arXiv:2301.01292v2 [math.DG] 9 Mar 2023

标量球面稳定性示例

PAUL SWEENEY JR

ABSTRACT. Llarull 和 Marques-Neves 的刚性定理揭示了标量曲率刻画球面的两种不同方式，并各自对应着稳定性猜想。本文给出了与这些稳定性猜想相关的首批示例。第一组示例表明，必须加入关于所有极小曲面最小面积的条件，才能防止序列中出现冒泡。第二组示例构造了这样的序列：它们不在 Gromov-Hausdorff 意义下收敛，却在保体积内在平坦意义下收敛。为了构造这类序列，我们改进了 Gromov-Lawson 隧道构造，使得可以在标量曲率有下界的流形上附加井与隧道，同时只将标量曲率降低任意小的幅度。此外，我们将 Basilio、Dodziuk 和 Sormani 的缝合构造，以及 Basilio、Kazaras 和 Sormani 构造无测地线内在平坦极限的方法，都加以推广。

1. INTRODUCTION

刚性定理常用于刻画黎曼几何中的流形。典型的刚性定理指出，若一个黎曼流形满足某些条件（通常包括曲率界），那么它必与某个特定的模型几何等距。我们可以从刚性定理自然地提出稳定性定理。稳定性定理指出，若对刚性定理的假设作扰动，那么满足这些假设的流形在定量意义上会接近由该刚性定理刻画的流形。本文研究与这类刚性定理相关的稳定性定理；这些刚性定理通过对标量曲率施加曲率界来刻画球面。

Llarull 的刚性定理 [Lla98]以及 Marques 和 Neves 的刚性定理 [MN12] 是两项展示如何利用标量曲率刻画球面的结果。这两项刚性定理自然引出了稳定性猜想。下文中，我们构造了与这些稳定性猜想相关的首批例子。我们说明了为何需要加入防止冒泡的条件，并探讨了不同的收敛方式。为构造这些例子，我们证明了对 Gromov-Lawson 隧道构造 [GL80]（另见 Schoen-Yau [SY79]）的一项加强结果，该结果仍能对标量曲率保持控制。

首先，让我们回顾 Llarull 定理 [Lla98]： 该定理指出，若存在一个从闭、光滑、连通、黎曼、自旋n流形 M^n 到标准单位圆球面 n的非零度光滑距离不增映射，并且 M^n的标量曲率大于或等于 $n(n-1)$，那么该映射就是黎曼等距。Gromov 在[Gro18] 提出，通过考察具有下确界$R^j \to n(n-1)$且满足 $Rad_{\mathbb{S}^n}(M_j) \to 1$的黎曼流形序列 $M_j^n = (M_j^n,\ g_j)$，来研究与 Llarull 刚性定理相关的稳定性问题。 $Rad_{\mathbb{S}^n}(M^n)$是 n球面 $\mathbb{S}^n(r)$的最大半径 r ，使得M^n存在一个从 M^n到 $\mathbb{S}^n(r)$的非零度距离不增映射。基于此，Sormani [Sor22] 提出了以下稳定性猜想。在陈述

这一猜想之前，我们先回顾以下定义：

$$\text{最小面积}(M,g) = \inf\{|\Sigma|_g \colon \Sigma \text{是 } M\}.\text{中的闭极小超曲面}$$

此外，在本文中，对于黎曼流形序列，我们将简化记号并设 $M_j^n = (M_j^n, g_j)$。

猜想 1.1. 设 $M_j^n = (M_j^n, g_j)$、 $n \geq 3$ 是闭的光滑连通自旋黎曼流形，满足

$$R^j \geq n(n-1) - \frac{1}{j}, \ \mathrm{MinA}(M_j^n) \geq A, \ \mathrm{diam}\left(M_j^n\right) \leq D, \ \mathrm{vol}\left(M_j^n\right) \leq V$$

其中 R^j 是 M_j^n 的标量曲率。此外，设存在到标准单位圆球形 n-球面的光滑映射

$$f_j : M_j^n \to \mathbb{S}^n$$

这些映射是 *1*-利普希茨映射，且 次数 $f_j \neq 0$。那么 M_j^n 在 $\mathcal{VF}$ 意义下收敛到标准单位圆球形 n-球面。

我们构造了一个流形序列，其中每个流形都是由一条细隧道连接的两个球面，这与猜想 1.1 有关。该序列在保体积内在平坦（$\mathcal{VF}$）意义下收敛到两个 n-球面的不交并（见图 1）。此外，该序列表明，若没有关于最小面积的下界，猜想 1.1 的结论便不成立。

定理 A. 存在一个收敛的黎曼流形序列 $M_j^n = (\mathbb{S}^n, g_j), n \geq 3$，满足 $M_j^n \xrightarrow{\mathcal{VF}} M_\infty$，使得

$$R^j \geq n(n-1) - \frac{1}{j}, \ \mathrm{diam}\,(M_j) \leq D, \ and \ \mathrm{vol}\,(M_j) \leq V,$$

对于某些常数 $D, V > 0$。此外，存在光滑的度为一的 1-*Lipschitz* 映射$f_j \colon M_j^n \to (\mathbb{S}^n, g_{rd})$，它们收敛到一个 1-*Lipschitz* 映射 $f_\infty \colon M_\infty \to (\mathbb{S}^n, g_{rd})$，且 M_∞ 是两个 n-球面的不交并。



FIGURE 1. 一个在 $\mathcal{VF}$ 意义下收敛到两个球面不交并的球面序列。

Sormani 在 [Sor17] 中提出了最小面积条件，以防止序列出现冒泡和挤压等不良极限行为。提出这一条件的动机源自 Basilio、Dodziuk 和 Sormani 的缝合构造 [BDS18]。该构造表明，存在一个具有正标量曲率的流形序列，其内在平坦（$\mathcal{F}$）极限在某种广义意义下不具有正标量曲率。

其他具有正标量曲率的流形序列也已被构造出来（[BS21],[BKS20]），其 $\mathcal{F}$极限具有不理想的性质。这些例子构造的关键在于能够以受控的几何方式粘接隧道。在这些例子中，尚不清楚能否使隧道及所得流形的标量曲率保持接近被粘接流形的标量曲率。因此，这些例子可能不满足猜想 1.1 中的曲率条件。在第4节中，我们证明两个主要的技术命题，它们本身也具有独立的研究价值。其中一个命题使我们能够定量控制隧道及所得流形的标量曲率。特别地，给定一个标量曲率下界为 κ的流形，则当 $\epsilon > 0$ 足够小时，存在一个隧道，使所得流形的标量曲率下界为 $\kappa - \epsilon$。

我们采用这种将隧道连接到流形上的新方法，同时控制标量曲率，以构造定理 A 中的序列。此外，我们还可以构造一个与 Marques-Neves 刚性定理相关的类似例子。Marques-Neves 的定理涉及三维球面和极小极大量——宽度。我们先回顾宽度的定义。设 g 是 3-球面上的一个黎曼度量，$x_4 : \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ 是高度函数。对于每个 $t \in [-1, 1]$, 令 $\Sigma'_t = \{x \in \mathbb{S}^3 : x_4 = t\}$，并令 Λ' 为所有满足以下条件的族 $\{\Sigma_t\}$ 的集合：对于某个由 3-球面上的光滑单参数微分同胚族 F_t 作用于 Σ'_t，有 $\Sigma_t = F_t$；其中这些微分同胚均与恒等映射同伦。$(\mathbb{S}^3, g)$ 的宽度是以下极小极大量

$$\mathrm{width}(\mathbb{S}^3, g) = \inf_{\{\Sigma_t\}\in\Lambda'} \sup_{t\in[-1,1]} |\Sigma_t|_g,$$

其中 $|\Sigma|_g$ 是 Σ的豪斯多夫二维测度。

Marques-Neves 的刚性定理 [MN12] 指出，若 3-球面上存在一个黎曼度量，其里奇曲率为正、标量曲率大于或等于 6，且宽度$(\mathbb{S}^3, g) \geq 4\pi$，则该度量与标准单位圆 3-球面等距。这引出了以下朴素的稳定性猜想。

猜想 1.2。设 $M_j^3 = (\mathbb{S}^3, g_j)$ 是满足下列条件的同胚球面

$$R^j \geq 6 - \frac{1}{j},\ \mathrm{width}(M_j^3) \geq 4\pi,\ \mathrm{diam}\left(M_j^3\right) \leq D,\ and\ \mathrm{vol}\left(M_j^3\right) \leq V$$

其中 R^j是 M_j^3的标量曲率。那么，M_j^3在 $\mathcal{VF}$意义下收敛到$(\mathbb{S}^3, g_{rd})$，其中 g_{rd} 是标准单位圆 *3*-球面的黎曼度量。

在 [Mon16], Montezuma 构造了 3-球面上的黎曼度量 g_w, $w > 0$，使得标量曲率大于或等于 6，且宽度$(\mathbb{S}^3, g_w) \geq w$。这些流形看起来像一棵球面树。具体而言，它们是基于一棵有限满二叉树构造的，其中节点被替换为标准单位圆 3-球面，边则被替换为具有正标量曲率的 Gromov-Lawson 隧道。研究表明，宽度与树的深度成正比。最后，取其中一个宽度足够大的流形并进行缩放，即可使其标量曲率达到大于或等于 6。这个例子表明，当不假设正里奇曲率时，Marques-Neves 的刚性结论和猜想 1.2 并不成立。

下面我们构造另一个反例，以反驳猜想 1.2。该反例与定理 A 中构造的例子类似。通过允许标量曲率大于或等于 $6 - \epsilon$，我们将构造一个仅由两个 3-球面作连通和得到的例子。此外，我们还能给出序列中

每个流形的体积和直径的明确界。这个反例是一个球面序列 $M_j^3 = (\mathbb{S}^3,\ g_j)$，它在保体积内在平坦（$\mathcal{VF}$）意义下收敛到两个球面的不交并。$M_j^3$ 是由细隧道连接的两个球面（见图 1），并且隧道沿着该序列逐渐变细。

定理 A′（猜想 1.2 的反例）。 存在一个黎曼流形的收敛序列 $M_j^3 = (\mathbb{S}^3, g_j)$，满足 $M_j^3 \xrightarrow{\mathcal{VF}} M_\infty$ 使得

$$R^j \geq 6 - \frac{1}{j},\ \mathrm{width}(M_j^3) \geq 4\pi,\ \ \mathrm{diam}\left(M_j^3\right) \leq D,\ \ and\ \ \mathrm{vol}\left(M_j^3\right) \leq V,$$

对于某些常数 D、$V > 0$，且 M_∞ 是两个3-球面的不交并 .

因此，对于与 Marques-Neves 的刚性定理相关的稳定性猜想而言，需要比宽度更强的条件。 [S或$^+$21] 中一个归因于 Marques 和 Neves 的猜想确实假设了一个更强的条件。具体而言，它将宽度的一致下界替换为最小面积的一致下界。

猜想 1.3。 设 $M_j^3 = (\mathbb{S}^3, g_j)$ 是满足以下条件的同胚球面

$$R^j \geq 6 - \frac{1}{j},\ \mathrm{MinA}(M_j^3) \geq 4\pi - \frac{1}{j},\ \ \mathrm{diam}\left(M_j^3\right) \leq D,\ \ and\ \ \mathrm{vol}\left(M_j^3\right) \leq V$$

其中 R^j 是 M_j^3的标量曲率。那么， M_j^3在 $\mathcal{VF}$-意义下收敛于（$\mathbb{S}^3, g_{rd}$）标准单位圆球面。

由于宽度由一张极小曲面达到，我们有 width($M^3,\ g$) $\geq$ MinA($M^3,\ g$)。此外，Marques-Neves 在 [MN12] 中证明，如果 ($\mathbb{S}^3,\ g$) 不含稳定极小曲面，那么我们有 MinA($\mathbb{S}^3,\ g$) = width($\mathbb{S}^3,\ g$)。在 Marques-Neves 刚性定理的证明中，正里奇曲率这一假设用于确保流形不含稳定嵌入极小球面。根据 [MN12, 附录 A], ，我们看到，如果一个 3 维流形的标量曲率充分接近 6，且 MinA 充分接近4π ，那么该流形不含稳定嵌入极小曲面。

定理 A′ 中构造的黎曼流形序列满足 MinA(M_j^n) $\to 0$，因此不满足猜想 1.3 的假设。定理 A 和 A′ 表明，为防止序列中发生冒泡，必须包含类似 MinA 上界这样的假设。

研究与标量曲率相关的稳定性猜想时，人们也常会考虑类似于 Ilmanen 所描述例子的例子。Ilmanen 最初描述这个例子，是为了说明正标量曲率流形序列未必会以 Gromov–Hausdorff（GH）意义收敛。这个例子是一列球面，其上附着的任意细井的数量越来越多（见图 2）。Sormani 和 Wenger [SW11, Example A.7] 通过对整流流使用他们的 $\mathcal{F}$-收敛，证明 Ilmanen 的例子以 $\mathcal{F}$ 意义收敛。在过去十年间，人们在各种不同背景下构造了 Ilmanen 类例子，以说明 GH-收敛并非提出与标量曲率相关的稳定性猜想时所应采用的收敛概念（[LS13], [Lak16], [Per20], [LS14], [LS15], [LS12], [AP20], [APS20]）。在这些例子中，尚不清楚能否通过附加一个井而仅使标量曲率略微降低；因此，也尚不清楚猜想 1.1 和猜想 1.3 是否可能存在 Ilmanen 类例子。

我们的另一项主要技术命题（见下文第4节）表明，可以在标量曲率有下界的流形上附加一个井，而只使标量曲率降低任意小的幅度

。因此，我们能够构造与猜想 1.1 和猜想 1.3 相关的 Ilmanen 类例子。特别地，我们构造了一个球面序列，其标量曲率大于 $n(n-1)-\epsilon_j$，体积和直径均有界，并且存在到单位圆球面 n 的光滑映射，这些映射是 1-利普希茨的，且 $\deg f_j \neq 0$。该序列不在 GH 意义下收敛，但在体积上界与距离下界（$VADB$）意义和 $\mathcal{VF}$ 意义下收敛。类似地，我们能够构造一个球面序列 M_j^3，其标量曲率大于 $6-\epsilon_j$，宽度大于 4π，且体积和直径均有界；该序列不在 GH 意义下收敛，但在 VADB 意义和 $\mathcal{VF}$ 意义下收敛。因此，我们可以构造与猜想 1.3 和猜想 1.1 相关的 Ilmanen 类例子。不过，我们无法验证最小面积始终有一致的正下界，尽管我们预期确实如此。

定理 B. 存在一个黎曼流形收敛序列 $M_j^n=(\mathbb{S}^n, g_j)$，满足 $M_j^n \xrightarrow{\text{VADB}} M_\infty$ 和 $M_j^n \xrightarrow{\mathcal{VF}} M_\infty$，使得

$$R^j \geq n(n-1)-\frac{1}{j},\ \operatorname{diam}\left(M_j^n\right)\leq D,\ and\ \operatorname{vol}\left(M_j^n\right)\leq V,$$

对某些常数 D、$V>0$，且 M_∞ 是 n-球面。此外，存在光滑的非零度、1-*Lipschitz* 映射 $f_j\colon M_j^n\to(\mathbb{S}^n, g_{rd})$，并且 M_∞ 是标准单位圆球面n。然而，该序列不存在任何在GH-意义下收敛的子序列。

定理 B′. 存在一个黎曼流形收敛序列 $M_j^3=(\mathbb{S}^3, g_j)$，满足 $M_j^3 \xrightarrow{\text{VADB}} M_\infty$ 和 $M_j^3 \xrightarrow{\mathcal{VF}} M_\infty$，使得

$$R^j \geq 6-\frac{1}{j},\ \operatorname{width}(M_j^3)\geq 4\pi,\ \operatorname{diam}\left(M_j^3\right)\leq D,\ and\ \operatorname{vol}\left(M_j^3\right)\leq V,$$

对某些常数 D、$V>0$，且 M_∞ 是标准单位圆的3-球面。然而，该序列在GH-拓扑下没有收敛子序列。

在 [Sor+21 中，Sormani 在备注 9.4]，中指出，有人构造出一个包含越来越多、越来越细的井的球面序列，并使其满足猜想 1.3 的假设，这种可能性是可信的。定理 B′ 通过构造这样一个序列，部分回答了这一问题；该序列满足猜想 1.3 的所有假设，唯独不满足最小面积的界限。



FIGURE 2. 一个含有越来越多细井的球面序列，在 VADB 意义下以及 $\mathcal{VF}$ 意义下收敛到一个球面，但在 GH 拓扑中没有收敛子列

证明上述定理的主要工具是一些新的构造命题，这些命题在第4节中得到证明。我们改进了 Gromov 和 Lawson 在 [GL80] 中的弯曲论证。

最初，[GL80] 中的构造用于构造具有正标量曲率的隧道，例如证明两个具有正标量曲率的流形的连通和也具有正标量曲率。对于具有常正截面曲率的流形，Dodziuk、Basilio 和 Sormani 在 [BDS18] 中改进了这一构造，使得在保持正标量曲率的同时，能够控制隧道的体积和直径。Dodziuk 在 [Dod20] 中进一步改进了这一构造，将正截面曲率条件替换为正标量曲率条件。本文中，我们构造井与隧道，使得当流形的标量曲率有下界时，可以附加一个井或隧道，同时仅将该下界降低任意小的量，并保持直径和体积的界。

新的井构造使我们能够推广 Sormani 和 Wenger[SW11，例 A.11] 中的构造：构造一个在 $\mathcal{F}$-意义下收敛到非相对紧空间的流形序列。特别是，我们能够构造一个球面序列，其标量曲率大于 $\kappa \geq 0$，直径一致有界，体积也一致有界，并且该序列在 $\mathcal{VF}$-意义下收敛到一个非相对紧的极限。为构造该序列，我们将一系列越来越细的井附加到一个球面上（见图 3）。

定理 C. 存在一个黎曼流形的收敛序列 $M_j^n = (\mathbb{S}^n, g_j)$,$n \geq 3$, 满足 $M_j^n \xrightarrow{\mathcal{VF}} M_\infty$

$$R^j \geq \kappa, \ \operatorname{diam}\left(M_j^n\right) \leq D, \ and \ \operatorname{vol}\left(M_j^n\right) \leq V,$$

对于某些非负常数 κ、D、V，且 M_∞ 非相对紧。



FIGURE 3. 一个带有越来越多细井的球面序列，在 $\mathcal{VF}$-意义下收敛到一个非相对紧的极限。

新的隧道构造使我们能够将 [BDS18]和 [BS21] 中的缝合构造推广到更一般的情形。Basilio、Dodziuk 和 Sormani [BDS18]使用缝合流形研究了 Gromov 提出的以下问题：什么是最弱的收敛概念，使得一列标量曲率 $R^j \geq \kappa$ 非负的黎曼流形 M_j^n 子列收敛到一个极限 M_∞，而该极限可能不是流形，但在某种适当的广义意义下具有大于 κ 的标量曲率? 他们证明，当 $\kappa = 0$ 存在一列具有非负标量曲率的黎曼流形，而其极限不具有非负广义标量曲率时，广义标量曲率定义为

$$wR(p_0) := \lim_{r \to 0} 6(n+2) \frac{\operatorname{vol}_{\mathbb{E}^n} B(0,r) - \mathcal{H}^n(B(p_0,r))}{r^2 \cdot \operatorname{vol}_{\mathbb{E}^n} B(0,r)} \geq 0 \tag{1.1}$$

对于极限空间。

注 1.4。对于一个标量曲率为 R 的黎曼流形（M^n, g），我们看到对于所有$p \in M^n$，都有 wR（p）$= R$（p）。

我们能够针对任意 κ为 Gromov 的问题给出类似的答案。特别地，对于任意 κ，存在一列逐渐紧密缝合的流形，其中每个流形的标量曲率都大于 κ。此外，这列逐渐紧密缝合的流形将在 $\mathcal{F}$-意义下收敛于一个拉回度量空间（参见 [BS21 的第 2] 节，其中讨论了此类空间），该空间在拉回点处不具有大于或等于 κ 的广义标量曲率。

定理 D. 存在一个流形序列 $M_j^n = (M^n, g_j)$，其标量曲率$R^j \geq \kappa - \frac{1}{j}$ 在 $\mathcal{F}$意义下收敛到一个度量空间 M_∞。此外，存在一点 $p_0 \in M_\infty$，使得

$$wR(p_0) := \lim_{r\to 0} 6(n+2)\frac{\mathrm{vol}_{\mathbb{E}^n} B(0,r) - \mathcal{H}^n(B(p_0,r))}{r^2 \cdot \mathrm{vol}_{\mathbb{E}^n} B(0,r)} = -\infty \tag{1.2}$$

最后，新的隧道构造使我们能够推广 Basilio、Kazaras 和 Sormani [BKS20] 的构造。他们利用具有正标量曲率的细长隧道，构造了一个流形序列，该序列在 $\mathcal{F}$意义下收敛到一个不含测地线的空间。类似地，对于任意 $\kappa > 0$，我们都能构造一个标量曲率下界为 κ 的流形序列，其极限不是测地空间。

定理 E. 存在一个闭定向黎曼流形序列 (M_j^n, g_j),$n \geq 3$，其标量曲率为 $R^j > \kappa > 0$，且对应的积分流空间在内在平坦意义下收敛到

$$M_\infty = \left(N, d_{\mathbb{E}^{n+1}}, \int_N\right),$$

其中 N 是曲率为$n\ ^{2\kappa}_{n-1()}$ 的圆形 n球面，而 $d_{\mathbb{E}^{n+1}}$是由 N 标准嵌入到 $\mathbb{E}^{n+1}$所诱导的欧几里得距离。此外， M_∞ 不是局部测地的。

	Properties of M_j	Property of the limit, M_∞	Type of convergence 最	Does
定理 A	$R^j > n(n-1) - \frac{1}{j}$	表明.....的必要性 MinA 下界 在猜想 1.1 中。	$\mathcal{VF}, \mathcal{F}$	Yes
定理 A′	$R^j > 6 - \frac{1}{j}$ 宽度$(M_j) \geq 4\pi$	反例 猜想 1.2。	$\mathcal{VF}, \mathcal{F}$	Yes
定理 B	$R^j > n\ (n-1)\ -\frac{1}{j}$	没有 GH 收敛 子序列。	VADB $\mathcal{VF}$， $\mathcal{F}$	?
定理 B′	$R^j > 6 - \frac{1}{j}$ 宽度$(M_j) \geq 4\pi$	没有 GH 收敛 子序列。	VADB, $\mathcal{VF}, \mathcal{F}$	?
定理 C	$R^j > \kappa > 0$	不相对紧。	$\mathcal{VF}, \mathcal{F}$	?
定理 D	$R^j > \kappa$ ($R^j > 0$, [BDS18])	广义标量 曲率为负 处于无穷远处。	$\mathcal{F}$	Yes
定理 E	$R^j > \kappa > 0$ ($R^j > 0$, [BKS20])	没有两个点 由测地线连通。	$\mathcal{F}$	Yes

Table 1. 这里总结了本文中构造的例子。

本文结构如下。第3节讨论背景，包括一些与黎曼流形不同收敛概念相关的定义和定理。第4节证明本文的主要构造命题：命题 4.1（构造井）和命题 4.2（构造隧道）。第5节利用命题 4.2 证明定理 A 和 A′。第6节利用命题 4.1 证明定理 B、B′ 和 C。最后，在第7节和第8节，我们讨论如何运用这些构造命题来推广缝合流形的构造，以及构造一列其极限不含任何测地线的光滑流形。

2. Acknowledgements

作者谨此感谢 Marcus Khuri 和 Raanan Schul 在完成这一成果的过程中给予的宝贵指导与鼓励。作者还要感谢 Christina Sormani 的有益讨论，以及她提出的构造与 Llarull 刚性定理相关例子的建议。作者衷心感谢西蒙斯几何与物理中心和石溪大学提供的支持，本论文的部分研究工作即在此完成。本研究部分获得了美国国家科学基金会资助项目 DMS-2104229 和美国国家科学基金会资助项目 DMS-2154613 的支持。

3. Background

本节将回顾两种黎曼流形之间的不同类型的收敛。

3.1. 格罗莫夫–豪斯多夫收敛。这里将回顾两个度量空间之间的格罗莫夫–豪斯多夫距离。Gromov 将度量空间中两个子集之间的豪斯多夫距离这一概念加以推广，从而定义了两个度量空间之间的这种距离。更多详情请参阅 [Gro99] 。

Th两个度量空间（X_1, d_1）和（X_2, d_2）之间的格罗莫夫–豪斯多夫距离 is

$$d_{\mathrm{GH}}((X_1, d_1), (X_2, d_2)) = \inf_Z \{d_H^Z(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))\}$$

其中，下确界取遍所有完备度量空间（Z, d^Z）以及所有保持距离的映射 $\phi_i : X_i \to Z$。如果一个度量空间（X_j, d_j）在 GH 意义下收敛于度量空间（X_∞, d_∞），则称

$$d_{\mathrm{GH}}((X_j, d_j), (X_\infty, d_\infty)) \to 0$$

此外，如果 μ_j 和 μ_∞ 分别是 X_j 和 X_∞ 上的测度，那么深谷 [Fuk87] 引入了度量测度收敛这一概念，用于度量测度空间。如果（X_j, d_j, μ_j）在度量测度（mGH）意义下收敛于度量测度空间（$X_\infty, d_\infty, \mu_\infty$），则要求其在 GH 意义下收敛，并且

$$\phi_{j*}\mu_j \to \phi_{\infty *}\mu_\infty \text{ weakly as measures in } Z.$$

我们注意到，由于每个黎曼流形（M, g）都具有自然距离函数和与之关联的自然测度，因此二者都定义了两个黎曼流形之间的距离。

在下述定理中，Gromov 刻画了紧致度量空间序列何时包含一个在 GH 意义下收敛的子序列。

定理 3.1。 对于满足(X_j, d_j) 且直径$(X_j) < D < \infty$的紧致度量空间序列，以下条件等价：

(i) 存在一个收敛子列。*(ii)* 存在函数 $N_1 : (0, \alpha) \to (0, \infty)$，使得 $Cap_j(\epsilon) \leq N_1(\epsilon)$ *(iii)* 存在函数 $N_2 : (0, \alpha) \to (0, \infty)$，使得 $Cov_j(\epsilon) \leq N_2(\epsilon)$，其中 $Cap_j(\epsilon) =$ 不相交的 $\frac{\epsilon}{2}$-球在 X_j 中的最大数量，$Cov_j(\epsilon) =$ 覆盖 X_j 所需的 ϵ-球的最少数量

3.2. **内禀平坦收敛**。本节将回顾 Sormani-Wenger 在两个积分流空间之间定义的内在平坦距离。Sormani 和 Wenger [SW11] 定义了内在平坦距离，它推广了欧几里得空间中流的平坦距离概念。为此，他们采用 Ambrosio 和 Kirchheim 将 Federer 和 Fleming 的整流流推广到度量空间的理论。有关任意度量空间中的流的更多细节，请参阅 [AK00]；有关积分流空间和内在平坦距离的更多细节，请参阅 [SW11]。

设 (Z, d^Z) 是一个完备度量空间。用 $\mathrm{Lip}(Z)$ 和 $\mathrm{Lip}_b(Z)$ 分别表示 Z 上实值 Lipschitz 函数的集合，以及 Z 上有界实值 Lipschitz 函数的集合。

定义 3.2 ([AK00],定义 3.1)**.** 我们称一个多线性泛函

$$T : \mathrm{Lip}_b(Z) \times [\mathrm{Lip}(Z)]^m \to \mathbb{R}$$

如果满足以下性质，则称其为完备度量空间 (Z, d) 上的 m 维流。

(i) 局部性：$T(f, \pi_1, \ldots, \pi_m) = 0$ 若存在且满足 i，使得 π_i 在 $\{f \neq 0\}$ 的某个邻域上为常数。(ii) 连续性：对于满足 $\mathrm{Lip}(\pi_i) \leq 1$ 的 π_i 的逐点收敛，T 连续。(iii) 有限质量：存在 X 上的有限博雷尔测度 μ，使得

$$|T(f, \pi_1, \ldots, \pi_m)| \leq \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Lip}(\pi_i) \int_Z |f| d\mu \tag{3.1}$$

对于任意 $(f, \pi_1, \ldots, \pi_m)$。

我们称满足 (3.1) 的最小测度为 T 的质量测度，并记作 $||T||$。现在可以定义许多与流相关的概念。$\mathbf{M}(T) = ||T||(Z)$ 定义为 T 的质量，而 Z 上 m-流 T 的典范集为

$$\mathrm{set}(T) = \left\{ p \in Z \;\middle|\; \liminf_{r \to 0} \frac{||T||(B(p, r))}{r^m} > 0 \right\}.$$

The 流 T 的边界定义为 ∂T：$\mathrm{Lip}_b(X) \times [\mathrm{Lip}(X)]^{m-1} \to \mathbb{R}$，其中

$$\partial T(f, \pi_1, \ldots, \pi_{m-1}) = T(1, f, \pi_1, \ldots, \pi_{m-1}).$$

给定 Lipschitz 映射 ϕ: $Z \to Z'$，我们可以通过定义将 Z 上的流 T 推前为 Z' 上的流 $\phi_\# T$，

$$\phi_\# T(f, \pi_1, \ldots, \pi_m) = T(f \circ \phi, f \circ \pi_1, \ldots, f \circ \pi_m).$$

一个 m-流在 Z 上的标准示例如下：

$$\phi_\#[[\theta]](f, \pi_1, \ldots, \pi_m) = \int_A (\theta \circ \phi)(f \circ \phi) d(\pi_1 \circ \phi) \wedge \cdots \wedge d(\pi_m \circ \phi),$$

其中 $\phi:\ \mathbb{R}^m \to Z$ 是双 Lipschitz 的，且 $\theta \in L^1(A,\ \mathbb{Z})$。如果存在一列可数个双 Lipschitz 映射 $\phi_i:\ A_i \to X$，其中 $A_i \subset \mathbb{R}^m$ 是相对紧的博雷尔可测集，且这些映射的像两两不相交，并且存在权函数 $\theta_i \in L^1(A_i,\ \mathbb{Z})$，使得

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i\#}[[\theta_i]].$$

此外，我们称边界也是整数可求整流的整数可求 rectifiable 流为积分流。我们将 Z 上积分 m-流的空间记为$\mathbf{I}_m(Z)$。两个积分流 T_1、 $T_2 \in \mathbf{I}(Z)$之间的平坦距离为

$$d_F^Z(T_1,T_2) = \inf\{\mathbf{M}(U)+\mathbf{M}(V) \mid U \in \mathbf{I}_m(X), V \in \mathbf{I}_{m+1}(X), T_2 - T_1 = U + \partial V\}.$$

若三元组（$X,\ d,\ T$）满足（$X,\ d$）是度量空间，且_ _$T \in \mathbf{I}_m(X)$，其中 X是 X的完备化，并令 set$(T) = X$，则称该三元组为积分流空间。两个积分流空间（$X_1,\ d_1,\ T_1$）和（$X_2,\ d_2,\ T_2$）之间的内在平坦（$\mathcal{F}$）距离为

$$d_{\mathcal{F}}((X_1,d_1,T_1),(X_2,d_2,T_2)) = \inf_Z\{d_F^Z(\phi_{1\#}T_1,\phi_{2\#}T_2)\}$$

其中，下确界取遍所有完备度量空间（$Z,\ d^Z$）以及等距嵌入ϕ_1: ($\bar{X}_1,\ d_1$) $\to$($Z,\ d^Z$) 和 ϕ_2: ($\bar{X}_2,\ d_2$) $\to$($Z,\ d^Z$)。注意，若（$X_1,\ d_1,\ T_1$）和（$X_2,\ d_2,\ T_2$）是预紧积分流空间，且满足

$$d_{\mathcal{F}}((X_1,d_1,T_1),(X_2,d_2,T_2)) = 0$$

那么，($X_1,\ d_1,\ T_1$) 与 ($X_2,\ d_2,\ T_2$) 之间存在保流等距映射；也就是说，存在一个等距映射 $f:\ X_1 \to X_2$，其延拓 $f:\ X_1 \to X_2$ 将流推前为: $_f_{\#}T_1 = T_2$。我们称一列 ($X_j,\ d_j,\ T_j$) 预紧积分流空间在 $\mathcal{F}$-意义下收敛到 ($X_\infty,\ d_\infty,\ T_\infty$)，如果

$$d_{\mathcal{F}}((X_j,d_j,T_j),(X_\infty,d_\infty,T_\infty)) \to 0.$$

此外，如果 $\mathbf{M}(T_i) \to \mathbf{M}(T_\infty)$，那么我们称 ($X_j,\ d_j,\ T_j$) 在保体积内禀平坦（$\mathcal{VF}$）意义下收敛到 ($X_\infty,\ d_\infty,\ T_\infty$)。注意，我们可以将紧黎曼流形 ($M^n,\ g$) 视为预紧积分流空间 ($M^n,\ d_g,\ \int_{M^n} dvol_g$)，其中 d_g 是该黎曼流形上的自然距离函数，而对流形的积分 $\int_{M^n} dvol_g$ 可视为一个积分流。此外，$\mathbf{M}(M^n)$ =体积 (M^n)。Lakzian 和 Sormani 在 [LS13]中估计了两个微分同胚流形之间的内禀距离:

定理 3.3. 设 $M_1^n = (M^n, g_1)$和 $M_2^n = (M^n, g_2)$是定向的相对紧黎曼流形，其子区域 $U_j \subset M_j^n$微分同胚，并且存在微分同胚 $\psi_j:\ U \to U_j$，使得对所有 $v \in TU$，我们都有

$$\frac{1}{(1+\epsilon)^2}\psi_1^* g_1(v,v) < \psi_2^* g_2(v,v) < (1+\epsilon)^2 \psi_1^* g_1(v,v).$$

我们定义以下量

(i) $D_{U_j} = \sup\{\mathrm{diam}_{M_j}(W) : W \text{ is a component of } U_j\}$.
(ii) *Define a to be a number such that* $a > \frac{\arccos(1+\epsilon)^{-1}}{\pi}\max\{D_{U_1}, D_{U_2}\}$.
(iii) $\lambda = \sup_{x,y\in U} |d_{M_1}(\psi_1(x),\psi_1(y)) - d_{M_2}(\psi_2(x),\psi_2(y))|$.
(iv) $h = \sqrt{\lambda\left(\max\{D_{U_1}, D_{U_2}\} + \frac{\lambda}{4}\right)}$.

(v) $\bar{h} = \max\left\{h, \sqrt{\epsilon^2 + 2\epsilon}D_{U_1}, \sqrt{\epsilon^2 + 2\epsilon}D_{U_2}\right\}$.

那么， M_1^n 与 M_2^n 之间的内在平坦距离有界：

$$d_{\mathcal{F}}(M_1, M_2) \leq \left(2\bar{h} + a\right)\left(\mathrm{vol}_m(U_1) + \mathrm{vol}_m(U_2) + \mathrm{vol}_{m-1}(\partial U_1) + \mathrm{vol}_{m-1}(\partial U_2)\right) + \mathrm{vol}_m(M_1 \setminus U_1) + \mathrm{vol}_m(M_2 \setminus U_2).$$

此外，Sormani [Sor18]在$\mathcal{F}$-收敛的框架下证明了以下阿尔泽拉–阿斯科利定理。

定理 3.4. 固定 $L > 0$。假设 $M_j = (X_j, d_j, T_j)$ 是$j \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$和 $M_j \xrightarrow{\mathcal{F}} M_\infty$的积分流空间，且 $F_j\colon X_j \to W$是映入紧致度量空间 W的 ***L-Lipschitz*** 映射，则存在一个子序列收敛到一个 ***L-Lipschitz*** 映射 $F_\infty\colon X_\infty \to W$。具体而言，存在该子序列的等距嵌入 $\phi_j : X_j \to Z$，使得$d_F^Z(\phi_{j\#}T_j, \phi_{\infty\#}T_\infty) \to 0$，并且对于任意收敛到 $p \in X_\infty$ 的序列 $p_j \in X_j$，

$$d_Z(\phi_j(p_j), \phi_\infty(p)) \to 0,$$

其像收敛

$$d_W(F_j(p_j), F_\infty(p)) \to 0.$$

3.3. **距离下方体积收敛**。 Allen、Perales 和 Sormani 在 [APS20]中提出了一种新的流形收敛概念，称为体积上界与距离下界（VADB）收敛。该概念基于体积–距离刚性定理：如果两个黎曼流形之间存在一个 C^1-微分同胚 $F : M \to N$ ，且该映射不增距离，那么 vol (N) $\leq$vol (M)；此外，若等号成立，则这两个流形等距。

定义 3.5。 若无边界黎曼流形序列 $M_j^n =$(M^n, g_j) 在 VADB 意义下收敛到黎曼流形 $M_\infty^n =$(M^n, g_∞)，则

(i) 体积 (M_j^n) $\to$体积 (M_∞^n)。(ii) 直径 (M_j^n) $\leq D$。(iii) 存在一个 C^1-微分同胚 $\Psi_j\colon M_\infty^n \to M_j^n$，使得对于所有 p， $q \in M_\infty^n$，我们有

$$d_j(\Psi_j(p), \Psi_j(q)) \geq d_\infty(p, q).$$

我们还记录了来自 [APS20] 的以下引理，它指出，VADB-收敛定义中关于距离函数的上述条件可以转化为关于黎曼度量的条件。

引理 3.6。 设 $M_1^n =(M^n, g_1)$和 $M_0^n =(M^n, g_0)$为黎曼流形，且 $F{:}M_1^n \to M_0^n$ 是一个 C^1-微分同胚。则

$$g_0(dF(v), dF(v)) \leq g_1(v, v) \qquad \textit{for all } v \in TM_1^n$$

当且仅当

$$d_0(F(p), F(q)) \leq d_1(p, q) \qquad \textit{for all } p, q \in M_1^n.$$

最后，我们记录下列来自 [APS20] 的定理，该定理描述了 VADB-收敛与 $\mathcal{VF}$-收敛之间的关系。

定理 3.7。 若 $M_j^n =(M^n, g_j)$和 $M_\infty^n =(M^n, g_\infty)$是紧致定向黎曼流形，且 $M_j^n \xrightarrow{\mathrm{VADB}} M_\infty^n$，则 $M_j^n \xrightarrow{\mathcal{VF}} M_\infty^n$。

4. Wells and Tunnels

本节将证明两个主要的新技术命题：命题 4.1（构造井）和命题 4.2（构造隧道）。它们改进了 Gromov-Lawson [GL80], 、Basilio、Dodziuk、Sormani [BDS18], 以及 Dodziuk [Dod20]的构造。我们构造井与隧道，并在保持标量曲率接近附加井所在流形的标量曲率的同时，控制体积和直径。命题 4.1（构造井）允许我们从标量曲率为 $R^M \geq \kappa$ 的黎曼流形 M 中移除一个球，再粘入一个井，从而构造出新的黎曼流形 N；此外， M 和 N 在粘合区域之外等距，且 N 的标量曲率 R^N 满足 $R^N \geq \kappa - \epsilon$ ，其中ϵ可以任意小。命题 4.2（构造隧道）允许我们通过隧道连接两个流形，进行类似的构造。因此，给定一个满足 $R^M \geq \kappa$的黎曼流形 M ，我们可以移除两个球并粘入一条隧道，从而构造出一个满足$R^P \geq \kappa - \epsilon$ 的黎曼流形 P ，其中 ϵ可以任意小。

命题 4.1 (构造井**)**。 设(M^n, g)， $n \geq 3$是一个标量曲率为 R^M的黎曼流形。设 $\delta > 0$ 足够小， $j \in \mathbb{N}$，且 $d > 0$。若 $R^M \geq \kappa$在$(p, 2\delta)$ 上的(M, g)中的一个球内，则我们可以构造一个井 $W_j = (B_g(p, 2\delta)\, g_j)$ 以及一个新的完备黎曼流形(N^n, h)，

$$N^n = M^n, \qquad h|_{M\setminus B_g(p,2\delta)} = g|_{M\setminus B_g(p,2\delta)}, \qquad h|_{B_g(p,2\delta)} = g_j|_{B_g(p,2\delta)}.$$

此外，以下性质成立：

(i) W_j 的标量曲率 R^j满足 $R^j > \kappa - \frac{1}{j}$。(ii) $g_j|_E = g|_E$，其中$(p, 2\delta) \setminus B_g$ (p, δ) 被视为 W_j的一个子集。(iii) 存在一个与 j 和 d 无关的常数 $C > 0$ ，使得

$$\operatorname{diam}(W_j) < C(\delta + d) \quad and \quad \operatorname{vol}(W_j) < C(\delta^n + d\delta^{n-1}).$$

(iv) N 的标量曲率为 $R^N > \kappa - \frac{1}{j}$。 –

命题 4.2 (构造隧道**)**。 设 (M^n, g)、 $n \geq 3$ 为一个标量曲率为 R^M 的黎曼流形。设 $\delta > 0$ 足够小， $j \in \mathbb{N}$，且 $d \geq 0$。若 $R^M \geq \kappa$ 位于 (M^n, g) 中的两个球 $B_g(p, 2\delta)$ 和 $B_g(p', 2\delta)$ 上，那么我们可以构造一个新的完备黎曼流形 P^n：移除两个球，并粘接上与 $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$ 微分同胚的圆柱区域 (T_j, g_j)，

$$P^n = M^n \setminus \big(B_g(p, 2\delta) \cup B_g(p', 2\delta)\big) \sqcup T_j.$$

此外，还满足以下性质：

(i) T_j 的标量曲率 R^j 满足 $R^j > \kappa - \frac{1}{j}$。(ii) $g_j|_{E'} = g|_E$ 和 $g_j|_{E'} = g|_{E'}$，其中 $E = B_g(p, 2\delta) \setminus B_g(p, \delta)$ 以及 $E' = B_g(p', 2\delta) \setminus B_g(p', \delta)$ 均与 P 的子集相对应。(iii) 存在一个与 j 和 d 无关的常数 $C > 0$ ，使得

$$\operatorname{diam}(T_j) < C(\delta + d) \quad and \quad \operatorname{vol}(T_j) < C(\delta^n + d\delta^{n-1}).$$

（iv） P的标量曲率为 $R^P > \kappa - \frac{1}{j}$。–

我们改编了 [Dod20] 中的证明。井和隧道将构造为余维一子流形。该子流形将由一条曲线定义，而这条曲线将

控制子流形的几何。首先，我们说明曲线如何定义子流形，以及它如何影响子流形的几何。其次，我们仔细构造这条曲线，使子流形能够继承所需的性质。

具体而言，构造将遵循以下大纲。首先，我们将描述如何根据一条曲线定义一个子流形，并用与该曲线相关的量来表示标量曲率。其次，我们将仔细构造一条 C^1-曲线 γ，并用它来定义一个子流形，作为井或隧道的雏形。第三，我们调整 γ 的构造，使所得流形成为一个井。第四，我们描述平滑过程，使 γ 成为一条 C^∞-曲线。第五，我们构造一个井，并检查它是否具有所需的性质。第六，我们采用类似的步骤，构造一个具有所需性质的隧道。

4.1. 由曲线定义的子流形。设 (M^n, g) 是一个紧致黎曼流形，其标量曲率为 $R^M \geq \kappa$。设 $\delta > 0$ 和 $B = B(p, 2\delta)$ 是 M 中的一个测地球。考虑黎曼乘积 $(X, g_X) = (\mathbb{R} \times B, dt^2 + dr^2 + g_r)$。设 $\rho \in B$ 是一条从 p 到 ∂B 的测地半径，并定义 $S = \mathbb{R} \times \rho$，它是 $\mathbb{R} \times B$ 的一个全测地子流形，坐标为 (t, r)。设 γ 是 S 中一条待定的光滑曲线。最后，设 $\Sigma = \{(y, q) \in X : (y, ||q||_g) \in \gamma\}$ 是 (X, g_X) 的一个子流形，配备诱导度量，其中 $||\cdot||_g$ 是相对于 g 从 p 到 q 的距离。现在我们要计算 Σ 的标量曲率。为此，我们需要引用 [Dod20] 中的以下引理：

引理 4.3。超曲面 $\mathbb{S}^{n-1}(\epsilon)$ 在 B 中的主曲率均具有 $\frac{1}{-\epsilon} + O(\epsilon)$ 的形式，其中 ϵ 足够小。此外，设 g_ϵ 为 $\mathbb{S}^{n-1}(\epsilon)$ 上的诱导度量，且令$g_{rd,\epsilon}$为曲率为 $\frac{1}{\epsilon^2}$ 的圆度量。那么，当 $\epsilon \to 0$ 时，在 C^2拓扑下，$\frac{1}{\epsilon^2} g_\epsilon \to \frac{1}{\epsilon^2} g_{rd,\epsilon} = \overline{g_{rd}}$，并且 $||g_{rd} - \frac{1}{\epsilon^2} g_\epsilon|| \leq \epsilon^2$。

现在来计算 Σ的标量曲率，固定 $q \in \Sigma \cap S$。令 $e_1, \ldots, e_n$为 $T_q(\Sigma)$的一组正交规范基，其中 e_1 切向于 γ。注意，对于 $\Sigma \cap S$中的点， ν在 X 中相对于 W 的法向量，与 S中相对于 γ 的法向量相同。

根据高斯方程：

$$R^X(X, Y, Z, U) = R^\Sigma(X, Y, Z, U) - A(X, U)A(Y, Z) + A(X, Z)A(Y, U)$$

我们看到

$$K^\Sigma_{ij} = K^X_{ij} + \lambda_i \lambda_j.$$

其中， λ_i 是分别对应于 e_i 和 K^Σ_{ij} 的主曲率，而 K^X_{ij} 是相应的截面曲率。我们注意到，$\lambda_1 = k$ 其中 k 是 γ的测地曲率。对于$i = 2, \ldots, n$ 根据引理 4.3，我们看到

$$\begin{aligned}
\lambda_i &= \langle \nabla_{\partial_i} \nu, \partial_i \rangle \\
&= \langle \nabla_{\partial_i} \cos\theta \partial_t + \sin\theta \partial_r, \partial_i \rangle \\
&= \cos\theta \langle \nabla_{\partial_i} \partial_t, \partial_i \rangle + \sin\theta \langle \nabla_{\partial_i} \partial_r, \partial_i \rangle \\
&= \sin\theta \langle \nabla_{\partial_i} \partial_r, \partial_i \rangle \\
&= \left(\frac{1}{-r} + O(r) \right) \sin\theta,
\end{aligned}$$

其中， θ 是 ν 与 t轴之间的角。现在注意，

$$K^X_{1j} = R^X(e_j, e_1, e_1, e_j) = R^X(e_j, \cos\theta \partial_r, \cos\theta \partial_r, e_j) = \cos^2\theta K^M_{\partial_r, j}.$$

对于 $i \neq 1$ 和 $j \neq 1$

$$K^X_{ij} = R^X(e_j, e_i, e_i, e_j) = \ K^M_{i,j}.$$

由于

$$R^\Sigma = \sum_{i \neq j} K^\Sigma_{ij}$$

我们看到

$$\begin{aligned} R^\Sigma = R^M &- 2\mathrm{Ric}^M(\partial_r, \partial_r)\sin^2\theta \\ &+ (n-2)(n-1)\left(\frac{1}{r^2} + O(1)\right)\sin^2\theta \\ &- (n-1)\left(\frac{1}{r} + O(r)\right)k\sin\theta. \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.2. 构造曲线。定义井 W的曲线构造与定义隧道 T 的曲线构造非常相似。首先，我们将构造一条曲线，用来定义一个子流形 Σ，可将其视为井或隧道的前身。

我们想要构造一条曲线 γ，使得所得流形 Σ 对任意$j \in \mathbb{N}$ 都满足 $R^\Sigma > \kappa - \frac{1}{j}$。我们首先将 γ 构造成由圆弧组成的分段曲线，然后使这条曲线光滑化。为此，我们将指定 γ 的测地曲率 $k(s)$；根据 [Gra98]，中的定理 6.7，我们知道 $k(s)$ 决定了 γ。γ 的单位切向量和曲率为

$$\frac{d\gamma}{ds} = (\sin\theta, -\cos\theta) \qquad \text{and} \qquad k = \frac{d\theta}{ds}.$$

因此，如果 $\gamma(s)$ 在 $s \leq s'$ 上有定义，且 $s \geq s'$ 的 $k(s)$ 已知，则有 $\gamma(s) = (t(s)\ r(s))$，其中

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \theta(s') + \int_{s'}^{s} k(u)du \\ t(s) &= t(s') + \int_{s'}^{s} \sin\theta(u)du \\ r(s) &= r(s') - \int_{s'}^{s} \cos\theta(u)du. \end{aligned} \tag{4.2}$$

现在，我们开始构造 γ。固定 $j \in \mathbb{N}$。令 $\delta_0 < \delta$，并令 $(0,\ \delta_0)$ 为 $(t,\ r)$ 平面上的一点。接下来，将 γ 的初始线段定义为从 $(0,\ 2\delta)$ 到 $(0,\ \delta_0)$ 的线段，其中 $s \in [-2\delta, 0]$。将下一段定义为曲率为 $k_0 = 1$ 的圆弧，它在 $(0,\ \delta_0)$ 处与 r 轴相切；令 γ 从 0 变化到 $s_0 \leq \frac{\delta_0}{2}$，其中 s_0 的选取满足 $R^\Sigma > \kappa - \frac{1}{j}$，并且对于所有 $s \leq s_0$，都有 $\frac{\sin\theta(s_0)}{8r(s_0)} < 1$。注意，由于 $\theta(0) = 0$，且根据标量曲率公式 (4.1)，s_0 存在。接下来，我们证明一个引理，它给出了控制标量曲率的 γ 条件。

引理 4.4。如果 δ_0 足够小，并且

$$\frac{\sin\theta(s)}{4r(s)} > k(s) \ for\ s \geq s_0, \tag{4.3}$$

那么 $R^\Sigma > \kappa$。

证明。 由 (4.1) 可知，如果 $k \le 0$ 那么

$$\begin{aligned} R^{\Sigma} &= R^{M} - 2\mathrm{Ric}^{M}(\partial_r, \partial_r)\sin^2\theta \\ &\quad + (n-2)(n-1)\left(\frac{1}{r^2} + O(1)\right)\sin^2\theta \\ &\quad - (n-1)\left(\frac{1}{r} + O(r)\right)k\sin\theta. \end{aligned} \tag{4.4}$$

因此，第三项和第四项将非负。通过将 $\delta_0 > r$ 取得足够小，第三项和第四项将占主导地位，从而得到 $R^{\Sigma} > \kappa$。

现在，若 $k > 0$，将 (4.1) 的右侧改写后可得

$$\begin{aligned} R^{\Sigma} &= \frac{(n-2)(n-1)}{2r^2}\sin^2\theta + \left(\frac{(n-2)(n-1)}{2r^2} - 2\mathrm{Ric}^{M}(\partial_r, \partial_r) + O(1)\right)\sin^2\theta \\ &\quad + \frac{-2(n-1)k}{r}\sin\theta + \left(\frac{(n-1)}{r} - O(r)\right)k\sin\theta \\ &\quad + R^{M}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

因此，只要将 $\delta_0 > r$ 取得足够小，第二项和第四项就为正；并且根据假设，我们有

$$\frac{\sin\theta}{4r} > k$$

这意味着

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2r^2}\sin^2\theta + \frac{-2(n-1)k}{r}\sin\theta > 0,$$

因此 $R^{\Sigma} > \kappa$. □

因此，在继续构造 γ 时，我们将确保满足 (4.3)。现在，我们将在 $[s_0, s_1]$ 上用曲率为 $k_1 = $正弦$\theta(s_0)\,8r(s_0)$ 的圆弧延伸 γ，其中 $s_1 - s_0 = \frac{r_0}{2}$，且其中$r(s_0) = r_0$。令 $\theta(s_0) = \theta_0$。由 (4.2)，首先可知 $\sin\theta(s)$ 单调递增，而 $r(s)$ 单调递减，因此 $[s_0, s_1]$

$$\frac{\sin\theta(s)}{4r(s)} > \frac{\sin\theta_0}{4r_0} > \frac{\sin\theta_0}{8r_0} = k_1.$$

其次，我们看到 γ 不与 t 轴相交，因为 $s_1 - s_0 = \frac{r_0}{2}$；第三，我们有

$$\theta(s_1) - \theta_0 = k_1(s_1 - s_0) = \frac{\sin\theta_0}{8r_0}\frac{r_0}{2} = \frac{\sin\theta_0}{16}.$$

现在我们进行归纳。定义：

$$s_i = s_{i-1} + \Delta s_i, \qquad \Delta s_i = \frac{r_{i-1}}{2}, \qquad r_i = r(s_i), \qquad \theta_i = \theta(s_i), \qquad k_i = \frac{\sin\theta_{i-1}}{8r_{i-1}}.$$

由于 $\theta(s)$ 单调递增，我们有 $\theta_i - \theta_{i-1} = $正弦$\frac{\theta_{i-1}}{16} >$正弦$\frac{\theta_0}{16}$，因此

$$\theta_i \ge \theta_0 + i\frac{\sin\theta_0}{16}.$$

因此，θ_i无限增大，所以定义 m使得 $\theta_{m-1} <\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) \le \theta_m$。重新定义 s_m，使得 θ_m: $=\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \bar{\theta}$。注意 $\Delta s_m \le \frac{r_{m-1}}{2}$。

现在再延伸一个圆弧。为此，我们需要定义 $k_{m+1} > 0$ 和 $s_{m+1} = s_m + \Delta s_{m+1}$。我们添加一个圆弧，直到 $\theta_{m+1} = \frac{\pi}{2}$。根据 θ 的定义，存在一个 k_{m+1} 使得 $1 - \sin\bar{\theta} < k_{m+1}\frac{r_m}{2} < \sin\bar{\theta}$，并且根据 (4.2) 我们知道

$$\begin{aligned} r_{m+1} &= r_m - \int_{s_m}^{s_{m+1}} \cos\theta(u)du \\ &= r_m - \int_{s_m}^{s_{m+1}} \cos\left(s_m + k_{m+1}(u - s_m)\right) du \\ &= r_m - \frac{1}{k_{m+1}}\left(\sin\theta_{m+1} - \sin\theta_m\right) \\ &= r_m - \frac{1}{k_{m+1}}\left(1 - \sin\bar{\theta}\right) \\ &> \frac{r_m}{2}. \end{aligned}$$

和 $k_{m+1} < \frac{\text{正弦}\,\bar{\theta}}{4r_m}$。

注 4.5。到目前为止，曲线 γ 既适用于井的构造，也适用于隧道的构造。然而，从这里开始，γ 的构造对于井和隧道略有不同。现在我们继续进行井的构造，并在小节 *4.6* 中稍后讨论隧道构造。

4.3. **调整曲线以构造井**。现在我们将细化 γ 的构造，以便构造一个井。我们希望延伸一条长度为 $d > 0$、斜率为负的直线，并且不让 γ 与 t-轴相交。根据介值定理，存在一个 $\hat{s} \in (s_m,\ s_{m+1})$，使得 $\theta(\hat{s}) = \theta$，其中

$$\begin{cases} \max\left\{\bar{\theta},\, \cos^{-1}\left(\frac{r_{m+1}}{2}\right)\right\} < \widehat{\theta} < \frac{\pi}{2} & \text{if } d \le 1 \\ \max\left\{\bar{\theta},\, \cos^{-1}\left(\frac{r_{m+1}}{2d}\right)\right\} < \widehat{\theta} < \frac{\pi}{2} & \text{if } d > 1 \end{cases} \tag{4.6}$$

因为 $\theta_{m+1} = \frac{\pi}{2}$。

重新定义 s_{m+1}，使得 $s_{m+1} = \hat{s}$ 且 $\theta_{m+1} = \theta$。通过在 $[s_{m+1}, s_{m+1} + d]$ 上令 $k = 0$，将 γ 延伸至 $[s_{m+1}, s_{m+1} + d]$。此外，注意到根据 (4.2)，在该区间上有 $\theta(u) \equiv \theta_{m+1}$，并且

$$\begin{aligned} r(s_{m+1} + d) &= r_{m+1} - \int_{r_{m+1}}^{r_{m+1}+d} \cos\theta(u)du \\ &= r_{m+1} - d\cos\theta_{m+1} \\ &\ge r_{m+1} - \frac{r_{m+1}}{2} \\ &> 0. \end{aligned}$$

设 $s_{m+1} + d = s_{m+2}$ 和 $\theta(s_{m+1} + d) = \theta_{m+2}$。现在，我们在 $[s_{m+2}, s_{m+3}]$ 上延伸一段测地曲率为负的小圆弧，使得 $\theta(s_{m+3}) = 0$。取

$$k_{m+3} < \frac{-2\sin\theta_{m+2}}{r_{m+2}}.$$

由于，

$$\theta(s)=\theta_{m+2}+\int_{s_{m+2}}^{s}k_{m+3}du=\theta_{m+2}+k_{m+3}(s-s_{m+2}).$$

我们有

$$\begin{aligned}r(s_{m+3})&=r_{m+2}-\int_{s_{m+2}}^{s_{m+3}}\cos\theta(u)du\\ r_{m+3}&=r_{m+2}-\frac{1}{k_{m+3}}\left(\sin\theta_{m+3}-\sin\theta_{m+2}\right)\\ r_{m+3}&=r_{m+2}+\frac{1}{k_{m+3}}\sin\theta_{m+2}\\ &>0.\end{aligned}$$

我们可以通过设置 $k_{m+4}=0$，将 γ 上的 $[s_{m+3},s_{m+4}]$ 延伸为一条垂直直线，其中 s_{m+4} 的选取满足 $r(s_{m+4})=0$。

由于 γ 以弧长为参数，我们注意到，对 s_{m+4} 的界也是对弧长的界。在接下来的引理中，我们证明 s_{m+4} 的一个上界。

引理 4.6. 存在一个与 j 和 d 无关的常数 $0<C_1<1$，使得

$$\frac{r_i}{r_{i-1}}\leq C_1$$

对于 $1\leq i\leq m-1$

证明. 由 (4.2) 和中值定理可得

$$r_i=r_{i-1}-\int_{s_{i-1}}^{s_i}\cos\theta(u)du=r_{i-1}-\Delta s_i\cos\xi_i=r_{i-1}\left(1-\frac{\cos\xi_i}{2}\right)$$

¯对于某个 $\xi_i\in[s_{i-1},s_i]$.。回想 $\theta\geq\xi_i$，对于 $1\leq i\leq m-1$，我们可知

$$\frac{r_i}{r_{i-1}}\leq 1-\frac{\cos\bar{\theta}}{2}=\frac{21}{26}.$$

□

引理 4.7。存在一个与 j 和 d 无关的常数 C_2，使得 $s_{m+4}\leq C_2\delta_0+d$，这意味着 γ 的长度有界于 $C_2\delta_0+d$.

证明。我们回顾一下，对于 $1\leq i\leq m$, $\Delta s_i\leq\frac{r_{i-1}}{2}$，因此

$$\begin{aligned}s_m&=2\delta-\delta_0+s_0+\Delta s_1+\cdots+\Delta s_m\\ &\leq 2\delta+s_0+\frac{1}{2}\left(r_0+r_1+\cdots+r_{m-1}\right)\\ &\leq 2\delta+s_0+\frac{r_0}{2}\left(1+C_1+\cdots+C_1^{m-1}\right)\\ &\leq 3\delta+\frac{\delta_0}{2}\left(\frac{1}{1-C_1}\right)\\ &\leq\frac{28}{5}\delta\end{aligned}\tag{4.7}$$

现在，我们注意到，由 (4.2) 和 (4.6) 可得：

$$\Delta s_{m+1} \leq \frac{1}{k_{m+1}}\left(\frac{\pi}{2}-\bar{\theta}\right) < r_m \frac{\frac{\pi}{2}-\bar{\theta}}{1-\sin\bar{\theta}} \leq \frac{\frac{\pi}{2}-\bar{\theta}}{1-\sin\bar{\theta}}\delta_0 = 13\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)\right)\delta_0.$$

由（4.2）可得

$$\theta_{m+3} = \theta_{m+2} + k_{m+3}\Delta s_{m+3}.$$

因此,

$$\Delta s_{m+3} = \frac{\theta_{m+2}}{-k_{m+3}} \leq \frac{2r_{m+2}\theta_{m+2}}{\sin\theta_{m+2}} \leq \frac{\pi}{\sin\bar{\theta}}\delta_0 = \frac{13\pi}{12}\delta_0 \tag{4.8}$$

¯因为 $\theta_{m+2} \leq \frac{\pi}{2}$、 $r_{m+2} < \delta_0$ 和 $\theta < \theta_{m+2}$。

由构造可得,

$$\Delta s_{m+2} = d \qquad \text{and} \qquad \Delta s_{m+4} \leq \delta_0.$$

因此,

$$\begin{aligned} s_{m+4} &= s_0 + \Delta s_1 + \cdots + \Delta s_m + \Delta s_{m+1} + \Delta s_{m+2} + \Delta s_{m+3} + \Delta s_{m+4} \\ &\leq C_2\delta + d. \end{aligned}$$

□

4.4. 定义井的曲线平滑化。到目前为止，我们已将 $k(s)$ 构造为分段常值函数，$k\big|_{(s_i,s_{i+1}]} = k_{i+1}$ 所得曲线 γ 是 C^1 且分段C^∞。

我们首先对 γ 进行平滑化，即在 $[0, s_{m+3}]$ 上平滑 $k(s)$。设 $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ 是一个光滑函数，使得 g 在 $s<0$ 时为 0，在 $s>1$ 时为 1，并在 $[0,1]$ 上严格递增。令$h(x) = g(1-x)$ 和 $H = \int_0^1 h(x)dx$。设 $\tilde{k}(s)$ 为如下定义的光滑函数

$$\widetilde{k}(s) = \begin{cases} g\left(\frac{s}{\alpha}\right) & s \in \left[-\frac{\delta_0}{2}, \alpha\right] \\ 1 & s \in [\alpha, s_0 - \alpha] \\ (1-k_1)h\left(\frac{s-s_0}{\alpha}\right) + k_1 & s \in [s_0-\alpha, s_0] \\ k_1 & s \in [s_0, s_1] \\ (k_{i+1}-k_i)\, g\left(\frac{s-s_i}{\alpha}\right) + k_i & s \in [s_i, s_i+\alpha] \\ k_{i+1} & s \in [s_i+\alpha, s_{i+1}] \\ k_{m+1}h\left(\frac{s-s_{m+1}}{\alpha}\right) & s \in [s_{m+1}, s_{m+1}+\alpha] \\ 0 & s \in [s_{m+1}+\alpha, s_{m+2}] \\ -k_{m+3}h\left(\frac{s-s_{m+2}}{\alpha}\right) + k_{m+3} & s \in [s_{m+2}, s_{m+2}+\alpha] \\ k_{m+3} & s \in [s_{m+2}+\alpha, s_{m+3}], \end{cases}$$

其中 $1 \leq i \leq m$。

我们注意到，对于每个 i， α 都相同，其值将在稍后确定。现在，令 θ 为与 k 相关联的角函数。由 (4.2) 可知，由 $\tilde{k}(s)$ 定义的光滑曲线 $\tilde{\gamma}(s) =(\tilde{t}(s)\ \tilde{r}(s))$ 将在 α 趋于零时，在 $\left[\frac{\delta_0}{2}, s_{m+3}\right]$ 上一致收敛于 γ。此外，当 α 趋于零时,¯θ 将一致收敛于 θ。因此，取足够小的 α，使得 $\theta(s_{m+1})$ 满足 (4.6)；这样，我们仍将用一条负斜率的直线延伸。

Note

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}(s_{m+2}+\alpha) &= \tilde{\theta}(s_{m+2}) + \int_{s_{m+2}}^{s_{m+2}+\alpha} -k_{m+3}h\left(\frac{u-s_{m+2}}{\alpha}\right) + k_{m+3}du \\ &= \tilde{\theta}(s_{m+2}) + \alpha k_{m+3}(1-H) \\ &> 0.\end{aligned}$$

经过平滑过程后，$\tilde{\theta}(s_{m+3})$ 可能不再大于 0。现在我们来解决这个问题。

如果 $\tilde{\theta}(s_{m+3}) \le 0$，就取一个 $s^* \in (s_{m+2}+\alpha, s_{m+3}]$，使得 $0 < \tilde{\theta}(s^*) < \alpha$；根据介值定理，这样的值确实存在。

~~如果 $\tilde{\theta}(s_{m+3}) \le 0$，我们可以重新定义 s_{m+3}，使得 $\tilde{\theta}(s_{m+3}) > 0$。~~根据介值定理，取一个 $s^* \in (s_{m+2}+\alpha, s_{m+3}]$ 使得 $0 < \tilde{\theta}(s^*) < \alpha$。

在两种情况下，将 $\tilde{k}$ 在 $[s_{m+3}, s_{m+3}+2\beta]$ 上定义，并注意到 $0 < \tilde{\theta}(s^*) < \alpha$。

$$\tilde{k}(s) = \begin{cases} -k_{m+3}g\left(\frac{s-s_{m+3}}{\beta}\right) + k_{m+3} & s \in [s_{m+3}, s_{m+3}+\beta] \\ 0 & s \in [s_{m+3}+\beta, s_{m+3}+2\beta], \end{cases}$$

其中 $\beta = \frac{\tilde{\theta}(s_{m+3})}{-k_{m+3}(1-H)}$ 使得

$$\int_{s_{m+3}}^{s_{m+3}+\beta} \tilde{k}(s)ds = -\tilde{\theta}(s_{m+3}).$$

这使得 $\tilde{\theta}(s_{m+3}+2\beta) = 0$.

由 (4.2) 可知，由 $\tilde{k}(s)$ 定义的光滑曲线 $\tilde{\gamma}(s) = (\tilde{t}(s), \tilde{r}(s))$ 将在 $[-2\delta, s_{m+3}]$ 上一致收敛到 γ，当 α 趋于零时。

此外，θ 将在 θ 上一致收敛到 α，当 α 趋于零时；此外，当 α 趋于零时，β 也趋于零。最后，取足够小的 α，使得 $\tilde{r}(s_{m+3}+2\beta) > 0$。将 $\tilde{\gamma}$ 在 $[s_{m+3}+2\beta, L]$ 上末端的线段延长，其中 L 有定义，使得 $\tilde{r}(L) = 0$。注意，$|L-(s_{m+3}+2\beta)| < \delta_0$。

4.5. 附加井。 我们构造了一条位于 $[-2\delta, L]$ 上的光滑曲线 $\tilde{\gamma}$，其起点和终点都是竖直线段。定义

$$\tilde{W}_j = \{(y,q) \in X : (y, ||q||_M) \in \tilde{\gamma}\}$$

并令 g_j为诱导度量，即 $\tilde{g}_j = \tilde{\iota}_j^*(dt^2+g)$，其中 $\tilde{\iota}_j\colon \bar{W}_j \to \mathbb{R}\times B$是包含映射。

引理 4.8。 对于足够小的 α，我们将证明 $\tilde{\gamma}$ 在 $[-2\delta, L]$上满足 $R^{W_j} \geq \kappa - \frac{1}{j}$。此外，长度 $\tilde{\gamma}$ 有界于 $C_3\delta + d$。

证明。 根据构造， $\tilde{\gamma}$ 按弧长参数化，因此由引理 4.7 可知， $\tilde{\gamma}$ 的长度不超过 $C_3\delta_0 + d$。

在 $[-2\delta, 0]$上，我们有

$$\begin{aligned} R^{\tilde{W}_j} &= R^M - 2\mathrm{Ric}^M\left(\partial_{\tilde{r}}, \partial_{\tilde{r}}\right)\sin^2\tilde{\theta} + (n-2)(n-1)\left(\frac{1}{\tilde{r}^2} + O(1)\right)\sin^2\tilde{\theta} \\ &\quad - (n-1)\left(\frac{1}{\tilde{r}} + O(r)\right)\tilde{k}\sin\tilde{\theta} \\ &= R^M \\ &> \kappa - \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

在 $[0, s_0]$上，由于我们选择了 s_0 和构造，因此有 $k_1 < 1$。

$$\begin{aligned} R^{\tilde{W}_j} &= R^M - 2\mathrm{Ric}^M\left(\partial_{\tilde{r}}, \partial_{\tilde{r}}\right)\sin^2\tilde{\theta} + (n-2)(n-1)\left(\frac{1}{\tilde{r}^2} + O(1)\right)\sin^2\tilde{\theta} \\ &\quad - (n-1)\left(\frac{1}{\tilde{r}} + O(r)\right)\tilde{k}\sin\tilde{\theta} \\ &\geq \kappa - 2\mathrm{Ric}^M\left(\partial_{\tilde{r}}, \partial_{\tilde{r}}\right)\sin^2\tilde{\theta} + (n-2)(n-1)\left(\frac{1}{\tilde{r}^2} + O(1)\right)\sin^2\tilde{\theta} \\ &\quad - (n-1)\left(\frac{1}{\tilde{r}} + O(r)\right)\sin\tilde{\theta} \\ &> \kappa - \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

˜因为当 α 足够小时，我们有 θ 与 θ 一致接近，且 $\tilde{r}$ 与r一致接近。

在 $[s_0, s_1]$ 上，我们有 $\tilde{k}(s) = k_1$，因此

$$\frac{\sin\tilde{\theta}(s)}{4\tilde{r}(s)} - \tilde{k}(s) > 0$$

当 α足够小时。

对于 $[s_i, s_{i+1}]$，当 $1 \leq i \leq m$ 时，我们有

$$\frac{\sin\tilde{\theta}(s)}{4\tilde{r}(s)} - \tilde{k}(s) = \left(\frac{\sin\tilde{\theta}(s)}{4\tilde{r}(s)} - k_{i+1}\right) + \left(k_{i+1} - \tilde{k}(s)\right)$$

因此，当 α 足够小时，第一项为正，因为 正弦θ (s) 4r (s) $> k(s)$，而第二项根据构造为正。

对于 $[s_{m+1}, s_{m+2}]$，我们有

$$\frac{\sin\tilde{\theta}(s)}{4\tilde{r}(s)} \geq \frac{\sin\tilde{\theta}(s_{m+1})}{4\tilde{r}(s_{m+1})} > k_{m+1} > \tilde{k}(s).$$

˜第一个不等式成立，因为 正弦θ (s) 4r̃ (s) 是单调不减的。第二个不等式已在上文˜验证。第三个不等式成立，因为根据构造， $k_{m+1} > k(s)$。

对于 $[s_{m+2}, L]$，根据构造，我们有 $\tilde{k}(s)$ 非正，因此

$$\frac{\sin\tilde{\theta}(s)}{4\tilde{r}(s)} \geq \tilde{k}(s).$$

因此，根据引理 4.4，我们证明了 $R^{\tilde{W}_j} > \kappa - \frac{1}{j}$ 在 $\left[-\frac{\delta_0}{2}, L\right]$ 上。

□

接下来我们将证明井的直径界和体积界，但在证明这些界之前，我们需要回顾以下事实。

命题 4.9. 设 $B(p,r)$ 是闭黎曼流形(M^n, g)中的一个半径为 r 的测地球。那么存在依赖于 g 的常数 C, r_0，使得对任意 p 且对所有 $r \le r_0$，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_g(B(p,r)) &\le Cr^n \\ \mathrm{vol}_g(\partial B(p,r)) &\le Cr^{n-1}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

引理 4.10. 存在一个与 j, d 无关的常数 $C(g)$，使得 的直径 直径 (W_j) 和体积 体积(W_j) 满足

$$d \le \mathrm{diam}\,(\tilde{W}_j) < C(\delta + d) \ and \ \mathrm{vol}\,(\tilde{W}_j) < C(\delta^n + d\delta^{n-1}).$$

证明。设 $p, q \in W_j$ 为两点，并设 x 为 W_j 尖端处的点，即对应于 $\tilde{\gamma}(L)$。根据三角不等式和引理 4.3，我们有

$$d_{g_j}(p,q) \le d_{g_j}(p,x) + d_{g_j}(x,q) \le \mathrm{length}(\tilde{\gamma}) + \mathrm{length}(\tilde{\gamma}) \le C(\delta + d).$$

根据构造，我们有 $d \le$ 直径 (W)。因此，$d \le$ 直径 $(W) < C(\delta + d)$。

根据引理 4.8 和命题 4.9，适当缩小 δ 后，我们有

$$\mathrm{vol}\,(\tilde{W}_j) = \int_{\frac{-\delta_0}{2}}^{L} |\partial B(p, r(s))|_{\tilde{g}_j} ds \le \int_{\frac{-\delta_0}{2}}^{L} C\delta^{n-1} ds \le C(\delta^n + \delta^{n-1} d).$$

□

引理 4.11. $(\tilde{W}_j, \tilde{g}_j)$ 与 $W_j = (B_g(p, 2\delta)\ g_j = dF_j^2 + g)$ 等距，且 W_j 光滑地粘接到 M 上。

证明。令 $B = B_g(p, 2\delta)$，并回顾一下，$||q||_g$ 是 q 到 p 在 B 中的距离。考虑函数 $F_j : B \to \mathbb{R}$, $F_j(q) = \tilde{t}\left(\tilde{r}^{-1}(||q||_g)\right)$。根据构造，$\tilde{t}$ 是光滑的，且 $\tilde{r}'(s) < 0$，因此 $\tilde{r}^{-1}$ 是光滑的。此外，$||q||$ 在 p 之外是光滑的。因此，p 之外的 F 是光滑的。在 p 的一个邻域内，根据构造，$(\tilde{t}(s)\ \tilde{r}(s))$ 是一条竖直线段，因此在该邻域内 $\tilde{t} \circ \tilde{r}^{-1} \equiv const$，从而 F_j 处处光滑。此外，根据构造，我们有

$$\tilde{g}_j|_E = g|_E \text{ where } E = B_g(p, 2\delta) \setminus B_g(p, \delta).$$

设 $\Gamma_j = \{(t,\ p) \in X :\ F_j(p) = t\}$。注意到 $\Gamma_j \subset X$ 并且 $\Gamma_j = W_j$。设 $g'_j = (\iota'_j)^*(dt^2 + g)$，其中 $\iota'_j : \tilde{W}_j \to \mathbb{R} \times B$是包含映射 $\iota'_j(t,\ p) = (t,\ p)$。设 $id_j : \Gamma_j \to \tilde{W}_j$为恒等映射，并得出结论 $g'_j = \tilde{g}_j$。考虑微分同胚 $\Phi_j : B \to \Gamma_j$，其中 $\Phi_j(q) \mapsto (F_j(q)\ q)$。因此

$$\Phi_j^* g'_j = \Phi^*((\iota'_j)^* g'_j) = dF_j^2 + g.$$

□

至此，命题 4.1（构造井）中的 N 构造完成。

4.6. 构造隧道。我们将从注 4.5 继续构造隧道。令 γ 与注 4.5 之前的定义相同。可以使用上述相同的平滑过程，将 γ 平滑为一条光滑曲线。我们将滥用记号，也将这条平滑后的曲线称为 $\tilde{\gamma}$ 。

设 $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ 为光滑函数，使得 g 在 $s<0$时为 0，在 $s>1$时为 1，并且在 $[0,1]$ 上严格递增。设 $h(x) = g(1-x)$ 和 $H = \int_0^1 h(x)dx$。设 $\tilde{k}(s)$ 为定义如下的光滑函数

$$\widetilde{k}(s) = \begin{cases} g\left(\frac{s}{\alpha}\right) & s \in \left[-\frac{\delta_0}{2}, \alpha\right] \\ 1 & s \in [\alpha, s_0 - \alpha] \\ (1-k_1)h\left(\frac{s-s_0}{\alpha}\right) + k_1 & s \in [s_0-\alpha, s_0] \\ k_1 & s \in [s_0, s_1] \\ (k_{i+1}-k_i)\, g\left(\frac{s-s_i}{\alpha}\right) + k_i & s \in [s_i, s_i+\alpha] \\ k_{i+1} & s \in [s_i+\alpha, s_{i+1}] \end{cases}$$

其中 $1 \leq i \leq m$。

注意，通过平滑过程，$\theta(s_{m+1})$ 不再能等于 $\frac{\pi}{2}$。现在我们来修正这一点。注意，当 α 趋于零时，$\theta(s)$ 一致收敛于 $\theta(s)$。取足够小的 α，使得 $\theta(s_m+\alpha) < \frac{\pi}{2}$.

我们希望 $\theta(s_{m+1}) < \frac{\pi}{2}$。因此，若不然，则 $\theta(s_{m+1}) \geq \frac{\pi}{2}$。取一个 $s^* \in (s_m+\alpha, s_{m+1}]$，使得 $\frac{\pi}{2} - \alpha < \theta(s^*) < \frac{\pi}{2}$，这由介值定理可知存在，并重新定义 $s_{m+1} = s^*$。

令 $s_{m+2} = s_{m+1} + 2\beta$。在 $[s_{m+1}, s_{m+2}]$ 上，定义

$$\tilde{k}(s) = \begin{cases} -k_{m+1} g\left(\frac{s-s_{m+1}}{\beta}\right) + k_{m+1} & s \in [s_{m+1}, s_{m+1}+\beta] \\ 0 & s \in [s_{m+1}+\beta, s_{m+2}], \end{cases}$$

其中 $\beta = \frac{\frac{\pi}{2} - \theta(s_{m+1}) - k_{m+1}(1-H)}{}$ 使得

$$\int_{s_{m+1}}^{s_{m+1}+\beta} \tilde{k}(s)ds = \frac{\pi}{2} - \tilde{\theta}(s_{m+1}).$$

Thus, $\tilde{\theta}(s) = \frac{\pi}{2}$ 对所有 $s \in [s_{m+1}+\beta, s_{m+2}]$ 均成立。此外，我们已将 γ 平滑化为 $\tilde{\gamma}$.

定义半隧道 $A_j = \{(y,\ q) \in X : (y,\ ||q||_g) \in \tilde{\gamma}\}$，并赋予其诱导度量。之后，我们将把两个半隧道粘合在一起，构成一个隧道 T_j。在下面的引理中，我们记录了 A_j 的性质，其证明与前面的证明类似。

引理 4.12。存在一个与 j 无关的常数 C，使得 (A_j, h_j) 满足以下条件

(i) A_j 的标量曲率 R^j 满足 $R^j > \kappa - \frac{1}{j}$。(ii) 的直径 $< C(\delta)$。
(iii) 的体积 $< C(\delta^n)$。(iv) A_j 光滑地连接到 $M \setminus B_g(p, 2\delta)$
(v) 新的流形 $(M \setminus B_g(p, 2\delta)) \sqcup A_j$ 是一个带边界流形。

我们已经构造了隧道的一半，A_j。现在希望修改 A_j 末端的度量，使其成为圆球面与一个区间的乘积度量。我们采用与 [Dod20]相同的步骤。令 $a = t(s_{m+1}+\beta)$、$b = t(s_{m+2})$和 $c = r(s_{m+2})$。注意，

根据构造， $\{(q,\ y)$上的诱导度量 $\in X:\ a \le t \le b\}$ 为 $h_0 = g_c + dt^2$，其中g_c 是 $\mathbb{S}^{n-1}(c)$上的诱导度量。令 $h_1 = c^2 g_{rd} + dt^2$ ，其中 g_{rd} 是单位圆球面上的圆度量。令 $\phi(t) = \psi\left(\frac{t-a}{\eta}\right)$，其中 $\psi(u)$是 $[0,1]$上的光滑函数，在零附近为零，在 $u = \frac{3}{4}$ 处递增至 1，并且当 $u > \frac{3}{4}$ 时等于 1。对 $t \in [a,b]$ ，定义度量 h如下:

$$h(q,y) = g_c(q,y) + \phi(t)\left(c^2 g_{rd} - g_c\right) + dt^2.$$

该度量在 h_0 和 h_1之间光滑地过渡。注意

$$h - h_0 = \phi(t)\left(c^2 g_{rd} - g_c\right) = \phi(t)c^2\left(g_{rd} - \frac{1}{c^2} g_c\right)$$

第一阶和第二阶导数分别为 $O(\eta^{-1})$ 和 $O(\eta^{-2})$。因此，根据引理 4.3，我们有 $h - h_0$ 的二阶导数为 $O(\eta^2)$。所以，当 η足够小时， h的标量曲率接近于 h_0 的标量曲率；同样根据引理 4.3，当 η足够小时，其标量曲率大于 $\kappa - \frac{1}{j}$ 。因此，我们改变了 A_j 末端的度量，使其看起来像 $c^2 g_{rd} + dt^2$。于是，给定 M 上的另一个球 $B_g(p',\ 2\delta)$，我们可以构造 A'_j ，使其一端的度量看起来像 $c^2 g_{rd} + dt^2$ ，并具有相同的 c ；方法是在构造中作出与 A_j相同的选择。现在，我们可以立即粘接一个圆柱（$[0,d] \times \mathbb{S}^{n-1},\ dt^2 + c^2 g_{rd}$） ，将 A'_j 连接到 A_j，从而构造出隧道 T_j，连接 $\partial B_g(p',\ 2\delta)$ 和 $\partial B_g(p,\ 2\delta)$。

注意到，圆柱（$[0,d] \times \mathbb{S}^{n-1},\ dt^2 + g_{S^{n-1}}$）的直径和体积分别由 d 和 $C(n)d\delta^{n-1}$ 控制，其中 $C(n)$ 是仅依赖于维数的常数。因此，我们可以得出结论，$\operatorname{diam}(T_j)$ 和 $\operatorname{vol}(T_j)$ 满足命题 4.2 中的界。因此，命题 4.2 的构造至此完成。

5. Manifolds with shrinking tunnels

本节中，我们将利用命题 4.2（构造隧道）构造一列流形，其长隧道越来越细。此外，我们将证明定理 A′ 和 A。

首先，我们需要以下预备结果。

命题 5.1。 存在一列旋转对称流形 $M_j = (\mathbb{S}^n, g_j)$ ， $n \ge 3$，使得 M_j 满足

$$R^j \ge n(n-1) - \frac{1}{j},\ \operatorname{diam}(M_j) \le D,\ \textit{and}\ \operatorname{vol}(M_j) \le V,$$

对于某些常数 $0 < D, V$ ，该序列收敛到 M_∞ ，其为两个n-球面的不交并。

证明。我们将构造 M_j ，使其成为两个标准单位圆 n球面的连通和，并使连接这两个球面的隧道随着 j 增大而变得越来越纤细。根据命题 4.2，我们可以分别从两个球面中去掉一个测地球，然后构造一条连接这两个球面的隧道 T_j。令 $(N,\ h) = (N',\ h') = (\mathbb{S}^n,\ g_{rd})$。令 $j \in \mathbb{N}$、$j \ge 10$、 $d = 30$。定义

$$B_j := B_h\left(p, \frac{2}{j}\right) \subset N,\ \text{and}\ B' := B_{h'}\left(p', \frac{2}{j}\right) \subset N'$$

其中， B_j和B_j'分别是 N， N'中的测地球。根据命题 4.2，我们可以构造一条隧道 T_j，将 ∂B_j 连接到$\partial B_j'$，所得流形 M_j 将具有以下性质：

(i) $M_j = \left((N \sqcup N') \setminus \left(B_j \cup B_j'\right)\right) \sqcup T_j$(ii) $R^j \geq n(n-1) - \frac{1}{j}$. (iii) $M_j \setminus T_j$与 $(N \setminus B_j) \sqcup (N' \setminus B_j')$ 等距。(iv) diam $(M_j) \leq 4\pi + 30$，并且特别地，$\lim_{j\to\infty} \text{vol}\,(M_j) = 2\text{vol}_{g_{rd}}(\mathbb{S}^n)$。

$$2\,\mathrm{vol}_{g_{rd}}(\mathbb{S}^n) - \mathrm{vol}_h(B_j) - \mathrm{vol}_{h'}(B_j') \leq \mathrm{vol}\,(M_j) \leq 2\,\mathrm{vol}_{g_{rd}}(\mathbb{S}^n) + \mathrm{vol}_{g_j}(T_j),$$

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{vol}_h(B_j) = \lim_{j\to\infty} \mathrm{vol}_{h'}(B_j') = \lim_{j\to\infty} \mathrm{vol}_{g_j}(T_j) = 0.$$

根据定理 3.3， M_j与 $N \sqcup N'$ 之间的内在平坦距离为

$$d_{\mathcal{F}}(M_j, N_1 \sqcup N_2) \lesssim \frac{1}{j}\left(\mathrm{vol}_{grd}(\mathbb{S}^n) + \mathrm{vol}_{g_{rd}}(\mathbb{S}^{n-1})\right) + \mathrm{vol}_h(B_j) + \mathrm{vol}_{h'}(B_j') + \mathrm{vol}_{g_j}(T_j).$$

由于 $j \to \infty 0$，我们知道 $\text{vol}_h(B_j)$、$\text{vol}_{h'}(B_j')$ 和 $\text{vol}^{g_j}(T_j)$ 均趋于零。因此，我们得出结论： M_j 在 $\mathcal{VF}$ 意义下收敛到 $N \sqcup N'$。□

注记 5.2。 从命题 *4.2*（构造隧道）中的构造可知，$M_j^n = ([0, D_j] \times \mathbb{S}^{n-1}, g_j)$ 如上定义，是旋转对称的。此外，在 $\{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$和 $\{D_j\} \times \mathbb{S}^{n-1}$附近， M_j^n与标准单位圆 n球面等距。特别地，度量具有形式 $g_j = dt^2 + $正弦$^2(\rho_j(t))g_{\mathbb{S}^{n-1}}$，其中 D_j是M_j 的直径，且对于 ρ_j：$[0, D_j] \to [0, \infty)$，这是一个具有以下性质的光滑函数。回忆一下，$\tilde{\gamma}_j = (\tilde{t}_j(s)\ \tilde{r}_j(s))$ 是引理 *4.12* 中定义半隧道 A_j的曲线。于是

$$\rho(t) = \begin{cases} \hat{r}(t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}D_j\right] \\ \hat{r}(D-t), & t \in \left[\frac{1}{2}D_j, D_j\right] \end{cases} \quad and\ \ \hat{r}(t) = \begin{cases} \pi - t, & t \in \left[0, \pi - \frac{2}{j}\right] \\ \tilde{r}(t + (\delta - \pi)), & t \in \left[\pi - \frac{2}{j}, \frac{1}{2}D\right]. \end{cases}$$

现在我们将构造光滑的 1-利普希茨映射 F_j: $M_j^n \to (\mathbb{S}^n, g_{rd})$。但首先，我们需要以下基于 Mia02 第 3] 节中光滑化的结果。由于我们的引理与 Mia02]中陈述的内容略有不同，因此我们给出一个类似的证明。

引理 5.3。 设 h： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 *L-Lipschitz* 连续函数，满足

$$h(t) = \begin{cases} h_+(t), & t \in (0, \infty) \\ h_-(t), & t \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

其中 h_+ 和 h_- 是光滑函数。那么，当 $\epsilon > 0$ 足够小时，存在一个函数h_ϵ： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得

$$||h_\epsilon(t) - h(t)||_{C^2} \lesssim \epsilon^2,\ \ h_\epsilon'(t) \leq \sup\{h'(t) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},\ \ and\ \ |h_\epsilon'(t)| \leq L.$$

证明。 令 $0 < \epsilon_0 < 1$。我们将把注意力限制在 $(-\epsilon_0, \epsilon_0)$ 上。令 $\varphi \in C_c^\infty([-1, 1])$ 为 $\mathbb{R}$ 中满足以下条件的标准磨光函数

$$0 \leq \varphi \leq 1 \qquad \text{and} \qquad \int_{-1}^{1} \varphi(t)dt = 1.$$

令 $\sigma(t)$ 为另一个满足以下条件的鼓包函数

$$
\begin{aligned}
&0 \le \sigma(t) \le \frac{1}{100} \text{ for } t \in \mathbb{R},\\
&\sigma(t) = \frac{1}{100} \text{ for } |t| < \frac{1}{4},\\
&0 < \sigma(t) \le \frac{1}{100} \text{ for } \frac{1}{4} < |t| < \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

令 $0 < \epsilon < \frac{1}{10}\epsilon_0$。定义 $\sigma_\epsilon(t) = \epsilon^3\sigma\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$.此外，定义

$$
\begin{aligned}
h_\delta(t) &= \int_{\mathbb{R}} h(t-\sigma_\delta(t)s)\varphi(s)ds, \qquad t \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)\\
&= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} h(s)\cdot\frac{1}{\sigma_\delta(t)}\varphi\left(\frac{t-s}{\sigma_\delta(t)}\right)ds, & \sigma_\delta(t) > 0\\ h(t), & \sigma_\delta(t) = 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

现在我们要计算 $h'_\delta(s)$。对于 $|t| > \frac{\epsilon^3}{100}$，——

$$
\begin{aligned}
h'_\epsilon(t) &= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} h(t-\sigma_\epsilon(t)s)\varphi(s)ds\\
&= \int_{\mathbb{R}} h'(t-\sigma_\epsilon(t)s)\left(1 - s\epsilon^2\sigma'\left(\frac{t}{\epsilon}\right)\right)\varphi(s)ds.
\end{aligned}
$$

对于$|t| < \frac{\epsilon}{4}$,

$$
\begin{aligned}
h'_\delta(t) &= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} h(s)\cdot\frac{1}{\sigma_\epsilon(t)}\varphi\left(\frac{t-s}{\sigma_\epsilon(t)}\right)ds\\
&= \int_{\mathbb{R}} h(s)\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sigma_\epsilon(t)}\varphi\left(\frac{t-s}{\sigma_\epsilon(t)}\right)\right)ds\\
&= \int_{\mathbb{R}} h(s)\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{100}{\epsilon^3}\varphi\left(\frac{100(t-s)}{\epsilon^3}\right)\right)ds\\
&= (-1)\cdot\int_{\mathbb{R}} h(s)\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{100}{\epsilon^3}\varphi\left(\frac{100(t-s)}{\epsilon^3}\right)\right)ds\\
&= (-1)\cdot\int_{-\infty}^{0} h_-(s)\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{100}{\epsilon^3}\varphi\left(\frac{100(t-s)}{\epsilon^3}\right)\right)ds\\
&\quad + (-1)\cdot\int_{0}^{\infty} h_+(s)\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{100}{\epsilon^3}\varphi\left(\frac{100(t-s)}{\epsilon^3}\right)\right)ds\\
&= \int_{-\infty}^{0} h'_-(s)\cdot\left(\frac{100}{\epsilon^3}\varphi\left(\frac{100(t-s)}{\epsilon^3}\right)\right)ds\\
&\quad + \int_{0}^{\infty} h'_+(s)\cdot\left(\frac{100}{\epsilon^3}\varphi\left(\frac{100(t-s)}{\epsilon^3}\right)\right)ds\\
&= \int_{\mathbb{R}} h'(s)\cdot\left(\frac{100}{\epsilon^3}\varphi\left(\frac{100(t-s)}{\epsilon^3}\right)\right)ds\\
&= \int_{\mathbb{R}} h'(t-\sigma_\epsilon(t)s)\varphi(s)ds.
\end{aligned}
$$

现在注意，对于 $|t| \leq \frac{\epsilon}{4}$， σ_ϵ 是一个常值函数；因此，对于所有 $t \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$

$$h'_\epsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} h'(t - \sigma_\epsilon(t)s) \left(1 - s\epsilon^2 \sigma' \left(\frac{t}{\epsilon}\right)\right) \varphi(s) ds. \tag{5.2}$$

由（5.1）和（5.2）可得

$$\begin{aligned} ||h_\epsilon(t) - h(t)||_u &\leq \int_{\mathbb{R}} ||h(t - \sigma_\epsilon(t)s) - h(t)||_u \varphi(s) ds \\ &\lesssim \epsilon^3. \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} ||h'_\epsilon(t) - h'(t)||_u &\leq \int_{\mathbb{R}} ||h'(t - \sigma_\epsilon(t)s) - h'(t)||_u \varphi(s) ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left|\left| h'(t - \sigma_\epsilon(t)s) s\epsilon^2 \sigma' \left(\frac{t}{\epsilon}\right) \right|\right|_u \varphi(s) ds \\ &\lesssim \epsilon^3 + \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}} \left|\left| h'(t - \sigma_\epsilon(t)s) \sigma' \left(\frac{t}{\epsilon}\right) \right|\right|_u \varphi(s) ds \\ &\lesssim \epsilon^2. \end{aligned}$$

最后，请注意

$$\begin{aligned} |h'_\epsilon(t)| &= \int_{\mathbb{R}} |h'(t - \sigma_\epsilon(t)s)| \left| \left(1 - s\epsilon^2 \sigma' \left(\frac{t}{\epsilon}\right)\right) \right| |\varphi(s)| ds \\ &\leq L \int_{\mathbb{R}} \left(1 - s\epsilon^2 \sigma' \left(\frac{t}{\epsilon}\right)\right) (\varphi(s)) ds \\ &= L \left(1 - \epsilon^2 \sigma' \left(\frac{t}{\epsilon}\right) \int_{\mathbb{R}} s\varphi(s) ds\right) \\ &\leq L, \end{aligned}$$

其中，第一个不等式在 ϵ 足够小时成立，最后一个不等式则是因为 $s\varphi(s)$ 是奇函数。此外，去掉绝对值重新进行这一计算可得 $h'_\epsilon(t) \leq \sup\{h'(t) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$。□

现在我们可以构造光滑的 1-利普希茨映射 $F_j : M_j^n \to (\mathbb{S}^n, g_{rd})$。

引理 5.4。 存在一个函数 $F_j : M_j^n \to \mathbb{S}^n$， 它是一个 1-利普希茨微分同胚，且 $\deg F_j \neq 0$

证明。 首先定义一个递减的1-Lipschitz函数 $f_j : [0, D_j] \to [0, \pi]$。

$$f_j(t) = \begin{cases} \pi - t, & t \in [0, t_j] \\ a_j(t - t_j) + b_j, & t \in [t_j, D_j], \end{cases}$$

其中，$a_j = \frac{-\pi + t_j}{D_j - t_j}$、 $b_j = \pi - t_j$和 t_j的选取使得 $f_j(t_j) = \frac{1}{10}\rho\left(\frac{1}{2}D_j\right)$。注意， $\rho\left(\frac{1}{2}D_j\right)$是隧道圆柱部分的半径，也是$\rho_j(t)$在 $\left[\frac{\pi}{2}, D_j - \frac{\pi}{2}\right]$上取得的最小值。

根据引理 5.3，通过选取足够小的 ϵ_0 和 ϵ，我们可以将 f_j 光滑化为 $f_{j,\epsilon}$。于是定义 $F_{j,\epsilon}(t, \theta) = (f_{j,\epsilon}(t), \theta)$。由于 $f'_{j,\epsilon}(t) < 0$，且 $f_{j,\epsilon}$ 是双射，因此 $F_{j,\epsilon}$ 是微分同胚。我们要证明，对于所有 $v \in TM_j$

$$F_{j,\epsilon}^* g_{rd}(v, v) \leq g_j(v, v).$$

注意，

$$F_{j,\epsilon}^* g_{rd} = \left(f'_{j,\epsilon}(t)\right)^2 dt^2 + \sin^2(f_{j,\epsilon}(t)) g_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

and

$$g_j = dt^2 + \sin^2(\rho_j(t)) g_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

首先，由 (4.2) 和引理 5.3 可知，对于所有 t, $|f'_{j,\epsilon}(t)| \leq 1$ 。现在我们将证明 $\sin^2(f_{j,\epsilon}(t)) \leq \sin^2(\rho_j(t))$.

在 $[0, \pi - t_j - 20\epsilon]$ 上，由 (4.2) 可得

$$\rho_j(t) = \pi - \int_0^t \cos\left(\theta_j(u)\right) du \geq \pi - t = f_j(t) = f_{j,\epsilon}(t).$$

在 $[\pi - t_j - 20\epsilon, \pi - t_j]$ 上，我们有

$$\rho_j(t) = \pi - \int_0^t \cos\left(\theta_j(u)\right) du > \pi - t = f_j(t)$$

因此，当 ϵ 足够小时，我们有 $f_{j,\epsilon}(t)$ 也满足这个不等式。

在 $\left[\pi - t_j, D_j - \frac{\pi}{2}\right]$ 上，我们有 $f_j(t) \leq \frac{1}{10}\rho\left(\frac{1}{2}D_j\right)$，且 $\frac{1}{10}\rho\left(\frac{1}{2}D_j\right) < \rho_j(t) \leq \frac{\pi}{2}$。因此，在 $\left[0, D_j - \frac{\pi}{2}\right]$ 上，$\sin^2(f_j(t)) \leq \sin^2(\rho_j(t))$。

最后，在 $\left[D_j - \frac{\pi}{2}, D_j\right]$ 上我们有如下结论：$\rho_j(t) = \pi - D_j + t$ 且 $f_{j,\epsilon}(t) = f_j(t) = a_j(t - t_j) + b_j$ 由该构造得到。此外，

$$-f_j(t) + \pi \geq \rho_j(t)$$

因为若我们定义 $\psi_j(t) = \rho_j(t) + f_j(t) - \pi$，那么可以看出 $\psi'(t) \geq 0$ 且 $\psi(D_j) = 0$。我们还注意到，在 $\left[D_j - \frac{\pi}{2}, D_j\right]$ 上，$\frac{\pi}{2} \leq -f_j(t) + \pi \leq \pi$ 且 $\frac{\pi}{2} \leq \rho_j(t) \leq \pi$。因此，我们得出结论：在 $\left[D_j - \frac{\pi}{2}, D_j\right]$ 上，$\sin^2(f_{j,\epsilon}(t)) = \sin^2(-f_{j,\epsilon}(t) + \pi) \leq \sin^2(\rho_j(t))$。

因此，对所有 $v \in TM_j$，我们有

$$F_{j,\epsilon}^* g_{rd}(v, v) \leq g_j(v, v),$$

这意味着

$$\ell_{\mathbb{S}^n}\left(F_{j,\epsilon} \circ c\right) \leq \ell_{M_j}(c)$$

其中 $c\colon [0,1] \to (\mathbb{S}^n, g_{rd})$ 是连接 p 和 q 的路径。这意味着

$$d_{\mathbb{S}^n}\left(F_{j,\epsilon}(p), F_{j,\epsilon}(q)\right) \leq d_{M_j}(p, q).$$

因此，我们有 $F_{j,\epsilon}$ 是 1-利普希茨的。此外，由于 $F_{j,\epsilon}$ 是一个微分同胚，$\deg F_{j,\epsilon} \neq 0$.

□

引理 5.5. 设 $(\mathbb{S}^3, g_1), (\mathbb{S}^3, g_2)$ 是 *3*-球面，且存在一个微分同胚 $F\colon (\mathbb{S}^3, g_1) \to (\mathbb{S}^3, g_2)$，它是 *1*-利普希茨的，并且与恒等映射同伦，那么

$$\operatorname{width}(\mathbb{S}^3, g_2) \leq \operatorname{width}(\mathbb{S}^3, g_1).$$

证明。根据宽度的定义，对于任意 $\delta > 0$，都存在 $\{\Sigma_t\}$，使得

$$\sup_t |\Sigma_t|_1 < \operatorname{width}(\mathbb{S}^3, g_1) + \delta;$$

因此，

$$\operatorname{width}(\mathbb{S}^3, g_2) \leq \sup_t |F(\Sigma_t)|_2 \leq \sup_t |\Sigma_t|_1 \leq \operatorname{width}(\mathbb{S}^3, g_1) + \delta$$

其中，第一个不等式成立是因为 $F(\Sigma_t) \in \Lambda'$，第二个不等式成立是因为 F 是 1-利普希茨的。

□

定理 *A* 的证明。设 M_j 如命题 5.1 所述；因此，$M_j^n \to M_\infty$，其中 M_∞是两个球面的不交并。设 $F_j\colon M_j^n \to \mathbb{S}^n$ 如引理 5.4 所述。由 Arzelà–Ascoli 定理 3.4，存在一个子序列 F_{j_k}，它收敛到一个 1-利普希茨映射

$$F_\infty : M_\infty \to \mathbb{S}^n.$$

这个映射不是黎曼等距映射，因为 $\mathbb{S}^n$ 是连通的，而 $N \sqcup N'$ 不是。 □

定理 *A* 的证明′. 设 M_j^3如命题 5.1 所述；因此，$M_j^3 \to M_\infty$在 $\mathcal{VF}$意义下，其中 M_∞ 是两个球面的不交并。设 $F_j : M_j^3 \to \mathbb{S}^n$ 如引理 5.4 所述，并定义 $F_j(r,\theta) = F_j(D_j - r, \theta)$。考虑微分同胚

$$\Phi : [0, D_j] \times \mathbb{S}^2 \to [0,\pi] \times \mathbb{S}^2, \qquad \Phi(r,\theta) = \left(\frac{\pi}{D_j} r, \theta\right)$$

注意，Φ 是 $([0, D_j] \times \mathbb{S}^{n-1}, \Phi^*(dr^2 + \sin^2(r) g_{\mathbb{S}^{n-1}}))$ 与 $([0,\pi] \times \mathbb{S}^{n-1}, dr^2 + \sin^2(r) g_{\mathbb{S}^{n-1}})$ 之间的等距映射。现在考虑

$$(\Phi^{-1} \circ \tilde{F}_j)(r,\theta) = \left(\frac{D_j}{\pi} f_j(D_j - r), \theta\right).$$

这个映射是一个从 M_j^n 到圆形n-球面的 1-利普希茨保定向微分同胚，并且 $\Phi^{-1} \circ F_j$ 与恒等映射同伦。因此，根据引理 5.5，我们有 $\operatorname{width}(M_j^3) \geq 4\pi$。□

6. 具有许多井的流形

本节中，我们将利用命题 4.1（构造井）来构造一系列具有许多井的流形。此外，我们将证明定理 B′ 和 B。

定理 6.1. 设(M^n, g) 是一个维数为 $n \geq 3$、标量曲率为 $R \geq \kappa$的闭黎曼流形。那么存在一列黎曼流形 $M_j^n = (M^n, g_j)$，使得 $R^j \geq \kappa - \frac{1}{j}$和 M_j^n分别在 VADB-意义和 $\mathcal{VF}$-意义下收敛到 M^n，但在 GH拓扑下没有收敛子列。

证明。定义

$$X_j = \left\{(B(p_i^j, \delta_j), g)\right\}_{i=1}^j$$

为 M^n 中的一族互不相交的测地球，其中 $0 < \delta_j < \frac{1}{j}$ 选得足够小，以便根据命题 4.1，将每个 $B(p_i^j, \delta_j)$ 替换为井 $W_{i,j} = (B(p_i^j, \delta_j) g_j)$，使得每个井的标量曲率都满足 $R^j > \kappa - \frac{1}{j}$。此外，在命题 4.1 中选取 $d = \frac{1}{2}$，使得直径 $\operatorname{diam}(W_{i,j}) \geq \frac{1}{2}$。将所得流形记为 $M_j^n = (M^n, g_j)$。现在注意到

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{vol}_j(M_j^n) = \lim_{j\to\infty} \operatorname{vol}_g(M^n) - \sum_{i=1}^j \operatorname{vol}_g(B(p_i^j, \delta_j)) + \sum_{i=1}^j \operatorname{vol}_j(W_{i,j}).$$

因此，由命题 4.1 和命题 4.9

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{vol}_g(M^n) - jC\delta_j^n \leq \lim_{j\to\infty} \operatorname{vol}_j(M_j^n) \leq \lim_{j\to\infty} \operatorname{vol}_g(M^n) + Cj\left(\delta_j^n + \frac{\delta_j^{n-1}}{2}\right).$$

从而

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{vol}_j\left(M_j^n\right) = \mathrm{vol}_g\left(M^n\right).$$

此外，由命题 4.1 和三角不等式可得

$$\mathrm{diam}\left(M_j^n\right) \le \mathrm{diam}\left((M^n, g)\right) + 2\,\mathrm{diam}\left(W_j\right) \le \mathrm{diam}\left((M^n, g)\right) + 2\left(C + \frac{1}{2}\right).$$

因此，直径一致有界。

考虑恒等映射 $id\colon (M^n, g_j) \to (M^n, g)$。记为 $id^* g_j = g_j$。现在根据构造和引理 4.11，对任意 $p \in W_{i,j}$，有

$$g(v,v) \le g_j(v,v) \text{ for all } v \in T_pM$$

因为 $g_j = dF_j^2 + g$，且若 $p \notin W_{i,j}$，则对所有 $v \in T_pM$，$g(v,v) = g_j(v,v)$。

因此，M_j^n在 VADB 意义下收敛到 (M^n, g)；由定理 3.7 可得，M_j^n在 $\mathcal{VF}$ 意义下收敛到 (M^n, g)。

固定 $\epsilon_0 < \frac{1}{4}$。注意到 $\epsilon_0 < d$，因此 $B(p_i^j, \epsilon_0) \subset M_j^n$互不相交。因此，

$$j < \mathrm{Cov}_j(\epsilon_0)$$

因此，当 $j \to \infty$ 时，我们有 $\mathrm{Cov}_j(\epsilon_0) \to \infty$，所以根据定理 3.1，$M_j$ 不会在 GH 意义下收敛。

□

定理 B 的证明。 考虑圆的 n-球面（$\mathbb{S}^n, g_{rd}$）。根据定理 6.1，我们知道存在一个序列 $M_j = (\mathbb{S}^n, g_j)$，其标量曲率为 $R^j \ge n(n-1) - \frac{1}{j}$，使得$M_j \to (\mathbb{S}^3, g_{rd})$ 在 $VADB$ 意义下以及 $\mathcal{VF}$ 意义下收敛，但在 GH 拓扑中没有收敛子列。此外，恒等映射 $id : (\mathbb{S}^n, g_j) \to (\mathbb{S}^n, g_{rd})$ 是光滑的 1-Lipschitz 微分同胚。□

定理 B 的证明′。 考虑圆度量 3 维球面（$\mathbb{S}^3, g_{rd}$）。由定理 6.1 可知，存在一个序列（$\mathbb{S}^3, g_j$），其标量曲率为 $R^j \ge 6 - \frac{1}{j}$，使得（$\mathbb{S}^3, g_j$）在 $VADB$和 $\mathcal{VF}$意义下 $\to$（$\mathbb{S}^3, g_{rd}$），但在 GH 拓扑中没有收敛子列。此外，恒等映射 id：（$\mathbb{S}^3, g_j$）$\to$（$\mathbb{S}^3, g_{rd}$）是 1-利普希茨的，并且由引理 5.5 可知，宽度（$\mathbb{S}^3, g_j$）$\ge 4\pi$。□

定理 C 的证明。 令 $\kappa > 0$，并令（M^n, g）为曲率为 $\frac{2\kappa}{n(n-1)}$的圆球面。令 $\{p_j\}_{j=1}^{\infty} \subset M^n$ 为一列测地线上的点，收敛到点 p_∞。定义

$$\{B(p_j, \delta_j)\}_{j=1}^{\infty}$$

为 M^n 中一组互不相交的测地球，其中 $0 < \delta_j < \frac{1}{2^j}$ 取得足够小，使得根据命题 4.1，存在一个井 $W_j = (B(p_j, \delta_j), g_j)$，使得每个井的标量曲率都满足 $R^j > 2\kappa\left(1 - \frac{1}{10j}\right) > \kappa$。

设 $\{d_j\}_{j=1}^{\infty} \subset [2, 10]$ 为一个严格递增的正数序列，并在命题 4.1 中选取 $d = d_j$，使得 $\mathrm{diam}(W_j) \ge d_j$。现在定义 M_i^n 为通过用相应的前 i 个井替换前 i 个球而得到的黎曼流形，即，

$$M_i^n = \left(M^n \setminus \bigcup_{j=1}^{i} B(p_j, \delta_j)\right) \sqcup \bigcup_{j=1}^{i} W_j.$$

注意到 M_i^n 的标量曲率严格大于 κ。根据命题 4.1，我们还有

$$\operatorname{diam}(M_i^n) \leq 25C$$

and

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(M_i^n) &\leq \operatorname{vol}(M^n) + \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol}(W_j) \\ &\leq \operatorname{vol}(M^n) + C\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{nj}} + 10\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(n-1)j}}\right) \\ &\leq \operatorname{vol}(M^n) + 11C.\end{aligned}$$

现在我们将 M_∞ 定义为

$$M_\infty = \left(M^n \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B(p_j, \delta_j)\right) \sqcup \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j$$

赋予其诱导长度度量和自然流结构 T_∞。因此，我们有 $\operatorname{vol}(M_i^n) \to \operatorname{vol}(M_\infty)$。令 $E_j \subset W_j$ 为一个以 p_j 为中心、半径为 1 的球，因此 M_∞ 是非紧的，因为它包含无穷多个半径为 1 的互不相交的球。

我们将证明， M_i^n 以一种类似于 [SW11, Example˜A.11]的多对一方式收敛到 M_∞ 。令 $\epsilon_i = d_{M^n}(p_i, p_\infty)$，并注意，如果 $B_i = B(p_\infty, \epsilon_i - \delta_i)$，那么存在一个等距映射，$\varphi\colon V_i \to V_i'$，其中 $U_i = M_i^n \setminus B_i \subset M_i$ 且 $U_i' \subset M_\infty$。根据 [SW11, Lemma A.2],，存在一个度量空间 Z，使得

$$\begin{aligned}d_F^Z(M_i^n, M_\infty) \leq{}& \operatorname{vol}(M_i^n \setminus U_i) + \operatorname{vol}(M_\infty \setminus U_i') \\ &+ \operatorname{vol}(U_i)\left(\sqrt{2\operatorname{diam}_{M_i^n}(\partial U_i)\operatorname{diam}_{M_i^n}(U_i)} + \operatorname{diam}_{M_i^n}(\partial U_i)\right) \\ &+ \operatorname{vol}(U_i')\left(\sqrt{2\operatorname{diam}_{M_i^n}(\partial U_i')\operatorname{diam}_{M_i^n}(U_i')} + \operatorname{diam}_{M_i^n}(\partial U_i')\right).\end{aligned}$$

我们注意到

$$\operatorname{vol}(M_i^n \setminus U_i) \leq \pi(\epsilon_i - \delta_i)^n, \qquad \operatorname{vol}(M_\infty \setminus U_i') \leq C\left(\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{2^{nj}} + 10\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{2^{(n-1)j}}\right).$$

此外，$\operatorname{diam}(\partial U_i)$ 和 $\operatorname{diam}(\partial U_i')$ 都收敛于零。因此，上述不等式右侧在 $i \to \infty$ 时趋于零。由此我们得出， M_i^n在 $\mathcal{VF}$ 意义下收敛到 M_∞ 。□

7. Sewing Manifolds

我们能够推广 Basilio、Dodziuk 和 Sormani 在 [BDS18] 和 [BS21] 中给出的缝合示例。 [BS21] 中提出了两种缝合方法。方法 I 推广了 [BDS18] 中的曲线缝合构造。这里我们将使用命题 4.2（构造隧道）来扩展这一构造。我们从方法 I 开始：该方法指出，给定一个固定的流形，可以将一个紧区域紧密地缝合到一个点上。

命题 7.1。 设(M^n, g) 为完备黎曼流形，且 $A_0 \subset M$ 是一个含有偶数个点 $p_i \in A_0$，$i = 1, \ldots, n$ 的紧子集，这些点周围的球两两不相交

$B(p_i, 2\delta)$ 的标量曲率大于 κ。当 $\delta > 0$ 足够小时，定义 $A_\delta := T_\delta(A_0)$并

$$A'_\delta = A_\delta \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} B(p_i, \delta) \right) \sqcup \bigcup_{i=1}^{\frac{n}{2}} T_i$$

其中 T_i 是命题 *4.2*（构造隧道）中的隧道，它们连接 $\partial B(p_{2j+1}, \delta)$和 $\partial B(p_{2j+2}, \delta)$，其中 $j = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1$。那么，给定任意 ϵ，如有必要，进一步缩小 δ，我们便可构造一个新的完备黎曼流形，(N^n, h)，

$$N^n = (M^n \setminus A_\delta) \sqcup A'_\delta$$

满足

$$\mathrm{vol}\,(A_\delta) - \epsilon \leq \mathrm{vol}\,(A'_\delta) \leq \mathrm{vol}\,(A_\delta) + \epsilon$$

and

$$\mathrm{vol}\,(M) - \epsilon \leq \mathrm{vol}\,(N) \leq \mathrm{vol}\,(M) + \epsilon$$

此外，若 M具有标量曲率 $R^M \geq \kappa$，则 N具有标量曲率 $R^N \geq \kappa - \epsilon$。若 $\partial M \neq \emptyset$，这些球避开边界，且 ∂M 与 ∂N等距。

证明。证明可由 [BDS18 命题 3.1]的证明推出，同时使用命题 4.2（构造隧道）和命题 4.9。□

命题 *7.2*。设 (M^n, g) 是一个完备黎曼流形，且 $A_0 \subset M$。令 $A_a = T_a(A_0)$ 为 A_0 的一个管状邻域。假设存在一个 $a > 0$，使得 A_a 的标量曲率大于 κ。令 $r \in (0, a)$。给定 $\epsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(A_0, \kappa, r, \epsilon) \in (0, r)$，甚至还存在一个依赖于 A_0、κ、ϵ和 r 的 $n = \bar{n}(\bar{n} - 1)$，以及点 p_1、……、$p_n \in A_0$，使得 $B(p_i, \delta)$ 两两不交，从而我们可以将该区域“紧密缝合”，构造一个新的完备黎曼流形 (N^n, h)，

$$N = (M \setminus A_r) \sqcup A'_r,$$

如命题 *7.1* 所示，满足

$$A'_\delta = A_\delta \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{2n} B(p_i, \delta) \right) \sqcup \bigcup_{j=0}^{n-1} T_{2j+1}.$$

此外，

$$\mathrm{vol}\,(A'_r) \leq \mathrm{vol}\,(A_r) + \epsilon$$

and

$$\mathrm{vol}\,(N) \leq \mathrm{vol}\,(M) + \epsilon$$

并且存在一个常数 $c > 0$，使得

$$\mathrm{diam}\,(A'_r) \leq cr.$$

我们称区域 A_0 被任意紧密地缝合。如果 M 具有标量曲率 $R^M \geq \kappa$，那么 N具有标量曲率 $R^N \geq \kappa - \epsilon$。如果 $\partial M \neq \emptyset$，这些球避开边界，并且 ∂M与 ∂N等距。

证明。 证明思路沿用 BS21 命题 3 的证明，并运用命题 4.2、7.1 和引理 4.3。 [6] □

这些结论使我们能够以类似于 BS21] 中的方式，构造一列标量曲率大于 κ 的流形，并使其收敛到一个拉回度量空间。我们回顾 BS21] 中的以下定义。 [[

定义 7.3。 设 (M^n, g) 为一个黎曼流形，其中紧集 $A_0 \subset M$ 的管状邻域为 $A_a = T_a(A_0)$，且满足命题 7.2 的假设。我们可以通过应用命题 7.2，取 $\epsilon = \epsilon_j \to 0$、 $n = n_j \to \infty$ 和 $\delta = \delta_j \to 0$ 来构造其逐渐紧密缝合的流形序列(N_j^n, g_j)，从而得到每个缝合流形 $N^n = N_j^n$ 以及修改区域 $A'_\delta = A'_{\delta_j}$，我们将其简记为 A'_{j° 由于这些序列 N_j 是通过应用命题 7.2 构造的，因此当 M 的标量曲率大于 κ 时，它们的标量曲率大于 $\kappa - \epsilon_j$；而每当 $\partial M \neq \emptyset$ 时，$\partial N_j = \partial M$ 也成立。

定理 7.4。 根据定义 *7.3*，假设 M^n 紧致，且 A_0 是维数为 *1* 到 n 的紧嵌入子流形，则序列 N_j 在 *Gromov-Hausdorff* 意义下和内在平坦意义下收敛到 N_∞。 N_∞ 是将区域 A_0 收缩为一点所得到的度量空间。此外，若 $\mathcal{H}^{n-1}(A_0) = 0$，则 N_j 也在度量测度意义下收敛到 N_∞.

证明。 证明可由 [BS21 的定理 3.8] 的证明结合命题 7.2 得出。

□

现在我们可以证明定理 D。

定理 *D* 的证明。 设 S 是维数为 n、常曲率为 $n^{\kappa}{}_{(n-1)}$ 的单连通空间形式， Σ^m 是一个 m 维常曲率球面， $1 \leq m \leq n-1$。注意到存在从 Σ^m 到 S 的嵌入。设 (N_j^n, g_j) 是由 S 沿嵌入的 Σ^m 缝合而成的流形序列，其中 $\delta = \delta_j \to 0$ 如命题 7.2 所述，且标量曲率为 $R^j \geq \kappa - \frac{1}{j}$。于是由定理 7.4 可得

$$N_j \xrightarrow{mGH} N_\infty \text{ and } N_j \xrightarrow{\mathcal{F}} N_\infty$$

其中， N_∞ 是通过取 S 并将一个 Σ^m 收缩到一点而得到的度量空间。此外，在被收缩的点 $p_0 \in N_\infty$ 处，我们有

$$wR(p_0) = \lim_{r\to 0} 6(n+2)\frac{\text{vol}_{\mathbb{E}^n} B(0,r) - \mathcal{H}^n(B(p_0,r))}{r^2 \cdot \text{vol}_{\mathbb{E}^n} B(0,r)} = -\infty.$$

我们可以看出，这是因为

$$\text{vol}_{N_\infty}(B(p_0,r)) = \mathcal{H}^n_{N_\infty}(B(p_0,r)) = \mathcal{H}^n_{N_\infty}(B(p_0,r)\setminus\{p_0\}) = \mathcal{H}^n_{\mathbb{S}^n_\kappa}(T_r(\mathbb{S}^m)).$$

此外，存在一个常数 $C(n,\ m,\ \kappa)$，使得

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^n_{\mathbb{S}^n_\kappa}(T_r(\Sigma^m))}{Cr^{n-m}} = 1.$$

由此我们得出

$$wR(p_0) = \lim_{r\to 0} 6(n+2)\frac{\omega_n r^n - Cr^{n-m}}{\omega_n r^{n+2}} = -\infty.$$

□

此外，利用命题 4.2，我们将把用于[BS21] 缝合流形的方法 II 扩展到标量曲率有下界的情形。在方法 II 中，给定一个黎曼流形序列，其极限为一个黎曼流形，则可以构造一个新序列，使缝合沿着该序列进行。

定理 7.5。 设 M_j^n是一个紧黎曼流形序列，其中每个流形都包含一个带管状邻域的紧区域 $A_{j,0} \subset M_j^3 \ A_j$，且其标量曲率大于$\kappa$ ，并满足命题 *7.2* 的假设。我们假设 M_j^n在双利普希茨意义下收敛到 M_∞^n ，且区域 $A_{j,0}$ 收敛到紧集$A_{\infty,0} \subset M_\infty^n$ ，这里的收敛是指存在双利普希茨映射

$$\psi_j : M_j^n \to M_\infty^n$$

使得

$$L_j = \log\left(\mathrm{Lip}(\psi_j)\right) + \log\left(\mathrm{Lip}\left(\psi_j^{-1}\right)\right) \to 0$$

且 $\psi_j(A_{j,0}) = A_{\infty,0}$。于是存在 $\delta_j \to 0$ ，并将命题 *7.2* 应用于 $M^n = M_j^n$，以缝合区域 $A_0 = A_{j,0}$与 $\delta = \delta_j$，得到缝合流形 $N^n = N_j^n$，从而得到一个序列 N_j^n，使得

$$N_j^n \xrightarrow{GH} N_\infty \ and \ N_j^n \xrightarrow{\mathcal{F}} N_{\infty,0},$$

其中 $N_{\infty,0} = N_\infty$ ，且 N_∞ 是通过取 M_∞^n 并将区域$A_{\infty,0}$ 压缩为一点而得到的度量空间。

此外，若区域 $A_{j,0}$ 满足 $\mathcal{H}^n(A_{j,0}) = 0$，则序列 N_j^n也在度量测度意义下收敛

$$N_j^n \xrightarrow{mGH} N_\infty.$$

证明。 证明可由 [BS21 定理 5.1] 的证明推出，同时使用命题 7.2 和定理 7.4 □

8. Intrinsic Flat limit with no geodesics

我们能够将 Basilio、Kazaras 和 Sormani 在 [BKS20] 中的结果推广：该结果表明，黎曼流形的内在平坦极限未必是测地完备的。这是命题 4.2（构造隧道）和管道填充技术[BKS20，定理 3.1] 的推论。特别地：

定理 8.1。 存在一列闭定向黎曼流形 (M_j^n, g_j),$n \geq 3$，使得相应的积分流空间在内在平坦意义下收敛到

$$M_\infty = \left(N, d_{\mathbb{E}^{n+1}}, \int_N\right),$$

其中 N 是曲率为 $n\frac{2\kappa}{n-1}$ 的标准 n球面() ，而 $d_{\mathbb{E}^{n+1}}$ 是由 N 到 $\mathbb{E}^{n+1}$的标准嵌入所诱导的欧几里得距离。此外，可以选取 M_j ，使得R^j（ M_j的标量曲率）满足 $R^j \geq 2\kappa\left(1 - \frac{1}{10j}\right) > \kappa$。此外， M_∞ 不是长度空间，也不是局部测地完备的。

References

[AK00] Luigi Ambrosio 和 Bernd Kirchheim。《度量空间中的流》。发表于：*ActaMath.* 185.1（2000年），第 1–80 页。 ISSN：0001-5962。 DOI：10.1007/BF02392711。 URL：https://doi.org/10.1007/BF02392711。[AP20] Brian Allen 和 Raquel Perales。《体积收敛且距离有下界的带边界流形的内在平坦稳定性》。2020年。 DOI：10.48550/ARXIV.2006.13030。 URL：https://arxiv.org/abs/2006.13030。

[APS20] Brian Allen、Raquel Perales 和 Christina Sormani。《体积上界与距离下界》。2020年。 DOI：10.48550/ARXIV.2003.01172。 URL：https://arxiv.org/abs/2003.01172。[BDS18] J. Basilio、J. Dodziuk 和 C. Sormani。《正标量曲率黎曼流形的拼接》。发表于：J. Geom. Anal. 28.4（2018年），第 3553–3602 页。 ISSN：1050-6926。 DOI：10.1007/s12220- 017- 9969- y。 URL：https://doi.org/10.1007/s12220-017-9969-y。[BKS20] J. Basilio、D. Kazaras 和 C. Sormani。《无测地线黎曼流形的内在平坦极限》。发表于：Geom. Dedicata 204（2020年），第 265–284 页。 ISSN：0046-5755。 DOI：10.1007/s10711-019- 00453- 1。 URL：https://doi.org/10.1007/s10711-019-00453-1。[BS21] J. Basilio 和 C. Sormani。《具有正标量曲率的三维流形序列》。发表于：Differential Geom. Appl. 77（2021年），论文编号 101776，共 27 页。 ISSN：0926-2245。 DOI：10.1016/j.difgeo.2021.101776。 URL：https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2021.101776。[Dod20] J ́Jozef Dodziuk。《带估计的 Gromov-Lawson 隧道》。发表于：图与流形上的分析与几何。第 461 卷。伦敦数学学会讲义丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2020年，第 55–65 页。[Fuk87] Kenji Fukaya。《黎曼流形的塌缩与拉普拉斯算子的特征值》。发表于：Invent. Math. 87.3（1987年），第 517–547 页。 ISSN：0020-9910。 DOI：10. 1007/BF01389241。 URL：https://doi.org/10.1007/BF01389241。[GL80] Mikhael Gromov 和 H. Blaine Lawson Jr.《单连通正标量曲率流形的分类》。发表于：《数学年刊》（第 2 辑）111.3（1980年），第 423–434 页。 ISSN：0003-486X。 DOI：10.2307/1971103。 URL：https://doi.org/10.2307/1971103。[Gra98] Alfred Gray。《曲线与曲面的现代微分几何（含 Mathematica）》。第二版。CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，1998年，第 xxiv+1053 页。 ISBN：0-8493- 7164-3。[Gro18] Misha Gromov。《带边界流形的标量曲率：自然问题与人工构造》。2018年。 DOI：10 . 48550 / ARXIV . 1811 . 04311。URL：https://arxiv.org/abs/1811.04311。[Gro99] Misha Gromov。《黎曼与非黎曼空间的度量结构》。第 152 卷。数学进展。基于 1981 年法文原版［MR0682063 (85e:53051)], 附录由 M. Katz、P. Pansu 和 S. Semmes 撰写，Sean Michael Bates 从法文译出。Birkh¨auser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，1999年，第 xx+585 页。 ISBN：0-8176-3898-9。[Lak16] Sajjad Lakzian。《关于直径控制及奇点之外的光滑收敛》。发表于：Differential Geom. Appl. 47（2016年），第 99–129 页。 ISSN：0926-2245。DOI：10.1016/j.difgeo.2016.01.003。 URL：https://doi.org/10.1016/j. difgeo.2016.01.003。[Lla98] Marcelo Llarull。《锐估计与狄拉克算子》。发表于：Math. Ann. 310.1（1998年），第 55–71 页。 ISSN：0025-5831。 DOI：10.1007/s002080050136。 URL：https: //doi.org/10.1007/s002080050136。[LS12] Dan A. Lee 和 Christina Sormani。《旋转对称黎曼流形中彭罗斯不等式的近等号情形》。发表于：Ann. Henri Poincar ́e 13.7（2012年），第 1537–1556 页。 ISSN：1424-0637。 DOI：10 . 1007 / s00023 - 012 - 0172 - 1。URL：https://doi.org/10.1007/s00023-012-0172-1。

[LS13] Sajjad Lakzian 和 Christina Sormani. “奇异集之外的光滑收敛”。载于：Comm. Anal. Geom. 21.1（2013），第 39–104 页。 ISSN: 1019-8385. DOI: 10.4310/CAG.2013.v21.n1.a2. URL: https://doi.org/10.4310/CAG.2013. v21.n1.a2.[LS14] Dan A. Lee 和 Christina Sormani. “旋转对称黎曼流形上正质量定理的稳定性”。载于：J. Reine Angew. Math. 686（2014），第 187–220 页。 ISSN: 0075-4102. DOI: 10.1515/crelle- 2012- 0094. URL: https://doi.org/10.1515/crelle-2012-0094.[LS15] Philippe G. LeFloch 和 Christina Sormani. “低正则性旋转对称空间的非线性稳定性”。载于：J. Funct. Anal. 268.7（2015），第 2005–2065 页。 ISSN: 0022-1236. DOI: 10 . 1016 / j . jfa . 2014 . 12 . 012. URL: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2014.12.012.[Mia02] Pengzi Miao. “ 沿超曲面具有角点的流形上的正质量定理”。载于：Adv. Theor. Math. Phys. 6.6（2002），1163–1182（2003）。 ISSN: 1095-0761. DOI: 10.4310/ATMP.2002.v6.n6.a4. URL: https://doi-org.proxy. library.stonybrook.edu/10.4310/ATMP.2002.v6.n6.a4.[MN12] Fernando C. Marques 和 Andr´e Neves. “三维流形中极小极大极小球面的刚性”。载于：Duke Math. J. 161.14（2012），第 2725–2752 页。 ISSN: 0012- 7094. DOI: 10 . 1215 / 00127094- 1813410. URL: https : / / doi. org / 10 . 1215 / 00127094-1813410.[Mon16] Rafael Montezuma. “正标量曲率度量与无界极小极大宽度”。载于：Calc. Var. Partial Differential Equations 55.6（2016），文章编号 139，共 15 页。 ISSN: 0944-2669. DOI: 10.1007/s00526- 016- 1078- 4. URL: https://doi-org.proxy.library.stonybrook.edu/10.1007/s00526-016-1078-4.[Per20] Raquel Perales. “流形与带边界度量空间的收敛”。载于：J. Topol. Anal. 12.3（2020），第 735–774 页。 ISSN: 1793-5253. DOI: 10 . 1142 / S1793525319500638. URL: https://doi.org/10.1142/S1793525319500638.[Sor+21] Christina Sormani、IAS 标量曲率与收敛新兴主题研讨会参与者。关于收敛与标量曲率的猜想。2021年。 DOI: 10.48550/ARXIV.2103.10093. URL: https://arxiv.org/abs/2103. 10093.[Sor17] Christina Sormani. “标量曲率与内禀平坦收敛”。载于：非光滑空间中的测度论。偏微分方程与测度论。De Gruyter Open，华沙，2017年，第 288–338 页。[Sor18] Christina Sormani. “内在平坦阿尔泽拉–阿斯科利定理”。载于：Comm. Anal. Geom. 26.6（2018），第 1317–1373 页。 ISSN: 1019-8385. DOI: 10.4310/CAG.2018. v26.n6.a3. URL: https://doi.org/10.4310/CAG.2018.v26.n6.a3.[Sor22] Christina Sormani. 私人通信。2022年。[SW11] Christina Sormani 和 Stefan Wenger. “黎曼流形与其他积分流空间之间的内在平坦距离”。载于：J. Differential Geom. 87.1（2011），第 117–199 页。 ISSN: 0022-040X. URL: http://projecteuclid.org/ euclid.jdg/1303219774.[SY79] R. Schoen 和 S. T. Yau. “ 正标量曲率流形的结构”。载于：Manuscripta Math. 28.1-3（1979），第 159–183 页。 ISSN: 0025-2611.DOI: 10.1007/BF01647970. URL: https://doi.org/10.1007/BF01647970.

Department of Mathematics, Stony Brook University, Stony Brook, NY 11794, USA
Email address: paul.sweeney@stonybrook.edu