arXiv:2301.01359v1 [math.NT] 3 Jan 2023

模 11 和模 13 的圆柱形 Kanade-Russell 猜想的证明：关于 A_2 罗杰斯–拉马努金型恒等式

ALI KEMAL UNCU

Abstract. 我们证明了源自圆柱形分拆范式的两个新系列和积恒等式。Kanade–Russell 最初以 Andrews–Schilling–Warnaar 恒等式的精神，提出了本文中的大多数表达式、相关和积恒等式以及证明所需的关键要素，这些恒等式属于 A_2 罗杰斯–拉马努金型。我们追随 Kanade–Russell 的脚步，同时大幅调整计算方法，以实现我们的目标。

1. 引言 Introduction

数论、组合学、 q-级数与仿射李代数之间的协同作用日益增强，由此催生了突破性的技术和优美的数学发现。其中包括罗杰斯–拉马努金型恒等式：无限 q级数等于具有模结构的无限乘积。罗杰斯–拉马努金恒等式最初出现于数论与组合学的交汇处，一直备受关注。多年来，人们以多种不同方式研究、证明并推广了这些和积恒等式 [3, 6, 13, 14, 17, 22, 24, 25, 37]。多年来，这些恒等式也自然地出现在许多其他领域，包括数理物理 [10], 、仿射李代数表示论和向量算子代数 [31, 32], 、与着色琼斯多项式相关的纽结理论 [8], 以及代数几何 [15] 。

对于某个非负整数 L 和形式变量 a 及 q，令 q-Pochhammer 符号为 $(a;q)_L := (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{L-1})$，且 $(a;q)_\infty := \lim_{L\to\infty}(a;q)_L$, $\theta(a;q) := (a,q/a;q)_\infty$，对于 $a_1,\dots,a_k$ 个形式变量，定义简写记号 $\theta(a_1,a_2,\dots,a_k;q) := \theta(a_1;q)\theta(a_2;q)\dots\theta(a_k;q)$。

罗杰斯–拉马努金恒等式如下 [38]。

定理 1.1（罗杰斯–拉马努金恒等式）。

$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}=\frac{1}{\theta(q;q^5)} \quad and \quad \sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}=\frac{1}{\theta(q^2;q^5)}. \tag{1.1}$$

右侧 (1.1) 中倒数 q-Pochhammer 乘积分别具有模 5 的 ± 1 和 ± 2 剩余类。我们称这些为模 5 恒等式。

组合 c 是由总和为 n的非负整数组成的有限列表。分拆是一种组合，其中列表中的元素（称为部件）均不为零，且列表元素按非递增顺序排列。我们将组合 π 的大小定义为其所有部件之和，并记为 $|\pi|$。组合中的部件数 π 记为 #(π)。大小为 n 的组合（分别为分拆）称为“ n的组合（分别为分拆）”。空列表被视为 0 的唯一组合/分拆，且部件数为 0。例如，(2, 0, 2) 是一个含有 3 个部件的组合，而 (1, 1, 1, 1)、(4, 3, 1) 和 (2, 2) 分别是 4、8 和 4 的分拆。

麦克马洪 [33] 和舒尔 [39] 独立地为罗杰斯–拉马努金恒等式给出了组合解释。

Date：2023年1月5日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 05A15；次要分类号 05A17、05A19、11B65、11P84、17B65、68R05。*Key words and phrases.* 柱面分拆、分拆恒等式、罗杰斯–拉马努金恒等式、Andrews–Schilling–Warnaar 恒等式。作者的研究部分由英国工程与物理科学研究委员会资助，资助编号为 EP/T015713/1；部分由奥地利科学基金资助，资助编号为 P-34501N。

定理 1.2（罗杰斯–拉马努金恒等式的组合解释）。设 $i = 0$ 或 1。对于每个自然数 n，满足任意两个相邻部件之差至少为 2 且最小部件严格大于 i 的 n 的分拆数，等于将 n 分拆为模 5 下与 $\pm(1+i)$ 同余的部件所得的分拆数。

Gordon [24] 将定理 1.2 广泛推广到了所有奇数模数 ≥ 5。

定理 1.3（Gordon 恒等式，1961）。设 r 和 i 为整数，使得 $r \geq 2$ 和 $1 \leq i \leq r.$。满足条件 $\pi_j - \pi_{j+r-1} \geq 2$（对所有 j）且至多有 $i-1$ 1个 s 作为部件的 n 的分拆 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s)$ 的数量，与部件模 $2r+1$ 不 congruent 于 $0, \pm i$ 的 n 的分拆数量相等。

罗杰斯–拉马努金恒等式对应于 $r = i = 2$ 和 $r = 2, i = 1$ 的情形。Andrews 找到了

Gordon 恒等式 [3] 的 q-级数对应式。

定理 1.4（Andrews–Gordon 恒等式，1974）。设 $r \geq 2$ 和 $1 \leq i \leq r$ 为两个整数。我们有

$$\sum_{n_1 \geq \cdots \geq n_{r-1} \geq 0} \frac{q^{n_1^2+\cdots+n_{r-1}^2+n_i+\cdots+n_{r-1}}}{(q;q)_{n_1}} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_1-n_2 \end{bmatrix}_q \cdots \begin{bmatrix} n_{r-2} \\ n_{r-2}-n_{r-1} \end{bmatrix}_q = \frac{\theta(q^i;q^{2r+1})(q^{2r+1};q^{2r+1})_\infty}{(q;q)_\infty}, \tag{1.2}$$

其中，对于两个整数 n 和 m，

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q := \begin{cases} \dfrac{(q;q)_{m+n}}{(q;q)_m(q;q)_n} & for\ m,n \geq 0, \\ 0 & otherwise, \end{cases}$$

是经典的 q二项式系数。

注意，罗杰斯–拉马努金恒等式是 (1.2) 的一个特例，其中 $r = i = 2$，且 $r = 2$ 和$i = 1$。感兴趣的读者可通过 Sills [40] 最近出版的著作，全面了解罗杰斯–拉马努金恒等式的历史、意义及其若干推广。

恒等式 (1.2) 可通过源自 q级数领域的 Bailey 机制证明。这一强大的机制从一对 q表达式出发，称为 Bailey 对，它们满足预先定义的关系；随后通过迭代修改这一对表达式（使用 Bailey 引理或其推广形式），得到新的 Bailey 对（见[2, 4, 9, 40]）。这样，以与罗杰斯–拉马努金恒等式相关的 Bailey 对为起点，便可得到一整条无限链的恒等式 (1.2)。恒等式 (1.2) 是与仿射李代数$A_1^{(1)}$ 相关的某些特征标，因此我们将它们称为 A_1 罗杰斯–拉马努金恒等式。原始的 Bailey 机制后来被推广到 A_{n-1}，适用于一般的 n [34, 35]。然而，这些工作并未得到 A_{n-1} 罗杰斯–拉马努金恒等式。

在他们颇具影响力的论文中，Andrews、Schilling 和 Warnaar [7] 成功描述了一种 A_2 Bailey 引理及其相关的 Bailey 机制。他们找到了若干个无穷恒等式族，其中一个模 7 恒等式如下。

定理 1.5（Andrews–Schilling–Warnaar，1999）。

$$\sum_{r_1,s_1 \geq 0} \frac{q^{r_1^2-r_1s_1+s_1^2+r_1+s_1}}{(q;q)_{r_1}} \begin{bmatrix} 2r_1 \\ s_1 \end{bmatrix}_q = \frac{1}{\theta(q^2,q^3,q^3;q^7)}. \tag{1.3}$$

Andrews–Schilling–Warnaar 找到了若干非常一般的和积恒等式族。就表示论而言，尤其值得关注的是，这些恒等式的乘积端是 W_3 代数的特征标公式，且乘以一个额外因子（q；q）$_\infty^{-1}$ [21]。由于这个额外因子的存在，这些公式无法给出明显为正的特征标公式求和端。

例如，清除额外因子（q；q）$_\infty^{-1}$后，Andrews–Schilling–Warnaar 的一个模 10 恒等式如下。

定理 1.6（Andrews–Schilling–Warnaar，1999）。

$$(q,q)_\infty \sum_{\substack{r_1 \geq r2 \geq 0 \\ s_1 \geq s_2 \geq 0}} \frac{q^{r_1^2-r_1s_1+s_1^2+r_2^2-r_2s_2+s_2^2+r_1+r_2+s_1+s_2}}{(q;q)_{r_1-r_2}(q;q)_{r_2}(q;q)_{s_1-r_2}(q;q)_{s_2}(q;q)_{r_2+s_2+1}} = \frac{1}{\theta(q^2,q^3,q^3,q^4,q^4,q^5;q^{10})} \tag{1.4}$$

回顾欧拉五边形数定理 [5]

$$(q,q)_\infty = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i q^{i(3i+1)/2}. \tag{1.5}$$

虽然很容易看出，(1.4) 的右端具有正系数，但鉴于 (1.5)，这一点在左端并不显而易见。相比之下，(1.3) 的两端都显然为正。显然为正的和表示揭示了仿射李代数 $A_2^{(1)}$ 的某些模的结构。这些内容提及了仿射李代数 $A_2^{(1)}$ 的标准模的特征标。感兴趣的读者可在 [7, 29, 28, 31, 32] 中了解这一联系的更多内容。

最近，通过一种具有组合学根源的方案发现这些特征标公式的显然为正的恒等式，引起了人们的关注，并由此产生了许多新的罗杰斯–拉马努金型恒等式。

1997 年，Gessel 和 Krattenthaler [23] 在不相交格路的背景下定义了柱面分拆。Borodin [11] 给出了柱面分拆数量生成函数的单变量乘积公式。Foda 和 Welsh [21] 利用柱面分拆的组合学证明了 A_1 罗杰斯–拉马努金恒等式。这促成了 Corteel 利用柱面分拆对罗杰斯–拉马努金恒等式给出的组合证明 [17]。2019 年，Corteel 和 Welsh [18] 利用最大部件统计量，推导出了柱面分拆数量的双变量生成函数的函数方程。在此过程中，他们还给出了 Andrews–Schilling–Warnaar 的模 7 A_2 罗杰斯–拉马努金恒等式（包括 (1.3)）以及一个最初由 Feigin–Foda–Welsh [20] 猜想的第五个遗漏恒等式的新证明。所有这些模 7 恒等式的和式一侧都显然为正。[18] 成为了近期发展的催化剂。Ablinger 和作者 [1] 在符号计算程序 qFunctions 中实现了 Corteel–Welsh 关于柱面分拆的函数方程，以便利用形式化运算和计算机代数技术来运用这一组合思想。随后，Corteel、Dousse 和作者 [19] 借助这一实现，证明了由柱形分拆范式导出的模 8 恒等式。其中一个恒等式如下（见 [19] 中的定理 1.6）。

定理1.7（Corteel–Dousse–U.，2021年）。

$$\sum_{\substack{r_1\ge s_1\ge r_2\ge 0\\ r_1\ge s_2\ge 0}} \frac{q^{r_1^2-r_1s_1+s_1^2+r_2^2+s_2^2+s_1s_2+r_1+r_2+s_1+s_2}}{(q;q)_{r_1}} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} r_1 \\ s_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} s_1 \\ r_2 \end{bmatrix}_q = \frac{1}{\theta(q^2,q^3,q^3,q^4,q^4,q^5;q^{10})} \tag{1.6}$$

与（1.4）不同，（1.6）的和式一侧显然为正。[19], 2021年末不久之后，Warnaar [42] 提出了许多优美的猜想，涉及与高模数（不能被3整除）相关且显然为正的和式一侧。2022年，Tsuchioka [41] 利用有限自动机和自动化证明，证明了模6下显然为正的和式一侧。他还能够分析仿射李代数 $A_2^{(1)}$ 的相关3级标准模的结构。

从另一种角度来说，Bridges和作者也研究了柱面分拆的加权版本
作为柱形分拆 in
[12]中的不同部件。

2022年早些时候，Kanade 和 Russell [29] 致力于提出（并成功提出） A_2 Rogers–Ramanujan 型恒等式，采用 Andrews–Schilling–Warnaar 的形式，而不是追求显式为正的和式。他们针对每个模数 ≥ 5都给出了明确的猜想。他们证明了模数为 5、6、7、8 和 10 的情形。由于计算困难日益增加，他们的探索最终止步于此。

本文通过改变所采用的计算技术来探讨 Kanade–Russell 猜想。我们证明了源自柱形分拆范式的所有模 11 和 13 A_2 罗杰斯–拉马努金恒等式。以下是其中两个恒等式：

定理 1.8。

$$\sum_{\substack{r_1\geq r_2\geq r_3\geq 0\\ s_1\geq s_2\geq s_3\geq 0}} \frac{q^{r_1^2-r_1s_1+s_1^2+r_2^2-r_2s_2+s_2^2+r_3^2+r_3s_3+s_3^2+r_1+r_2+r_3+s_1+s_2+s_3}}{(q;q)_{r_1-r_2}(q;q)_{r_2-r_3}(q;q)_{r_3}(q;q)_{s_1-s_2}(q;q)_{s_2-s_3}(q;q)_{s_3}(q;q)_{r_3+s_3+1}}$$
$$=\frac{1}{(q;q)_\infty}\frac{1}{\theta(q^2,q^3,q^3,q^4,q^4,q^5,q^5;q^{11})}.$$

定理 1.9。

$$\sum_{\substack{r_1\geq r_2\geq r_3\geq 0\\ s_1\geq s_2\geq s_3\geq 0}} \frac{q^{r_1^2-r_1s_1+s_1^2+r_2^2-r_2s_2+s_2^2+r_3^2-r_3s_3+s_3^2+r_1+r_2+r_3+s_1+s_2+s_3}}{(q;q)_{r_1-r_2}(q;q)_{r_2-r_3}(q;q)_{r_3}(q;q)_{s_1-s_2}(q;q)_{s_2-s_3}(q;q)_{s_3}(q;q)_{r_3+s_3+1}}$$
$$=\frac{1}{(q;q)_\infty}\frac{1}{\theta(q^2,q^3,q^3,q^4,q^4,q^5,q^5,q^6,q^6;q^{13})}.$$

本文的组织结构如下。第 2 节介绍柱面分拆、相关结果，以及本文将证明其中若干情形的 Kanade–Russell 猜想。第 3 节专门讨论对这些猜想的重新表述以及证明方法的说明。第 4 节和第 5 节分别给出模 11 恒等式和 13 A_2 罗杰斯–拉马努金恒等式的 Andrews–Schilling–Warnaar 形式的证明。第 6 节概述这项工作引出的若干自然问题和数学挑战。第 7 节则讨论此前工作 [19, 29] 及本文中的计算机辅助证明是如何进行的，以及未来可以做出哪些改进，从而在数学上取得进一步进展。

Acknowledgement

作者谨向 2022年11月在林茨举办的柱面分拆研讨会小组致谢，感谢大家进行的所有启发性讨论。特别感谢 Shashank Kanade，他首先提议从事柱面分拆研究的学者聚在一起、携手合作，并感谢他对本文提出的所有意见。作者还要感谢 Christian Koutschan 对作者开展必要实现工作的鼓励。

作者的研究部分由英国工程与物理科学研究委员会资助，资助编号为 EP/T015713/1；部分由奥地利科学基金资助，资助编号为 P-34501N。

2. Necessary definitions

我们首先给出柱面分拆的定义。

定义 2.1. 柱面分拆由一个组合 $c=(c_1,c_2,\ldots,c_r)$ 和一个向量 $\pi=(\pi^{(1)},\pi^{(1)},\ldots,\pi^{(r)})$ 构成；前者称为轮廓，包含 r 个部件，后者由 r 个分拆 $\pi^{(i)}=(\pi_1^{(i)},\pi_2^{(i)},\ldots)$ 组成，并满足以下不等式

$$\pi_j^{(i)}\geq\pi_{j+c_{i+1}}^{(i+1)}\quad\text{and}\quad\pi_j^{(r)}\geq\pi_{j+c_1}^{(1)}.$$

例如，向量分拆 $\pi=\{(1,1,1,1),(4,3,1),(2,2)\}$ 与轮廓 (2, 0, 2) 一起构成一个柱面分拆。注意，同一个向量分拆也可能满足具有不同轮廓的柱面分拆不等式。例如，对于轮廓 (2, 0, 0)、(2, 0, 1) 等，π 也都是柱面分拆。我们可以将柱面分拆的总大小 π 定义为其中所有分拆的大小之和。总大小仍记为 $|\pi|$。设 c 为一个组合，并设 $\mathcal{P}_c$ 为所有轮廓为 c 的柱面分拆所对应的向量分拆的集合。

给定轮廓 c，令 $\mathcal{P}_c$ 为所有轮廓为 c的柱面分拆所组成的集合。令

$$F_c(z,q):=\sum_{\pi\in\mathcal{P}_c} z^{\max(\pi)}q^{|\pi|},$$

柱形分拆的二元生成函数，其指数分别记录 π 中部件的最大大小和总和，其中 z 和 q。Borodin [11] 证明，当 $z=1$ 时，$F_c(z,q)$ 生成函数具有乘积公式。

定理 2.2（Borodin，2007）。设 r 和 l 为正整数，且 $c=(c_1,c_2,\dots,c_r)$ 是 l 的一个组合。定义 $m:=r+l$ 和 $s(i,j):=c_i+c_{i+1}+\cdots+c_j$。那么，

$$F_c(1,q)=\frac{1}{(q^m;q^m)_\infty}\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=i}^{r}\prod_{k=1}^{c_i}\frac{1}{(q^{k+j-i+s(i+1,j)};q^m)_\infty}\prod_{i=2}^{r}\prod_{j=2}^{i}\prod_{k=1}^{c_i}\frac{1}{(q^{m-k+j-i-s(j,i-1)};q^m)_\infty}. \tag{2.1}$$

着眼于替换给定柱面分拆中的最大部分，Corteel–Welsh [18] 定义了一个关于 $F_c(z,q)$ 的 q-差分方程。这个函数方程将 $F_c(z,q)$ 与其他生成函数 $F_{c^*}(z,q)$ 联系起来，其中 $\#(c)=\#(c^*)$ 且 $|c|=|c^*|$。设 $c=(c_1,\dots,c_r)$（约定 $c_0=c_r$）为给定的组合，并定义 I_c 为 c 中非零项对应的指标集合。给定一个非空子集 $J\subseteq I_c$，组合 $c(J)=(c_1(J)\dots,c_r(J))$ 定义如下：

$$c_i(J):=\begin{cases}c_i-1 & \text{if } i\in J \text{ and } i-1\notin J,\\ c_i+1 & \text{if } i\notin J \text{ and } i-1\in J,\\ c_i & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{2.2}$$

那么，显式的 q-差分方程 $F_c(z,q)$ 满足如下形式。

定理 2.3（Corteel–Welsh，2019）。对于任意轮廓 c，

$$F_c(z,q)=\sum_{\emptyset\subset J\subseteq I_c}(-1)^{|J|-1}\frac{F_{c(J)}(zq^{|J|},q)}{(1-zq^{|J|})}, \tag{2.3}$$

初始条件为 $F_c(0,q)=F_c(z,0)=1$。

设 c 为一个轮廓，c' 为 c的循环移位。通过对 $\mathcal{P}_c$中计数的分拆向量进行循环移位，柱面分拆 $\mathcal{P}_c$ 与 $\mathcal{P}_{c'}$ 之间存在明显的一一对应关系。这足以说明这些柱面分拆集合的生成函数相等，即 $F_c(z,q)=F_{c'}(z,q)$。因此，我们可以对轮廓进行循环移位，从而减少耦合 q差分方程组中出现的（表面上不同的）生成函数数量。

我们还可以将 (2.3) 规范化，并得到一个等价的 q差分方程。例如，l　　et

$$G_c(z,q):=(zq;q)_\infty F_c(z,q).$$

方程 (2.3) 等价于

$$G_c(z,q)=\sum_{\emptyset\subset J\subseteq I_c}(-1)^{|J|-1}(zq;q)_{|J|-1}G_{c(J)}(zq^{|J|},q), \tag{2.4}$$

初始条件为 $G_c(0,q)=G_c(z,0)=1$。这个带多项式系数的 q差分方程 (2.4)，实际上在 [18] 和 [19], 中模 7 和模 8 的三部分轮廓柱面分拆恒等式的证明中发挥了核心作用。稍后将在 [12]中介绍 (2.3) 和 (2.4) 的加权版本。在 [29], 中，Kanade–Russell 决定对 (2.4) 的初始条件稍作修改。虽然这不会改变 q差分方程，却促成了一个猜想性的发现：这些三部分轮廓柱面分拆生成函数中，大多数都存在显式公式。令

$$H_c(z,q):=\frac{(zq;q)_\infty}{(q;q)_\infty}F_c(z,q). \tag{2.5}$$

那么，$H_c(z,q)$ 满足与 $G_c(z,q)$ 相同的 q-差分方程，即

$$H_c(z,q)=\sum_{\emptyset\subset J\subseteq I_c}(-1)^{|J|-1}(zq;q)_{|J|-1}H_{c(J)}(zq^{|J|},q), \tag{2.6}$$

其初始条件为 $H_c(0,q)=1/(q;\,q)_\infty$ 以及 $H_c(z,0)=1$。

从此处开始，我们只关注含有 3 个部件的柱形分拆轮廓。令 $k\geq 2$，令

$$\rho=(\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{k-1})\in\mathbb{Z}^{k-1},\ \text{and}\ \sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{k-1})\in\mathbb{Z}^{k-1} \tag{2.7}$$

并定义

(2.8)

$$S_{3k-1}(z;\rho|\sigma)=\sum_{r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{k-1}} z^{r_1}\frac{q^{\sum_{i=1}^{k-1}r_i^2-r_is_i+s_i^2+\rho_ir_i+\sigma_is_i}}{\prod_{i=1}^{k-2}(q;q)_{r_i-r_{i+1}}(q;q)_{s_i-s_{i+1}}}\frac{q^{2r_{k-1}s_{k-1}}}{(q;q)_{r_{k-1}}(q;q)_{s_{k-1}}(q;q)_{r_{k-1}+s_{k-1}+1}},$$

(2.9)

$$S_{3k}(z;\rho|\sigma)=\sum_{r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{k-1}} z^{r_1}\frac{q^{\sum_{i=1}^{k-1}r_i^2-r_is_i+s_i^2+\rho_ir_i+\sigma_is_i}}{\prod_{i=1}^{k-2}(q;q)_{r_i-r_{i+1}}(q;q)_{s_i-s_{i+1}}}\frac{1}{(q;q)_{r_{k-1}+s_{k-1}}(q;q)_{r_{k-1}+s_{k-1}+1}}\begin{bmatrix}r_{k-1}+s_{k-1}\\ r_{k-1}\end{bmatrix}_{q^3},$$

(2.10)

$$S_{3k+1}(z;\rho|\sigma)=\sum_{r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{k-1}} z^{r_1}\frac{q^{\sum_{i=1}^{k-1}r_i^2-r_is_i+s_i^2+\rho_ir_i+\sigma_is_i}}{\prod_{i=1}^{k-2}(q;q)_{r_i-r_{i+1}}(q;q)_{s_i-s_{i+1}}}\frac{1}{(q;q)_{r_{k-1}}(q;q)_{s_{k-1}}(q;q)_{r_{k-1}+s_{k-1}+1}}.$$

Let

$$e_i=(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{i},1,1,\ldots,1)\in\mathbb{Z}^{k-1}\quad\text{and}\quad\delta_i:=(\delta_{ij})_{1\leq j\leq k-1}\in\mathbb{Z}^{k-1}. \tag{2.11}$$

容易看出

$$S_m(zq^n;\rho|\sigma)=S_m(z;\rho+n\delta_1|\sigma) \tag{2.12}$$

对任意 $n\in\mathbb{Z}$。

Kanade–Russell 猜想，对于任意固定的 $k\geq 3$，$H_{(c_1,c_2,c_3)}(z,q)$ 可以表示为 $S_m(z;\rho|\sigma)$ 函数的线性组合。准确地说，他们提出了如下猜想。

猜想 2.4（Kanade–Russell，2022年）。设 $k\geq 3$ 和 $|c|+3=m=3k+\{-1,0,1\}$。利用循环对称性，假设 $c_1\geq c_2$、c_3。若 c_2、$c_3\leq k-1$，则

$$H_{(c_1,c_2,c_3)}(z,q)=\begin{cases}S_m(z;e_{c_2}|e_{c_3})-qS_m(z;e_{c_2-1}|e_{c_3-1}), & c_2,c_3>0,\\ S_m(z;e_{c_2}|e_0), & c_3=0,\\ S_m(z;e_0|e_{c_3})-q(1-z)S_m(z;e_0+\delta_0|e_{c_3-1}), & c_2=0,c_3\neq 0,\end{cases} \tag{2.13}$$

其中，e_i 和 δ_i 定义如（2.11）所示。

猜想 2.4 给出的明确断言并未涵盖所有满足 $|c|+3=m$ 的函数 $H_c(z,q)$。不过，这些断言足以推导出明确的表达式断言。如何找到耦合的 q-差分方程组中出现的其他 $H_c(z,q)$ 的猜想性 $S_m(z;\rho|\sigma)$ 等价形式，[29] 中作了解释。Kanade–Russell 将与待恢复函数相关的轮廓称为“线下”轮廓。我们也沿用这一称呼，但不再解释有关这条线的任何内容。这些与线下轮廓相关的函数，在 $S_m(z;\rho|\sigma)$ 表述中可能带有 z 的平移。这些平移源自 q-差分方程 (2.6)。利用 (2.12) 可以消去 z 中的所有平移。因此，从现在起，在所有表达式中，我们都将利用 (2.12) 转换 $S_m(z;\rho|\sigma)$ 的任何 z 平移，从而忽略 z 中所有平移。为进一步强调这一点，今后我们将从记法中省略变量 z，并写作

$$S_m(\rho|\sigma):=S_m(z;\rho|\sigma).$$

证明猜想 2.4（及其推广至总和为 $m-3$ 的所有三部分剖面）需要证明 $S_m(\rho|\sigma)$ 中的表达式确实是相应 $H_c(z;q)$ 函数的正确表达式。为此，可以证明 $S_m(\rho|\sigma)$ 中的表达式满足 (2.6) 所规定的同一递推关系，并且该表达式的初始条件成立。在 [29], 中，已经证明，对于 $c_2,c_3\leq k-1$，(2.13) 的猜想公式均满足必要的初始条件

$$H_c(z,0)=1\quad\text{and}\quad H_c(0,z)=1/(q;q)_\infty. \tag{2.14}$$

引理 9.1、引理 9.2] 中指出，$S_m(\rho|\sigma)$ 函数满足以下递推关系列表。

引理 2.5（Kanade–Russell，2022年）。设 $k \geq 3$，令 $m = 3k + \{-1, 0, 1\}$，并令 $\delta_i := (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq k-1} \in \mathbb{Z}^{k-1}$，其中 δ_{ij} 为克罗内克δ函数。对所有 $1 \leq i \leq k-2$，以下递推关系成立，

$$(R_1^{(i)}(\rho|\sigma)) \qquad S_m(\rho|\sigma) - S_m(\rho + \delta_i - \delta_{i+1}|\sigma) - zq^{i+\sum_{j=1}^{i}\rho_j} S_m(\rho + 2\sum_{j=1}^{i}\delta_j|\sigma - \sum_{j=1}^{i}\delta_j) = 0,$$

$$(R_2^{(i)}(\rho|\sigma)) \qquad S_m(\rho|\sigma) - S_m(\rho|\sigma + \delta_i - \delta_{i+1}) - zq^{i+\sum_{j=1}^{i}\sigma_j} S_m(\rho - \sum_{j=1}^{i}\delta_j|\sigma + 2\sum_{j=1}^{i}\delta_j) = 0.$$

i. 若 $m \equiv -1$（模 3），

a) 且若 $\sigma_{k-1} = 0$，则

$$(R_3(\rho|\sigma)) \quad S_m(\rho|\sigma) - S_m(\rho|\sigma + \delta_{k-1}) - qS_m(\rho + \delta_{k-1}|\sigma + \delta_{k-1}) + qS_m(\rho + \delta_{k-1}|\sigma + \delta_{k-2} + \delta_{k-1}) = 0.$$

b) and if $\rho_{k-1} = 0$, then

$$(R_4(\rho|\sigma)) \quad S_m(\rho|\sigma) - S_m(\rho + \delta_{k-1}|\sigma) - qS_m(\rho + \delta_{k-1}|\sigma + \delta_{k-1}) + qS_m(\rho + \delta_{k-2} + \delta_{k-1}|\sigma + \delta_{k-1}) = 0.$$

ii. If $m \equiv 0 \pmod 3$, then

$$\begin{aligned}(R_3(\rho|\sigma)) \qquad & S_m(\rho|\sigma) - (1+q)S_m(\rho + \delta_{k-1}|\sigma + \delta_{k-1}) + qS_m(\rho + 2\delta_{k-1}|\sigma + 2\delta_{k-1}) \\ & - zq^{k-1+\sum_{j=1}^{k-1}\rho_j} S_m(\rho + 2\sum_{j=1}^{k-1}\delta_j|\sigma - \sum_{j=1}^{k-1}\delta_j) \\ & - q^{k-1+\sum_{j=1}^{k-1}\sigma_j} S_m(\rho - \sum_{j=1}^{k-2}\delta_j + 2\delta_{k-1}|\sigma + 2\sum_{j=1}^{k-1}\delta_j) = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(R_4(\rho|\sigma)) \qquad & S_m(\rho|\sigma) - (1+q)S_m(\rho + \delta_{k-1}|\sigma + \delta_{k-1}) + qS_m(\rho + 2\delta_{k-1}|\sigma + 2\delta_{k-1}) \\ & - zq^{k-1+\sum_{j=1}^{k-1}\rho_j} S_m(\rho + 2\sum_{j=1}^{k-1}\delta_j|\sigma - \sum_{j=1}^{k-2}\delta_j + 2\delta_{k-1}) \\ & - q^{k-1+\sum_{j=1}^{k-1}\sigma_j} S_m(\rho - \sum_{j=1}^{k-1}\delta_j|\sigma + 2\sum_{j=1}^{k-1}\delta_j) = 0.\end{aligned}$$

iii. 若 $m \equiv 1$（模 3），则

$$\begin{aligned}(R_3(\rho|\sigma)) \qquad & S_m(\rho|\sigma) - S_m(\rho|\sigma + \delta_{k-1}) - qS_m(\rho + \delta_{k-1}|\sigma + 2\delta_{k-1}) \\ & + qS_m(\rho + \delta_{k-1}|\sigma + 2\delta_{k-1}) - q^{k-1+\sum_{j=1}^{k-1}\sigma_j} S_m(\rho - \sum_{j=1}^{k-1}\delta_j|\sigma + 2\sum_{j=1}^{k-1}\delta_j) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(R_4(\rho|\sigma)) \qquad & S_m(\rho|\sigma) - S_m(\rho + \delta_{k-1}|\sigma) - qS_m(\rho + \delta_{k-1}|\sigma + \delta_{k-1}) \\ & + qS_m(\rho + 2\delta_{k-1}|\sigma + \delta_{k-1}) - zq^{k-1+\sum_{j=1}^{k-1}\rho_j} S_m(\rho + 2\sum_{j=1}^{k-1}\delta_j|\sigma - \sum_{j=1}^{k-1}\delta_j) = 0.\end{aligned}$$

随后他们提出了以下断言（见 [29, 猜想 9.3]）。

猜想 2.6（Kanade–Russell，2022年）。对于每个模数 $m \geq 5$，关系式（$R_1^{(i)}$（$\rho|\sigma$））-（R_4（$\rho|\sigma$））足以证明猜想 2.4 的证明所需的递推关系。

我们认为这个猜想非常合理。对于所有 $m \geq 5$，显式的 S_m 都是 $2\lfloor m/3 \rfloor$ 重求和。不同函数方程的数量 ($R_1^{(i)}$ ($\rho|\sigma$))-(R_4($\rho|\sigma$)) 也是如此。通过比较每个左端的前两项，很容易验证这些关系式各不相同。每个第二项都对应于对某个求和变量进行一次典范平移。人们自然会预期，S_m($\rho|\sigma$) 函数满足的每个关系式，都能通过关系式 ($R_1^{(i)}$ ($\rho|\sigma$))-(R_4($\rho|\sigma$)) 的组合转化并恢复出来。因此，

如果猜想 2.4 中的断言正确，那么对于任意固定的轮廓 c，利用 (2.13) 中的显式断言（以及“线下”表达式）写出的耦合 q 阶差分方程 (2.6)，都可以由关系式 ($R_1^{(i)}(\rho|\sigma)$)-($R_4(\rho|\sigma)$) 的组合得到。

3. Proof Methodology

猜想 2.6 可以重新表述为一个集合包含问题。设 $m = 3k + \{-1, 0, 1\}$ 与 (2.7) 中的 $k \geq 3$、ρ 和 σ 以及 $1 \leq i \leq k-2$ 一样。定义

$$I_m := \langle R_1^{(i)}(\rho|\sigma), R_2^{(i)}(\rho|\sigma), R_3(\rho|\sigma), R_4(\rho|\sigma)\rangle, \tag{3.1}$$

由递推关系 ($R_1^{(i)}(\rho|\sigma)$)-($R_4(\rho|\sigma)$) 的左端作为环 $\mathbb{Z}((q,z))[S_m(\rho|\sigma)]$ 中的多项式所生成的理想。这里，应包含在 I_m 中的 $R_3(\rho|\sigma)$ 和 $R_4(\rho|\sigma)$，其含义取决于 m 模 3 的剩余类。回顾一下，ρ 和 σ 是具有 $k-1$ 个分量的整数向量。因此，环 $\mathbb{Z}((q,z))[S_m(\rho|\sigma)]$ 是定义在可数变量集上的形式多项式环。

对于任意给定的固定 $m = 3k + \{-1, 0, 1\}$ with $k \geq 3$，令所有关于满足 $|c| + 3 = m$ 的轮廓 c 的 q-差分方程耦合系统 (2.6) 的集合为 $\mathcal{H}_m$。根据猜想 2.4（及其下方的段落），$\mathcal{H}_m$ 中的任意关系式都可以用 $S_m(\rho|\sigma)$ 函数表示。令 $\mathcal{S}_m$ 为 $\mathcal{H}_m$ 中所有以猜想的 $S_m(\rho|\sigma)$ 形式表示的关系式组成的集合。

现在我们可以将猜想 2.6 写成其等价形式：

猜想 3.1。设满足 $k \geq 3$ 的 $m = 3k + \{-1, 0, 1\}$ 为固定对象。

$$\forall h \in \mathcal{S}_m, \ we\ have \ \ h \in I_m.$$

无限集合 $\{R_1^{(i)}(\rho|\sigma)\ R_2^{(i)}(\rho|\sigma)\ R_3(\rho|\sigma)\ R_4(\rho|\sigma) : \ 1 \leq i \leq k-2, \rho, \sigma \in \mathbb{Z}^{k-1}\}$ 张成了 I_m，且其中存在非平凡关系，并非该集合的所有元素都是 I_m 的生成元。然而，目前我们尚不清楚哪些元素之间存在关系的确切模式。尽管如此，不难理解 I_m 是由无限多个元素生成的，因为 ρ 和 $\sigma \in \mathbb{Z}^{k-2}$。

另一方面，对于任意固定的 m，出现在 $\mathcal{S}_m$中公式里的 $S_m(\rho|\sigma)$ 函数组成一个有限列表。我们可以很容易地为向量 ρ 和 σ 的各个分量找到显式界，使得每个出现在 $\mathcal{S}_m$ 中的$S_m(\rho|\sigma)$都处于这些界内。这一观察表明，与其试图证明猜想 3.1，不如研究一个更适合计算的更强的猜想。为此，令 $[N]$:
$= \{-N, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N\}$，并定义

$$I_{m,N} := \langle \{R_1^{(i)}(\rho|\sigma), R_2^{(i)}(\rho|\sigma), R_3(\rho|\sigma), R_4(\rho|\sigma) \ : \ \rho, \sigma \in [N]^{k-1}\}\rangle \subset I_m.$$

利用这个定义，我们提出如下更强的猜想：

猜想　想 3.2。设 $m = 3k + \{-1, 0, 1\}$，其中 $k \geq 3$ 为固定值。存在某个 $N \in \mathbb{N}$ 使得　hat

$$\forall h \in \mathcal{S}_m, \ we\ have \ \ h \in I_{m,N}.$$

由于 $I_{m,\ N} \subset I_m$，显然猜想 3.2 蕴含猜想 3.1。

inall我们将　开放问题转化为线性代数的表述，因此可以据此进行研究　.

设 m 和 N 固定。我们可以将张成集 $I_{m,N}$ 中出现的所有 $S_m(\rho|\sigma)$ 排列起来，并将其写成列向量 $\vec{s}$。那么矩阵 A 唯一确定为

$$\mathbf{A}\vec{s} = \vec{0}_{\mathbf{A}},$$

其中，$\vec{0}_{\mathbf{A}}$ 是一个与 A 行数相同的列向量。A 的每一行都对应一个函数关系 $R_j(\sigma|\rho) \in \{R_1^{(i)}(\rho|\sigma)\ R_2^{(i)}(\rho|\sigma)\ R_3(\rho|\sigma)\ R_4(\rho|\sigma) : \ \rho, \sigma \in [N]^{k-1}\}$；而 A 的每一列则对应 $S_m(\rho|\sigma)$ 的系数。还需注意，A 是一个元素取自 $\mathbb{Z}[q,z]$ 的有限维矩阵。

可以对 A 进行高斯消元。在 A 的定义边界内，函数关系 ($R_1^{(i)}(\rho|\sigma)$)- ($R_4(\rho|\sigma)$) 中任何非平凡的关系式都会产生全零行。令 B 为对 A 进行高斯消元后由非零行组成的矩阵。显然，

$$\mathbf{B}\vec{s} = \vec{0}_{\mathbf{B}}.$$

此外，理想 $I_{m,\ N}$ 由 $\mathrm{B}\vec{s}=\vec{0}$ 中出现的方程生成。

因此，对于 $h\in\mathcal{S}_m$ 中的任意元素，只需将该关系写成行向量 $\vec{h}$ （相对于向量 $\vec{s}$，即$_{,N}$），就可以检查该元素是否属于 I_m

$\vec{}$ $\vec{}vech$ 由 $h:=[h\vec{s}=0]$ 定义，将行向量 h 添加到 B 中，并对这个新$\vec{}$矩阵进行高斯消元。如果高斯消元得出一个零行，这意味着 h 是 B 中各行的线性组合，或者等价地，这意味着 $h\in I_{m,N}$。如果没有出现零行，那么 $h\notin I_{m,N}$。

这种方法显然是算法式的。此外，算法必定会终止，并且终止后必定能得出明确的答案。更重要的是，也很容易找出等价于给定 $h\in\mathcal{S}_m$ 的 $(R_1^{(i)}(\rho|\sigma))$-$(R_4(\rho|\sigma))$ 个函数方程的显式组合。只需使用 A 的增广版本，在进行行约简时额外添加一列，以跟踪关系式的名称（$(R_1^{(i)}(\rho|\sigma))$- $(R_4(\rho|\sigma))$）。

经过这些考量，证明猜想 3.2（进而证明猜想 2.4、2.6 和 3.1）归结为通过实验识别一个 N，并能够进行高斯消元计算。

4. Modulo 11 Identities

设 $m=11\,(=3k-1$，其中 $k=4)$。对于这一族恒等式，ρ 和 $\sigma\in\mathbb{Z}^3$。在耦合的 q-差分系统（2.6）中，共出现 15 种本质上不同的 8 的三部分组成。猜想 2.4 表明，以下关于 $H_c(z,\ q)$ 的和表示除其中一种外均成立：

$$
\begin{aligned}
H_{(8,0,0)}(z,q) &= S_{11}((1,1,1)\,|\,(1,1,1)),\\
H_{(7,1,0)}(z,q) &= S_{11}((0,1,1)\,|\,(1,1,1)),\\
H_{(7,0,1)}(z,q) &= S_{11}((1,1,1)\,|\,(0,1,1))-q(1-z)S_{11}((2,1,1)\,|\,(1,1,1)),\\
H_{(6,2,0)}(z,q) &= S_{11}((0,0,1)\,|\,(1,1,1)),\\
H_{(6,1,1)}(z,q) &= S_{11}((0,1,1)\,|\,(0,1,1))-qS_{11}((1,1,1)\,|\,(1,1,1)),\\
H_{(6,0,2)}(z,q) &= S_{11}((1,1,1)\,|\,(0,0,1))-q(1-z)S_{11}((2,1,1)\,|\,(0,1,1)),\\
H_{(5,3,0)}(z,q) &= S_{11}((0,0,0)\,|\,(1,1,1)),\\
H_{(5,2,1)}(z,q) &= S_{11}((0,0,1)\,|\,(0,1,1))-qS_{11}((0,1,1)\,|\,(1,1,1)),\\
H_{(5,1,2)}(z,q) &= S_{11}((0,1,1)\,|\,(0,0,1))-qS_{11}((1,1,1)\,|\,(0,1,1)),\\
H_{(5,0,3)}(z,q) &= S_{11}((1,1,1)\,|\,(0,0,0))-q(1-z)S_{11}((2,1,1)\,|\,(0,0,1)),\\
H_{(4,3,1)}(z,q) &= S_{11}((0,0,0)\,|\,(0,1,1))-qS_{11}((0,0,1)\,|\,(1,1,1)),\\
H_{(4,2,2)}(z,q) &= S_{11}((0,0,1)\,|\,(0,0,1))-qS_{11}((0,1,1)\,|\,(0,1,1)),\\
H_{(4,1,3)}(z,q) &= S_{11}((0,1,1)\,|\,(0,0,0))-qS_{11}((1,1,1)\,|\,(0,0,1)),\\
H_{(3,3,2)}(z,q) &= S_{11}((0,0,0)\,|\,(0,0,1))-qS_{11}((0,0,1)\,|\,(0,1,1)).
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

只有 $H_{(4,4,0)}(z,\ q)$ 缺少一个声称成立的公式，而这可以通过 q-差分方程（2.6）推得。我们知道 $H_{(4,4,0)}(z,\ q)$ 满足

$$H_{(4,4,0)}(z,q)+(1-qz)H_{(4,1,3)}(q^2z,q)-H_{(4,3,1)}(qz,q)-H_{(5,0,3)}(qz,q)=0. \tag{4.2}$$

利用猜想得到的 $H_{(4,1,3)}(z,\ q)$、$H_{(4,3,1)}(z,\ q)$ 和 $H_{(5,0,3)}(z,\ q)$ 的级数等价式（4.1），可得

$$
\begin{aligned}
H_{(4,4,0)}(z,q) &= -(S_{11}(qz;(0,0,0)|(0,1,1))-qS_{11}(qz;(0,0,1)|(1,1,1)))\\
&\quad+(1-qz)(S_{11}(q^2z;(0,1,1)|(0,0,0))-qS_{11}(q^2z;(1,1,1)|(0,0,1)))\\
&\quad-(S_{11}(qz;(1,1,1)|(0,0,0))-q(1-z)S_{11}(qz(2,1,1)|(0,0,1))).
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

注意，我们在 (4.3) 中对变量 z 进行了平移。我们利用 (2.12) 消除这些平移。由此得到关于 $H_{(4,4,0)}(z,q)$ 的显式断言：

$$H_{(4,4,0)}(z,q)=S_{11}((1,0,0)\,|\,(0,1,1))-qS_{11}((1,0,1)\,|\,(1,1,1))+qzS_{11}(2,1,1)\,|\,(0,0,0)), \tag{4.4}$$

其中 z 中没有平移，且 $S_{11}(\rho|\sigma)$ 函数符合引理 2.5 中的形式。

我们还可以看到，$H_{(4,4,0)}(z,q)$满足必要的初始条件 (2.14)。初始条件$H_{(4,4,0)}(z,0)=1$ 由 (4.4) 和 (2.8) 可直接得出。我们还可以通过将 $=1/(q;\ q)_\infty$ 代入 $H_{(4,4,0)}(0,q)$,

代入 (4.2) 中的 $z=0$，并利用 (4.2) 中函数已证明满足的其他初始条件 (2.14)。

第 3 节中阐述的证明步骤，在所有归一化生成函数 $H_c(z,q)$ 都（经猜想）转化为 $S_{11}((a_1,a_2,a_3)|(b_1,b_2,b_3))$ 表述后即可开始。容易看出，以下四个递推关系，

$$\begin{aligned}
&H_{(8,0,0)}(z,q)-H_{(7,1,0)}(qz,q)=0,\\
&H_{(7,0,1)}(z,q)-H_{(6,1,1)}(qz,q)+(1-qz)H_{(7,1,0)}(q^2z,q)-H_{(8,0,0)}(qz,q)=0,\\
&H_{(6,0,2)}(z,q)-H_{(5,1,2)}(qz,q)+(1-qz)H_{(6,1,1)}(q^2z,q)-H_{(7,0,1)}(qz,q)=0,\\
&H_{(5,0,3)}(z,q)-H_{(4,1,3)}(qz,q)+(1-qz)H_{(5,1,2)}(q^2z,q)-H_{(6,0,2)}(qz,q)=0,
\end{aligned}$$

利用 (4.1) 和 (2.12)，将左端各项写成 $S_{11}((a_1,a_2,a_3)|(b_1,b_2,b_3))$ 后，便可将其化简为 $0=0$。因此，这些关系式显然属于 I_{11}，即由 $S_{11}((a_1,a_2,a_3)|(b_1,b_2,b_3))$ 级数的函数关系生成的理想。

回想一下，我们使用耦合的 q-差分方程 (4.2)，对 $H_{(4,4,0)}(z,q)$ 作出了明确断言。因此，将 $H_{(4,4,0)}(z,q)$ 的函数关系写成所断言的 $S_{11}(\rho|\sigma)$ 形式后，也可化简为 $0=0$。断言 (4.4) 对于证明 $H_{(5,3,0)}(z,q)$、$H_{(4,3,1)}(z,q)$ 和 $H_{(4,1,3)}(z,q)$ 在 $S_{11}((a_1,a_2,a_3)|(b_1,b_2,b_3))$ 表述下满足的 q-差分方程属于 I_{11}，起着关键作用。

接下来，我们考察由 (2.6) 给出的 $H_{(7,1,0)}(z,q)$ 满足的 q-差分方程：

$$H_{(7,1,0)}(z,q)-H_{(7,0,1)}(qz,q)-H_{(6,2,0)}(qz,q)+(1-qz)H_{(6,1,1)}(q^2z,q)=0.$$

使用 (4.1) 和 (2.12) 后，我们看到这个 q-差分方程等价于以下猜想形式

$$S_{11}((0,1,1)|(1,1,1))-S_{11}((1,0,1)|(1,1,1))-qzS_{11}((2,1,1)|(0,1,1))=0.$$

这正是引理 2.5 中给出的 $(R_1{}^i(\rho|\sigma))$ 的关系式 $R_1{}^1(0,1,1)|(1,1,1)$。因此，这个关系式也属于 I_{11}，并由 $S_{11}((a_1,a_2,a_3)|(b_1,b_2,b_3))$ 的关系式所涵盖。

作为第二个具体示例，考虑 $H_{(6,1,1)}(z,q)$ 满足的 q-差分方程，

$$\begin{aligned}
&H_{(6,1,1)}(z,q)-H_{(7,1,0)}(qz,q)-H_{(6,0,2)}(qz,q)-H_{(5,2,1)}(qz,q)+(1-qz)H_{(7,0,1)}(q^2z,q)\\
&\qquad+(1-qz)H_{(6,2,0)}(q^2z,q)+(1-qz)H_{(5,1,2)}(q^2z,q)-(1-qz)(1-q^2z)H_{(6,1,1)}(q^3z,q)=0.
\end{aligned}$$

利用 (4.1) 和 (2.12)，我们得到（猜想上）等价的形式

$$\begin{aligned}
&S_{11}((0,1,1)|(0,1,1))-S_{11}((1,0,1)|(0,1,1))-S_{11}((1,1,1)|(1,1,1))\\
&\quad+(1-qz)S_{11}((2,0,1)|(1,1,1))-qzS_{11}((2,1,1)|(0,0,1))+q^2z(1-qz)S_{11}((3,1,1)|(0,1,1))=0.
\end{aligned}$$

可以验证，这个关系式是以下各式并列相加的结果

$$R_1^{(1)}((0,1,1)|(0,1,1))-(1-qz)R_1^{(1)}((1,1,1)|(1,1,1))+qzR_2^{(1)}((2,1,1)|(-1,1,1))\in I_{11}.$$

我们可以逐一写出其余 8 个递推关系、它们的 $S_{11}(\rho|\sigma)$ 等价形式，以及 $(R_1^{(i)}(\rho|\sigma))$-$(R_4(\rho|\sigma))$ 的哪些组合等价于 $S_{11}(\rho|\sigma)$ 中的函数方程。这样便证明这些关系都包含在理想 I_{11} 中。需要说明的是，这些关系会变得更加复杂，篇幅可达数页，无法手工核验。将它们印出来会浪费篇幅／纸张，因此我们将其保留在数字形式中，方便感兴趣的读者查验，或按需打印。为此，我们仿照 [29], 中的处理方式，在 ArXiv 的附加文件部分以及作者的网站 [36] 上提供文本文件 M11RecHXYZ Explicit.txt。这里的 XYZ 应替换为相应轮廓的数字，例如轮廓 (6, 2, 0) 对应 620。可以核查，这些文本文件中给出的 I_{11}，在使用 (4.1)、(4.4) 和 (2.12) 转换为 $S_{11}(\rho|\sigma)$ 形式后，等价于 $H_{(X,Y,Z)}(z,q)$ 满足的 q-差分方程 (2.6)。函数方程的名称在文本中表示为 RX[{Y}, {{a1,a2,a3},{b1,b2,b3}}]，其中 X 和 Y 分别取 1 或 2，以表示 $R^{(Y)}{}_X((a_1,a_2,a_3)|(b_1,b_2,b_3))$；或表示为 RZ[{{a1,a2,a3},{b1,b2,b3}}]，其中 Z 取 3 或 4，分别表示 $R_3((a_1,a_2,a_3)|(b_1,b_2,b_3))$ 和 $R_4((a_1,a_2,a_3)|(b_1,b_2,b_3))$。

这些函数方程的定义可在 $m = 11$ 的引理 2.5 中找到。指南文档 M11R 文本文件明确列出了模 10 情形下的每个 R 函数关系。还可以看到，对于附加文档中给出的模 11 情形的关系 $(R_1^{(i)}(\rho|\sigma))$-$(R_4(\rho|\sigma))$，$\rho = (a_1, a_2, a_3)$ 和 $\sigma = (b_1, b_2, b_3)$ 中最大的项为 6。这证明了以下定理及其推论。

定理 4.1。猜想 3.2 对 $m = 11$ 和 $N = 6$成立。

推论 4.2。猜想 3.1 对 $m = 11$成立。

推论 4.2 等价于以下定理：

定理 4.3。所声称的表达式 (4.1) 和 (4.4) 成立。

注意，定理 4.3 为推论 2.6 增添了一个新的支持情形。

既然模 11 情形下的主要猜想已获证明，我们就可以对 $z = 1$ 进行特化，并看到柱形分拆范式所产生的 15 个和积恒等式。

定理 4.4。以下恒等式成立

$$\sum_{\substack{r_1\ge r_2\ge r_3\ge 0\\ s_1\ge s_2\ge s_3\ge 0}} \frac{q^{r_1^2-r_1s_1+s_1^2+r_2^2-r_2s_2+s_2^2+r_3^2+r_3s_3+s_3^2}\; p_c(r_1,r_2,r_3,s_1,s_2,s_3,q)}{(q;q)_{r_1-r_2}(q;q)_{r_2-r_3}(q;q)_{r_3}(q;q)_{s_1-s_2}(q;q)_{s_2-s_3}(q;q)_{s_3}(q;q)_{r_3+s_3+1}} = \frac{1}{(q;q)_\infty}\,\frac{1}{\theta(q^{i_1},q^{i_2},q^{i_3},q^{i_4},q^{i_5},q^{i_6},q^{i_7};q^{11})}, \tag{4.5}$$

其中，多项式 $p_c(r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3, q)$ 以及每个轮廓对应的七元组 $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7)$ 如下表所示：

Profile c	$p_c(r_1,r_2,r_3,s_1,s_2,s_3,q)$	$(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6,i_7)$
$(8,0,0)$	$q^{r_1+r_2+r_3+s_1+s_2+s_3}$	$(2,3,3,4,4,5,5)$
$(7,1,0)$	$q^{r_2+r_3+s_1+s_2+s_3}$	$(1,2,3,4,4,5,5)$
(7, 0, 1)	$q^{r_1+r_2+r_3+s_2+s_3}$	(1, 2, 3, 4, 4, 5, 5)
(6, 2, 0)	$q^{r_3+s_1+s_2+s_3}$	(1, 2, 2, 3, 4, 5, 5)
(6, 1, 1)	$q^{r_2+r_3+s_2+s_3}(1-q^{r_1+s_1+1})$	(1, 1, 3, 3, 4, 5, 5)
(6, 0, 2)	$q^{r_1+r_2+r_3+s_3}$	(1, 2, 2, 3, 4, 5, 5)
(5, 3, 0)	$q^{s_1+s_2+s_3}$	(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)
(5, 2, 1)	$q^{r_3+s_2+s_3}(1-q^{r_2+s_1+1})$	(1, 1, 2, 3, 4, 4, 5)
(5, 1, 2)	$q^{r_2+r_3+s_3}(1-q^{r_1+s_2+1})$	(1, 1, 2, 3, 4, 4, 5)
(5, 0, 3)	$q^{r_1+r_2+r_3}$	(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)
(4, 3, 1)	$q^{s_2+s_3}(1-q^{r_3+s_1+1})$	(1, 1, 2, 3, 3, 4, 5)
(4, 2, 2)	$q^{r_3+s_3}(1-q^{r_2+s_2+1})$	(1, 1, 2, 2, 4, 4, 5)
(4, 1, 3)	$q^{r_2+r_3}(1-q^{r_1+s_3+1})$	(1, 1, 2, 3, 3, 4, 5)
(3, 3, 2)	$q^{s_3}(1-q^{r_3+s_2+1})$	(1, 1, 2, 2, 3, 5, 5)
$(4,4,0)$	$q^{r_1}(q^{s_2+s_3}-q^{r_3+s_1+s_2+s_3+1}+q^{r_1+r_2+r_3+1})$	$(1,2,2,3,3,4,4)$

在定理 4.4 中，我们选择将与轮廓 (4, 4, 0) 相关的和积恒等式放在表格的一行下方，以表明该恒等式并非直接由 (2.4) 与 $z = 1$ 和 (2.1) 结合得出。我们首先将 $H_{(4,4,0)}(z, q)$ 的公式表示为 $S_{11}((a_1, a_2, a_3)|(b_1, b_2, b_3))$ 级数的组合，然后才作出这一断言。这样处理还有一个好处，就是使我们的表述与 Kanade–Russell 的表述保持一致，因为这是与表格中横线下方的 $H_c(z, q)$ 函数相关的和积恒等式，而我们选择不直接定义该函数。

和式一侧是 (4.1) 和 (4.4) 中的表达式，其中 $z = 1$ 使用 (2.8) 与 $k = 4$ 明确写出。积式一侧由 (2.5) 与 $z = 1$，再结合 (2.1) 得出。表格中与第一个轮廓 (8, 0, 0) 相关的乘积，在引言中以定理 1.8 的形式给出。

注意，(4.5) 右侧与轮廓 (c_1, c_2, c_3) 和 (c_1, c_3, c_2) 相关的乘积是相同的。生成函数的对称性此前已有观察和记载，例如见 [19, 推论 2.2]。这种对称性在定理 4.4 的求和侧也显而易见。只需

替换变量“r”和“s”，即可得到“另一种”求和。请注意，这是设定 $z=1$ 的一个副产品；对于一般的 z，求和侧并不存在这种相似性。从这个角度看，这个由 15 个和积恒等式组成的定理，实际上给出了总共 10 个本质上不同的和积恒等式。

我们还注意到，在这些恒等式中，与轮廓 (8, 0, 0)、(6, 1, 1)、(4, 2, 2)、(3, 3, 2) 相关的恒等式分别是 (5.28) 的第 $i=1$、.....、4 种情形，而 (5, 3, 0) 和 (6, 2, 0) 分别是 (5.29) 的第 $\sigma=0$ 和 1 种情形，见 [7, 定理 5.3]。

5. 模数 13 恒等式

与第 4 节类似，我们首先列出猜想 2.4 对模数 $m=13$ 族的明确断言。

$$
\begin{aligned}
H_{(10,0,0)}(z,q) &= S_{13}((1,1,1)|(1,1,1)),\\
H_{(9,1,0)}(z,q) &= S_{13}((0,1,1)|(1,1,1)),\\
H_{(9,0,1)}(z,q) &= S_{13}((1,1,1)|(0,1,1))-q(1-z)S_{13}((2,1,1)|(1,1,1)),\\
H_{(8,2,0)}(z,q) &= S_{13}((0,0,1)|(1,1,1)),\\
H_{(8,1,1)}(z,q) &= S_{13}((0,1,1)|(0,1,1))-qS_{13}((1,1,1)|(1,1,1)),\\
H_{(8,0,2)}(z,q) &= S_{13}((1,1,1)|(0,0,1))-q(1-z)S_{13}((2,1,1)|(0,1,1)),\\
H_{(7,3,0)}(z,q) &= S_{13}((0,0,0)|(1,1,1)),\\
H_{(7,2,1)}(z,q) &= S_{13}((0,0,1)|(0,1,1))-qS_{13}((0,1,1)|(1,1,1)),\\
H_{(7,1,2)}(z,q) &= S_{13}((0,1,1)|(0,0,1))-qS_{13}((1,1,1)|(0,1,1)),\\
H_{(7,0,3)}(z,q) &= S_{13}((1,1,1)|(0,0,0))-q(1-z)S_{13}((2,1,1)|(0,0,1)),\\
H_{(6,3,1)}(z,q) &= S_{13}((0,0,0)|(0,1,1))-qS_{13}((0,0,1)|(1,1,1)),\\
H_{(6,2,2)}(z,q) &= S_{13}((0,0,1)|(0,0,1))-qS_{13}((0,1,1)|(0,1,1)),\\
H_{(6,1,3)}(z,q) &= S_{13}((0,1,1)|(0,0,0))-qS_{13}((1,1,1)|(0,0,1)),\\
H_{(5,3,2)}(z,q) &= S_{13}((0,0,0)|(0,0,1))-qS_{13}((0,0,1)|(0,1,1)),\\
H_{(5,2,3)}(z,q) &= S_{13}((0,0,1)|(0,0,0))-qS_{13}((0,1,1)|(0,0,1)),\\
H_{(4,3,3)}(z,q) &= S_{13}((0,0,0)|(0,0,0))-qS_{13}((0,0,1)|(0,0,1)).
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

有六个轮廓未被猜想 2.4 涵盖。再次利用 (2.6)，可以得到与具有这些轮廓的柱面分拆数量相关的归一化生成函数的明确断言。我们按以下顺序给出这些断言。

首先，我们考察 $H_{(7,3,0)}$ 的 q-差分方程 (2.6)：

$$
H_{(7,3,0)}(z,q)-H_{(7,2,1)}(qz,q)-H_{(6,4,0)}(qz,q)+(1-qz)H_{(6,3,1)}(q^2z,q)=0. \tag{5.2}
$$

通过写出 $S_{13}((a_1,a_2,a_3)|(b_1,b_2,b_3))$ 等价式来表示 (5.1) 中的函数，并使用 (2.12)，我们得到 et

$$
\begin{aligned}
H_{(6,4,0)}(z,q) &= S_{13}((-1,0,0)|(1,1,1))-S_{13}((0,0,1)|(0,1,1))+qS_{13}((0,1,1)|(1,1,1))\\
&\quad+(1-z)S_{13}((1,0,0)|(0,1,1))-q(1-z)S_{13}((1,0,1)|(1,1,1)).
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

请注意，我们没有使用 $H_{(6,4,0)}(z,q)$ 的 q-差分方程来断言其公式。在第 4 节中，只有一个公式缺失。因此，我们可以使用该函数的 q-差分方程，并得到一个由 $S_{11}((a_1,a_2,a_3)|(b_1,b_2,b_3))$ 构成且不含反向平移的公式（即 $z\mapsto z/q$；这也体现为第一变量 a_1 中的负指标）。一般而言，这可能行不通。$H_{(6,4,0)}(z,q)$ 满足的 q-差分方程为

$$
H_{(6,4,0)}(z,q)-H_{(6,3,1)}(qz,q)-H_{(5,5,0)}(qz,q)+(1-qz)H_{(5,4,1)}(q^2z,q)=0. \tag{5.4}
$$

猜想公式 (5.1) 并未涵盖 $H_{(5,5,0)}(z,q)$。因此，我们无法将 $H_{(6,4,0)}(z,q)$ 完全转化为由 $S_{13}((a_1,a_2,a_3)|(b_1,b_2,b_3))$ 级数组成的公式。不过，正如 [29], 中也指出的，我们可以利用 a_1 中的其他递推关系和反向平移，求出所有缺失函数的公式。

事实上，递推关系 (5.4) 和 (5.3) 可以结合起来，得出 $H_{(5,5,0)}(z,q)$ 的公式。经过类似的考量，我们得出

$$\begin{aligned}(5.5)\qquad H_{(5,5,0)}(z,q) &= S_{13}((-2,0,0)|(1,1,1)) - S_{13}((-1,0,1)|(0,1,1)) + qS_{13}((-1,1,1)|(1,1,1))\\ &+ (1-z/q-z)S_{13}((0,0,0)|(0,1,1)) - (q-z-qz)S_{13}((0,0,1)|(1,1,1))\\ &- q(1-z)zS_{13}((1,0,0)|(1,1,1)) - (1-z)S_{13}((1,0,1)|(0,0,1))\\ &+ q(1-z)S_{13}((1,1,1)|(0,1,1)) + (1-z)(1-qz)S_{13}((2,0,0)|(0,0,1))\\ &- q(1-z)(1-qz)S_{13}((2,0,1)|(0,1,1)).\end{aligned}$$

我们指出，现可看出所声称的 $H_{(5,5,0)}(z,q)$ 公式的系数具有 Laurent 多项式的形式。这是 z 中反向平移的副产物。

利用 $H_{(6,3,1)}(z,q)$ 的 q-差分方程，

$$\begin{aligned}(5.6)\quad &H_{(6,3,1)}(z,q) - H_{(7,3,0)}(qz,q) - H_{(6,2,2)}(qz,q) - H_{(5,4,1)}(qz,q) + (1-qz)H_{(7,2,1)}(q^2z,q)\\ &+ (1-qz)H_{(6,4,0)}(q^2z,q) + (1-qz)H_{(5,3,2)}(q^2z,q) - (1-qz)(1-q^2z)H_{(6,3,1)}(q^3z,q) = 0,\end{aligned}$$

由 (5.1) 和 (5.3)，我们断言

$$\begin{aligned}(5.7)\qquad H_{(5,4,1)}(z,q) &= S_{13}((-1,0,0)|(0,1,1)) - qS_{13}((-1,0,1)|(1,1,1)) - zS_{13}((0,0,0)|(1,1,1))\\ &- S_{13}((0,0,1)|(0,0,1)) + qS_{13}((0,1,1)|(0,1,1)) + (1-z)S_{13}((1,0,0)|(0,0,1))\\ &- q(1-z)S_{13}((1,0,1)|(0,1,1)).\end{aligned}$$

利用 $H_{(5,3,2)}(z,q)$ 的 q-差分方程，

$$\begin{aligned}(5.8)\quad &H_{(5,3,2)}(z,q) - H_{(6,3,1)}(qz,q) - H_{(5,2,3)}(qz,q) - H_{(4,4,2)}(qz,q) + (1-qz)H_{(6,2,2)}(q^2z,q)\\ &+ (1-qz)H_{(5,4,1)}(q^2z,q) + (1-qz)H_{(4,3,3)}(q^2z,q) - (1-qz)(1-q^2z)H_{(5,3,2)}(q^3z,q) = 0,\end{aligned}$$

由 (5.1) 和 (5.7)，我们断言

$$\begin{aligned}(5.9)\qquad H_{(4,4,2)}(z,q) &= S_{13}((-1,0,0)|(0,0,1)) - qS_{13}((-1,0,1)|(0,1,1)) - zS_{13}((0,0,0)|(0,1,1))\\ &- S_{13}((0,0,1)|(0,0,0)) + qzS_{13}((0,0,1)|(1,1,1)) + qS_{13}((0,1,1)|(0,0,1))\\ &+ (1-z)S_{13}((1,0,0)|(0,0,0)) - qz(1-z)S_{13}((1,0,0)|(1,1,1))\\ &- q(1-z)S_{13}((1,0,1)|(0,0,1)).\end{aligned}$$

那么，由于 q 关于 $H_{(5,2,3)}(z,q)$ 的差分方程，

$$\begin{aligned}(5.10)\quad &H_{(5,2,3)}(z,q) - H_{(6,2,2)}(qz,q) - H_{(5,1,4)}(qz,q) - H_{(4,3,3)}(qz,q) + (1-qz)H_{(6,1,3)}(q^2z,q)\\ &+ (1-qz)H_{(5,3,2)}(q^2z,q) + (1-qz)H_{(4,4,2)}(q^2z,q) - (1-qz)(1-q^2z)H_{(5,2,3)}(q^3z,q) = 0,\end{aligned}$$

结合 (5.1) 和 (5.9)，我们断言

$$\begin{aligned}(5.11)\qquad H_{(5,1,4)}(z,q) &= S_{13}((-1,0,1)|(0,0,0)) - qS_{13}((-1,1,1)|(0,0,1)) - S_{13}((0,0,0)|(0,0,0))\\ &+ (1-z)S_{13}((0,0,0)|(0,0,1)) - (1-q)S_{13}((0,0,1)|(0,0,1))\\ &- q(1-z)S_{13}((0,0,1)|(0,1,1)) + qS_{13}((0,1,1)|(0,1,1))\\ &+ (1-z)S_{13}((1,0,0)|(0,0,1)) - q(1-z)zS_{13}((1,0,0)|(0,1,1))\\ &- (1-z)S_{13}((1,0,1)|(0,0,0)) - q(1-z)S_{13}((1,0,1)|(0,1,1))\\ &+ q^2(1-z)zS_{13}((1,0,1)|(1,1,1)) + (1-z)S_{13}((1,1,1)|(0,0,0))\\ &+ q(1-z)S_{13}((1,1,1)|(0,0,1)) + (1-z)(1-qz)S_{13}((2,0,0)|(0,0,0))\\ &- q^2z(1-z)(1-qz)S_{13}((2,0,0)|(1,1,1)) - (1-z)(1-qz)S_{13}((2,0,1)|(0,0,0))\\ &- q(1-z)(1-qz)S_{13}((2,0,1)|(0,0,1)) - q^2z(1-z)S_{13}((2,1,1)|(0,0,1)).\end{aligned}$$

最后，将 (5.1) 和 (5.11) 中的公式代入

$$H_{(6,0,4)}(z,q)-H_{(7,0,3)}(qz,q)-H_{(5,1,4)}(qz,q)+(1-qz)H_{(6,1,3)}(q^2z,q)=0 \tag{5.12}$$

我们猜想

$$\begin{aligned}H_{(6,0,4)}(z,q)&=S_{13}((0,0,1)|(0,0,0))-qS_{13}((0,1,1)|(0,0,1))-S_{13}((1,0,0)|(0,0,0))\\&+(1-qz)S_{13}((1,0,0)|(0,0,1))-(1-q)S_{13}((1,0,1)|(0,0,1))\\&-q(1-qz)S_{13}((1,0,1)|(0,1,1))+qS_{13}((1,1,1)|(0,1,1))\\&+(1-qz)S_{13}((2,0,0)|(0,0,1))-q^2z(1-qz)S_{13}((2,0,0)|(0,1,1))\\&-(1-qz)S_{13}((2,0,1)|(0,0,0))-q(1-qz)S_{13}((2,0,1)|(0,1,1))\\&+q^3z(1-qz)S_{13}((2,0,1)|(1,1,1))+S_{13}((2,1,1)|(0,0,0))\\&+q(1-qz)S_{13}((2,1,1)|(0,0,1))+(1-qz)(1-q^2z)S_{13}((3,0,0)|(0,0,0))\\&-q^3z(1-qz)(1-q^2z)S_{13}((3,0,0)|(1,1,1))-(1-qz)(1-q^2z)S_{13}((3,0,1)|(0,0,0))\\&-q(1-qz)(1-q^2z)S_{13}((3,0,1)|(0,0,1))-q^3z(1-qz)S_{13}((3,1,1)|(0,0,1)).\end{aligned} \tag{5.13}$$

我们可以证明，后文所声称的 $H_{(6,4,0)}(z,q)$、$H_{(5,5,0)}(z,q)$、$H_{(5,4,1)}(z,q)$、$H_{(5,3,2)}(z,q)$、$H_{(5,2,3)}(z,q)$ 和 $H_{(6,0,4)}(z,q)$ 分别满足 (5.2)、(5.4)、(5.6)、(5.8)、(5.10) 和 (5.12) 中的初始条件 $H_c(0,q)=1/(q;q)_\infty$ 以及 $H_c(z,0)=1$。要证明 $H_c(0,q)=1/(q;q)_\infty$ 初始条件，我们首先需要在除最后一个函数方程外的所有函数方程中对 $z\mapsto z/q$ 进行移位。

$H_{(10,0,0)}(z,q)$、$H_{(9,0,1)}(z,q)$、$H_{(8,0,2)}(z,q)$ 和 $H_{(7,0,3)}(z,q)$ 的 q-差分方程，利用 (5.1) 和 (2.12) 转换为 S_{13} 形式后便成为恒等式。$H_{(7,3,0)}(z,q)$、$H_{(6,4,0)}(z,q)$、$H_{(6,3,1)}(z,q)$、$H_{(5,3,2)}(z,q)$、$H_{(5,2,3)}(z,q)$ 和 $H_{(6,0,4)}(z,q)$ 的 q-差分方程是用于定义模13族中缺失的 $H_c(z,q)$ 函数的递推关系（参见 (5.2)、(5.4)、(5.6)、(5.8)、(5.10) 和 (5.12)）。因此，结合 (2.12)，利用 (5.1)、(5.3)、(5.5)、(5.7)、(5.9)、(5.11) 和 (5.13) 将相关函数写成所声称的 S_{13} 形式后，这些方程也都成为恒等式。

经过上述考量，我们最终需要证明 10 个非平凡的耦合 q-差分方程。按照第 3 节所述方法，可以证明所声称的 $S_{13}((a_1,a_2,a_3)|(b_1,b_2,b_3))$ 中的 q-差分方程属于理想 I_{13}；该理想由 $S_{13}((a_1,a_2,a_3)|(b_1,b_2,b_3))$s 的关系式生成（见引理 2.5）。这些函数方程的 12 个 S_{13} 形式的 $(R_1^{(i)}(\rho|\sigma))$-$(R_4(\rho|\sigma))$ 等价式的显式线性组合，同样可在 ArXiv 的辅助文件部分以及作者的网站 [36] 上找到，文件名为 M13RecHXYZ Explicit.txt。这里的 XYZ 应替换为相应轮廓的数字，例如，轮廓 $(9,1,0)$ 对应 910。可以验证，这些文本文件中给出的 I_{13} 元素等价于 $H_{(X,Y,Z)}(z,q)$ 满足的 q-差分方程 (2.6)：利用 (5.1)、(5.3)、(5.5)、(5.7)、(5.9)、(5.11)、(5.13) 和 (2.12)，将它们转换为 $S_{11}(\rho|\sigma)$ 形式即可。递推名称在文中表示为 RX[{Y},{{a1,a2,a3},{b1,b2,b3}}]，其中 X 和 Y 分别替换为 1 或 2，表示 $R^{(Y)}{}_X((a_1,a_2,a_3)|(b_1,b_2,b_3))$；或者表示为 RZ[{{a1,a2,a3},{b1,b2,b3}}]，其中 Z 替换为 3 或 4，分别表示 $R_3((a_1,a_2,a_3)|(b_1,b_2,b_3))$ 和 $R_4((a_1,a_2,a_3)|(b_1,b_2,b_3))$。最后，M13R文本文件中提供了一份指南文档，明确列出了模 10 的每个 R 函数关系。

这项繁琐、容易出错且不可能手工完成的计算证明了以下定理及其推论。

定理 5.1。猜想 3.2 对于 $m=13$ 和 $N=6$成立。

推论 5.2。猜想 3.1 对于 $m=13$成立。

推论 5.2 等价于以下定理：

定理 5.3。(5.1)、(5.3)、(5.5)、(5.7)、(5.9)、(5.11) 和 (5.13) 中所声称的表达式均成立。

与之前一样，定理 5.3 为推论 2.6 增添了一个新的佐证，也增强了我们对它的信心。如今，模数 13 的情形下的主要猜想已得到证明，我们可以设定 $z=1$，并看看柱形分拆范式所导出的 22 个和积恒等式。

定理 5.4。以下恒等式成立

$$\sum_{\substack{r_1\ge r_2\ge r_3\ge 0\\ s_1\ge s_2\ge s_3\ge 0}} \frac{q^{r_1^2-r_1s_1+s_1^2+r_2^2-r_2s_2+s_2^2+r_3^2-r_3s_3+s_3^2}\ p_c(r_1,r_2,r_3,s_1,s_2,s_3,q)}{(q;q)_{r_1-r_2}(q;q)_{r_2-r_3}(q;q)_{r_3}(q;q)_{s_1-s_2}(q;q)_{s_2-s_3}(q;q)_{s_3}(q;q)_{r_3+s_3+1}} = \frac{1}{(q;q)_\infty}\frac{1}{\theta(q^{i_1},q^{i_2},q^{i_3},q^{i_4},q^{i_5},q^{i_6},q^{i_7},q^{i_8},q^{i_9};q^{13})}, \tag{5.14}$$

其中，多项式 $p_c(r_1,r_2,r_3,s_1,s_2,s_3,q)$ 以及每个轮廓对应的九元组 $(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6,i_7,i_8,i_9)$ 如下表所示：

轮廓 c	$p_c(r_1,r_2,r_3,s_1,s_2,s_3,q)$	$(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6,i_7,i_8,i_9)$
(10, 0, 0)	$q^{r_1+r_2+r_3+s_1+s_2+s_3}$	(2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6)
(9, 1, 0)	$q^{r_2+r_3+s_1+s_2+s_3}$	(1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6)
(9, 0, 1)	$q^{r_1+r_2+r_3+s_2+s_3}$	(1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6)
(8, 2, 0)	$q^{r_3+s_1+s_2+s_3}$	(1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6)
(8, 1, 1)	$q^{r_2+r_3+s_2+s_3}(1-q^{r_1+s_1+1})$	(1, 1, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6)
(8, 0, 2)	$q^{r_1+r_2+r_3+s_3}$	(1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6)
(7, 3, 0)	$q^{s_1+s_2+s_3}$	(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6)
(7, 2, 1)	$q^{r_3+s_2+s_3}(1-q^{r_2+s_1+1})$	(1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6)
(7, 1, 2)	$q^{r_2+r_3+s_3}(1-q^{r_1+s_2+1})$	(1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6)
(7, 0, 3)	$q^{r_1+r_2+r_3}$	(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6)
(6, 3, 1)	$q^{s_2+s_3}(1-q^{r_3+s_1+1})$	(1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6)
(6, 2, 2)	$q^{r_3+s_3}(1-q^{r_2+s_2+1})$	(1, 1, 2, 2, 4, 4, 5, 5, 6)
(6, 1, 3)	$q^{r_2+r_3}(1-q^{r_1+s_3+1})$	(1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6)
(5, 3, 2)	$q^{s_3}(1-q^{r_3+s_2+1})$	(1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6)
(5, 2, 3)	$q^{s_3}(1-q^{r_3+s_2+1})$	(1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6)
(4, 3, 3)	$(1-q^{r_3+s_3+1})$	(1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 6, 6)
(6, 4, 0)	$q^{s_2+s_3}(q^{-r_1+s_1}-q^{r_3}+q^{r_2+r_3+s_1+1})$	(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6)
$(6,0,4)$	$q^{r_3}-q^{r_2+r_3+s_3+1}-q^{r_1}+q^{2r_1+r_2+r_3}+q^{r_1+r_2+r_3+s_2+s_3+1}$ $+(1-q)q^{r_1+s_3}(1-q^{r_3}-q^{r_3+s_3+1})$ $-(1-q)q^{2r_1}(q^{r_3}-q^{s_3}-q^{r_2+r_3+s_3+1}+q^{r_1+r_2+r_3+s_3+3}$ $+q^{s_2+s_3+2}+q^{r_3+s_2+s_3+1}-q^{r_3+s_1+s_2+s_3+3})$ $+(1-q)(1-q^2)q^{r_3}(1-q^{r_3}-q^{r_3+s_3+1}+q^{s_1+s_2+s_3+3})$	$(1,2,2,3,3,4,4,5,6)$
$(5,5,0)$	$q^{-2r_1+s_1+s_2+s_3}-q^{-r_1+r_3+s_2+s_3}-q^{s_2+s_3-1}+q^{r_3+s_1+s_2+s_3}$ $+q^{-r_1+r_2+r_3+s_1+s_2+s_3+1}$	$(1,2,2,3,3,4,4,5,5)$
$(5,4,1)$	$q^{-r_1+s_2+s_3}-q^{-r_1+r_3+s_1+s_2+s_3+1}-q^{s_1+s_2+s_3}-q^{r_3+s_3}$ $+q^{r_2+r_3+s_2+s_3+1}$	$(1,1,2,3,3,4,4,5,6)$
$(5,1,4)$	$q^{-r_1+r_3}-q^{-r_1+r_2+r_3+s_3+1}+q^{r_2+r_3+s_2+s_3+1}-(1-q)q^{r_3+s_3}-1$	$(1,1,2,3,3,4,4,5,6)$
$(4,4,2)$	$q^{-r_1+s_3}-q^{-r_1+r_3+s_2+s_3+1}-q^{s_2+s_3}-q^{r_3}+q^{r_3+s_1+s_2+s_3+1}$ $+q^{r_2+r_3+s_3+1}$	(1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 6, 6)

忽略变量 r 和 s 之间的对称性后，定理 5.4 证明了 16 个本质上唯一的和－乘积恒等式。很容易看出，在这些线下恒等式中，我们看不到这些对称性。表格中与第一个轮廓 (10,0,0) 相关的乘积，已在引言中作为定理 1.9 给出。

我们还注意到，在这些恒等式中，与轮廓 (10, 0, 0)、(8, 1, 1)、(6, 2, 2)、(4, 3, 3) 相关的恒等式分别是 (5.22) 的 $i=1$、……、4 种情形，而 (7, 3, 0) 和 (8, 2, 0) 分别是 [7, 定理 5.1] 中 (5.23) 的 $\sigma=0$ 和 1 种情形。

6. Future Directions

近期对柱面分拆的研究引出了许多数学问题。值得一提的是，我们计划探索的一些未来方向。

本文及 [29] 中概述的方法，试图一举证明任意固定 $|c|$ 下所有归一化生成函数 $H_c(z,q)$ 的和表示，其中 $\#(c)=3$。在恢复线下求和后，证明需要进行大量计算。然后，令 $z=1$ 并使用 (2.1)，我们便可再次一举证明固定模数下柱面分拆系统中所有轮廓的和积恒等式。因此，要证明 A_2 罗杰斯–拉马努金恒等式，我们首先要证明一个更一般、更复杂且带有自由变量 z 的组合联系。该方法能否成功，取决于这些计算能否完成，而这些计算几乎不可能手工完成。

Warnaar [43] 提到，他为具有 3 个部件的轮廓构建了 Bailey 机制所需的理论。这一机制将使我们能够逐一证明和积恒等式。这是个好消息，也是数学领域的一大进展。遗憾的是，它也有自身的局限。Warnaar 承认，目前这种 Bailey 机制无法证明任何线下恒等式。它只能找到与猜想 2.13 的 $z=1$ 特化相关的和积关系。这与原始 Andrews–Schilling–Warnaar 论文中的情况类似；例如，在模 7 情形下，其中的 Bailey 机制无法得到与轮廓 (2, 2, 0) 相关的线下恒等式，而该恒等式后来在 [18] 中得到了证明。

无论如何，我们计划利用从 Warnaar 的结果中获得的额外信息，研究如何简化证明整个自由 z 情形下恒等式所需的计算，以便一举完成证明。至少，对于 $z=1$ 特化情形，我们应当探寻如何利用通过 Bailey 机制证明的线上恒等式来证明线下恒等式。

还有一些和积恒等式无法通过柱形分拆范式显现出来。这些恒等式也没有与之对应的柱形分拆轮廓。与线下恒等式类似，我们利用柱形分拆体系中已证明的关系式，发现并证明这些和表示。例如，以下是两个类似于 (1.4) 的模 10 示例：

$$\sum_{\substack{r_1\geq r_2\geq 0\\ s_1\geq s_2\geq 0}} \frac{q^{r_1^2-r_1s_1+s_1^2+r_2^2-r_2s_2+s_2^2}\,q^{s_1+s_2}(1+q^{r_1+r_2+1})}{(q;q)_{r_1-r_2}(q;q)_{s_1-s_2}(q;q)_{r_2}(q;q)_{s_2}(q;q)_{r_2+s_2+1}} = \frac{1}{(q;q)_\infty}\frac{1}{\theta(q,q,q^3,q^4,q^4,q^4;q^{10})}, \tag{6.1}$$

$$\sum_{\substack{r_1\geq r_2\geq 0\\ s_1\geq s_2\geq 0}} \frac{q^{r_1^2-r_1s_1+s_1^2+r_2^2-r_2s_2+s_2^2}\,q^{s_1+s_2}(1-q^{r_1+r_2+1})}{(q;q)_{r_1-r_2}(q;q)_{s_1-s_2}(q;q)_{r_2}(q;q)_{s_2}(q;q)_{r_2+s_2+1}} = \frac{1}{(q;q)_\infty}\frac{1}{\theta(q^2,q^2,q^2,q^3,q^3,q^3;q^{10})}. \tag{6.2}$$

与模 10 A_2 罗杰斯–拉马努金恒等式的主特征相关的所有乘积，都包含在 (2.1) 中出现的乘积之内。恒等式 (6.1) 和 (6.2) 不属于这一体系，可以说，它们出现在圆柱体的暗面。我们希望未来能为这些恒等式找到柱面分拆解释。尽管如此，我们计划在即将发表的论文中，使用 q理论方法给出这些定理的证明。

为此处提到的任一恒等式寻找显然为正的和表示，仍然很有意义。我们正在寻找能够看出级数系数正性的方法。在 [7], Andrews–Schilling– Warnaar 建议应用超几何变换，消去恒等式（例如 (1.4)）中出现的 $(q;q)_\infty$ 因子，从而得到显然为正的表示。这一建议有其局限性，可能并不广泛适用，尤其对于线下恒等式而言。

在研究对称柱形分拆时， [12] 还出现了另外两个基本的模 8 分拆论恒等式族，即 G¨ollnitz–Gordon 恒等式和小 G¨ollnitz 恒等式。已知 G¨ollnitz–Gordon 恒等式与仿射李代数 $A_5^{(2)}$ [27]的 2 级模有关。这引出了新的问题：类似于对称分拆的范式，我们能否也将对称柱形分拆与某些仿射李代数的特征标公式联系起来? 文献 [12]中给出了类似于 (2.1) 的对称柱形分拆计数乘积公式。目前，这些乘积与仿射李代数特征标公式之间的关系尚不明确，而且对称柱形分拆也没有一般性的猜想级数表示。我们计划进一步研究这些对象。

最后，我们计划研究部件数超过 3 的柱面分拆轮廓所对应的任意生成函数的和表示。乘积表示 (2.1) 和函数方程 (2.3) 对轮廓的大小和长度均适用。迄今为止，我们只能证明并猜想部件数不超过 3 的轮廓的和表示。

7. Comments on Computations

在 [19], 的计算机辅助证明中，我们广泛使用了 [1] 和 [30]。这些证明主要分为三个步骤：首先，为柱面分拆的（归一化）生成函数的猜想和式公式，寻找关于 z 指数的递推关系；其次，解耦由 (2.3) 给出的 q 差分方程组，从而得到柱面分拆真实生成函数中 z 的系数所满足的递推关系；最后，对比递推关系（必要时，将递推关系作为算子求其最大公约数），并证明两个数列满足相同的递推关系和相同的初始条件。一旦证明的恒等式积累到足够多，其余恒等式便可在 (2.3) 的指引下通过级数运算证明。如此一来，我们证明了所有猜想的和式都与真实的组合生成函数相同。这项证明需要用到两个复杂的算法，即创造性望远镜算法和 Gr¨obner 基计算，分别用于求出依赖于离散变量的给定超几何和的递推关系，以及解耦耦合递推关系组。

我们尝试用同样的方法证明 Warnaar [42] 针对具有 3 部分轮廓且模数不能被 3 整除的柱面分拆提出的一些论断。随后我们很快发现，Creative Telescoping 计算无法在（任何合理时间的定义下）终止。这是因为这些猜想中的嵌套求和数量不断增加。不过，仍然可以对递推关系进行解耦。

Kanade–Russell 的方法 [29] 旨在证明所声称的柱面分拆二元生成函数级数表示确实是其生成函数，这种做法别出心裁。从某种意义上说，这与 [19], 的证明方法恰好相反：我们先利用猜想 2.13 中明确提出的猜想和级数运算，扩展我们猜测的恒等式；然后通过证明耦合关系得到满足，且初始条件仍然成立，来证明所有这些猜测的恒等式。利用所声称的超几何和的函数关系来约化耦合的 q差分方程这一关键思路，也曾在 [16] 的不同背景下使用。此外，这种方法用引理 2.5 中的邻接关系取代了（过去的瓶颈）Creative Telescoping。然而，将 (2.3) 的耦合关系用新的表述改写为理想 I_m （见第 3 节）中各项的线性组合，且系数属于 $\mathbb{Z}((q,z))$，并非易事。Kanade [26] 提到，他们先针对单个情形提出一个拟设，再求解待定系数，从而找到这些线性组合。要确定最精简且必要的拟设是不可能的。他们还提到，每个困难情形的模 10 计算证明在家用电脑上大约需要 8 小时才能完成。采用本文的矩阵约化方法后，模 10 情形的速度提高了约 2 倍。这主要是因为矩阵一经约化，就能在所有函数关系中重复使用；而先前的方法需要针对每个情形分别提出一个拟设并求解。正是这种速度提升，使我们能够证明新的模 11 和模 13 情形。另一方面，模 9 和模 12 情形仍未解决。这很可能是因为 (2.9) 中的 q-二项式系数增加了复杂程度。随着 $S_m(\rho|\sigma)$所满足的递推关系阶数增加，我们需要约化的系统也会变得更大。

Mathematica 的高斯消元函数 RowReduce 执意计算矩阵的简化行阶梯形。这不仅没有必要，还会引入上三角系数的大型有理函数表达式，使计算变得过于复杂。因此，我们不得不在 Mathematica 计算机代数系统中自行实现高斯消元算法。这个基础实现会对多项式环中元素为整数系数（例如 $\mathbb{Z}[q,z]$）的矩阵进行排序并执行行消元，过程中不会引入有理函数，并在得到行阶梯矩阵（三角方程组）时终止。此函数将纳入即将发布的 qFunctions 软件包下一版本。顺带一提，我们实现了这种消元过程的一种简单并行化方案，但目前还没有看到拆分计算带来任何好处。

我们还应指出，为了帮助证明柱形分拆方案及其他类似方案中的各类结果，目前至少有两项关键优化亟待实现。首先需要做的是

跟踪消去关系，并在后续计算中去除零空间的贡献。具体来说，目前我们不知道 $N = 6$ 是否是证明定理 4.1 和/或 5.1 所需的最小数量，但我们知道它足够。去除所有消去关系后，我们只会看到这些递推关系作为理想 I_m 中元素的一种最小表示（取决于 N 的选择），这可以让我们大致了解一般情况下 N 的最优界应当是多少。第二项待完成的改进是动态扩展待约简的矩阵。目前，我们通过实验固定一个 N，希望它足以证明感兴趣的关系式属于该矩阵的零空间。这与采用固定试探形式的思路相同。将行约简作为预处理步骤，有助于重复计算。拥有阶梯系统能大幅加快后续计算。如果选定的 N 不够，那么我们就需要选取更大的 N，并从头开始。这就要求再次对 N 的矩阵进行行约简，作为一个子问题。我们应当改为将已有的三角化矩阵从 N 扩展到 $N+1$，并仅对新增关系式再次进行行约简。矩阵的增量式扩展也将使我们能够自然地找到任意给定 m 所需的最小 N（假设猜想 3.2 正确）。

References

[1] J. Ablinger 和 A. K. Uncu。 qFunctions ——一个用于 q级数及分拆理论应用的 Mathematica 软件包。已投稿。arXiv:1910.12410，2019年。[2] A. Agrawal、G. E. Andrews 和 D. Bressoud。贝利格。 *J. Indian Math. Soc.*，51:57–73，1987年。[3] G. E. Andrews。罗杰斯–拉马努金恒等式关于奇模数的解析推广。 *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*，71 4082 4085，1974 : – 。[4] G. E. Andrews。 *q-series*：其在分析、数论、组合学、物理学和计算机代数中的发展与应用。第66卷。CBMS数学区域会议系列。由数学科学会议委员会出版，华盛顿特区；美国数学学会出版，普罗维登斯，罗得岛州，1986年，第xii+130页。[5] G. E. Andrews。 *The Theory of Partitions*。剑桥大学出版社，1984年。[6] G. E. Andrews。论罗杰斯–拉马努金恒等式的证明。载于 *q-Series and Partitions*，第1–14页。施普林格出版社，纽约，1989年。[7] G. E. Andrews、A. Schilling 和 S. O. Warnaar。一种 A_2 *J. Amer. Math. Soc.* 12 3 677 702, 1999 引理及罗杰斯–拉马努金型恒等式。，( ): –。[8] C. Armond 和 O. T. Dasbach。罗杰斯–拉马努金型恒等式与着色琼斯多项式的头部和尾部。arXiv:1106.3948 [math.GT]。[9] W. N. Bailey。罗杰斯–拉马努金型恒等式。 *Proc. London Math. Soc.*，50(2):1–10，1949年。[10] R. J. Baxter。硬六角模型中的罗杰斯–拉马努金恒等式。 *J. Stat. Phys.*，26:427–452，1981年。[11] A. Borodin。周期舒尔过程与柱面分拆。 *Duke Math. J.*，140(3):391–468，2007年。[12] W. Bridges 和 A. K. Uncu。加权柱形分拆。 *J. Algebraic Combin.*，56（2022年），第4期，1309—1337。[13] D. M. Bressoud。罗杰斯–拉马努金恒等式对所有模数的推广。 *J. Comb. Th. A*，27:64–68，1979年。[14] D. M. Bressoud。罗杰斯–拉马努金恒等式的简易证明。 *J. Number Th.*，16:335–241，1983年。[15] C. Bruschek、H. Mourtada 和 J. Schepers。弧空间与罗杰斯–拉马努金恒等式。 *Ramanujan J.*，30:9–38，2013年。[16] S. Chern 关联分拆理想、有向图与 q多重求和。 *Electron. J*， *Combin.* 27(3)：论文编号3.33，共29页。[17] S. Corteel。罗杰斯–拉马努金恒等式与罗宾逊–申斯特德–克努特对应。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，145 5 2011( ): –2022，2017年。[18] S. Corteel 和 T. A. Welsh。重新审视 A_2 罗杰斯–拉马努金恒等式。 *Annals of Combinatorics*，23(3):683–694，2019年。[19] S. Corteel、J. Dousse 和 A. K. Uncu。柱面分拆与一些新的 A 2 *Proc. Amer.Math.* 罗 *Soc.* 150 2 481 497, 2021 杰斯–拉马努金恒等式。，( ): —。[20] B. Feigin、O. Foda 和 T. A. Welsh。由维拉索罗特征标组合得到的安德鲁斯–戈登型恒等式。 *Ramanujan J.* 17 1 33 ，( ): – 52，2008年。[21] O. Foda 和 T. A. Welsh。柱面分拆、 $\mathcal{W}_r$ 特征标与安德鲁斯–戈登–布雷索德恒等式。 *J. Phys. A*，49 16( ): 164004，37，2016年。[22] A. M. Garsia 和 S. C. Milne。罗杰斯–拉马努金双射。 *J. Combin. Theory Ser. A*，31:289–339，1981年。[23] I. M. Gessel 和 C. Krattenthaler。柱面分拆。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，349(2):429–479，1997年。[24] B. Gordon。罗杰斯–拉马努金恒等式的组合推广。 *Amer. J. Math.*，83:393–399，1961年。[25] M. J. Griffin、K. Ono 和 S. O. Warnaar。罗杰斯–拉马努金恒等式及其算术性质的框架。*Duke Math. J.*，8:1475–1527，2016年。[26] S. Kanade。私人通信。[27] S. Kanade。某些 $A_5^{(2)}$ 和 G¨ ollnitz–Gordon 恒等式的2 级标准模结构。 *Ramanujan J.*，45(3):873–893，2018年。[28] S. Kanade。论 A_2 安德鲁斯–席林–瓦尔纳恒等式。预印本。

[29] S. Kanade 和 M. C. Russell。补全 A2 Andrews–Schilling–Warnaar恒等式。arXiv:2203.05690 [math.CO]。[30] C. Koutschan。 *Advanced applications of the holonomic systems approach*。博士论文，RISC，约翰内斯·开普勒大学，林茨，2009年。[31] J. Lepowsky 和 R. L. Wilson。标准模的结构，I：泛代数与罗杰斯–拉马努金恒等式。*Invent. Math.*，77:199–290，1984年。[32] J. Lepowsky 和 R. L. Wilson。标准模的结构，II： $A_1^{(1)}$ 情形，主分次。 *Invent. Math.*，79 417 442，1985 : – 。[33] P. A. MacMahon。 *Combinatory Analysis*，第2卷。剑桥大学出版社，美国纽约州纽约市，1916年。[34] S. C. Milne 和 G. M. Lilly。 A_ℓ 和 C_ℓ 贝利变换与引理。 *Bull. Amer. Math.Soc.*，26:258ˆa€“263，1992年。[35] S. C. Milne 和 G. M. Lilly。

A_ℓ C_ℓ 139 319 346, 和贝利变换与引理的推论。 *Discrete Math.*，: –。[36] A.K. Uncu

<https://drive.google.com/drive/folders/1qRLIfX8JVIzxkKQCCaYfg4i84X_l_-fo> 3, 最后访问于1月。[37] A. Pascadi。关于二变量Rogers–Ramanujan型和式与mock theta函数的若干新乘积恒等式。arXiv:2009.05878, 2020年。[38] L. J. Rogers 和 S. Ramanujan。组合分析中若干恒等式的证明。 *Cambr. Phil. Soc. Proc.*，19 216，1919 211：–。[39] I. Schur。对加法数论及链

¨ *S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math.* 分数 *Klasse* 302 321, 1917 理论的贡献。，第–页。[40] A. V. Sills。 *An invitation to the Rogers-Ramanujan identities*。CRC出版社，2017年。[41] S. Tsuchioka。一个3级 A2 Rogers-Ramanujan二分拆恒等式的例子。arXiv:2205.04811 [math.RT]。[42] S. O. Warnaar。A2 Andrews-Gordon恒等式与柱面分拆。arXiv:2111.07550 [math.CO]。[43] S. O. Warnaar。私人通信。

Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics, Austrian Academy of Science, Altenberg-erstrasse 69, A-4040 Linz, Austria*Email address*: akuncu@ricam.oeaw.ac.at

University of Bath, Faculty of Science, Department of Computer Science, Bath, BA2 7AY, UK
Email address: aku21@bath.ac.uk