arXiv:2301.01340v1 [math.MG] 3 Jan 2023

内接正方形与避开关系的路径。

COLE HUGELMEYER

Abstract. 我们探讨内接正方形问题与理解复向量空间中避开关系的路径这一问题之间的联系。我们的主要定理指出，若尔当曲线若不含内接正方形，就会具有一种看似不可能的结构，我们称之为正方形包络。我们将对向量空间中避开关系的路径的性质提出一些猜想，并证明这些猜想将意味着：具有有限个、复杂程度任意高的奇点的若尔当曲线中存在内接正方形。

1. Introduction

若尔当曲线是一个连续单射 $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ ，它沿逆时针方向绕其所围成的区域一周。 γ 的内接正方形是 $\mathrm{im}(\gamma)$ 上四个互异点组成的四元组，这些点在 $\mathbb{R}^2$ 中构成一个正方形。

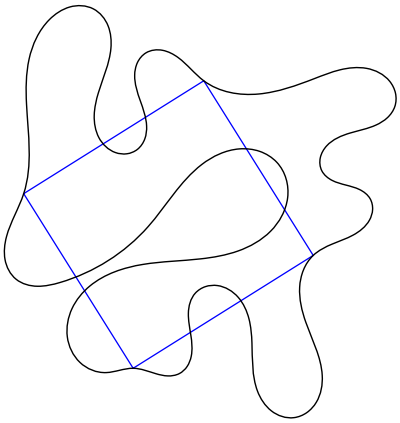


Figure 1. 若尔当曲线的一个内接正方形。

猜想1 (Toeplitz 1911)。 每条若尔当曲线都包含一个内接正方形 .

为此，我们将没有内接正方形的若尔当曲线定义为一条坏的若尔当曲线。我们的主要结果是，坏的若尔当曲线必定具有一种我们称为正方形包络的结构。粗略来说，正方形包络是一个随时间移动的正方形：它的前两个顶点始终位于若尔当曲线外部，后两个顶点始终位于若尔当曲线内部，并且随着时间推移，外部顶点会完整地绕若尔当曲线一周。

为严格定义正方形包络，令 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为对应于逆时针旋转 90 度的线性映射。对于平面中的一对点 a 和 b ，定义$S_1(a,\ b) = a + T(b-a)$ 和 $S_2(a,\ b) = b + T(b-a)$。若 $a \neq b$，则这四个点 $a,\ b,\ S_2(a,\ b),\ S_1(a,\ b)$构成正方形的顶点，并按逆时针方向标记。

定义 1。 设 $\gamma\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ 为一条若尔当曲线。 γ 的正方形包络 是从 $\mathbb{R}$ 到平面的两个连续函数的映射，e_1， $e_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$，满足以下所有条件。

1) 对所有 $x \in \mathbb{R}$、 $e_1(x)$ 和 $e_2(x)$ ，它们都位于 γ的开外部。**2)** 对所有 $x \in \mathbb{R}$、 $S_1(e_1(x), e_2(x))$ 和 $S_2(e_1(x), e_2(x))$ ，它们都位于 γ的开内部。**3)** $\lim_{x\to\infty} \|e_2(x) - e_1(x)\| = \lim_{x\to-\infty} \|e_2(x) - e_1(x)\| = 0$。**4)** 设 ℓ_λ 为如下闭曲线：先沿 e_1 从 $e_1(-\lambda)$ 到 $e_1(\lambda)$，再沿一条直线从 $e_1(\lambda)$到 $e_2(\lambda)$，接着沿 e_2 从 $e_2(\lambda)$ 到 $e_2(-\lambda)$，最后沿一条直线从 $e_2(-\lambda)$ 返回 $e_1(-\lambda)$。若 p 是 γ内部的任意一点，则存在一个实数$\lambda_0 > 0$ ，使得对于所有 $\lambda > \lambda_0$， ℓ_λ 绕 p 的绕数等于一。

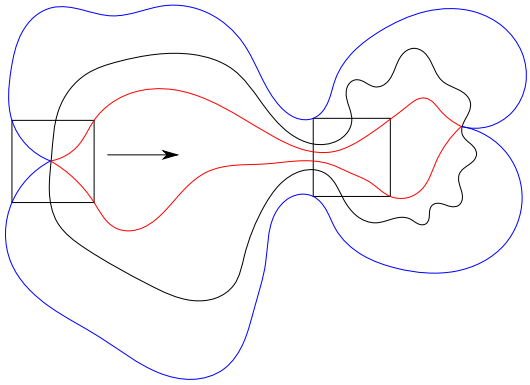


FIGURE 2. 由于据推测正方形包络并不存在，因此很难将其画出来。这是对它可能形状的一种粗略近似。正方形必须以某种方式让前两个顶点沿若尔当曲线外侧移动，而另外两个顶点则留在曲线内部。

定理 1。 每条坏的若尔当曲线都有一个正方形包络。

这个定理让我们能够将内接正方形问题与理解向量空间中避开关系的路径这一问题联系起来。正方形的集合构成向量空间，而我们要避开的线性关系是：一个正方形的前两个顶点与另一个正方形的后两个顶点重合。

设 V是 $\mathbb{C}$上的一个向量空间，并设 R_1， R_2，……， R_n 是该向量空间 $V \times V$的线性关系，即子空间。接着令 R 为由集合 $\cup_{i=1}^n R_i$的并所给出的关系。我们假设 R 是对称的，也就是说， $aRb \iff bRa$。

若连续函数 $p\colon [0,1] \to V$ 满足：对于 $[0,1]$ 中的任意时刻对 t_1, t_2，均不存在使 $p(t_1)Rp(t_2)$ 成立的情况，则称其为避关系路径。我们将满足 $\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$ 的连续函数 $p\colon [0, \infty) \to V$ 称为避关系原点路径，若对于 $[0,\infty)$ 中的任意时刻对 t_1, t_2，均不存在使 $p(t_1)Rp(t_2)$ 成立的情况。原点不作为这条路径的端点，因为我们总有 $0R0$。

定义 2。如果存在连续函数 $h\colon [0,1] \times [0,\infty) \to V$，使得.....那么我们称两个避开原点的关系路径 p 和 q 弱同伦

1) 对所有 s， $\lim_{t\to\infty} h(s,t) = 0$。**2)** 对所有 t， $h(0,t) = p(t)$。**3)** 对所有 t， $h(1,t) = q(t)$。**4)** 不存在任何满足 $h(s,t)\, R\, h(s,0)$ 的 $(s, t) \in [0,1] \times [0,\infty)$。

如果可以选择 h，使得对于所有 s，$h(s,-)$ 都是避关系原点路径，那么我们称 p 和 q 是强同伦的。

我们提出以下关于避关系原点路径的猜想。

猜想 2（SC，螺旋猜想）。每条避关系原点路径 p 都弱同伦于一条避关系原点路径 q，后者存在一组线性无关向量 x_1，……，x_n，属于V，以及一组复数 a_1，……，a_n，使得

$$q(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{a_i t}$$

对所有 t 都成立。

以下事实为这一猜想提供了一些依据。

定理 2。当 V 是一维时，螺旋猜想成立。

最后，我们将证明猜想 2 的以下推论。

定理 3. 假设螺旋猜想成立。那么，任何除有限个点外均光滑的若尔当曲线 γ 都包含一个内接正方形。允许若尔当曲线在这些有限个奇点附近任意复杂。

我们认为，深入研究避开原点的关系路径，或许是解决内接正方形问题的一种可行途径。在本文结尾，我们将提出更多关于避开原点的关系路径的猜想，并希望这些猜想能够为未来研究提供指引。

2. Square Envelopes

若 γ 是一条坏的若尔当曲线，我们将定义一个整数 b_γ，并称之为 γ 的坏绕数。这个整数仅对坏的若尔当曲线有定义。通过计算 γ 的一般位置逼近中的内接正方形个数，我们将证明 b_γ 为奇数。然后，我们将利用这一事实构造该若尔当曲线的正方形包络。

设 γ 是一条若尔当曲线。我们可以选取一个连续函数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，使得若 a 位于 γ 的内部，则 $f(a) < 0$；若 a 位于 γ 的像上，则 $f(a) = 0$；若 a 位于 γ 的外部，则 $f(a) > 0$。利用这个函数，我们可以按如下公式定义一个函数 $g_{f,\,\gamma}\colon S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^2$:

$$g_{f,\gamma}(x,y) = (f(S_1(\gamma(x),\gamma(y))), f(S_2(\gamma(x),\gamma(y)))).$$

如果 γ 是一条坏的若尔当曲线，那么 $g_{f,\,\gamma}(x,\ y) = (0,\ 0)$ 当且仅当 $x = y$，因为如果我们有 $x \neq y$ 和 $g_{f,\,\gamma}(x,\ y) = (0,\ 0)$，那么 $\gamma(x)$，$\gamma(y)$，$S_2(\gamma(x),\ \gamma(y))$，$S_1(\gamma(x),\ \gamma(y)))$ 就构成一个内接正方形的顶点。

设 $C = \{(x,\ y) \in S^1 \times S^1 :\ x \neq y\}$。从拓扑角度看，$C$ 是一个开圆柱面。根据上述命题，我们看到，如果 γ 是一条坏的若尔当曲线，那么可以将 $g_{f,\,\gamma}$ 的定义域限制为 C，从而得到一个映射

$$g_{f,\gamma}|_C : C \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}.$$

现在我们固定 C、$\mathbb{R}^2\backslash\{(0,\ 0)\}$ 和 S^1 之间的同伦等价。我们的同伦等价 $C \to S^1$ 只需取有序对的第一个坐标。我们的同伦等价 $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,\ 0)\} \to S^1$ 是到单位圆上的径向投影，我们将单位圆定向为逆时针方向。

利用这些同伦等价，我们看到，$g_{f,\gamma}|_C$ 在同伦意义下诱导出一个映射 $S^1 \to S^1$，因此给出了 $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ 的一个元素。这个整数定义为 b_γ。

b_γ 不依赖于 f 的选择，因为对于 f 的任意两种选择，都可以在始终保持为 f 的有效选择的情况下，将其中一种连续变形为另一种。这会在所得映射 $S^1 \to S^1$ 之间诱导出一个同伦，从而说明 b_γ 的值是常数。

引理 1。对于任意坏的若尔当曲线，b_γ 为奇数。

本节稍后将给出该引理的证明。证明的核心思路是，一般光滑近似 γ 的每个内接正方形都会以一种取决于该正方形顶点在若尔当曲线上的循环次序的方式，为 b_γ 贡献奇偶性。具有给定循环次序的内接正方形的奇偶性与若尔当曲线无关，因此我们只需将各类正方形的贡献相加，即可计算 b_γ 的奇偶性。结果为奇数。

引理 1 可用于证明定理 1，我们将在本节末尾证明这一点。主要思路是，由于 $b_\gamma \neq 0$，映射 $g_{f,\gamma}\colon C \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ 绕原点非平凡地缠绕。这意味着，圆柱面两端之间必定存在一条路径 C，该路径在 $g_{f,\gamma}$下映射到平面的左下象限。这条路径几乎是一个正方形包络，只不过 e_1和 e_2 位于若尔当曲线上，而不是其开外部内。只需将这些路径稍微推离曲线，即可解决这个问题。

对于流形 M，令 $C_4(M)$表示 M中循环有序互异点四元组构成的流形。换言之，若 $C_{4\,\mathrm{dist}}(M)$是 M^4中由互异点有序四元组构成的子集，则 $C_4(M) = C_{4\,\mathrm{dist}}(M)/(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$，其中 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 通过对四元组的各项进行循环置换而作用。令 Sq 表示 $\tilde{C}_4(\mathbb{R}^2)$ 的子流形，它由构成正方形且按逆时针方向标记的点四元组组成。

我们称若尔当曲线横截相交，如果在 $\tilde{C}_4(\mathbb{R}^2)$中，子空间

设 $h\colon S^1 \times [0,\ 1] \to \mathbb{R}^2$ 是两条一般位置若尔当曲线之间的光滑同伦，并且对所有 $t \in [0,\ 1]$，$h(\cdot,\ t)$ 都是光滑嵌入。若在$\tilde{C}_4(\mathbb{R}^2) \times [0,\ 1]$中，子空间 $\{(q,\ t)\colon\ q \in \tilde{C}_4(\mathrm{im}(h(\cdot,\ t))\}$ 与子空间$Sq \times [0,\ 1]$横截相交，我们就称 h 为一条一般同伦。

根据横截性理论（见 [3]），我们可以得到关于一般位置若尔当曲线的以下事实。1) 任意若尔当曲线都可以在 C^0 拓扑下由一般位置的若尔当曲线任意精确地逼近。2) 任意两条一般位置的若尔当曲线之间都存在一般位置的同伦。3) 对于一般位置的同伦 h，交集 $\{(q,\ t)\colon\ q \in C_4(\mathrm{im}(h(\cdot,\ t))\} \cap Sq \times [0,\ 1]$ 是一个带边界的紧致一维流形。该流形的边界由同伦起点和终点处两条一般位置若尔当曲线的内接正方形组成。

注意，该流形 $\tilde{C}_4(S^1)$ 有三个连通分支。这对应于内接正方形的三种类型。

定义 3. 设 γ 为一条若尔当曲线。若正方形上的点按逆时针方向排列的顺序与若尔当曲线上的点顺序相同，则称 γ 的内接正方形为 I 型。这类正方形也称为贴切正方形。若将正方形的顶点按逆时针顺序标记为 1，2，3，4，而沿若尔当曲线逆时针行进时，这些顶点出现的顺序为 1，3，2，4，则称该正方形为 II 型。最后，若顶点的逆时针顺序与若尔当曲线的逆时针方向相反，则称该正方形为 III 型。

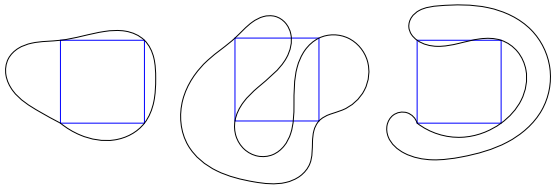


FIGURE 3. I 型、II 型和 III 型内接正方形。

命题 1. 若 γ 为一般位置的若尔当曲线，则其内接正方形中，I 型正方形的数量为奇数，II 型正方形的数量为偶数，III 型正方形的数量也为偶数。

˜证明。 </style}与 相交时，*im* 有三个连通分支，分别对应三种类型的内接正方形。这意味着，如果 是连接一般位置若尔当曲线的一个一般同伦，那么 *1* 维流形 ， $t)$: $q \in C_4(\mathrm{im}(h(\cdot,$ $t))\} \cap Sq \times [0,\ 1]$ 可以分成三个彼此不同的既开又闭的部分，每一部分对应一种类型的内接正方形。这就证明了每种类型内接正方形的奇偶性不随所选的一般位置若尔当曲线而改变。最后，我们可以通过求出任意一般位置若尔当曲线的内接正方形来计算其奇偶性。典型的一般位置若尔当曲线是非圆椭圆。这条曲线有一个相切正方形，但没有 II 型或 III 型内接正方形。□

设 γ 是一条一般位置的若尔当曲线，并设 f 是一个光滑函数 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，其零点集为 γ，在 γ 内部为负，在 γ 外部为正，且在 γ 上梯度处处非零。由于 γ 是光滑嵌入，这样的 f 总是存在。现在，我们考虑上一节中定义的 $g_{f,\ \gamma}\colon (S^1)^2 \to \mathbb{R}^2$。

我们看到，$g_{f,\gamma}$ 的零点由对角线 $\Delta = \{(a,a)\colon a \in S^1\}$以及 $C_4(\mathrm{im}(\gamma)) \cap Sq$中每个内接正方形对应的四个点˜组成，每个点对应正方形的一条边。此外，在这些对应于内接正方形的零点处，g_f，γ 具有非奇异导数，因为 γ 是一般的，并且 f 在 $\mathrm{im}(\gamma)$上梯度处处非零。令 $X = \{p \in (S^1)^2 : g_f$，$\gamma(p) \neq (0,0)\}$。令 ω_γ 为 $H^1(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中的上同调类，它由 $H^1(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\};\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$中的非平凡类在$g_f$，$\gamma|_X$下的拉回给出。围绕任何对应于内接正方形边的零点的小环路，在 ω 下的取值都非平凡，因为 $g_{f,\gamma}$ 在这些零点处具有非奇异导数。此外，将对角线向一侧或另一侧稍微推开所得到的环路，在 ω_γ 下的取值为平凡，因为它对应于一个小正方形沿若尔当曲线滑动：其中两个顶点位于 γ 上，另外两个顶点偏向 γ的一侧。因此， $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ 中的相应环路始终位于平面的同一个象限内，故不可能绕原点一周。

综合以上结果可知，若 ℓ是 $S^1 \times S^1$中与对角线同伦类相同的简单闭曲线，则 $\omega_\gamma(\ell)$ 等于 $(S^1)^2\backslash(\Delta \cup \ell)$任一连通分支中 $g_{f的\gamma}$ 的零点个数的奇偶性。

令 Δ' 为 $(S^1)^2$的反对角线，即由满足 a 和 b 互为对跖点的点对 $(a,\ b)$ 构成的环路。那么 $(S^1)^2\backslash(\Delta \cup \Delta')$ 有两个连通分支，分别记为 A和 B。连通分支 A是由满足从 a 到 b 的角度小于 π 的点对 $(a,\ b)$ 构成的集合；连通分支 B 则是由满足从 a 到 b 的角度大于 π的点对构成的集合。

若 γ是坏的若尔当曲线，而 γ'是一个充分 C^0接近它的一般位置逼近，则 b_γ 的奇偶性等于 $\omega_{\gamma'}(\Delta')$。因此，我们可以通过计算 A中 $g_{f的\gamma'}$ 的零点来求得 b_γ。

命题 2. 如果 γ 是一条坏的若尔当曲线，而 γ' 是一个充分 C^0接近的一般位置逼近，那么 γ' 的每个 I 型内接正方形在$g_{f,\gamma'}$ 中恰有三个对应的零点，每个 II 型内接正方形恰有两个对应的零点 A，每个 III 型内接正方形则恰有一个对应的零点 A。

证明。 设 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ 是一列一般位置的若尔当曲线，在 C^0 拓扑学下收敛到我们的坏的若尔当曲线γ。设 s_n 为 γ_n的最大内接正方形的边长。我们知道 $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$，否则就会存在一个收敛的正方形子列，其极限是我们这条坏的若尔当曲线的内接正方形。我们可以将 S^1 与 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆等同，并使用欧几里得距离，从而赋予其一个度量。利用这一对应，我们令 M 为所有满足 $\|a-b\| \geqslant 1$的数对 $(a,b) \in (S^1)^2$ 构成的集合。取 $N \in \mathbb{Z}$ 充分大，使 $\sup_{x\in S^1} \|\gamma_N(x) - \gamma(x)\|$ 和 s_N 都小于量 $\varepsilon = \frac{1}{4} \cdot \min_{(a,b)\in M} \|\gamma(a) - \gamma(b)\|$。我们断言，$\gamma' = \gamma_N$ 是一个使该命题成立的逼近。

设 a, b, c, d 是 γ_N 上一个按逆时针标记顶点的内接正方形。设 Q 是 S^1 中映射到 $\{a,b,c,d\}$ 的四个点的集合，其中映射为 γ_N。我们断言， Q 的直径

小于一。为证明这一点，假设 Q 中存在元素 x 和 y，使得 $\|x-y\| \geqslant 1$。那么$(x,y) \in M$，因此 $\|\gamma(x)-\gamma(y)\| \geqslant 4\varepsilon$，所以 $\|\gamma_N(x)-\gamma_N(y)\| \geqslant 2\varepsilon$。然而， $2\varepsilon > \sqrt{2}\cdot s_N$、 $\gamma_N(x)$ 和$\gamma_N(y)$ 是一个边长至多为 s_N 的正方形的顶点，因此这是不可能的。

由于 Q 的直径小于 1， Q 的四个点必定都位于某个区间 I 内，其角长度为 $\pi/3$ 弧度。将 I 按逆时针方向定向，并令 w,x,y,z为 Q的四个元素，顺序与它们沿 I出现的顺序一致。我们知道 $(w,x),(w,y),(w,z),(x,y),(x,z),$以及 (y,z) 属于 A，而所有其他有序对都属于 B。

我们知道 γ_N将 $\{w,x,y,z\}$映射到 $\{a,b,c,d\}$，但它未必保持顺序。不失一般性，我们可以假设 $\gamma_N(w)=a$，因为我们可以循环置换标签 a,b,c,d。那么，对于其余三个字母的六种排列，我们有六种情况需要检验。现在我们将逐一检验所有可能性。

1) 如果 $(w,x,y,z) \mapsto (a,b,c,d)$，则该正方形为 I 型，对应的零点在 A 中，为$(w,x),(x,y),(y,z)$。2) 如果 $(w,x,y,z) \mapsto (a,c,b,d)$，则该正方形为 II 型，对应的零点在 A 中，为$(w,y),(x,z)$。3) 如果 $(w,x,y,z) \mapsto (a,b,d,c)$，则该正方形为 II 型，对应的零点在 A 中，为$(w,x),(x,z)$。4) 如果 $(w,x,y,z) \mapsto (a,d,c,b)$，则该正方形为 III 型，在 A 中唯一对应的零点是(w,z)。5) 如果 $(w,x,y,z) \mapsto (a,d,b,c)$，则该正方形为 II 型，对应的零点在 A 中，为$(w,y),(y,z)$。6) 如果 $(w,x,y,z) \mapsto (a,c,d,b)$，则该正方形为 II 型，对应的零点在 A 中，为$(w,z),(x,y)$。

这证实了该命题。I 型正方形在 A 中对应三个零点，II 型正方形在 A 中对应两个零点，而 III 型正方形在 A 中仅对应一个零点。

□

现在我们可以证明引理 1 和定理 1。

引理 *1* 的证明。设 γ 是一条坏的若尔当曲线，设 γ' 是一个足够 C^0-接近的一般近似，且设 f 是一个函数，其零点集为上文所述的 γ'。现在我们来计算 $g_{f,\ \gamma'}$ 在 A 中的零点个数，其奇偶性与 b_γ 的奇偶性相同。我们按照各类型正方形所对应的零点来计数。三点的情形有奇数个，两点的情形有偶数个，一点的情形也有偶数个。总数为奇数。

定理 1 的证明。我们希望证明，每条坏的若尔当曲线都有一个正方形包络。我们有函数 $g_{f,\gamma}|_C$：$C \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$，并且知道它是同伦非平凡的。令$\pi\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to S^1$为到单位圆的径向投影，并令 $r=\pi\circ g_{f,\gamma}|_C$。现在取 r'作为 r 的光滑近似，使得对所有 $x\in C$都有 $\|r(x)-r'(x)\|<1/4$。令 $u\in S^1$ 为 r' 的一个正则值，且与点 $(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$的距离小于 $1/4$ 。那么， $r^{-1}(u)$ 是一个一维流形， L，它经由 r 映射到以 $(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$, 为中心、半径为 $1/2$ 的圆上；该圆完全位于平面的左下象限。因此，$g_{f,\gamma}|_C$ 将 L 映射到平面的左下象限。这意味着，与 L 上的一个点相对应的正方形，其前两个角位于 γ上，另外两个角位于 γ的开内部。此外，由于 b_γ 是奇数，我们看到 L 必有奇数个连通分支，它们同胚于 $\mathbb{R}$ ，且两端分别趋近于 C的两个边界。将这样的一个连通分支参数化，可得函数 $e_1,e_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$，满足 $\mathsf{im}(e_1)\cup\mathsf{im}(e_2)\subseteq\mathsf{im}(\gamma)$、$\lim_{x\to\pm\infty}\|e_1(x)-e_2(x)\|=0$，并且具有如下性质： $S_1(e_1(x),e_2(x))$ 和 $S_2(e_1(x),e_2(x))$ 始终位于 γ的开内部。由于伽马的内部是开集，我们可以选取连续函数 $\varepsilon\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$ ，使得对所有 x，若 $\|a-e_1(x)\|$ 和 $\|b-e_2(x)\|$ 均小于 $\varepsilon(x)$，则 $S_1(a,b)$ 和 $S_2(a,b)$ 都位于

γ 的开内部也如此。因此，若我们选择对 $(e_1,\ e_2)$ 作连续变形，将$e_1(x)$ 和 $e_2(x)$ 从若尔当曲线上向外推开，且移动距离不超过 $\varepsilon(x)$，就能得到 γ的一个正方形包络。

3. Relation avoiding paths

本节将证明：如果螺旋猜想成立，那么对于除有限个任意复杂的奇点外均光滑的若尔当曲线，内接正方形猜想也成立。

不过，我们先证明定理 2，即螺旋猜想在一维情形下确实成立。

定理 *2* 的证明。 将 V与 $\mathbb{C}$等同起来，我们的避关系原点路径就是复平面 p中通向原点的路径： $[0,\ \infty) \to \mathbb{C}$。此外，我们知道 $p(t)$永不为零，因为 $(0,\ 0)$包含在每个线性关系中。因此，不失一般性，我们可以忽略任何对应于 $\{0\} \times \mathbb{C}$或 $\mathbb{C} \times \{0\}$的 R_i。于是，我们可以将关系 R改写为

$$xRy \iff \exists i \in \{1, ..., n\} \quad x = \alpha_i y \ \text{ or } \ y = \alpha_i x$$

其中 $\alpha_1,\ .....,\ \alpha_n$是模长不超过 1 的非零复数。特别地，路径 p避开关系，当且仅当它与路径 $\alpha_1 p,\ \alpha_2 p,\ .....,\ \alpha_n p$不相交。不失一般性，我们可以假设 $p(0) = 1$，并且对所有 t都有 $|p(t)| \leqslant 1$。之所以可以这样做，是因为我们总能先在路径 p 的像内将其收缩，使起点落在模长最大的点上，再在 $\mathbb{C}$ 内重新缩放，使起点变为 1，从而将其同伦变形为这样的路径。我们还可以不失一般性地假设 p 沿着 1 附近某个小邻域内的一条对数螺线前进，因为只需稍作扰动即可做到这一点。在这些假设下，我们固定一个对数分支，并令 $\ell_1,\ .....,\ \ell_n$为上半平面中的路径，使得 $e^{2\pi i \ell_i(t)} = \alpha_i p(t)$ 满足 $\ell_i(0) = \frac{1}{2\pi i}\ln(\alpha_i)$，类似地，令 ℓ 为 p 的一个提升，使得 $\ell(0) = 0$。路径 ℓ 将上半平面分成两部分，我们将 U 定义为所有满足以下条件的点的集合：从 $\mathbb{H}\backslash\mathrm{im}(\ell)$ 中的该点到 $-\infty$ 的路径与 ℓ的交点奇偶性为偶数。接着，我们定义整数 $k_1,\ .....,\ k_n$，其中 k_i是满足 $\ell_i(0) + k_i \in U$的最大整数。

我们看到，对于任意指标 i 和整数 k，ℓ 与 $\ell_i + k$ 不相交；由此可得，从形如 $\ell(0) + k$ 的每个点出发，都存在与 ℓ 不相交、延伸至 $i\infty$ 的路径。因此，只要知道形如 $\ell_i(0) + k$ 的哪些点属于 U，就能完全确定 ℓ 的同伦类型。由此，要证明一维螺旋猜想，只需证明存在一个 $\theta \in (0,\ \pi)$，使得对于所有 $i \in \{1,\ .....,\ n\}$，不等式 $\arg(\ell_i(0) + k_i) \geqslant \theta \geqslant \arg(\ell_i(0) + k_i + 1)$ 成立。这样，θ 就表示上半平面内的一条直线的角度，该直线经指数映射后得到所需的对数螺线。要证明这样的 θ 存在，只需证明对于所有 i 和 j，$\arg(\ell_j(0) + k_j + 1) \leqslant \arg(\ell_i(0) + k_i)$ 成立。

我们将分裂对定义为上半平面 (p, q)中的一对点，满足 $p + \ell$ 和$q + \ell$ 均与 ℓ不相交，且 $p \in U$和 $q \notin U$。例如，$(\ell_i(0) + k_i, \ell_j(0) + k_j + 1)$ 总是一个分裂对。

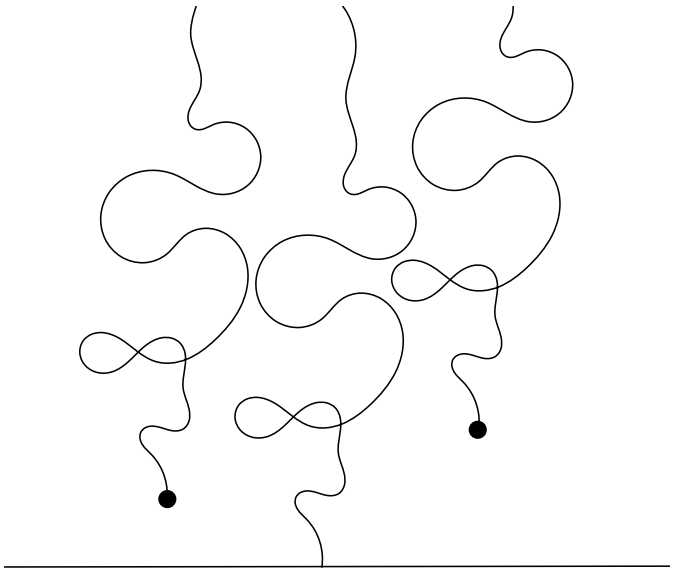


FIGURE 4. 一个分裂对的示意图： ℓ的平移像彼此不相交，分别位于两侧 e.

给定一个分裂对 (p, q)，我们可以按如下方式构造一个新的分裂对。若 $\mathrm{im}(p) \geqslant \mathrm{im}(q)$，则 $(p-q, q)$ 是新的分裂对。若 $\mathrm{im}(q) > \mathrm{im}(p)$，则 $(p, q-p)$ 是新的分裂对。通过应用此变换得到的分裂对称为导出分裂对。我们声称，导出分裂对始终是另一个分裂对。

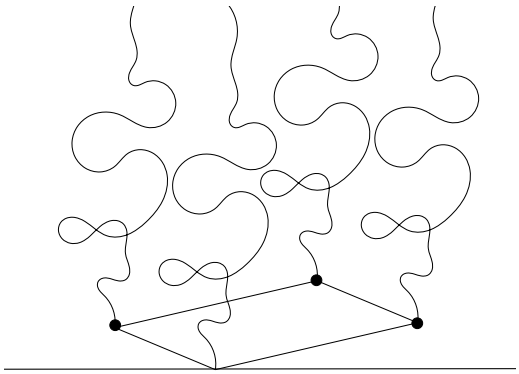


FIGURE 5. 理解导出分裂对的一种方式是，先画一个跨越原点和两个点的平行四边形，然后将最上方的点移到新的顶点处。

为证明这一结论，我们考虑 $\mathrm{im}(p) \geqslant \mathrm{im}(q)$ 的情形。 $\ell + q$ 完全位于 ℓ的右侧，而 $\ell + p$ 完全位于 ℓ的左侧。此外，由于 $\ell + p$ 的虚部坐标都大于 $\mathrm{im}(q)$，因此有 $p \in \{a \in U : \mathrm{im}(a) \geqslant \mathrm{im}(q)\} \subseteq U + q$。这说明 $p - q$ 位于 U中，所以 $(p - q,\ q)$ 是一个有效的分裂对。另一种情形的论证类似。

如果 $\arg(p) > \arg(q)$，我们就称一个分裂对为良好。否则，我们称该分裂对为不良。我们看到，不良分裂对的导出分裂对仍是不良的，而良好分裂对的导出分裂对是

良好的。为了完成定理的证明，只需证明所有分裂对都是良好的，因此我们将考察对不良分裂对反复进行导出时会发生什么。首先请注意，如果 $\mathrm{im}(p)/\mathrm{im}(q)$ 是一个有理数，那么最终会得到一个至少有一项为实数的分裂对；而显然，任何包含实数的分裂对都是良好的。因此，我们已经证明，对于任意不良分裂对，$\mathrm{im}(p)/\mathrm{im}(q)$ 都是无理数。现在，我们将通过矛盾来证明不存在不良分裂对。假设 $(p,\ q)$ 是不良分裂对。我们将分别讨论 $\arg(p) <\arg(q)$ 和 $\arg(p) = \arg(q)$ 这两种情况。

假设 (p, q) 是一个不良分裂对，且 $\arg(p) < \arg(q)$。那么，第 i 个导出分裂对的形式为 $(a_i p - b_i q,\ c_i q - d_i p)$，其中 a_i, b_i, c_i, d_i 是非负整数，满足

$$\lim_{i\to\infty} a_i/b_i = \lim_{i\to\infty} d_i/c_i = \mathrm{im}(q)/\mathrm{im}(p)$$

这说明，虽然导出分裂对各项的虚部趋于零，但它们的实部分别趋于 $+\infty$ 和 $-\infty$。然而，这将迫使第二项最终属于 U，从而导致矛盾。

现在，假设 $\arg(p) =\arg(q)$。在这种情况下，导出分裂对的各项始终位于同一条直线上，并趋于零。然而，在证明前面部分，我们不失一般性地假设 p 在 1 附近的某个小邻域内沿着一条对数螺线运动，这意味着 ℓ 在零附近的某个小邻域内是一条直线。这意味着该邻域内不存在不良分裂对，因此产生矛盾。证明至此完成。□

在证明定理 3 之前，我们需要引入一些关于正方形包络的记号，并证明几个引理。

定义 4. 设 $\gamma:\ S^1 \to \mathbb{R}^2$ 为一条若尔当曲线，且 (e_1, e_2) 为一个正方形包络。我们用 $\sigma_p^*(e_1, e_2, \gamma)$表示一个符号，其中 $p \in \{1, 2\}$ 且 $* \in \{+, -\}$，该符号按如下方式确定。对于 $\lambda \in \mathbb{R}$，令 P_λ 为一条路径：从 $e_1(\lambda)$出发，沿着 e_1 到达 $e_1(0)$，然后沿直线从 $e_1(0)$ 到达 $e_2(0)$，接着沿着 e_2 到达 $e_2(\lambda)$，最后沿直线返回起点 $e_1(\lambda)$。然后令 $n(\lambda)$ 为 P_λ 绕 $S_p(e_1(0), e_2(0))$的绕数。最后，我们设 $\sigma_p^*(e_1, e_2, \gamma) = \lim_{\lambda\to *\infty}(-1)^{n(\lambda)}$。

值得注意的是，这些奇偶性取决于若尔当曲线在 $t = \pm\infty$ 附近一个小正方形的顶点之间如何绕行。对于只有有限个奇点的曲线，它们之间的关系由以下引理给出。

引理 2. 若 γ 是一条除有限个点外均光滑的若尔当曲线，则对于 γ 的任意正方形包络 (e_1, e_2)，以下事实成立。

1) $\sigma_1^+(e_1, e_2, \gamma) = \sigma_2^+(e_1, e_2, \gamma)$ 和 $\sigma_1^-(e_1, e_2, \gamma) = \sigma_2^-(e_1, e_2, \gamma)$2) $\sigma_1^+(e_1, e_2, \gamma) = -\sigma_1^-(e_1, e_2, \gamma)$

3) 若 $* \in \{+, -\}$ 满足 $\sigma_1^*(e_1, e_2, \gamma) = -1$，则极限 $\lim_{t\to *\infty} e_1(t)$ 和 $\lim_{t\to *\infty} e_2(t)$ 均存在，且彼此相等。

证明。 首先，根据正方形包络定义中的性质 (4)，我们立即得到$\sigma_1^+(e_1,\ e_2,\ \gamma) = -\sigma_1^-(e_1,\ e_2,\ \gamma)$ 以及 $\sigma_2^+(e_1,\ e_2,\ \gamma) = -\sigma_2^-(e_1,\ e_2,\ \gamma)$，因为相关奇偶性的定义回路组合起来，构成了一条恰好绕若尔当曲线一周的回路。

接下来，我们断言，如果 $* \in \{+, -\}$，且极限 $\lim_{t\to *\infty} e_1(t)$ 不存在，那么有$\sigma_1^*(e_1, e_2, \gamma) = \sigma_2^*(e_1, e_2, \gamma) = 1$。为证明这一断言，注意到若极限不存在，则在 γ 光滑的某个点处，$e_1(t), t \to *\infty$ 必有一个聚点。在该点附近沿 $*\infty$ 方向取包络线上的一个充分小的正方形，可以看出，若尔当曲线必以一种局部等价于直线分隔正方形顶点的方式，将正方形的顶点分开；而能将 e_1, e_2 顶点与另外两个顶点分开的方式只有一种。由于所有充分靠近 $t = \pm\infty$ 的正方形，其边长都会小于

若尔当曲线内部某个圆盘的直径，因此，定义 $\sigma_1^*(e_1, e_2, \gamma)$ 和 $\sigma_2^*(e_1, e_2, \gamma)$的路径不可能绕过位于 $t = 0$处正方形的两个内部顶点中的任何一个。因此，有$\sigma_1^*(e_1, e_2, \gamma) = \sigma_2^*(e_1, e_2, \gamma) = 1$。

要证明引理的全部三个部分，剩下的就是排除这种可能性：极限 $\lim_{t\to *\infty} e_1(t)$ 和 $\lim_{t\to *\infty} e_2(t)$ 存在，但 $\sigma_1^*(e_1、\ e_2、\ \gamma)$ 与 $\sigma_2^*(e_1、\ e_2、\ \gamma)$ 彼此不相等。这种情况不可能发生，因为若果真如此，路径 $e_1(t)$、$e_2(t)$、$S_1(e_1(t)$、$e_2(t))$和 $S_2(e_1(t)$、$e_2(t))$ 就必须都趋近于平面上的某一点，且彼此不相交；同时，绕该点逆时针环绕时，这些路径呈现出循环次序，在 $\{e_1(t)$、$e_2(t)\}$ 与 $\{S_1(e_1(t)$、$e_2(t))$、$S_2(e_1(t)$、$e_2(t))\}$这两组之间交替出现。这就与简单闭曲线 γ 将 $\{e_1(t)$、$e_2(t)\}$中的路径和 $\{S_1(e_1(t)$、$e_2(t))$、$S_2(e_1(t)$、$e_2(t))\}$中的路径分隔开的事实矛盾。□

若 γ 是一条除有限个点外都光滑的若尔当曲线，且 $(e_1,\ e_2)$ 是一个正方形包络，我们称 $(e_1,\ e_2)$ 为正向定向，若 $\sigma_1^+(e_1,\ e_2,\ \gamma) = -1$；若$\sigma_1^+(e_1,\ e_2,\ \gamma) = +1$，则称其为负向定向。注意，若 $(e_1(t),\ e_2(t))$ 是一个负向定向的正方形包络，我们可以通过取 $(e_1(-t),\ e_2(-t))$ 得到一个正向定向的正方形包络。

在证明定理 3 之前，我们还需要一个引理。

引理 3. 设 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ 是复数，且比值 β_1/β_2 是一个正实数。设 t_0 和 p 是任意实数，满足 $p \neq 0$；并设 $\lambda,\ r_1,\ r_2$ 是$[0,\ 1)$ 中的实数。若存在实数 t_1 和 t_2 属于 $[0,\ \infty)$，使得

$$e^{\alpha_1+\beta_1 p(t_1-t_0)}\left(1+\lambda r_1 e^{ip(t_1-t_0)}\right) = e^{\alpha_2+\beta_2 p(t_2-t_0)}\left(1+\lambda r_2 e^{ip(t_2-t_0)}\right)$$

那么还存在 t_1' 和 t_2' 属于 $[0,\ \infty)$，使得

$$e^{\alpha_1+\beta_1 p(t_1'-t_0)}\left(1+r_1 e^{ip(t_1'-t_0)}\right) = e^{\alpha_2+\beta_2 p(t_2'-t_0)}\left(1+r_2 e^{ip(t_2'-t_0)}\right)$$

证明。代入 $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$、$p(t_1 - t_0) = t$和 $p(t_2 - t_0) = (\beta_1/\beta_2)t + s$, 后，方程

$$e^{\alpha_1+\beta_1 p(t_1-t_0)}\left(1+\lambda r_1 e^{ip(t_1-t_0)}\right) = e^{\alpha_2+\beta_2 p(t_2-t_0)}\left(1+\lambda r_2 e^{ip(t_2-t_0)}\right)$$

可整理为

$$e^{\alpha-\beta_2 s} = \frac{1+\lambda r_1 e^{it}}{1+\lambda r_2 e^{i(\frac{\beta_1}{\beta_2}t+s)}}$$

整理并令 $a = r_1$、$b(s) = -r_2 e^{\alpha+(i-\beta_2)s}$和 $c(s) = e^{\alpha+\beta_2 s} - 1$后，可得

$$c(s) = \lambda \cdot \left(a \cdot e^{it} + b(s) \cdot e^{i\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}t\right)}\right)$$

此外，令

$$T(s) = \{t : \exists t_1 \geqslant 0, \exists t_2 \geqslant 0,\quad p(t_2 - t_0) = (\beta_1/\beta_2)t + s,\quad p(t_1 - t_0) = t\}$$

为固定 s时 t 的允许取值，其中 t_1 和 t_2 均非负。这始终是形如 $(-\infty,\ z]$或 $[z,\ \infty)$的区间，其中 z为某个实数。现在，令 $H(s)$表示包含集合

$$\{a \cdot e^{it} + b(s) \cdot e^{i(\beta_1/\beta_2)t} : t \in T(s)\}$$

于是，我们看到存在一对非负实数 t_1 和 t_2，使得

$$e^{\alpha_1+\beta_1 p(t_1-t_0)}\left(1+\lambda r_1 e^{ip(t_1-t_0)}\right) = e^{\alpha_2+\beta_2 p(t_2-t_0)}\left(1+\lambda r_2 e^{ip(t_2-t_0)}\right)$$

当且仅当存在一个实数 s，使得 $c(s) \in \lambda H(s)$。由于 β_1/β_2 为正，当 β_1/β_2 为有理数时，$H(s)$ 是由内摆线曲线的外边界围成的区域。当 β_1/β_2 为无理数时，$H(s)$ 是一个缺少部分边界的圆盘。特别地，$H(s)$ 是

一个径向集，也就是说，对于任意 $x \in H(s)$，对于所有 $\lambda \in [0,\ 1]$，都有 $\lambda x \in H(s)$。因此，增大参数 λ 可以保证原方程仍然有解。令 $\lambda = 1$，即可得到所需结果。

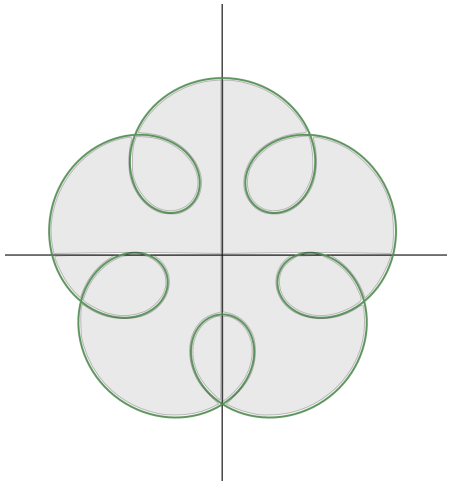


FIGURE 6. 内摆线曲线围成的区域始终是一个径向集。

□

现在，我们可以证明定理 3。

定理 *3* 的证明。 我们首先考虑如下线性关系系统：在 $\mathbb{C}^2$ 上令$(x_1,\ y_1)R(x_2,\ y_2)$，其中

$$\{x_1, y_1, x_2, y_2\} \cap \{x_1 + i(y_1 - x_1), y_1 + i(y_1 - x_1), x_2 + i(y_2 - x_2), y_2 + i(y_2 - x_2)\} \neq \varnothing$$

现在，取一个正向定向的正方形包络 (e_1, e_2)。根据引理 2，将定义域限制为 $[0, \infty)$ 后，立即得到一条避关系原点路径 $(e_1(t), e_2(t)) - \lim_{t\to\infty}(e_1(t), e_2(t))$，其中 R。我们假设螺旋猜想成立，因此现在可以取 $h\colon\ [0,1] \times [0,\infty)$，使其满足螺旋猜想的条件。这给出了复数 a_1, a_2以及向量 $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^2$，使得 $(f_1(t), f_2(t)) = f(t) = x_1 e^{a_1 t} + x_2 e^{a_2 t}$是针对 R的一条避关系原点路径，并且具有这样的性质：在 $\mathbb{C}$ 中的路径从 0 出发，沿着 f_2 到达 $f_2(0)$，从$f_2(0)$ 沿直线走到 $f_1(0)$，然后沿着 f_1 返回 0；该路径绕点 $f_1(0) + i(f_2(0) - f_1(0))$和 $f_2(0) + i(f_2(0) - f_1(0))$的绕数具有非平凡奇偶性。不失一般性，我们可以假设 a_1 和 a_2 的实部相同，因为否则，当 t 足够大时，一项将占主导，从而归结为纯对数螺旋的情形，我们稍后将讨论这种情形。同样，我们可以假设$a_1 \neq a_2$。现在，为了证明不存在这样的 a_1, a_2, x_1, x_2，注意到若要使该路径避开关系，我们必须能够找到某个固定的复数 β和非零实数 p，使得四条路径 $f_1(t)$、$f_2(t)$、$f_1(t) + i(f_2(t) - f_1(t))$ 和 $f_2(t) + i(f_2(t) - f_1(t))$ 都具有如下形式

$$e^{\alpha + q\beta p(t-t_0)}\left(1 + re^{ip(t-t_0)}\right)$$

通过 $\alpha \in \mathbb{C},\ t_0 \in \mathbb{R},\ q \in (0,\ \infty)$，以及 $r \in [0,\ 1)$。因此，引理 3 允许我们在保持路径避开关系原点的同时，将所有 r 参数连续缩小至零。

剩下要证明的是，没有任何纯对数螺旋 $f(t) = xe^{at}$ 能成为满足所述绕数奇偶条件的避关系原点路径。为证明这一点，注意，由 f_1 和 f_2 之间的线段扫过的区域，与由 $f_1 + i(f_2 - f_1)$ 和 $f_2 + i(f_2 - f_1)$之间的线段扫过的区域面积相同。然而，我们的绕数

条件意味着前一个区域必须严格包含后一个区域，这与两者面积相同相矛盾。□

最后，我们再提出几个关于避开原点的关系路径的猜想。

猜想 3（SSC，强螺旋猜想）。每条避关系原点路径 p 都强同伦于一条避关系原点路径 q，后者存在一组线性无关向量x_1，……，x_n属于 V，以及复数 a_1，……，a_n，使得

$$q(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{a_i t}$$

对所有 t 均成立。

猜想 4（MSC，单调螺旋猜想）。对于任意连续函数 $p\colon [0,\ \infty) \to V\backslash\{0\}$，若 $\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$，则存在一个连续函数 $h\colon [0,\ 1] \times [0,\ \infty) \to V$，满足以下性质。

1) $\lim_{t\to\infty} h(s,\ t) = 0$，对所有 s 均成立。2) $h(0,\ t) = p(t)$，对所有 t 均成立。3) 存在线性无关向量 x_1，……，x_n属于 V，以及复数 a_1，……，a_n，使得

$$h(1, t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{a_i t}$$

对所有 t。

4) 如果 $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant 1$，那么 $B(s_2) \subseteq B(s_1)$，其中

$$B(s) := \bigcup_{(t_1,t_2)\in[0,\infty)^2} \{f \in (V \times V)' : f(h(s, t_1), h(s, t_2)) = 0\}$$

证明这些蕴含关系 $MSC \implies SSC \implies SC$ 并不太困难。强螺旋猜想显然蕴含螺旋猜想，但单调螺旋猜想为何蕴含强螺旋猜想，可能就没那么容易看出来。原因在于，可以对同伦作小幅扰动，使其避开 $V \times V$ 中余维大于一的任何关系，而单调螺旋猜想所涉及的同伦总会增加其所避开的余维为一的关系集合。

从直观上说，在一维情形下，单调螺旋猜想应该成立，因为对数度量下的曲线缩短流应该具有所需的性质。至少，这一论证应该适用于那些相对于对数螺线具有周期偏差的光滑路径；但对于任意连续路径，分析会复杂得多。如果能将这类论证推广到高维，那将很有帮助，不过要如何实现并不显而易见。无论如何，我们希望，对避开关系的路径有足够深入的理解，能够推动内接正方形问题取得新的进展。

References

[1] Arseniy Akopyan 和 Sergey Avvakumov。任意圆内接四边形都可以内接于任意闭凸光滑曲线。 *Forum of Mathematics, Sigma*，2018。[2] H.B. Griffiths。圆孔中的正方形钉的拓扑学。 *Proceedings of the London Mathematical Society*，s3-62(3):647–672，1991。[3] John McCleary Jason Cantarella，Elizabeth Denne。构形空间的横截性与“正方形钉”定理。 *arXiv:1402.6174 [math.GT]*，2014。[4] Benjamin Matschke。 *Equivariant topology methods in discrete geometry.* 博士论文，柏林自由大学，2011。[5] Benjamin Matschke。正方形钉问题综述。 *Notices Amer. Math. Soc.*，61(4):346–352，2014。[6] Benjamin Matschke。内接于凸曲线的四边形。 *arXiv:1801.01945 [math.MG]*，2018。[7] M. J. Nielsen 和 S. E. Wright。对称连续统中的内接矩形。

Geometriae Dedicata 56 3 285 297, , ( ): 1995 – 。[8] L. G. Schnirelman。关于闭曲线的一些几何性质。 *Usp. Mat. Nauk*，10:34–44，1944。[9] R.E. Schwartz。约旦闭曲线中内接矩形的三分法。 *arXiv:1804.00740 [math.MG]*，2018。[10] 陶哲轩。托普利茨正方形钉问题的积分方法。 *Forum of Mathematics, Sigma*，(5)，2017。