢。我们还研究了浅水情况下的这些除数，并发现当h 较小时，由于公式（3.37）中 $\hat{S}_{j_1,j_2}$的因子 h^4 ，弱非线性理论会更快失效。

在本研究中，我们假设底边界始终固定不动。未来，我们计划进一步拓展该方法，研究运动底边界上方自由表面的准周期流动。对于周期水波，这一问题已在 [56,58] 中得到研究。我们还计划分析周期行波 [18,45,50,59]的线性稳定性，并研究行波在不稳定次谐波扰动下的长期动力学。在准周期情形下，我们能够计算这些受扰波的精确时间演化，而非其线性化近似 [36]。我们也有意开发数值方法，例如变换场展开方法 [46,47,52],，以研究这些波在三维中的动力学；在三维中，共形映射方法不再适用。在理论方面，准周期行波存在性的严格证明仍是一个开放问题。我们预计有必要采用 Nash-Moser迭代来解决小除数问题；该方法已成功用于证明时间拟周期驻波和行波的存在性 [8,9]。

资助： 本研究部分由美国国家科学基金会（项目编号 DMS-1716560）、美国能源部科学办公室应用科学计算研究项目（项目编号 DE-AC02-05CH11231）以及加拿大自然科学与工程研究委员会（加拿大）探索资助提供支持。

利益声明：作者声明不存在利益冲突。

附录A. 从无限水平带到流体区域的保角映射计算

在实际应用中，水波的初始条件通常在物理空间中给出。因此，我们需要计算保角映射 $z(w,\ t)$ 以将初始条件从物理空间变换到保角空间。如（2.22）和（2.23）所示，保角映射由 h、 x_0、 $\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}$ 和 $\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}$ 确定，其中 x_0 在本文中固定为零，而 h、 $\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}$、 $\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}$ 通过求解以下方程得到：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_1(\alpha_1,\alpha_2)=\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}-\tilde{\eta}^{\mathrm{s,phys}}(\alpha_1+\tilde{\xi}^{\mathrm{s}},\alpha_2+k\tilde{\xi}^{\mathrm{s}})=0,\\
&\mathcal{R}_2(\alpha_1,\alpha_2)=\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}-\tilde{\eta}^{\mathrm{b,phys}}(\alpha_1+\tilde{\xi}^{\mathrm{b}},\alpha_2+k\tilde{\xi}^{\mathrm{b}})=0,\\
&\tilde{\xi}^{\mathrm{s}}=H^{\mathrm{coth}}[\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}]+H^{\mathrm{csch}}[\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}],\qquad \tilde{\xi}^{\mathrm{b}}=-H^{\mathrm{csch}}[\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}]-H^{\mathrm{coth}}[\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}],
\end{aligned}\tag{A.1}$$

它们由（2.16）和（2.25）得出。此外，我们施加第*2.3*节讨论的约束条件 $\hat{\eta}^{\mathrm{s}}_{\mathbf{0}}-\hat{\eta}^{\mathrm{b}}_{\mathbf{0}}\,\mathrm{h}\ =$ 并将 $\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}$ 改写为

$$\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}=\hat{\eta}^{\mathrm{s}}_{\mathbf{0}}-h+P[\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}].\tag{A.2}$$

否则，问题（A.1）是欠定的，解也不唯一 .

在我们的计算中，我们将h 以及 $\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}$ 和 $\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}$ 的傅里叶系数视为未知数，并定义如下目标函数

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[h,\hat{\eta}^{\mathrm{s}},\hat{\eta}^{\mathrm{b}}]:&=\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\mathcal{R}_1^2[h,\hat{\eta}^{\mathrm{s}},\hat{\eta}^{\mathrm{b}}]+\mathcal{R}_2^2[h,\hat{\eta}^{\mathrm{s}},\hat{\eta}^{\mathrm{b}}]\,d\alpha_1\,d\alpha_2\\
&\approx\frac{1}{2M_1M_2}\sum_{m_2=0}^{M_2-1}\sum_{m_1=0}^{M_1-1}\Big[\mathcal{R}_1^2(2\pi m_1/M_1,2\pi m_2/M_2)+\mathcal{R}_1^2(2\pi m_1/M_1,2\pi m_2/M_2)\Big].
\end{aligned}\tag{A.3}$$

我们应用 Levenberg-Marquardt 方法 [71]求解非线性最小二乘问题（A.3），并利用以下变分方程计算 $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$ 关于未知数的导数

$$\begin{aligned}
&\delta\mathcal{R}_1=\delta\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}-\tilde{\eta}^{\mathrm{s,phys}}_x\delta\tilde{\xi}^{\mathrm{s}},\qquad \delta\mathcal{R}_2=\delta\hat{\eta}^{\mathrm{s}}_{\mathbf{0}}-\delta h+P[\delta\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}]-\tilde{\eta}^{\mathrm{b,phys}}_x\delta\tilde{\xi}^{\mathrm{b}},\\
&\delta\tilde{\xi}^{\mathrm{s}}=H^{\mathrm{coth}}[\delta\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}]+H^{\mathrm{csch}}[\delta\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}]+\big(\delta H^{\mathrm{coth}}\big)[\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}]+\big(\delta H^{\mathrm{csch}}\big)[\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}],\\
&\delta\tilde{\xi}^{\mathrm{b}}=-H^{\mathrm{csch}}[\delta\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}]-H^{\mathrm{coth}}[\delta\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}]-\big(\delta H^{\mathrm{csch}}\big)[\tilde{\eta}^{\mathrm{s}}]-\big(\delta H^{\mathrm{coth}}\big)[\tilde{\eta}^{\mathrm{b}}].
\end{aligned}\tag{A.4}$$

这里， $\partial_x=\partial_{x_1}+k\partial_{x_2}$ 以及 δH^{coth} 和 δH^{csch} 的符号为

$$\delta\hat{H}^{\mathrm{coth}}_{j_1,j_2}=\frac{i(j_1+kj_2)\delta h}{\sinh^2((j_1+kj_2)h)},\qquad \delta\hat{H}^{\mathrm{csch}}_{j_1,j_2}=-i(j_1+kj_2)\coth((j_1+kj_2)h)\,\mathrm{csch}((j_1+kj_2)h)\delta h.\tag{A.5}$$

参考文献

[1] B. Akers 和 D. P. Nicholls. 弱非线性色散水波模型中的 Wilton 波纹：解分支的存在性与解析性。*Water Waves*, 3:25–47, 2021年.[2] B. F. Akers, D. M. Ambrose 和 D. W. Sulon. 有质量或无质量的周期行进界面水弹性波 II：多重分岔与细波。*Europ. J. Appl. Math.*, 30(4):756–790, 2019年.[3] B. F. Akers 和 W. Gao. 弱非性色散模型方程中的 Wilton 波纹。*Commun. Math. Sci.*, 10(3):1015– 1024, 2012年.[4] T. Alazard, N. Burq 和 C. Zuily. 重力水波的柯西问题。*Invent.Math.*, 198(1):71–163, 2014年.

[5] D. M. Ambrose, R. Camassa, J. L. Marzuola, R. M. McLaughlin, Q. Robinson 和 J. Wilkening. 背景流经过障碍物和地形时水波的数值算法。Adv. Comput. Math., 48:46:1– 62, 2022年.[6] P. Baldi, M. Berti, E. Haus 和 R. Montalto. 有限水深中的时间准周期重力水波。Invent. Math., 214(2):739–911, 2018年.[7] M. Berti, L. Franzoi 和 A. Maspero. 存在恒定涡量的纯重力行进准周期水波。arXiv:2101.12006, 2021年.[8] M. Berti, L. Franzoi 和 A. Maspero. 存在恒定涡量的行进准周期水波。Arch. Rational Mech. Anal., 240:99–202, 2021年.[9] M. Berti 和 R. Montalto. 重力-毛细水波的准周期驻波解，美国数学会回忆录第263卷。美国数学会, 2016年.[10] I. V. Blinov. 准晶体的周期近薛定谔方程。Scientific Reports, 5(1):1–5, 2015年.[11] H. Bohr. 《几乎周期函数》。Dover, 米尼奥拉, 纽约, 2018年.[12] R. P. Brent. 无导数最小化算法。Prentice Hall, Inc., 恩格尔伍德克利夫斯, 新泽西州, 1973年.[13] T. Bridges 和 F. Dias. 空间准周期毛细-重力波。Contemp. Math., 200:31–46, 1996年.[14] B. Chen 和 P. Saffman. 深水上存在新型永久形态重力波的数值证据。Stud. Appl. Math., 62(1):1–21, 1980年.[15] W. Choi 和 R. Camassa. 表面波的精确演化方程。J. Eng. Mech., 125(7):756–760, 1999年.[16] W. Craig 和 C. Sulem. 重力波的数值模拟。J. Comput. Phys., 108:73–83, 1993年.[17] D. Damanik 和 M. Goldstein. 准周期初始数据下 KdV 方程整体解的存在性与唯一性。J. American Math. Soc., 29(3):825–856, 2016年.[18] B. Deconinck 和 K. Oliveras. 周期表面重力波的不稳定性。J. Fluid Mech., 675:141, 2011年.[19] B. Dodson, A. Soffer 和 T. Spencer. 有界初始数据下定义于 z 和 r 上的非线性薛定谔方程：例子与猜想。J. Stat. Phys., 180(1):910–934, 2020年.[20] G. Ducrozet 和 M. Gouin. 变化的水深地形对单向和方向性海况中怪波发生的影响。J. Ocean Eng. and Mar. Energy, 3(4):309–324, 2017年.[21] A. Dyachenko. 有自由表面的理想流体动力学。Dokl. Math., 63(1):115–117, 2001年.[22] A. I. Dyachenko, E. A. Kuznetsov, M. Spector 和 V. E. Zakharov. 理想流体自由表面动力学的解析描述（正则形式与保角映射）。Phys. Letters A, 221(1-2):73–79, 1996年.[23] A. I. Dyachenko, V. E. Zakharov 和 E. A. Kuznetsov. 理想流体自由表面的非线性动力学。Plasma Phys. Reports, 22(10):829–840, 1996年.[24] S. Dyachenko. 存在表面张力时有界区域内理想流体自由表面的动力学。J. Fluid. Mech., 860:408–418, 2019年.[25] I. A. Dynnikov 和 S. P. Novikov. 平面上准周期函数的拓扑。Russ. Math. Surv., 60(1):1, 2005年.[26] R. Feola 和 F. Giuliani. 重力作用下无限深理想流体中的准周期行波, 2020年。arXiv:2005.08280.[27] M. V. Flamarion, P. A. Milewski 和 A. Nachbin. 由海流与地形相互作用产生的旋转波。Stud. Appl. Math., 142(4):433–464, 2019年.[28] M. V. Flamarion, A. Nachbin 和 R. Ribeiro. 海流与地形相互作用所致的随时间变化的开尔文猫眼结构。J. Fluid Mech., 889, 2020年.[29] M. V. Flamarion 和 R. Ribeiro Jr. 水波地形问题中保角映射及其逆映射的迭代计算方法。Int. J. Numer. Methods Fluids, 93(11):3304–3311, 2021年.[30] T. Gao, Z. Wang 和 J.-M. Vanden-Broeck. 有限水深中非对称广义孤立重力-毛细波。Proc. R. Soc. A, 472(2194):20160454, 2016年.[31] E. Hairer, S. P. Norsett 和 G. Wanner. 常微分方程求解 I：非刚性问题。Springer, 柏林, 第2版, 2000年.[32] B. Harrop-Griffiths, M. Ifrim 和 D. Tataru. 全纯坐标中的有限水深重力水波。Annals of PDE, 3(1):1–102, 2017年.[33] J. G. Herterich 和 F. Dias. 变化的水深地形上的极长波。J. Fluid Mech., 878:481–501, 2019年.[34] J. K. Hunter, M. Ifrim 和 D. Tataru. 全纯坐标中的二维水波。Commun. Math. Phys., 346(2):483–552, 2016年.

[35] G. Iooss、P. I. Plotnikov 和 J. F. Toland. 重力作用下无限深理想流体中的驻波. 《Arch. Rat. Mech. Anal.》, 177:367–478, 2005 年 .[36] P. A. Janssen. 非线性四波相互作用与怪波 . 《 J. Phys. Ocean. 》 , 33(4):863–884, 2003年.[37] R. S. Johnson. 水波数学理论导论（现代观点）. 剑桥大学出版社, 英国剑桥, 1997年.[38] C. Kharif, J.-P. Giovanangeli, J. Touboul, L. Grare 和 E. Pelinovsky. 风对极端波浪事件的影响：实验与数值方法. J. Fluid Mech., 594:209–247, 2008年.[39] C. Kittel. 固体物理学导论. 约翰·威立父子出版公司, 纽约, 第8版, 2005年.[40] Y. A. Li, J. M. Hyman 和 W. Choi. 有限水深水面波精确演化方程的数值研究. Stud. Appl. Math., 113(3):303–324, 2004年.[41] D. I. Meiron, S. A. Orszag 和 M. Israeli. 数值保角映射的应用. J. Comput. Phys., 40(2):345–360, 1981年.[42] G. N. Mercer 和 A. J. Roberts. 深水中的驻波：其稳定性与极端形态. 《Phys. Fluids A》, 4(2):259–269, 1992年.[43] P. A. Milewski, J.-M. Vanden-Broeck 和 Z. Wang. 陡峭二维重力-毛细孤立波的动力学. J. Fluid Mech., 664:466–477, 2010年.[44] J. Moser. 关于准周期运动理论. 《SIAM Rev.》, 8(2):145–172, 1966年.[45] D. P. Nicholls. 行进水波的谱稳定性：特征值碰撞、奇点与直接数值模拟. 《Physica D》, 240(4-5):376–381, 2011年.[46] D. P. Nicholls 和 F. Reitich. 狄利克雷-诺伊曼算子解析性的新方法. 《Proc. R. Soc. Edinburgh A》, 131(6):1411–1433, 2001年.[47] D. P. Nicholls 和 F. Reitich. 三维行进水波的稳定高阶计算. 《Europ. J. Mech. B》, 25(4):406–424, 2006年.[48] J. Nocedal 和 S. J. Wright. 数值优化. Springer, 纽约, 1999年.[49] T. Oh. 关于具有几乎周期初始数据的非线性薛定谔方程. SIAM J. Math. Anal., 47(2):1253–1270, 2015年.[50] R. Pierce 和 E. Knobloch. 关于行进波与驻波的调制稳定性. Phys. Fluids, 6(3):1177–1190, 1994年.[51] P. Plotnikov 和 J. Toland. 驻水波的纳什-莫泽理论. 《Arch. Rat. Mech. Anal.》, 159:1–83, 2001年.[52] S. Qadeer 和 J. Wilkening. 圆柱体上的狄利克雷-诺伊曼算子的计算. 《SIAM J. Numer. Anal.》, 57(3):1183–1204, 2019年.[53] R. Ribeiro, P. A. Milewski 和 A. Nachbin. 具有驻点的旋转水波下方的流动结构. J. Fluid Mech., 812:792–814, 2017年.[54] V. Ruban. 强烈起伏的海底上的水波. Phys. Rev. E, 70(6):066302, 2004年.[55] V. Ruban. 有限水盆中一维浅水波的费米-帕斯塔-乌拉姆复现及相关现象. J. Exper. Theoret. Phys., 114(2):343–353, 2012年.[56] V. P. Ruban. 时变海底上的水波：二维势流的精确描述. Phys. Letters A, 340:194–200, 2005年.[57] V. P. Ruban. 有限水深水波的费米-帕斯塔-乌拉姆复现数值研究. JETP Letters, 93(4):195–198, 2011年.[58] V. P. Ruban. 弯曲海底上的波：复合保角映射法. J. Exper. Theoret. Phys., 130(5):797–808, 2020年.[59] R. Tiron 和 W. Choi. 无限水深水面有限振幅毛细波的线性稳定性. J. Fluid Mech., 696:402, 2012年.[60] A. Toffoli, M. Onorato, E. Bitner-Gregersen, A. R. Osborne 和 A. V. Babanin. 欧拉方程直接数值模拟得到的表面重力波：与二阶理论的比较. 《Ocean Engineering》, 35(3-4):367–379, 2008年.[61] M. Torres, J. Adrados, J. Aragón, P. Cobo 和 S. Tehuacanero. 表面波实验中的准周期布洛赫态. Phys. Rev. Letters, 90(11):114501, 2003年.[62] O. Trichtchenko, B. Deconinck 和 J. Wilkening. 威尔顿波纹的不稳定性. 《Wave Motion》, 66:147–155, 2016年.[63] K. Trulsen, H. Zeng 和 O. Gramstad. 非均匀水深地形诱发怪波的实验室证据. Phys. Fluids, 24(9):097101, 2012年。

[64] J.-M. Vanden-Broeck. 无限水深中周期纯重力波与孤立纯重力波. *J. Eng. Math.*, 84(1):173–180, 2014年.[65] C. Viotti 和 F. Dias. 强烈水深跃变诱发的极端波：完全非线性结果. *Phys. Fluids*, 26(5):051705, 2014年.[66] C. Viotti, D. Dutykh 和 F. Dias. 存在变水深地形和平均流时，表面重力波的保角映射法.*Procedia IUTAM*, 11:110–118, 2014年.[67] Z. Wang, J.-M. Vanden-Broeck 和 P. Milewski. 深水中的非对称重力–毛细孤立波.*J.Fluid Mech.*, 759, 2014年.[68] J. Wilkening. 大振幅驻水波波峰处自相似性的破缺. *Phys. Rev.Lett*, 107:184501, 2011年.[69] J. Wilkening. 水波的相对周期弹性碰撞.*Contemp. Math.*, 635:109–129, 2015年.[70] J. Wilkening. 行进-驻立水波.*Fluids*, 6:187:1–35, 2021年.[71] J. Wilkening 和 J. Yu. 以谱精度计算驻水波的超定打靶法.*Comput. Sci. Discovery*, 5(1):014017, 2012年.[72] J. Wilkening 和 X. Zhao. 拟周期行进重力–毛细波. *J. Fluid Mech.*, 915:A7:1–35, 2021年.[73] J. Wilkening 和 X. Zhao. 无限水深中的空间拟周期水波. *J. Nonlinear Sci.*, 31:52:1–43, 2021年.[74] J. Wilkening 和 X. Zhao. 周期行进水波分岔出的空间拟周期分岔，以及一种利用带符号奇异值检测分岔的方法，2022年. arXiv:2208.05954.[75] J. Wilton. 关于细波.*Philos. Mag.*, 29(173):688–700, 1915年.[76] V. E. Zakharov. 深流体表面有限振幅周期波的稳定性. *J. Appl. Mech.Tech. Phys.*, 9(2):190–194, 1968年.[77] V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko 和 O. A. Vasilyev. 一种新的数值模拟方法：模拟带自由表面的不可压缩流体非定常势流.*Eur. J. Mech. B Fluids*, 21(3):283–291, 2002年.[78] J. A. Zufiria. 有限水深水面周期重力-毛细波与孤立重力-毛细波的对称性破缺. *J.Fluid Mech.*, 184:183–206, 1987年。