arXiv:2301.01324v1 [cond-mat.stat-mech] 3 Jan 2023

一维小世界网络上的SIR模型

M. Ali Saif[1*]、M. A. Shukri[2†]和 F. H. Al-makhedhi[2‡] 物理系，
阿姆兰大学，阿姆兰，也门[2] 物理系，萨那大学，萨那，也门。

2023年1月5日

摘要

我们研究了一维小世界网络上流行病传播模型——易感态-感染态-不应期态（SIR）模型的吸收相变。研究发现，该模型属于动力渗流类的普适类，其对应的平均场类为 $d = 6$。一维情形是这一类中的特殊情况，在热力学极限下，渗流阈值趋于1（边界值）。这一行为与一维伊辛模型和XY模型的行为略有相似：在热力学极限下，这两种模型的临界阈值均趋于零温度（边界值）。通过解析论证和数值模拟，我们证明，在规则一维晶格上增加该模型的连通度（$2k$）不会改变其临界性。另一方面，我们发现，只要重连概率（p）为任意有限值，该模型就会从一维结构转变为平均场型，这与小世界网络上的伊辛模型和XY模型所发生的情况类似。此外，我们计算了该模型在小世界网络上的临界指数和完整临界相空间，并提出了该模型从一维行为到平均场行为的交叉标度函数。此外，我们还揭示了该模型与小世界网络上的伊辛模型和XY模型之间的相似性。

1 引言

近年来，将发生从活跃相到吸收相相变的系统划分为不同普适类，受到了广泛关注 [1, 2, 3, 4]。其中最著名的一类是定向渗流（DP）普适类。它对微观变化具有很强的稳健性，且已得到广泛研究。具有正的一分量序参量、短程相互作用，且不存在淬火无序或额外对称性的系统，若发生向唯一吸收态的连续相变，便属于这一类 [2, 5, 6]。DP类的适用范围甚至更广：一些具有长程相互作用的系统，或具有非唯一或涨落被动态的某些模型，也属于这一类 [2, 3, 7, 8, 9]。不过，也有研究发现，某些发生向吸收相相变的模型并不属于这一类。例如，具有两个对称的

*masali73@gmail.com
†mshukri2006@gmail.com
‡fatymeheod@gmail.com

吸收态的系统属于投票者模型类 [1, 2, 3]。粒子数奇偶性守恒的系统属于宇称守恒类[1, 2, 3]。包含免疫机制的流行病模型通常属于所谓的动力渗流类（DyP） [1, 2, 3, 10]。

本文将研究带免疫机制的流行病传播模型，即易感态-感染态-不应期态（SIR），在一维小世界网络上从活跃相到吸收相的相变；一些作者将该模型称为一般流行病过程 [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]。该模型可以映射为捕食者-猎物模型，具体对应关系为：易感个体和感染个体分别对应猎物和捕食者个体 [17, 18]。此外，该模型也可视为森林火灾模型的一个极限情形 [19], ，或易感态-感染态-移除态-易感态（SIRS）模型的一个特例 [20]。SIR模型假设个体可处于三种状态之一：易感态（S）、感染态（I）和康复态（R）。该模型中个体之间的相互作用如下：易感个体在接触感染个体时，会以给定的感染率转为感染态；感染个体则以给定的恢复率转为康复态。在这一过程中，当一个感染个体进入由易感个体组成的群体后，感染个体的数量最初会在一段时间内增加。之后，由于免疫作用，感染个体的数量开始减少，最终系统趋近无病状态，因为个体会康复或仍处于易感态。显然，当感染率较低时，流行病只会在少数易感个体中局部传播，随后便会消退。然而，当感染率较高时，疾病可能会传播到整个系统。因此，在特定感染率下，SIR模型会呈现从活跃相（感染传播）到吸收相（不传播）的相变。

对二维规则网络上的SIR模型相变的研究已将其归入动力渗流类 [10]。DyP是通向吸收态的非平衡相变的一种普适类，与DP类有显著差异。用流行病传播的术语来说，动力渗流类最容易被引入为定向渗流的一种推广，其中包含了免疫的影响。Stauffer和Aharony [21] 将该模型作几何解释：普通渗流系统（各向同性（无向）渗流）描述了在d维晶格中，当每个晶格格点以概率 P随机且独立地被占据时，最近邻格点构成无限大连通簇的情形。一般而言，这类渗流簇可以通过动力渗流过程生成。更具体地说，每当流行病传播过程终止时，都会留下一片免疫格点区域。可以证明，这个簇是一个普通的各向同性渗流簇。从这个意义上说，该模型具有无穷多个吸收态。通过场论处理，Benzoni和Cardy [22] 证明，该类的上临界维数为$d_c = 6$。然而， $d = 1$ 的情形是一个特殊情况，其临界阈值为 $P_c = 1$ [3]。DyP在一维中的这种行为让我们想起伊辛模型 [23], ，甚至XY模型 [24] 在相同维数 $d = 1$ 下的行为；这两个模型在任何非零温度下都没有长程有序（ $T_c \neq 0$）。对这两个模型在一维小世界网络上的研究表明，随着长程相互作用增强，这两个模型都会从一维行为转变为平均场型行为，临界阈值也会随相互作用强度而变化 [23, 24]。这些结果促使我们研究小世界网络上的SIR模型，以揭示该模型在长程相互作用影响下的行为，并考察该模型与伊辛模型和XY模型之间是否存在某种相似性

在小世界网络上。

还应当提到，SIR模型经过不同的改造后也得到了研究。Dammer 和 Hinrichsen [25]研究了病原体在传播过程中发生突变对该模型在二维格子上的影响。他们表明，突变能够使模型从 DyP 类转变为 DP 类。Janssen 等人 [26] 考虑了包含弱个体的该模型，这种改造除了通常由动态各向同性渗流普适类所表征的连续渗流相变外，还会导致不连续相变的出现。Tome 和 Oliveira [27] 探究了该模型在凯莱树网络上的行为。Dickison 等人 [28]研究了互连网络上的 SIR 模型。Silva 和 Fernandes [29]考察了稀释和迁移性对该模型在二维格子上的临界免疫率的影响。Ji 和 Jiang [30]也研究了存在噪声效应的 SIR 模型。在添加了捷径的小世界网络上，Moore 和 Newman [31] 发现，感染个体密度是捷径密度的函数。

2 模型与方法

网络上的SIR模型描述如下 [10]：考虑一个由 N 个个体组成的种群，这些个体生活在一维格子的格点上。每个个体可处于三种状态之一：易感态（S）、感染态（I）和不应期态（R）。网络中处于 I 状态的个体，在每个时间步都可以感染任意一个处于 S 状态的邻居，感染概率为λ 。处于 I 状态的个体以康复概率为 1 转变为 R 状态（我们采用参考文献 [10] 中 Grassberger 的第二种模型）。在 R 阶段，个体具有免疫力，不会传播感染。显然，该模型最终会演化到晶格中不再有感染个体的状态；也就是说，对于任意初始的 I 个体状态以及任意 λ取值，结果皆如此。这意味着最终状态是 S 个体与 R 个体的混合。因此，该状态是模型的吸收态。本文考察的序参量是处于 R 阶段的个体$\langle\rho\rangle$ 密度，并对不同网络实现取平均。

我们使用 Watts和Strogatz (WS) [32] 方法，从一维规则网络生成小世界网络。在 WS 小世界网络中，我们从一个包含 N个节点的规则网络开始，其中网络中的每个节点都与其 $2k$ 个最近邻相连。因此，网络中的每条连边都以 p 的重连概率被移除，并重新连接到随机选取的节点。因此，当 $p = 0$ 时，对应的是规则网络；而当 $p = 1$时，则表示随机图。

此时，我们将尝试提取一些与该模型相关的有用关系。为简单起见，我们考虑包含 N 个个体的一维规则长链，如图 1 所示。在这条链中，每个个体都与其最近邻相连，如图所示。假设感染从链最左端的个体开始。该个体可以以 λ 的概率将感染传播给其邻居，而新感染的个体也可以以 λ 的概率将疾病传播给其邻居，依此类推。因此，在进行 $n-1$ 次试验后，该过程仍然存活并最终终止的概率 P_n 为 $P_n = \lambda^{n-1}(1-\lambda)$ [33]。该概率经过了适当归一化 $\sum_{\infty}^{n=1} P_n = 1$。因此，根据 λ 的取值，该过程终止前感染个体的平均数量为 [33]:

$$\bar{n} = \frac{1}{1-\lambda} \tag{1}$$

令 t 在这一过程中，当链上的所有位点都变为感染态时，便达到渗流阈值 d

I。对于 $\lambda < 1$的每个取值，链上都会有一些个体处于 S状态。因此，渗流阈值为 $\lambda_c = 1$ [21]。在这一过程中，感染个体密度为$\langle\rho\rangle = \frac{\bar{n}}{N}$

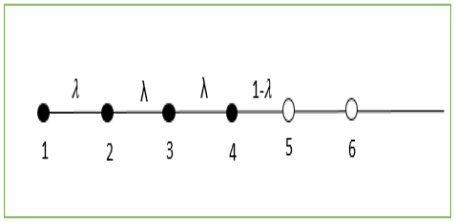


图 1：一维链示例，感染从最左侧的位点开始，并以概率 λ 沿链上的位点传播。

一般情形是指晶格中的每个个体都与多个邻居相连的情形，即 $k > 1$。在这种情况下，网络中的该个体可能被多个邻居感染，每个个体有 $2k$ 个邻居。因此，感染概率与网络的平均连通度 $\langle k\rangle$ 成正比。因此，我们预期该概率可表示为 $\pi = 1 - (1 - \lambda)^{\gamma}$ [13, 34, 35]，且 γ 的值为 $\gamma \approx \langle k\rangle$。在这种情况下，存活概率为 $P_n = \pi^{n-1}(1 - \pi)$，感染个体的平均数量为 $\bar{n} = \frac{1}{1-\pi}$，即:

$$\bar{n_k} = \frac{1}{(1-\lambda)^{\gamma}} \tag{2}$$

感染个体密度将再次给出如下

$$\langle\rho\rangle = \frac{\bar{n_k}}{N} \tag{3}$$

同样可以清楚地看出，热力学极限下的临界阈值为 $\lambda_c = 1$。

为了数值计算序参量 $\langle\rho\rangle$，我们针对不同的 N 值以及系统参数 λ的各种取值，对一维规则网络上的 SIR模型进行了蒙特卡罗模拟。我们在此考虑的网络是周期性的，系统以同步方式更新。在本文进行的所有计算中，我们将 k 的值固定为 $k = 3$ 。图2展示了系统参数 λ取各种值时，$N = 2 \times 10^3$、5×10^3、10×10^3和 20×10^3（从左到右）所对应的感染个体密度 $\langle\rho\rangle$ 的模拟结果。图中的每个点均由 $N = 2 \times 10^3$、5×10^3、10×10^3 的10000次独立运行取平均得到，而 $N = 20 \times 10^3$则取5000次独立运行的平均值。该图清楚地表明，在一个规则网络上，有限尺寸效应对该模型有着显著影响；同时可以明显看出，随着 N 增大，曲线向右移动。这种行为表明，随着 $N \to \infty$，临界阈值将趋近于1，即 $\lambda_c = 1$。在图2中，与 N 各取值对应的实线曲线来自标度函数公式3。通过最佳拟合，我们得到公式2中γ 的值为 $\gamma = 6.3$(2)。对于这一情形，该值与预期的 $\gamma = \langle k\rangle = 2k = 6$ 值略有偏差。

为了与小世界网络进行比较，我们在图3中绘出了当 $k = 3$时，$N = 2 \times 10^3$ 和 10×10^3 取相应数值时序参量 $\langle\rho\rangle$ 关于 λ 的计算值

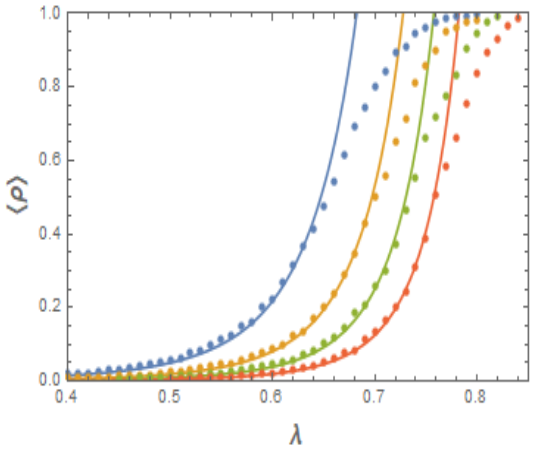


图 2：一维规则格（$p = 0$）上，感染个体密度 $\langle\rho\rangle$ 随 λ 的变化，其中 $N = 2 \times 10^3$、5×10^3、10×10^3 和 20×10^3 从左至右排列。每个 N 对应的实线曲线由标度方程（式3）在 $\gamma = 6.3$ 条件下得到。

且重连概率为 $p = 1$。如图所示，$N = 2 \times 10^3$ 和$N = 10 \times 10^3$ 对应的两条曲线彼此重合，这与前一种情况（ $p = 0$ 时曲线彼此分离）不同。这一行为表明，在长程连接的影响下，SIR模型的临界阈值在 λ 时小于1。正如我们将在下一节中展示的，在最佳估计下，当 $p = 1$ 时，若 $N = 10^4$，临界点为 $\lambda_c = 0.176(2)$；而当 $N = 10^5$时，临界点为 $\lambda_c = 0.175(2)$。因此，与规则晶格的情况相反，有限尺寸效应在这里并不重要。

3 时间依赖模拟

研究具有吸收态的任何系统的临界性质，最精确的方法是所谓的动力学蒙特卡罗方法 [36, 37, 38]。利用这一方法，我们确定临界点，提取所研究系统的临界指数，并识别其普适类。在该方法中，系统的时间演化最初从非活跃环境中原点处的一个活跃个体开始。考虑许多组从相同初始状态出发的系统构型，我们可以计算例如以下量：当系统处于临界状态时，这些量呈现幂律行为。这些量是存活概率 $P(t)$ 和活跃位点数 $N(t)$，后者对所有独立运行取平均。在临界点，这些量渐近地按幂律衰减

$$P(t) \sim t^{-\delta} \tag{4}$$

and

$$N(t) \sim t^{\theta} \tag{5}$$

利用前面的方程，我们可以确定临界指数 δ 和 θ的值。然而，要高效且系统地估算这些临界指数以及临界点，

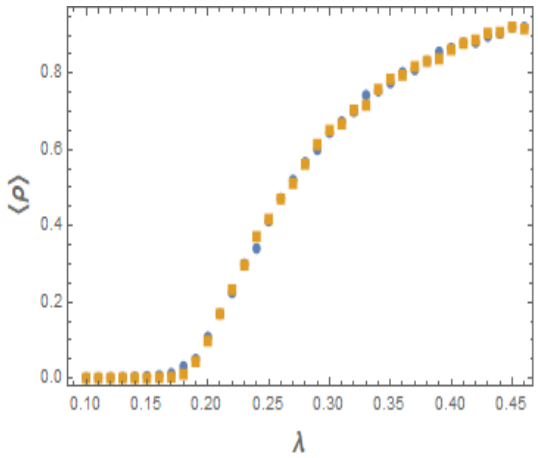


图3：当$p=1$时，$\langle\rho\rangle$ 下感染个体密度随 λ 的变化，其中 $N=2\times10^3$ 和 10×10^3 。

可以通过引入如下定义的有效指数 [2, 39]来分析局部斜率法，该指数由方程 4、5 得出：

$$-\delta(t)=\frac{\ln[P(t)]-\ln[P(t/m)]}{\ln[m]} \tag{6}$$

其中，m 是一个大于1的常数。对于$\theta(t)$的有效指数，也可以采用类似的定义。

此外，我们还利用$\nu_{\|}$ 的时间演化来估计与时间关联长度对应的临界指数，其中 D 是存活概率 $\langle P\rangle$ 平均值的导数，其关系式 [4, 40]为：

$$D=\frac{d\log\langle P\rangle}{d\log\lambda}\sim t^{1/\nu_{\|}} \tag{7}$$

为了评估该模型的临界点以及公式4–6中的临界指数值，我们在不同的重连概率 p下对SIR模型进行了蒙特卡洛模拟。对于所研究的所有情况，我们都将 k 的值固定为 $k=3$ 。我们认为，对于 $k>1$的任意取值，都应得到相同的结论。对于该模型的一维规则网络（$p=0$），无论系统参数 λ 取何值，也无论 N取任何有限值，我们的蒙特卡罗模拟都未显示出任何幂律。这一行为证实了我们在上一节中得到的结果：当 $p=0$ 时，该模型的临界点为 $\lambda_c=1$；不同于 $p=1$ 的情况，后者在模型参数 λ的某个特定取值下表现出明确的幂律行为。

图4、5和6展示了针对若干选定的p取值，对存活概率 $P(t)$、活跃位点数 $N(t)$以及导数 D进行蒙特卡罗模拟的结果。从这些图中可以看出，例如在 $p=0.5$取值下，临界点为 $\lambda_c=0.190(2)$。估算得到的临界指数为 $\delta=1.00(2)$、 $\theta=0.00(1)$和 $\nu_{\|}=1.04(4)$。这些数值与DyP普适性的平均场临界指数非常吻合

类 [21, 41, 1]。这意味着，WS小世界网络上的SIR模型发生的相变属于DyP平均场普适类。特别是，对于任意 p 取值，该模型的临界点 λ_c已确定为 λ，在此处， $P(t)$和 $N(t)$均呈现幂律行为，这与标度函数式（4）、（5）的推论一致。

表1总结了通过蒙特卡洛模拟得到的不同重连概率 p下临界指数和临界点的估计值，采用的过程与上文所述相同。显然，对于我们研究的所有 p 取值，我们得到的临界指数与DyP类 [21, 41, 1] 的平均场临界指数吻合良好。这些结果证实，在长程相互作用的影响下，SIR模型会从一维系统转变为类似平均场的系统，这与一维WS小世界伊辛模型 [23], 以及一维WS小世界网络上的XY模型 [24]中发生的情况相似。

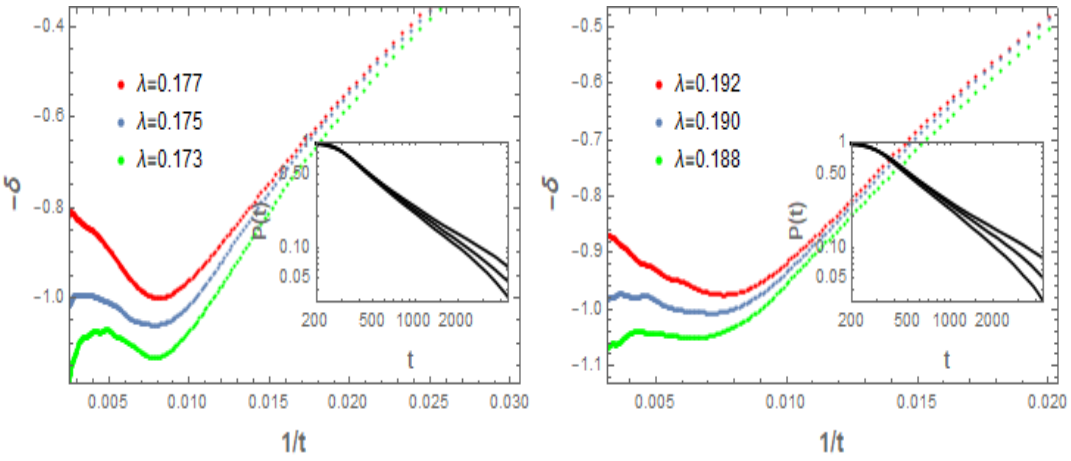


图 4：晶格尺寸为 $N = 10^5$ 、 $k = 3$ 时，存活概率指数的有效指数随 $1/t$ 变化的时间依赖行为： $p = 1.0$ （左）和 $p = 0.5$ （右）。插图显示存活概率 $P(t)$ 随时间的变化。数据取自 10^4 次实现的平均值。

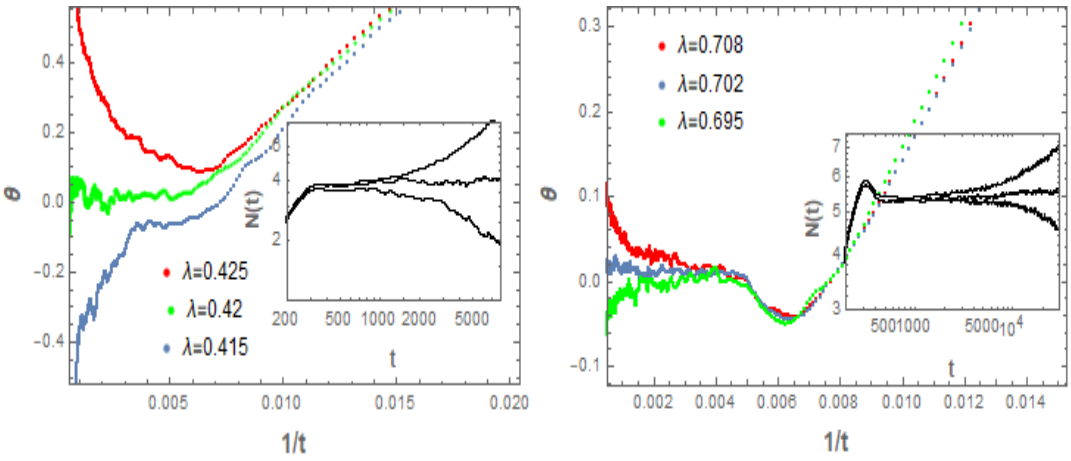


图5：活跃位点数指数的有效指数随 $1/t$ 的时间依赖行为，其中 $p = 0.01$ （左）和 $p = 0.0001$ （右），晶格尺寸为 $N = 10^5$ 和 $k = 3$。插图显示了活跃位点数 N（t）随时间的变化。数据取 10^4次实现的平均值。

表1：临界点和临界指数。

p	λ_c	δ	θ	$\nu_{\|\|}$
1.0	0.175(2)	1.01(2)	0.01(2)	1.11(5)
0.5	0.190(2)	1.00(2)	0.00(1)	1.04(4)
0.3	0.208(2)	0.99(3)	0.00(1)	1.10(4)
0.2	0.227(2)	0.99(3)	0.00(2)	1.10(4)
0.1	0.264(2)	0.98(3)	0.00(3)	1.10(4)
0.05	0.307(3)	0.98(4)	0.01(3)	1.10(4)
0.03	0.341(3)	0.96(5)	0.01(3)	1.08(4)
0.02	0.370(3)	0.97(5)	0.02(4)	1.07(4)
0.01	0.420(4)	0.97(5)	0.03(4)	1.08(4)
0.005	0.467(4)	0.97(6)	0.03(4)	1.06(4)
0.002	0.530(4)	0.95(6)	0.02(4)	1.06(4)
0.001	0.575(4)	0.95(6)	0.03(4)	1.07(5)
0.0005	0.614(5)	0.95(6)	0.02(3)	1.04(6)
0.0001	0.703(5)	0.95(6)	0.02(3)	1.03(7)

图7展示了 $k = 3$下小世界网络上SIR模型的相图（p，λ_c）。我们发现，该模型的临界阈值 λ_c 随重连概率 p 的变化关系可由对数标度形式很好地描述： λ_c（p） $\sim 0.12 - 0.065\ln$（p），适用于任意 $p \leq 0.2$取值，如图7插图所示。我们在此得到的标度形式类似于一维小世界网络上的XY模型 [24]中发现的标度形式。然而，就 p 取值范围而言，我们的标度形式的适用范围似乎与一维小世界网络上的伊辛模型 [23], 中发现的标度形式相同；这不同于XY模型，因为其标度形式对除 $p = 1$以外的所有 p 取值均适用。对我们的标度形式进行外推，预测得到的临界重连概率 $p_c \approx 10^{-6}$非常小。这支持了平均场假设

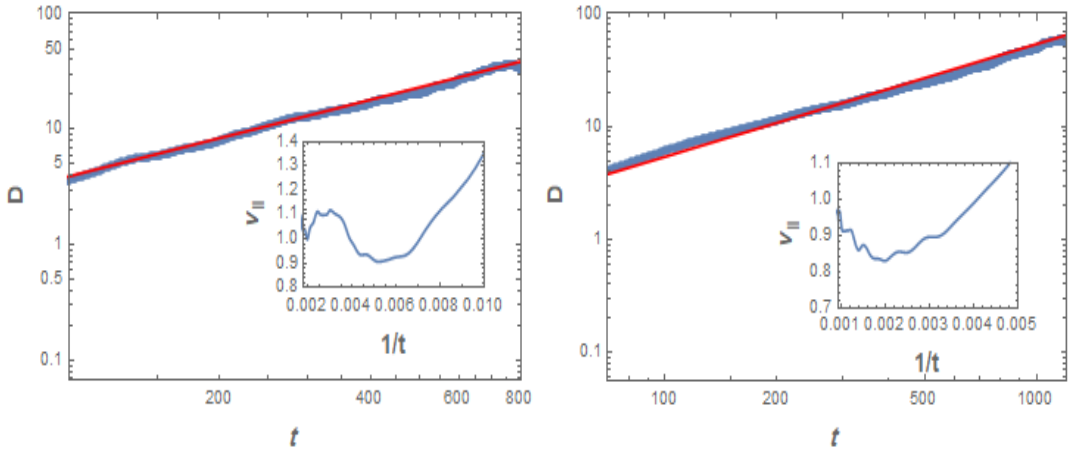


图 6：晶格尺寸为 $N = 10^5$ 且 $k = 3$ 时，$p = 0.5$（左）和 $p = 0.08$（右）条件下，存活概率$\langle P\rangle$ 的平均值的导数 D 随 t 变化的时间依赖行为。插图显示了$\nu_{\parallel}$ 的临界指数随 $1/t$ 的变化。数据取自 10^4 次实现的平均值。

该模型在任意非零重连概率（$p > 0$）下的类型。

为了更详细地讨论，我们重新提出参考文献 [24]，中的同一个问题：SIR模型从一维行为转变为平均场行为时，p 的最小值是多少？要回答这个问题，我们需要了解 p 对转移概率 λ_c 的依赖关系。事实上，在小世界网络中，有两个长度尺度表征该系统。第一个来自小世界网络，其中捷径两端之间的典型距离为 $\zeta = (kp)^{-1}$ [42]。另一个尺度可以从一维规则晶格上纯 SIR模型的关联长度得到，其表达式为 $\xi \sim {}^{-1}{}_{\ln(\pi)}$ [21]，其中 $\pi = 1 - (1-\lambda)^{\gamma}$。因此，当关联长度 ξ 小于捷径两端之间的典型距离 ζ 时，系统的行为基本上与规则网络相同。另一方面，当关联长度 ξ 增长并超过 ζ 时，捷径带来的长程相互作用便开始发挥作用，从而诱发平均场行为。因此，从一维行为到平均场型的交叉将在 $\xi \approx \zeta$ [23, 24, 43] 时发生。于是，对于固定的 λ，当 $p < p_{co}$ 时，SIR模型会从一维行为发生转变，其中 p_{co} 为，

$$p_{co}(\lambda) \propto \frac{-\ln(1-(1-\lambda)^{\gamma})}{k} \tag{8}$$

当 p较大时趋向平均场。另一方面，对于固定的 p 值，当 $\lambda > \lambda_{co}$ 时，将发生从一维到平均场的交叉，其中 λ_{co} 为

$$\lambda_{co}(p) \propto 1 - (1 - \exp(-kp))^{1/\gamma} \tag{9}$$

在图8中，我们重新绘制了图7中 $k = 3$ 时临界点 λ_c 随重连概率 p 变化的模拟结果，并将 $k = 3$ 的渐近标度形式公式9（实线）和$k = 4$ （虚线）作为对比。我们认为 γ 的值等于 $2k$。图中清楚地表明，临界点高于交叉线（ $k = 3$对应的实线），这意味着临界点位于平均场区域。从交叉线到

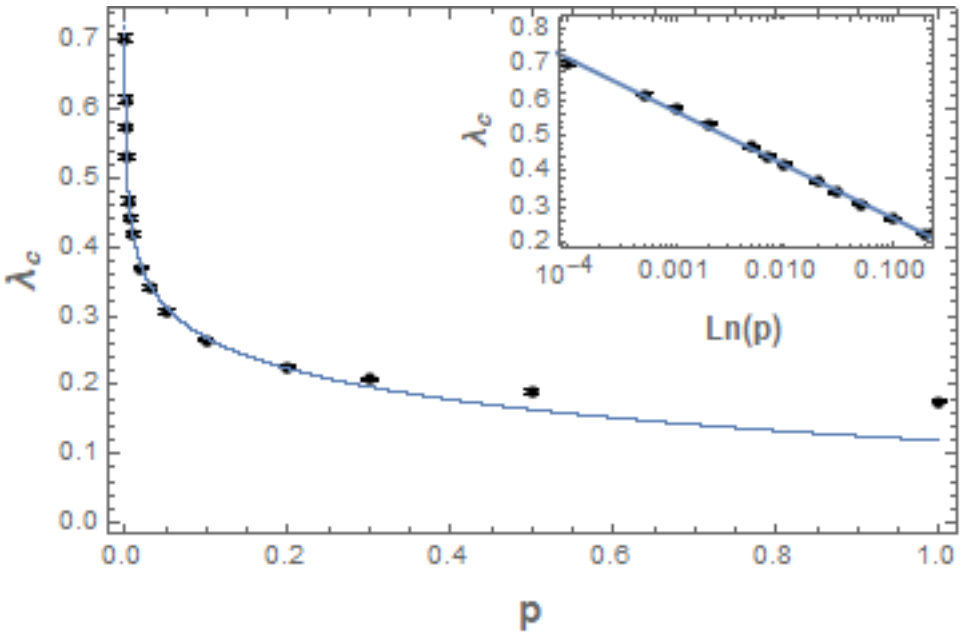


图 7：小世界网络上 SIR模型的示意相图。临界点的值 λ_c 绘制为关于 p 的函数，其中 $k = 3$。实线根据标度形式得到： $\lambda_c(p) \sim 0.12 - 0.065\ln(p)$。插图：对于任意 $p \leq 0.2$值，临界点都能用形式 $\lambda_c(p) \sim 0.12 - 0.065\ln(p)$很好地描述。

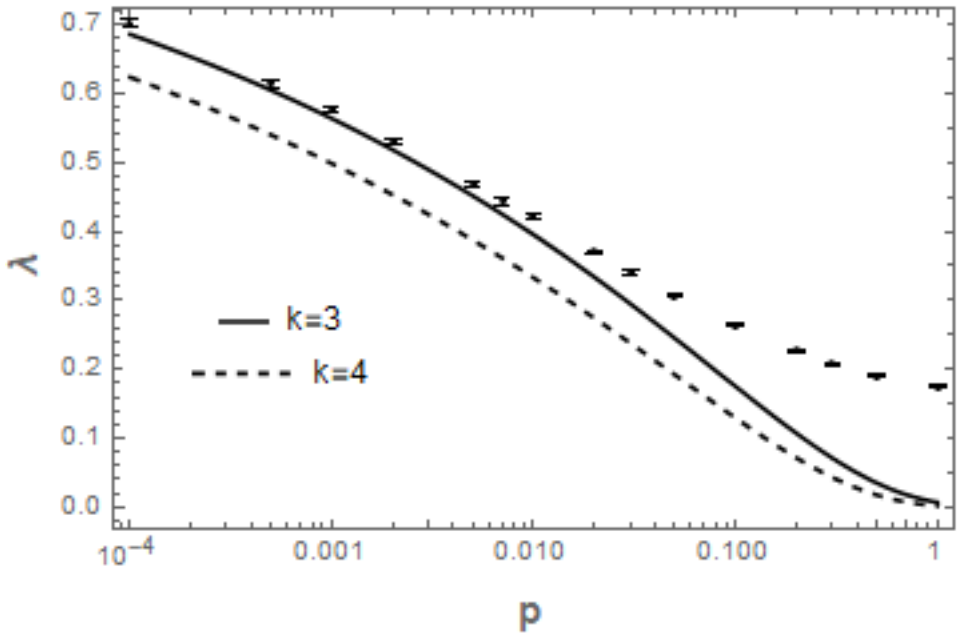


图8：临界点随 p 的变化，与图7相同。根据公式9的标度形式，实线表示当 $k = 3$时从一维行为到平均场行为的交叉。虚线表示当 $k = 4$时的交叉线。

当 p 较大时，临界点之间的距离较大，这证实了平均场行为的存在，至少在 p足够大时如此。然而，当 p非常小时，这一距离开始减小。在我们的蒙特卡洛模拟中，我们证明了该模型在 $p = 10^{-4}$非常小时仍存在平均场行为，这可能意味着在热力学极限下会出现 $p_c = 0$ 。此外，公式9表明，对于任意 $p > 0$，都存在交叉阈值。然而，正如图8所示，当 p 非常小时，临界点λ_c 非常接近交叉线，因此，要准确确定临界点和临界指数，需要采用更大的网络。

最后，按照文献 [23, 24, 43], 中的相同方式，当 $p << 1$时，我们对该模型的临界点进行了近似计算。事实上，对于非常小的 p 值，小世界网络的典型距离为 $\zeta \sim p^{-1}$ [24, 43]; 然而，我们可以将该模型的关联长度近似为 $\xi \sim -(\ln \lambda)^{-1}$ [21]。因此，当 $p << 1$时，我们预期该系统的临界行为为 $\lambda_c \sim \exp(-p)$。该方程预测，当 $p \to 0$的值趋于时，临界点 λ_c 将趋于1（一维行为）。为与小世界网络上的伊辛模型进行比较，对于非常小的 p 值，其临界阈值为 $T_c \sim -(\ln p)^{-1}$[23]。然而，XY模型中的临界阈值为 $T_c \sim p$ [24]。这三个模型临界阈值存在差异的原因在于各模型的关联长度不同。SIR模型的关联长度为 $\xi \sim -(\ln \lambda)^{-1}$[21], ，而伊辛模型的关联长度则如下面所示，以指数形式依赖于温度：$\xi \sim \exp(a/T)$，其中 a 为常数 [23]。然而，XY模型的关联长度为

$\xi \sim T^{-1}$ [44]。

4 结论

我们研究了SIR模型在一维小世界网络上的流行病传播。在一维规则链中，该模型不表现出相变，其临界阈值为 $\lambda_c = 1$ ，这与同一维度上的伊辛模型和XY模型具有相似行为。在小世界网络中，我们证明了，对于任意小的重连概率 p值，该模型都会从一维行为交叉至平均场型。具体而言，我们通过蒙特卡洛模拟检验了该模型的平均场型，重连概率低至 p。我们还推导出了该模型从一维到平均场的交叉标度函数，并提取了临界阈值 λ_c 对重连概率 p的依赖关系。我们的结果表明，在热力学极限下，对于任意 $p \neq 0$ 值，该模型均呈现平均场型。这种行为似乎与小世界相变有关：在热力学极限[45, 46, 47]下，对于任意非零的 p 值，特征路径长度l 都会表现出行为变化。

参考文献

参考文献

[1] M. Henkel, H. Hinrichsen 和 S. Lübeck, 《非平衡相变，第1卷：吸收态相变》, Canopus Academic Publishing Limited, （2008）。[2] H. Hinrichsen，Adv. Phys. **49**，815（2000）。[3] Géza Ódor，Rev. of Mod. Phys. **76**，663（2004）。[4] J. Marro 和 R. Dickman, 《晶格模型中的非平衡相变》, 剑桥：剑桥大学出版社, （1999）。[5] H. K. Janssen，Z. Phys. B **42**，151（1981）。[6] P. Grassberger，Z. Phys. B **47**，365（1982）。[7] S. -You Huang，X. -Wu Zou，Zhi-Jie Tan 和 Z. -Zhi Jin，Phys. Rev. E **67**，026107（2003）。[8] E. V. Albano，Physica A **214**，426（1995）。[9] M. A. Muñoz，G. Grinstein，R. Dickman 和 R. Livi，Phys. Rev. Lett.**76**，451（1996）。[10] P. Grassberger，Mathematical Biosciences **63**，157（1983）。[11] J. L. Cardy，J. Phys. A: Math. Gen. **16**，L709（1983）。[12] H. K. Janssen，Z. Phys. B - 凝聚态物质 **58**，311（1985）。[13] J. L. Cardy 和 P. Grassberger，J. Phys. A: Math. Gen.**18**，L267（1985）。

[14] P. Grassberger，Yi-Ch. Zhang，Physica A 224，169（1996）。[15] H. K. Janssen 和 M. Müller，Phys. Rev. E 70，026114（2004）。[16] T. Tomé 和 R. M. Ziff，Phys. Rev. E 82，051921（2010）。[17] T. Antal，M. Droz，A. Lipowski 和 G. Ódor，Phys. Rev. E 64，036118（2001）。[18] E. Arashiro 和 T. Tomé，J. Phys. A: Math. Theor. 40，887（2007）。[19] P. Bak，K. Chen 和 C. Tang，Phys. Lett. A 147，297（1990）。[20] D. R. de Souza 和 T. Tomé，Physica A 389，1142（2010）。[21] D. Stauffer 和 A. Aharony，《渗流理论导论》，Taylor & Francis，伦敦，1992。[22] J. Benzoni 和 J. L. Cardy，J. Phys. A 17，179（1984）。[23] A. Barrat 和 M. Weigt，Eur. Phys. J. B 13，547（2000）。[24] B. Jun Kim，H. Hong，P.Holme，G. S. Jeon，P. Minnhagen 和 M. Y. Choi，Phys. Rev. E 64，056135（2001）。[25] S. M. Dammer 和 H. Hinrichsen，Phys. Rev. E 68，016114（2003）。[26] H. K. Janssen，M. Müller 和 O. Stenull，Phys. Rev. E 70，026114（2004）。[27] T. Tomé 和 M. J de Oliveira，J. Phys. A: Math. Theor. 44，095005（2011）。[28] M. Dickison，S. Havlin 和 H. E. Stanley，Phys. Rev. E 85，066109（2012）。[29] R. da Silva 和 H. A Fernandes，J. Stat. Mech. P06011，（2015）。[30] C. Ji 和 D. Jiang，Appl. Math. Modelling 38，5067（2014）。[31] C. Moore 和 M .E . J. Newman，Phys. Rev. E 61，5678（2000）。[32] D. J. Watts 和 S. H. Strogatz，《自然》（伦敦）393，440（1998）。[33] F. Reif，《统计与热物理学基础》，麦格劳-希尔图书公司，纽约（1965）。[34] K. Kuperman 和 G. Abramson，Phys. Rev. Lett. 86，2909（2001）。[35] G. Yan，Zhong-Qian Fu，Jie Ren 和 Wen-Xu Wang，Phys. Rev. E 75，016108（2007）。[36] P. Grassberger 和 A. de la Torre，Ann. Phys.（纽约）122，373（1979）。[37] I. Jensen，Phys. Rev. A 43，3187（1991）。[38] R. Dickman，Phys. Rev. E 53，2223（1996）。[39] P. Grassberger，J. Phys. A: Math. Gen. 22，3673（1989）。

[40] P. Grassberger 和 Y. -C. Zhang，Physica A **224**，189（1996）。[41] M. A. Muñoz、R. Dickman、A. Vespignani 和 S. Zapperi，Phys. Rev. E **59**，简报（1999）。[42] M. E. J. Newman 和 D. J. Watts，Phys. Rev. E **60**，7332（1999）。[43] C. P. Herrero，Phys. Rev. E **65**，066110（2002）。[44] N. Nagaosa，《凝聚态物理中的量子场论》，Springer-Verlag，柏林（1999），第 3 章。[45] M. E. J. Newman 和 D. J. Watts，Phys. Lett. A **263**，341（1999）。[46] M. Barthélemy 和 L. A. N. Amaral，Phys. Rev. Lett. **82**，3180（1999）；**82**，5180（1999）。[47] M. A. de Menezes、C. F. Moukarzel 和T. J. P. Penna，Europhys. Lett. **50**，574（2000）。