arXiv:2301.01330v1 [math.GR] 3 Jan 2023

关于直积表示与分支群的有界生成性质

STEFFEN KIONKE 和 EDUARD SCHESLER

Abstract. 我们证明，非阿贝尔群 G_1的直积 G 的最小表示维数有下界 $n+1$，从而回答了 Ab´ert 提出的问题。此外，若每个 G_i 都是非可解的，则该下界可以提高至 $2n$。结合 Pyber、Segal 和 Shusterman 关于有界生成群结构的结果，我们证明了分支群不可能是有界生成群。

Introduction

若一个无限群 G 的所有真商群都是有限群，则称其为恰无限群。几乎单群是显而易见的恰无限群例子。其他例子则来自高秩半单李群中的不可约格，例如 S L$_n(\mathbb{Z})$（ $n \geq 3$），在除去其中心后所得的群，见 [12, 第 IV 章]。事实上，这类群是遗传恰无限群，也就是说，它们是剩余有限的，且其所有有限指数子群都是恰无限群。Grigorchuk 群 [10] 是首个非几乎为单群或遗传恰无限群有限直幂的恰无限群例子。Grigorchuk 群是一个恰无限分支群，这意味着它的次正规子群的可公度类构成一个格，该格同胚于康托集的开闭子集格。根据 Wilson 分类 [18] ，恰无限群分为三类。每个恰无限群 G 要么是分支群，要么几乎为单群或遗传恰无限群的直幂。

自 McCarthy 于20世纪60年代末 [13] 引入以来，恰无限群这一类群一直是活跃的研究领域。原因之一可能是，每个有限生成无限群都有一个恰无限商群。因此，只要存在某个有限生成无限群 G 具有一种在同态像下保持不变的性质 $\mathcal{P}$，那么也存在一个具有该性质 $\mathcal{P}$的有限生成恰无限群。沿用 [3], 的说法，我们将一种在同态像下保持不变的性质 $\mathcal{P}$ 称为 $\mathcal{H}$-性质。众所周知的 $\mathcal{H}$-性质包括可 amen 性、性质 (T)、有界生成、为挠群、具有次指数增长等。鉴于 Wilson 分类，自然要探究三类恰无限群中，哪些包含满足给定 $\mathcal{H}$-性质 $\mathcal{P}$的群。对于“为挠群”这一 $\mathcal{H}$-性质，问题已有定论。已知存在有限生成单群 [15], 、恰无限分支群 [10], 以及遗传恰无限群 [9] ，它们都是挠群。另一方面，也存在无挠的有限生成恰无限群，它们是单群 [4], 、分支群 [2], 以及遗传恰无限群（例如 $\mathbb{Z}$）。

本文旨在研究有界生成性质相关的问题。回顾一下，若一个群 G 包含一个有限子集

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：20E08；次要分类号：20E26。
Key words and phrases. 有界生成、分支群、直积的忠实表示。由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助 - 441848266。

$\{g_1, \ldots, g_n\}$ 使得每个 $g \in G$ 都可以写成$g = g_1^{k_1} \cdots g_n^{k_n}$，其中$k_i \in \mathbb{Z}$取适当的值。由于无限挠群不是有界生成的，因此三个恰无限群类中的每一类都包含一个不具有有界生成性质的有限生成群。另一方面，Carter 和 Keller [7] 证明，$\mathrm{PSL}_n(\mathbb{Z})$ 在 $n \geq 3$ 时是有界生成的，由此得到了一个有趣的有界生成遗传恰无限群。Muranov [14], 证明了有界生成的无限单群的存在；目前看来，他的构造是唯一可用的构造。接下来仍需研究恰无限分支群。关于有界生成的恰无限分支群是否存在，Bartholdi、Grigorchuk 和 ˇSuni´k 提出了这一问题 [3, Question 12] ，据我们所知，该问题至今仍未解决。本文旨在证明，对于任意分支群（甚至不要求其为恰无限群），答案都是否定的。

定理 1. 不存在有界生成的分支群。

因此，由 Wilson 对恰无限群的分类可知，每个有界生成的无限群都有一个商群，该商群在有限指数子群意义下同构于有限多个有界生成的单群或遗传恰无限群的直积。定理 1 的证明相当直接地结合了 Pyber、Segal [16], Shusterman [17], 和 Ab´ert [1] 的结果。

Ab´ert 证明了弱分支群在任何域上都不是线性的（对于分支群，这一结果归功于 Grigorchuk 和 Delzant）。更准确地说，他对每个域 k 定义了自然数 $\mathrm{mat}_k(n)$，使得每个含有 n 个顶点的图都能表示在矩阵代数 $\mathbf{M}_{r,\ r}(k)$ 中，其中图的边编码了不交换关系。Ab´ert 证明了 $\sqrt{\lfloor n/2 \rfloor} \leq \mathrm{mat}_k(n) \leq 2(n - \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1)$, 并提出了关于线性下界的问题 [1, Question 4]。以下结果肯定地回答了这个问题。

定理 2. 设 k 是一个域，且 $r \geq 1$。假设存在 $(r \times r)$-矩阵$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{M}_{r,\ r}(k)$, 使得除 $[a_i, b_i] = a_i b_i - b_i a_i$ 对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 成立外，所有两两交换子都平凡。那么 $r \geq n + 1$。

定理 2 中的下界是锐的。设 $\lambda \in k^\times$。考虑矩阵$a_i = I + E_{1,\ i+1}$, $b_i = I - \lambda E_{i+1,\ i+1} \in \mathbf{M}_{n+1,\ n+1}(k)$，其中 $i = 1, \ldots, n$；这里 I 是单位矩阵，$E_{i,\ j}$ 表示 (i, j)-位置上的元素为 1、其余元素均为 0 的初等矩阵。那么 a_i, b_i 满足定理 2 的假设。若 $\lambda \neq 1$，则 a_i, b_i 可逆。若 $|k| > 2$，由此结合 [1, 命题 5] 可知

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq \mathrm{mat}_k(n) \leq n + 1.$$

弱分支群的非线性是显而易见的，因为这些群包含非阿贝尔群的无限直积。令 $\mu_k(G)$表示群 G 在域 k 上的忠实有限维表示的最小维数（如果 G 在 k上不是线性的，我们记作$\mu_k(G) = \infty$ ）。定理 2 直接给出了非阿贝尔群直积的下界$\mu_k(G_1 \times \ldots \times G_n) \geq n + 1$。类似地，定理 2 也为非交换（李）代数直积的表示提供了下界。如果假设因子群 G_i 是非可解的，则下界还可以进一步提高。

定理 3. 设 k是一个域， G_1、……、G_n是群，令 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$表示它们的直积。

(1) 如果群 G_1、……、G_n是非阿贝尔群，则 $\mu_k(G) \geq n + 1$。(2) 如果群 G_1、……、G_n是非可解群，则 $\mu_k(G) \geq 2n$。

定理 3 中的两个下界都是尖锐的。设$a_i = I + E_{1,\ i+1}$, $b_i = I - 2E_{i+1,\ i+1} \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Q})$ 如上所述。令 $G_i = \langle a_i, b_i \rangle$ ，因此我们可以推得

$\mu_{\mathbb{Q}}(G_1 \times \ldots \times G_n) = n+1$。假设定理 3 中的群 G_i是某个域 k上的 $\mathrm{GL}_2(k)$ 的非可解子群。那么每个 G_i 都可以嵌入 $\mathrm{GL}_{2n}(k)$ 中的一个 2×2-对角块，从而得到 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$嵌入 $\mathrm{GL}_{2n}(k)$。结合定理 3，可推出 $\mu_k(G) = 2n$。特别地，这适用于每个 G_i 都是非阿贝尔自由群的情形，从而重新得到 SL_n-情形下的 [6, 定理 3] 。

1. Branch groups are not boundedly generated

分支群有多种刻画。以下这一种是对 [3, 定义 1.1], 的略微改写，不涉及有根树，因此相当抽象。不过，它很适合我们的目的。更具几何性的定义见 [3, 定义 1.13]。

定义。若一个群 G 存在一个子群递减序列（H_i）$_{i\in\mathbb{N}_0}$ ，满足 $H_0 = G$ 和 $\bigcap H_i = 1$，并且存在一个整数序列$_{i\in\mathbb{N}_0}$（k_i）$_{i\in\mathbb{N}_0}$ ，满足 $k_0 = 1$ ，且对每个 i ，以下条件均成立:

（1） H_i 是 G中的有限指数正规子群。（2） H_i 分解为直积 $H_i = H_i^{(1)} \times \ldots \times H_i^{(k_i)}$，其中各因子两两同构。（3）商群 $m_{i+1} := k_{i+1}/k_i$ 是一个满足 $m_{i+1} \geq 2$的整数，并且 H_{i+1} 的乘积分解细化了 H_i 的乘积分解，具体来说， H_i 的每个因子 $H_i^{(j)}$ 都包含 H_{i+1}的因子 $H_{i+1}^{(\ell)}$ ，其中 ℓ满足 $(j-1)\cdot m_{i+1}+1 \leq \ell \leq j\cdot m_{i+1}$。（4） G 通过共轭作用在 H_i的因子 $H_i^{(j)}$ 集合上作传递作用。

如引言所述，并非所有分支群都是恰无限的。事实上，有限生成分支群并不一定存在一个作为分支群的恰无限商群。参见 [8, 定理 2] ，其中给出了一个有限生成分支群同态映射到 $\mathbb{Z}$的例子；后者显然是恰无限且有界生成的。因此，要证明分支群不可能有界生成，仅考虑恰无限的情形并不足够；而在该情形下，这一结论可直接由Ab´ert [1], Pyber和Segal [16]的结果推出。

定理 1 的证明。假设存在一个有界生成的分支群 G 。那么， [16, 推论 16] 告诉我们， G 存在一个满同态 π: $G \to Q$，其中 Q 是一个无限线性群。然而，根据 [1, 推论 7] ，分支群在任何域上都不是线性群。因此， Q 是 G的真商群。由此，依据 [8, 命题 6]， Q 几乎是阿贝尔群。由于 G是一个有界生成群，故为有限生成群，因此 Q 有一个（非平凡的）自由阿贝尔有限指数子群 Q_0。因此，我们可以考虑 G 的有限指数子群 $G_0 := \pi^{-1}(Q_0)$；根据构造，它映满 $\mathbb{Z}$。现在，任取一个数$n \in \mathbb{N}$。由分支群的定义可知， G 包含一个形如 $H_i = H_i^{(1)} \times \ldots \times H_i^{(k_i)}$的有限指数子群，其中各因子两两同构，且 $k_i \geq n$。于是 $H_i \cap G_0$ 是 H_i的有限指数子群。在这种情况下，很容易看出存在两两同构的有限指数子群$K_i^{(j)} \leq H_i^{(j)}$，使得 $K_i := K_i^{(1)} \times \ldots \times K^{(k_i)})_i \leq H_i \cap G_0$。特别地，我们看到 K_i 在 G_0中具有有限指数，这意味着它映满 $\mathbb{Z}$。因此，某个因子（从而每个因子） $K_i^{(j)}$ 都映满 $\mathbb{Z}$。由此可推得， K_i 的阿贝尔化的无挠部分的秩至少为 $k_i \geq n$。这一结论对 K_i的每个有限指数子群都成立。特别地，这表明 K_i 不存在能够由少于 n 个元素生成的有限指数子群。

由于 $n \in \mathbb{N}$ 是任意选取的，这与 Shusterman 的一个结果相矛盾： [17, 定理 1 1], 指出，对每个有界生成群 H ，都存在一个常数$C > 0$ ，使得 H 的每个有限指数子群都包含一个至多由 C 个元素生成的有限指数子群。□

2. Lower bounds for the minimal representation dimension of directsproducts

现在我们来证明有关最小表示维数的结果。

定理 2 的证明。证明中，我们结合了 [1] 和 [5]中的思想。扩张标量后，我们可以假设 k 是一个无限域。回想一下， $I \in \mathbf{M}_{r,\ r}(k)$ 表示单位矩阵。我们声称 I 、 a_1 、 ..... 、 a_n 、 b_1 、 ..... 、 b_n 线性无关。证明思路与 [1, 定理 3] 的证明类似。假设对于 c 、 λ_1 、 ..... 、 λ_n 、 λ'_1 、 ..... 、 $\lambda'_n \in k$ ，有 $cI + \sum_j \lambda_j a_j + \sum_j \lambda'_j b_j = 0$ 。与 a_i （分别与 b_i） 取交换子可得 $\lambda_i = 0$ （分别得到 $\lambda'_i = 0$）；由于 $I \neq 0$ ，最后剩下的系数 c 也为零。

令 $V = k^r$ ，并令 C 表示 $\{I, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$ 在 $\mathbf{M}_{r,r}(k)$ 中的线性张成。考虑线性映射 $\Psi\colon C \to V$ ，其定义为 $\Psi(X) = Xv$ ，其中$v \in V$ 。我们将看到，如果适当选取 v ，则 Ψ 的像的维数至少为 $n+1$ 。由于交换子 $z_i = [a_i, b_i]$ 非平凡，每个z_i 的核都是 V的真子空间。然而， V 不能被有限个真子空间覆盖（因为 k 是无限的）。因此，存在一个向量 $v \in V$ ，使得对所有 $i \in \{1, \dots, n\}$ ，都有 $z_i v \neq 0$ 。令 $\alpha\colon V \to k$ 为一个线性形式，满足 $\alpha(v) \neq 0$ ，且对所有 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，都有$\alpha(z_i v) \neq 0$ （这样的线性形式 α 存在，因为对偶空间V^* 不能被有限个真子空间覆盖）。现在，定义 $\beta\colon C \times C \to k$ ，使得 $\beta(x, y) = \alpha([x, y](v))$ ，则其是 C上的交错形式。不难看出， β 在子空间 $\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \rangle \subseteq C$ 上非退化（例如，其矩阵表示满秩）。注意， $kI + \ker(\Psi)$是一个全迷向子空间，因为对于 $x, y \in kI + \ker(\Psi)$ ，我们有 $[x, y](v) = xyv - yxv = 0$ 。由于 $v \neq 0$ ，我们有 $I \notin \ker(\Psi)$ ，因此 $\dim_k \ker(\Psi) + 1 \leq n + 1$ 。由此可得

$$r \geq \dim_k(\mathrm{im}(\Psi)) = 2n + 1 - \dim_k \ker(\Psi) \geq n + 1. \qquad \square$$

定理 3 的证明。第一个断言由定理 2 立即得出。现在假设每个 G_i 都是非可解的。如果 G 不是线性的，则无需证明。假设(ρ, V)是一个在 k上的有限维忠实表示。通过扩张标量，我们可以假设 k 是代数闭的。令 $V^1, \dots, V^t$ 表示将 V 视为 G-模时的合成因子。由于 k 是代数闭的，合成因子 V^j 同构于一个张量积

$$V^j = V_1^j \otimes_k V_2^j \otimes_k \cdots \otimes_k V_n^j$$

其中 V_i^j 是一个不可约的 G_i-表示；例如参见 [11, 命题 2.3。23]。 $V|_{G_i}$ 的合成因子是不可约表示 $V_i^1, \dots, V_i^t$ ，每个表示都可能出现多次。反设对所有 j ， V_i^j 都是一维的。那么存在 V 的一组基，使得 $\rho(G_i)$可由上三角矩阵表示。这与 G_i 非可解矛盾。

对于每个 j ，令 $S_j \subseteq \{1, \dots, n\}$ 为满足 $\dim_k V_i^j \geq 2$ 的 i 集合。由上述观察可知，每个 $i \leq n$ 至少属于集合 S_j 中的一个。这意味着

$$\dim_k V = \sum_{j=1}^{t} \prod_{i=1}^{n} \dim_k V_i^j \geq \sum_{j=1}^{t} 2^{|S_j|} \geq \sum_{j=1}^{t} 2|S_j| \geq 2n. \qquad \square$$

References

1. Mikl´os Ab´ert, *Representing graphs by the non-commuting relation*, 德布勒森数学出版物 69（2006 2273978 2 3，261 269），第 – 期。MR。Laurent Bartholdi 和 Rostislav I. Grigorchuk, *On parabolic subgroups and Hecke algebras of some fractal groups* **28** 2002 1, 47 90 1899368 ，塞尔迪卡数学杂志（），第 – 期。MR 3. Laurent Bartholdi、Rostislav I. Grigorchuk 和 Zoran ˇSuni´k, *Branch groups*, 代数手册，第 3 卷，Handb. Algebr.，第 3 卷，爱思唯尔／北荷兰，阿姆斯特丹，2003 年，第 989–1112 页。MR 2035113 4. Marc Burger 和 Shahar Mozes, *Lattices in product of trees*, Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math.（2000 1839489 5 92，151 194 2001），第 – 期（），MR。Leandro Cagliero 和 Nadina Rojas, *Tensor representations of minimal dimensional current Heisenberg Lie algebras* **20** 2009 11, 1347 1362 ，国际数学杂志（），第 – 期。MR 2584190 6. Caterina Campagnolo 和 Holger Kammeyer, *Products of free groups in lie groups*, 代数杂志 579（2021），237–255。7. David Carter 和 Gordon Keller, *Bounded elementary generation of* $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$，美国数学杂志 105 704220 8 1983 3，673 687（），第 – 期。MR。Thomas Delzant 和 Rostislav Grigorchuk, *Homomorphic images of branch groups and Serre's property (FA)*，，群与空间的几何和动力学，Progr. Math.，第 265 卷，Birkh¨auser，巴塞尔，2008 年，第 353–375 页。MR 2402409 9. Mikhail Ershov 和 Andrei Jaikin-Zapirain, *Property (T) for noncommutative universal lattices* **179** 2010 347 ，数学发明（），第 2 期，303 2570119 10 –。MR。R. I. Grigor˘cuk, *On Burnside's problem on periodic groups*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 14 565099 11 1980 1，53 54（），第 – 期。MR。Emmanuel Kowalski, *An introduction to the representation theory of groups*, 数学研究生教程，第 155 卷，美国数学学会，普罗维登斯，RI，2014 年。MR 3236265 12. G. A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, 数学及其边界领域成果（第 3 系列）[数学及相关领域成果（第 3 系列）], 第 17 卷，Springer-Verlag，柏林，1991 1090825 13。MR。Donald McCarthy, *Infinite groups whose proper quotient groups are finite. I*，纯粹与应用数学通讯 21 237637 14 1968 545 562（），–。MR。Alexey Muranov, *Diagrams with selection and method for constructing boundedly generated and boundedly simple groups* **33** 2005 4, 1217 1258 2136699，代数通讯（），第 – 期。MR。Alexander Yu. Ol'shanskii, *Infinite groups with cyclic subgroups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 245（ 1979 4, 785 787 527709），第 – 期。MR。Laszlo Pyber 和 Dan Segal, *Finitely generated groups with polynomial index growth*, 纯粹与应用数学杂志 612 2364077 17 2007 173 211（），–。MR。Mark Shusterman, *Ranks of subgroups in boundedly generated groups*, 伦敦数学会通报 48 3509913 18 2016 3，539 547（），第 – 期。MR。J. S. Wilson, *Groups with every proper quotient finite*, 剑桥哲学学会会刊 69（1971），373–391。MR 274575

FernUniversität in Hagen, Fakultät für Mathematik und Informatik, 58084 Hagen
Email address: steffen.kionke@fernuni-hagen.de*Email address*: eduard.schesler@fernuni-hagen.de