arXiv:2301.01374v1 [math.AG] 3 Jan 2023

关于超几何对偶猜想

列夫·鲍里索夫和韩增瑞

Abstract. 我们给出了一个显式公式，用于描述 Horja 和 Borisov 此前提出猜想的两个 GKZ 超几何偏微分方程组之间的对偶。我们证明，在适当的极限下，这种对偶可以通过取值于上同调的伽马级数解，识别为某些托里克德利涅-芒福德叠上上同调欧拉示性数配对的逆。

Contents

1. 引言 1 2. 解的配对 3 3. 伽马级数的配对 8 4. 欧拉示性数配对 16 5. 推广与开放问题 20 参考文献 22

1. 引言

设 C 是格 $N = \mathbb{Z}^{\mathrm{rk}N}$ 中的有限有理多面锥。我们假设 C 的所有射线生成元都位于本原超平面 $\deg(\cdot) = 1$ 上，其中 $\deg : N \to \mathbb{Z}$ 是线性函数。这些数据编码了一个仿射环面簇 $X = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[N^\vee \cap C^\vee]$，而超平面条件等价于$X$ 是戈伦斯坦的，即其对偶化层是平凡的。

设 $\{v_i\}_{i=1}^n$ 是 C 中包含其所有射线生成元的一组 n 格点，并且对所有 i，都有 $\deg(v_i) = 1$。通过考察基于三角剖分的 C 细分 Σ，并使这些三角剖分涉及其中的一些点 v_i，可以构造保正则微分形式解消$\mathbb{P}_\Sigma \to X$。通常，$\mathbb{P}_\Sigma$ 是光滑的 Deligne-Mumford 叠，而非光滑簇；只有在 Σ 中的所有锥都是幺模的情况下，才会出现少数例外。

Kawamata-Orlov $K \to D$ 猜想的一个特例断言，$\mathbb{P}_\Sigma$ 上的凝聚层导出范畴与 Σ的选择无关。事实上，人们预期存在一个等变的三角范畴族，在相关范畴之间进行插值。这个颇为神秘的族，在复化的 Grothendieck K-群层面上已得到了充分理解。具体而言，它们应当对应于以下对象的解：

某个版本的 Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky 超几何偏微分方程系统。事实上，由于 X 和 $\mathbb{P}_\Sigma$的非紧性，存在两个这样的系统，分别记为 bbGKZ(C, 0) 和 bbGKZ(C°, 0)，据猜想二者互为对偶 [1]。在对应于三角剖分 Σ 的适当极限下，可借助两个特殊的 Γ-级数，将这些系统的解与 $\mathbb{P}_\Sigma$ 的通常轨形上同调及紧支撑轨形上同调对应起来。本文正面证明了 [1]的对偶猜想。事实上，我们的对偶公式足够简单，或许能为如何构造前述三角范畴提供一些线索。

现在我们将介绍记号，并回顾良态 GKZ 超几何系统。

定义 1.1. 考虑由 C 中的格点索引、作用于复变量 $x_1, \dots, x_n$ 的函数 $\{\Phi_c(x_1, \dots, x_n)\}$ 所构成的偏微分方程组:

$$\partial_i \Phi_c = \Phi_{c+v_i}, \quad \sum_{i=1}^{n} \langle \mu, v_i \rangle x_i \partial_i \Phi_c + \langle \mu, c \rangle \Phi_c = 0$$

对所有 $\mu \in N^\vee$, $c \in C$ 和 $i = 1, \dots, n$ 均成立。我们将此系统记为 bbGKZ(C,0)。类似地，只考虑 C° 的内部格点，也可以定义 bbGKZ(C°, 0)。

该系统给出了一个全纯偏微分方程系统。根据全纯 D-模的一般理论，其秩（即解空间的维数）是有限的。关于这方面的更多背景，请参阅 [9]。与通常的 GKZ 系统不同，后者在非一般参数处可能出现秩跳跃（见 [10]）；文献 [3] 证明，良态 GKZ 系统的秩始终等于预期值，即锥 C 的射线生成元之凸包的归一化体积。

此前， [1] 曾猜想系统 bbGKZ(C,0) 和 bbGKZ(C°, 0) 彼此对偶，即它们的解 $\Phi = (\Phi_c)$ 与 $\Psi = (\Psi_d)$ 之间存在一种配对$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ，其形式为

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \sum_{c,d} p_{c,d}(\mathbf{x}) \Phi_c \Psi_d,$$

其中$p_{c,\ d}$ 是关于 $\mathbf{x}$ 的多项式，且只有有限多个非零。这个配对应当与 $\mathbf{x}$ 无关，可以视为解的局部系统之间的对偶。在 [1] 中已验证了一个非平凡的对偶实例，而 [2]中则肯定地解决了 rk(N) $= 2$ 情形。此外，在 $\mathbf{x}$ 的某些区域内——这些区域大致对应于 $\mathbb{P}_\Sigma$的复化 K¨ahler 锥——可以构造 bbGKZ(C, 0) 和 bbGKZ(C°, 0) 的解，其取值属于 $\mathbb{P}_\Sigma$的某些上同调群或 K 理论群。随后， [1] 中提出猜想：上述配对应当给出（相差一个常数因子）这些空间上的某个欧拉示性数配对的逆

空间。在本文中，我们能够验证这两个陈述，从而在完全一般的情形下证明 [1] 的猜想 7.3。

具体而言，以下公式给出了所讨论的配对。设$v \in C^\circ$是一个一般位置的元素。对于一个大小为 rk$N$ 的子集 $I \subseteq \{1, \dots, n\}$，我们考虑锥 $\sigma_I = \sum_{i\in I} \mathbb{R}_{\geq 0} v_i$。我们将系数$\xi_{c,\ d,\ I}$定义为 $c + d = v_I$时的

$$\xi_{c,\ d,\ I} = \begin{cases} (-1 & \sigma_I = \quad N \qquad c + \varepsilon v \qquad d - \varepsilon v \in \sigma_I^\circ)^{\deg(c)}, \text{ 若} \\ 0 & \text{dim rk 且 both 和 均成立；否则} \end{cases}.$$

这里的条件必须对所有充分小的 $\varepsilon > 0$都成立。按照惯例，我们用 Vol_I 表示矩阵的系数在 N 的一组基下的行列式的绝对值，其中该矩阵由 v_i、$i \in I$ 构成（即 I的归一化体积）。现在我们可以陈述本文的第一个结果。

定理 2.4. 对于 bbGKZ(C, 0) 和 bbGKZ(C°, 0) 的任意一对解 (Φ_c) 和 (Ψ_d)，其配对

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \sum_{c,d,I} \xi_{c,d,I} \operatorname{Vol}_I \left(\prod_{i\in I} x_i \right) \Phi_c \Psi_d$$

是一个常数。

如前所述，对于一个正则三角剖分 Σ，可以用伽马级数 $\Gamma = (\Gamma_c)$ 和 $\Gamma^\circ = (\Gamma^\circ_d)$ 来描述 bbGKZ(C, 0) 和 bbGKZ(C°, 0) 的解；这些伽马级数取值于与 $\mathbb{P}_\Sigma$ 相关的某些轨形上同调空间 H 和 H^c，相关讨论见 [1]。本文的第二个主要结果如下。

定理 4.2. 常数配对 $\langle \Gamma,\ \Gamma^\circ \rangle$ 等于欧拉示性数配对 $\chi(-,-) : H \otimes H^c \to \mathbb{C}$ 的逆，差一个常数因子。

本文结构如下。我们在第 2 节证明上述定理 2.4。在第 3 节中，我们引入空间 H 和 H^c，以及取值于其中的解 Γ 和Γ^c，并计算它们上的定理 2.4 的配对。我们还计算级数及其配对在大 K¨ahler 极限下的渐近行为，这将在下一节中用到。在第 4 节中，我们证明该配对是 H 和 H^c 之间欧拉示性数配对的逆。这尤其意味着定理 2.4 的配对是非退化的。最后，在第 5 节中，我们说明结果的一些简单推广，并提出若干开放问题。

2. Pairing of solutions

本节旨在定义与 C 和 C° 相关联的良态 GKZ 系统解空间之间的一种配对。我们首先研究一类特殊的配对，并找出一个充分条件，使其对良态 GKZ 系统的任意一对解都给出常数。随后，我们给出这种配对的一个特殊例子，其灵感来自托里克簇中对角线的消解所用的扇位移

公式，该公式由 Fulton 和Sturmfels [6] 提出。

为陈述本节的第一个主要结果，我们先引入一些记号。设 J 是 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的一个子集，且 $|J| = \mathrm{rk}\ N+1$。如果 $\{v_i, i\in J\}$ 张成 $N_{\mathbb{R}}$ over $\mathbb{R}$，我们就称这样的子集为张成集。对于张成集 J，向量 $\{v_i\}_{i\in J}$ 之间存在唯一的线性关系（相差一个常数因子）。

$$\sum_{i\in J} a_i v_i = 0.$$

我们定义 sgn：$J\to\{0,\pm 1\}$，其中当 a_i 为负、零或正时，sgn(j) 分别取 -1、0 或 1。这给出了张成集 J 的一个分解 $J = J_+ \sqcup J_- \sqcup J_0$。注意，虽然 sgn 取决于上述线性关系的缩放方式，但表达式 sgn(j_1) sgn(j_2) 是良定义的。

本节后文将用到以下引理。对于一个大小为 rk N 的子集 $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$，我们用 Vol$_I$ 表示原点与 v_i、$i\in I$ 的凸包的归一化体积。

引理 2.1. 设 $I\subset\{1,\ldots,n\}$ 满足 $\{v_i, i\in I\}$ 构成 $N_{\mathbb{R}}$ 的一组基。假设 I 包含 1，并考虑 $j\notin I$。考虑张成集 $J = I\cup\{j\}$。令 μ 表示唯一的线性函数，它在 v_1 上取值 Vol$_I$，在 v_i、$i\in I\setminus 1$ 上取值 0。则对于为 J 定义的 sgn，有 $\mu(v_j) = -\,\mathrm{sgn}(1)\,\mathrm{sgn}(j)\mathrm{Vol}^{I\setminus 1}$。

证明. 忽略符号差异，我们可以将线性函数 μ 视为与 $\Lambda_{i\in I\setminus 1} v_i$ 作楔积。因此，$\mu(v_j) = \pm\mathrm{Vol}^{I\setminus 1}$，我们只需确定符号。由于 $\{v_i, i\in I\}$ 构成一组基，关系式$\sum_{i\in J} a_i v_i = 0$ 中的系数 a_j 非零，因此我们可以令其为 1，这保证了 sgn(j) $= 1$。将 μ 应用于 $\sum_{i\in J} a_i v_i = 0$，得到 $a_1\mathrm{Vol}_I + \mu(v_j) = 0$。这意味着 a_1 与 $\mu(v_j)$ 符号相反，而 sgn(1) 的定义完成了证明。□

受我们先前工作的启发 [2],，我们将考察配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，它们仅含单项式项 $x_I = \prod_{i\in I} x_i$，对应于 $\{1,\cdots,n\}$ 中大小为 rk N 的子集 I。以下命题给出了配对为常数的一个充分条件。

命题 2.2. 设 $\{\xi_{c,d,I}\}$ 是一组复数，对于所有$c\in C$, $d\in C^\circ$, $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$，满足 $c+d = \sum_{i\in I} v_i$ 且 $|I| =$ rk N。假设

$$0 = \sum_{j\in J}\mathrm{sgn}(j)\Big(\xi_{c-v_j,d,J\setminus j}\chi(c-v_j\in C) + \xi_{c,d-v_j,J\setminus j}\chi(d-v_j\in C^\circ)\Big)$$

对所有 $c\in C$、$d\in C^\circ$ 以及所有满足$|J| =$rk $N+1$ 和 $\sum_{i\in J} v_i = c+d$ 的张成子集 $J\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$，该结论均成立。此处 χ 表示特征

函数（若命题为真则取 1，为假则取 0）。于是

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \sum_{|I|=\mathrm{rk}\, N} \sum_{c+d=v_I} \xi_{c,d,I} \mathrm{Vol}_I x_I \Phi_c \Psi_d$$

对于任意一对解（Φ, Ψ），它是一个常数。

证明。不失一般性，只需证明 $\partial_1 \langle \Phi, \Psi \rangle = 0$。我们计算如下：

$$\begin{aligned} \partial_1 \langle \Phi, \Psi \rangle = & \sum_{\substack{|I|=\mathrm{rk}\, N, \\ c+d=v_I}} \xi_{c,d,I} \mathrm{Vol}_I x_I (\Phi_{c+v_1} \Psi_d + \Phi_c \Psi_{d+v_1}) \\ & + \sum_{\substack{1 \in I, |I|=\mathrm{rk}\, N, \\ c+d=v_I}} \xi_{c,d,I} \mathrm{Vol}_I x_{I \setminus 1} \Phi_c \Psi_d \end{aligned} \tag{2.1}$$

现在利用关于 Φ 和 Ψ 的关系来处理第二个求和。对每一项，令 μ 为如下给出的线性函数：

$$\mu(v) = v \wedge (\Lambda_{j \in I \setminus 1} v_j)$$

在 $\Lambda^{\mathrm{rk} N} N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$ 的标准识别下，我们选择 $\{v_j$ 的顺序，使楔积中的 $j \in I \setminus 1\}$ 满足 $\mu(v_1) = \mathrm{Vol}_I$ 为正。注意，对所有 $j \in I \setminus 1$，都有 $\mu(v_j) = 0$。

我们利用 $\mu(c) + \mu(d) = \mu(\sum_{i \in I} v_i) = \mathrm{Vol}_I$，并将关于 Φ_c 和 Ψ_d 的方程乘以适当的系数后相加，其中使用此 μ，得到

$$\Phi_c \Psi_d \mathrm{Vol}_I = - \sum_{j \notin I \setminus 1} x_j \mu(v_j) (\Phi_{c+v_j} \Psi_d + \Phi_c \Psi_{d+v_j}).$$

因此，(2.1) 可改写为

$$\begin{aligned} \partial_1 \langle \Phi, \Psi \rangle = & \sum_{\substack{|I|=\mathrm{rk}\, N, \\ c+d=v_I}} \xi_{c,d,I} \mathrm{Vol}_I x_I (\Phi_{c+v_1} \Psi_d + \Phi_c \Psi_{d+v_1}) \\ & - \sum_{\substack{1 \in I, |I|=\mathrm{rk}\, N, \, j \notin I \setminus 1 \\ c+d=v_I}} \xi_{c,d,I} \mu(v_j) x_{I_{1 \to j}} (\Phi_{c+v_j} \Psi_d + \Phi_c \Psi_{d+v_j}) \\ = & \sum_{\substack{1 \notin I, |I|=\mathrm{rk}\, N, \\ c+d=v_I}} \xi_{c,d,I} \mathrm{Vol}_I x_I (\Phi_{c+v_1} \Psi_d + \Phi_c \Psi_{d+v_1}) \\ & - \sum_{\substack{1 \in I, |I|=\mathrm{rk}\, N, \, j \notin I \\ c+d=v_I}} \xi_{c,d,I} \mu(v_j) x_{I_{1 \to j}} (\Phi_{c+v_j} \Psi_d + \Phi_c \Psi_{d+v_j}) \end{aligned}$$

这里我们将第一项求和中含有 $1 \in I$ 的项与第二项求和中含有 $j = 1$ 的项抵消。这里 $I_{1 \to j} = I \setminus \{1\} \cup \{j\}$。注意，$\mu$ 取决于集合 I。

现在来计算上述表达式中 $x_{\hat{I}} \Phi_{\hat{c}} \Psi_{\hat{d}}$ 处的系数。该系数来自第一项求和中的 $I = I$，以及第二项求和中的 $I = I \cup 1 \setminus j$。我们注意到，I 的大小为 $\mathrm{rk}\, N$，并且

不包含 1。还要注意，若 $\mathrm{Vol}_{\hat{I}}=0$，则该系数为零。事实上，在第二项求和中，$\mu(v_j)=\pm\mathrm{Vol}^{I_{1\to j}}$。最后，我们必须有

$$\hat{c}+\hat{d}=v_J,\ J=\{1\}\sqcup\hat{I}.$$

ˆ 我们考察集合 J，已知它是张成的，因为它包含 I。由引理 2.1 可知，$\mu(v_j)=\mathrm{sgn}(1)\,\mathrm{sgn}(j)\mathrm{Vol}_{\hat{I}}$。因此，第一行的贡献为

$$\xi_{\hat{c}-v_1,\hat{d},\hat{I}}\mathrm{Vol}_{\hat{I}}\chi(\hat{c}-v_1\in C)+\xi_{\hat{c},\hat{d}-v_1,\hat{I}}\mathrm{Vol}_{\hat{I}}\chi(\hat{d}-v_1\in C^\circ)$$

第二行的贡献为

$$\sum_{j\in J\setminus 1}\mathrm{sgn}(1)\,\mathrm{sgn}(j)\xi_{\hat{c}-v_j,\hat{d},J\setminus j}\,\mathrm{Vol}_{\hat{I}}\,\chi(\hat{c}-v_j\in C)$$
$$+\sum_{j\in J\setminus 1}\mathrm{sgn}(1)\,\mathrm{sgn}(j)\xi_{\hat{c},\hat{d}-v_j,J\setminus j}\mathrm{Vol}_{\hat{I}}\chi(\hat{d}-v_j\in C^\circ).$$

我们注意到，如果 $\mathrm{sgn}(1)=0$，那么 $\{v_i,i\in J\setminus 1\}$ 不张成 $N_{\mathbb{R}}$，因此 $\mathrm{Vol}_{\hat{I}}=0$，结论显然成立。于是我们可以在第一项中引入 $\mathrm{sgn}(1)^2$，使得 $x_{\hat{I}}\Phi_{\hat{c}}\Psi_{\hat{d}}$ 处的系数等于

$$\mathrm{sgn}(1)\,\mathrm{Vol}_{\hat{I}}\sum_{j\in J}\mathrm{sgn}(j)\Big(\xi_{\hat{c}-v_j,\hat{d},J\setminus j}\chi(\hat{c}-v_j\in C)+\xi_{\hat{c},\hat{d}-v_j,J\setminus j}\chi(\hat{d}-v_j\in C^\circ)\Big),$$

结论得证。 □

注 2.3. 经过一些符号变换，命题 2.2 的条件可改述为：对适当的元素 $\xi\in\mathbb{C}[C]\otimes\mathbb{C}[C^\circ]\otimes\Lambda^{\mathrm{rk}N}(\oplus_{i=1}^n\mathbb{C}e_i)$，有 $d\xi=0$，其微分算子为

$$d=\sum_{i=1}^n[v_i]\otimes 1\otimes(e_i\wedge)+\sum_{j=1}^n 1\otimes[v_j]\otimes(e_j\wedge)$$

关于 $\xi\in\mathbb{C}[C]\otimes\mathbb{C}[C^\circ]\otimes\Lambda^\bullet(\oplus_{i=1}^n\mathbb{C}e_i)$。本文不再进一步探讨这一方向。

现在我们给出良态 GKZ 系统 bbGKZ(C,0) 与 bbGKZ(C°, 0) 的解之间配对 $\langle-,-\rangle$ 的显式公式。利用命题 2.2，我们证明，对于任意一对解 Φ 和 Ψ，$\langle\Phi,\Psi\rangle$ 是常数。

固定一个一般向量 $v\in C^\circ$。对于一个大小为 $\mathrm{rk}N$ 的集合 I，我们考虑锥 $\sigma_I=\sum_{i\in I}\mathbb{R}_{\geq 0}v_i$。我们将 $c+d=v_I$ 的系数 $\xi_{c,d,I}$ 定义为

$$\xi_{c,d,I}=\begin{cases}(-1)^{\deg(c)}, & \text{若 } \sigma_I=N,\ c+\varepsilon v,\ d-\varepsilon v\in\sigma_I^\circ \text{ 对充分小的 } \varepsilon>0 \text{ 成立},\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}\tag{2.2}$$

这里，这个条件必须对所有充分小的 $\varepsilon>0$ 都成立。显然，只要向量 v 的选取足够一般，ξ 就定义良好。注意

$\xi_{c,d,I} \neq 0$ 蕴含 c 和 d 都位于最大维锥 σ_I 中（但不一定在其内部）。

现在我们可以着手处理本节的主要结果了。

定理 2.4. 对于 bbGKZ(C, 0) 和 bbGKZ(C°, 0) 的任意一对解 (Φ_c) 和 (Ψ_d)，配对

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \sum_{c,d,I} \xi_{c,d,I} \operatorname{Vol}_I \left(\prod_{i \in I} x_i \right) \Phi_c \Psi_d$$

是一个常数。

证明. 我们通过证明这些系数 $\xi_{c,d,I}$ 满足命题 2.2 中的条件来证明此定理，即

$$0 = \sum_{j \in J} \xi_{c-v_j,d,J\setminus j} \operatorname{sgn}(j) \chi\left(c - v_j \in C\right) + \sum_{j \in J} \xi_{c,d-v_j,J\setminus j} \operatorname{sgn}(j) \chi\left(d - v_j \in C^\circ\right)$$

对于所有满足 $|J| = \mathbf{rk}\ N+1$ 的张成子集 $J \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$，以及所有满足 $c + d = \sum_{i \in I} v_i$ 的 $c \in C$、$d \in C^\circ$。

我们首先注意到，上述方程中的条件 $c - v_j \in C$ 和 $d - v_j \in C^\circ$ 是冗余的。事实上，为了保证 $\xi_{c-v_j,\ d,\ J\setminus j} \neq 0$，必须有 $c - v_j + \varepsilon v \in \sigma^\circ_{J\setminus j}$，这意味着 $c - v_j \in \sigma_{J\setminus j} \subseteq C$。对于第二项，为了保证 $\xi_{c,\ d-v_j,\ J\setminus j} \neq 0$，必须有 $d - v_j - \varepsilon v \in \sigma^\circ_{J\setminus j} \subseteq C^\circ$（因为 $J\setminus j$ 是一个极大锥），这意味着 $d \in C^\circ$。因此，只需考虑以下方程

$$0 = \sum_{j \in J_+ \sqcup J_-} \xi_{c-v_j,d,J\setminus j} \operatorname{sgn}(j) + \sum_{j \in J_+ \sqcup J_-} \xi_{c,d-v_j,J\setminus j} \operatorname{sgn}(j) \tag{2.3}$$

对于在 (2.2) 中定义的 ξ。非零项对应于满足以下条件的指标 j：$c - v_j + \varepsilon v$ 和 $d - \varepsilon v$ 都属于 $\sigma^\circ_{J\setminus j}$，或者 $c + \varepsilon v$ 和 $d - v_j - \varepsilon v$ 都属于$\sigma^\circ_{J\setminus j}$。

我们考虑关于变量 a_i 的方程

$$\sum_{i \in J} a_i v_i = c + \varepsilon v.$$

该方程的解集是在空间 $\mathbb{R}^{\mathrm{rk}N+1}$ 中的一条仿射直线 $l_{c+\varepsilon v}$。根据系数 ξ 的定义，当 $l_{c+\varepsilon v}$ 上存在一点满足 $a_j = 1$，且所有其他 a_i 都位于 (0, 1) 中时，式 (2.3) 的第一项会有贡献。类似地，当 $a_j = 0$ 且所有其他 a_i 都位于 (0, 1) 中时，第二项会有贡献。

回顾引理 2.1，我们有一个分解 $J = J_+ \sqcup J_- \sqcup J_0$。对于 $i \in J_0$，a_i 在线 $l_{c+\varepsilon v}$ 上的值是常数。由于 v 是一般的，我们可以假设它不是整数。因此，它要么不允许对 (2.3) 作出任何贡献（若 $a_i \notin$ (0,1)），要么不施加任何限制。因此，我们现在可以假设对所有 $i \in J_0$ 都是后一种情况。

证明的关键思路是考虑线段

$$S_i = l_{c+\varepsilon v} \cap \{0 \le a_i \le 1\}$$

对所有 $i \in J_+ \sqcup J_-$，在 $l_{c+\varepsilon v}$ 上。式 (2.3) 的非零贡献恰好出现在这样的线段 S_j 的端点处：这些端点严格位于所有其他线段的内部。假设 εv 是一般的，这意味着不同 S_i 的端点不会重合。事实上，若情况并非如此，那么 $c + \varepsilon v$ 就会落在由一个格元素平移后的 v-s 中 $\mathrm{rk} N - 1$ 个元素张成的空间内，而我们可以确保这种情况不会发生。现在考虑 $S = \bigcap_{i \in J_+ \sqcup J_-} S_i$。如果 S 为空，则不会有贡献，因为该点不会位于其他 S_i 的内部。因此，只需考虑 S 是一条线段 $[p, q]$ 的情形。显然，可能对 (2.3) 有贡献的点只有 p 和 q。特别地，(2.3) 中至多有两项非零项。我们将证明它们总是相互抵消。

我们还注意到，线段 S_i（即参数 a_i 增大的方向）在线 $l_{c+\varepsilon v}$ 上的定向由 $\mathrm{sgn}(i)$ 决定，因为沿该直线的向量由$v_{k,k\in J}$上的非平凡线性关系给出。如果 p 和 q 分别是线段 S_i和 S_j的 $a_i = 1$ 端和 $a_j = 1$ 端，那么这两条线段在 $l_{c+\varepsilon v}$ 上的定向必定相反（因为它们都应指向另一个点）。这意味着 $\mathrm{sgn}(i) = -\mathrm{sgn}(j)$，因此 (2.3) 中的两项相互抵消。同理，如果 p 和 q分别是 S_i 和 S_j的 $a_i = 0$ 端和 $a_j = 0$ 端，这两项也会抵消。

现在假设 p 和 q 分别对应于S_i 和 S_j 的 $a_i = 0$ 端和 $a_j = 1$ 端（此时可能有 $i = j$）。在这种情况下，两条线段的定向必定相同，而 ξ 定义中的因子 $(-1)^{\deg c}$ 会确保这两项彼此抵消。□

注 2.5. 随着 v 变化，我们会得到有限个不同的配对公式。也可以通过在 v 上积分来对配对作出更统一的选择，其中 v 的次数为 1（忽略非一般的 v的零测集所产生的贡献）。不过，这样做似乎并无任何优势。稍后我们将看到，配对实际上与 v的选择无关。

3. Pairing of the Gamma series

本节中，我们计算上一节定义的配对在由 Γ 级数所提供的良态 GKZ 系统的上同调值解上的表达式。下一节将证明，该结果是交配对的对偶，而交配对给出了 [1]中猜想 7.3 的证明。

我们考虑锥 C 的一个正则三角剖分 Σ，其顶点取自这些向量$\{v_i\}_{i=1}^n$，以及与之对应的托里克德利涅-芒福德叠 $\mathbb{P}_\Sigma$。

注 3.1. 为方便起见，我们将滥用记号，用 I同时表示 $\{1, \dots, n\}$ 的一个子集及其对应的锥 $\sum_{i\in I} \mathbb{R}_{\ge 0} v_i$。

类似地， Σ 既表示 $\{1,\dots,n\}$ 上的一个单纯复形，也表示 $N_{\mathbb{R}}$ 中相应的单纯扇；该扇细分了 C 及其各个面。

定义 3.2. 对于每个锥 $\sigma \in \Sigma$ ，我们将 Box(σ) 定义为由 $\gamma = \sum_{i\in\sigma} \gamma_i v_i$ 表示且满足 $0 \le \gamma_i < 1$ 的格点 γ 的集合。我们用 Box(Σ) 表示所有 Box(σ) 的并集。对于每个元素 $\gamma \in$Box(Σ)，我们将其与 $\mathbb{P}_\Sigma$ 中对应于包含 γ 的极小锥 $\sigma(\gamma)$ 的一个扭曲扇区相关联。我们将扭曲扇区 $\gamma = \sum \gamma_i v_i$ 的对偶定义为

$$\gamma^\vee = \sum_{\gamma_i \neq 0} (1-\gamma_i) v_i.$$

或者等价地，Box($\sigma(\gamma)$) 中满足以下条件的唯一元素

$$\gamma^\vee = -\gamma \mod \sum_{i\in\sigma} \mathbb{Z} v_i$$

注 3.3. $\gamma = 0$ 的对偶是其自身。显然，我们有 $\sigma(\gamma) = \sigma(\gamma^\vee)$ 且 $(\gamma^\vee)^\vee = \gamma$。

扭曲扇区本身是光滑环面DM叠，以下命题描述了其粗模空间的上同调空间及紧支撑上同调空间的 Stanley-Reisner 型表示，参见 [1]。

命题 3.4. 按照惯例，Star($\sigma(\gamma)$) 表示 Σ 中包含 $\sigma(\gamma)$ 的锥的集合。扭曲扇区 γ 的上同调空间 H_γ 自然同构于多项式环 $\mathbb{C}[D_i$ 的如下商： $i \in$ Star($\sigma(\gamma)$)$\backslash\sigma(\gamma)$]，其中理想由以下关系生成

$$\prod_{j\in J} D_j,\ J \notin \mathrm{Star}(\sigma(\gamma)), \quad \text{and} \sum_{i\in \mathrm{Star}(\sigma(\gamma))\backslash\sigma(\gamma)} \mu(v_i) D_i,\ \mu \in \mathrm{Ann}(v_i, i\in\sigma(\gamma)).$$

我们也可以将 H_γ 视为多项式环 $\mathbb{C}[D_1,\dots,D_n]$ 上的一个模，规定 $D_i = 0$ （对于 $i \notin$ Star($\sigma(\gamma)$) ），并唯一地求解 $D_i, i \in \sigma(\gamma)$，使其满足对所有 $\mu \in N^\vee$ 都成立的线性关系 $\sum_{i=1}^n \mu(v_i) D_i = 0$。

命题 3.5. 具有紧支撑的上同调空间 H_γ^c （视为 H_γ 上的模）由满足 $\sigma_I^\circ \subseteq C^\circ$ 的 F_I （对于 $I \in$ Star($\sigma(\gamma)$) ）生成，关系为

$$\begin{aligned} D_i F_I - F_{I\cup\{i\}} \text{ for } i\notin I, I\cup\{i\} \in \mathrm{Star}(\sigma(\gamma)) \\ \text{and } D_i F_I \text{ for } i\notin I, I\cup\{i\} \notin \mathrm{Star}(\sigma(\gamma)) \end{aligned}$$

类似地，它具有一个 $\mathbb{C}[D_1,\dots,D_n]$ 上的模结构。

定义 3.6. 光滑环面德利涅-芒福德堆栈$\mathbb{P}_\Sigma$ 的轨形上同调 H 定义为 $\bigoplus_\gamma H_\gamma$ 对所有扭曲扇区取直和。类似地，紧支撑轨形上同调 H^c 定义为 $\bigoplus_\gamma H_\gamma^c$。
我们用 1_γ 表示 H_γ的生成元。

H 与 H^c 之间存在一个自然的完美配对，称为欧拉示性数配对。它源自某些 Grothendieck$K$-群上的同名配对，随后通过陈特征映射到上同调上，见 [1]。我们不会使用原始定义，而采用以下欧拉示性数配对公式，该公式已在 [2]中证明。

命题 3.7. 环面德利涅-芒福德堆栈 $\mathbb{P}_\Sigma$ 上的欧拉示性数配对 $\chi\colon H\otimes H^c\to\mathbb{C}$ 由下式给出

$$\chi(a,b)=\chi(\oplus_\gamma a_\gamma,\oplus_\gamma b_\gamma)=\sum_\gamma \frac{1}{|\operatorname{Box}(\sigma(\gamma))|}\int_{\gamma^\vee}\operatorname{Td}(\gamma^\vee)a_\gamma^* b_{\gamma^\vee}$$

这里，$*\colon H\to H$ 是由 $(1_\gamma)^*=1_{\gamma^\vee}$ 和 $(D_i)^*=-D_i$ 给出的对偶映射，而 $\operatorname{Td}(\gamma)$ 是扭曲扇区 γ 的托德类，其定义如下

$$\operatorname{Td}(\gamma)=\frac{\prod_{i\in\operatorname{Star}\sigma(\gamma)\setminus\sigma(\gamma)}D_i}{\prod_{i\in\operatorname{Star}\sigma(\gamma)}(1-e^{-D_i})}.$$

线性函数 $\int\colon H_\gamma^c\to\mathbb{C}$ 在每个生成元 F_I 上取值 $^1\operatorname{Vol}_{\overline{\sigma_I}}$，其中 $\operatorname{Vol}_{\overline{\sigma_I}}$ 表示商扇 $\Sigma/\sigma(\gamma)$ 中锥 $\overline{\sigma_I}$ 的体积。它在 H_γ^c 中所有次数较低的元素上取值为零。

设 Σ 是基于 v_i 中某些元素对 C 作出的正则（=射影）细分。设 ψ_i 为实数，使得 Σ 在 $N_{\mathbb{R}}\oplus\mathbb{R}$ 中取遍原点与 $\{(v_i,\psi_i)\ 1\le i\le n\}$ 的凸包的下边界。我们假设ψ_i 是一般的，因此该凸包是单纯的。记 ψ 为 C 上的严格凸分片线性函数，其图像即为上述下边界。它在生成 Σ 中射线的所有 v_i 上取值 ψ_i，而在其他 v_i 上的取值低于 ψ_i。其关键性质是，对于任意有限集 $w_i\in C$ 和 $\alpha_i\in\mathbb{R}_{>0}$，都有

$$\psi(\sum_i\alpha_i w_i)\le\sum_i\alpha_i\psi(w_i)$$

当且仅当存在一个锥 Σ，包含所有的 w_i 时，等号成立。

回顾 [1] 中以下一个取值于 $H=\bigoplus_\gamma H_\gamma$ 的方程 bbGKZ(C,0) 的解。我们定义

$$\Gamma_c(x_1,\dots,x_n)=\bigoplus_\gamma\sum_{l\in L_{c,\gamma}}\prod_{i=1}^n\frac{x_i^{l_i+\frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}}}}{\Gamma(1+l_i+\frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}})}\tag{3.1}$$

其中，直和取遍扭曲扇区 $\gamma=\sum_{j\in\sigma(\gamma)}\gamma_j v_j$，而集合 $L_{c,\gamma}$ 是满足 $\sum_{i=1}^n l_i v_i=-c$ 且对所有 i 都有 $l_i-\gamma_i\in\mathbb{Z}$ 的解集。分子通过选取 $\log(x_i)$ 的一个对数分支来定义。

我们首先证明，对于每个 $c\in C\cap N$，当 x 满足（–log $|x_i|$）位于凸 Σ分段线性函数在 v_i 上的取值锥的适当平移中时，Γ 的级数在紧集上一致且绝对收敛

函数。 [1] 中的证明被略去，是因为它与 [4], 中的证明本质相同；但为完整起见，并便于关于 Γ_c渐近行为的论证，我们将在此给出证明。

命题 3.8。记 C_Σ 为次级扇中与 Σ对应的锥，即由 $(\psi_i) \in \mathbb{R}^n$ 产生 Σ的锥。对于每个 $\hat{c} \in C \cap N$，都存在 $\psi \in \mathbb{R}^n$，使得级数 (3.1) 在区域 $\mathbb{C}^n$的紧子集上一致且绝对收敛

$$\{(-\log|x_1|, \ldots, -\log|x_n|) \in \hat{\psi} + C_\Sigma,\ \arg(\mathbf{x}) \in (-\pi, \pi)^n\}. \tag{3.2}$$

证明。一个显而易见的观察是，我们可以忽略因子

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{D_i}{2\pi \mathrm{i}}} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{D_i \log x_i}{2\pi \mathrm{i}}}$$

因为它不依赖于 l，且在区域 (3.2) 的紧子集上有界。

只需考察固定 γ时的情形。注意，尽管求和是在仿射格 $L_{c,\ \gamma}$上进行的，但只有当 $(l_1, \ldots, l_n)$ 满足集合

$$I(l) = \{i, l_i \in \mathbb{Z}_{<0}\} \sqcup \sigma(\gamma)$$

是 Σ中的一个锥 σ，因为每个 $l_i \in \mathbb{Z}_{<0}$ 都会因 Γ 在非正整数处有极点而贡献一个因子 D_i。因此，只需对 $L_{c,\ \gamma}$ 的子集 $L_{c,\ \gamma,\ \sigma}$ 上的求和进行估计，并要求上述定义的 $I(l)$ 是包含 $\sigma(\gamma)$ 的某个固定最大维锥 σ （属于 Σ）的子集。对于任意这样的 $l \in L_{c,\ \gamma,\ \sigma}$，我们有

$$\sum_{i, l_i<0} (-l_i) v_i = \sum_{i, l_i \geq 0} l_i v_i + c.$$

根据关于 $\mathbf{x}$ 的假设，我们将与 $(-\psi_i - \log|x_i|)$ 相对应的 Σ-分段线性凸函数记作 ψ。由于上述等式左边的 v_i 位于 $\sigma \in \Sigma$ 中，因此我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i, l_i<0} (-l_i)(-\hat{\psi}_i - \log|x_i|) = \psi\Big(\sum_{i, l_i<0} (-l_i) v_i\Big) &\leq \sum_{i, l_i \geq 0} l_i \psi(v_i) + \psi(c) \\ &= \sum_{i, l_i \geq 0} l_i(-\hat{\psi}_i - \log|x_i|) + \psi(c)\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \log|x_i| \leq -\sum_{i=1}^{n} l_i \hat{\psi}_i + \psi(c). \tag{3.3}$$

由此得到一个上界

$$\Big|\prod_{i=1}^{n} x_i^{l_i}\Big| \leq \mathrm{e}^{\psi(c)} \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n} l_i \hat{\psi}_i}. \tag{3.4}$$

关键的是，由于所有 v_i 的次数均为 1，我们可知 $\sum_i l_i = -\deg\, c_\circ$ 因此，我们可以应用 [4, 引理 A.4] 中的关键估计，该估计指出，对于任意 $\delta > 0$ 以及任意一组实数 a_i, b_i，其中 $i = 1, \dots, n$ 满足

$$|\sum_i a_i| \le \delta,\ \sum_i |b_i| \le \delta$$

存在一个常数 A，使得

$$\Big|\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(a_i + \mathrm{i}b_i)}\Big| \le A(4n)^{\sum_{i=1}^n |a_i|}.$$

根据偏导数的柯西公式，可得函数 D_i 中所有有界次数单项式的系数满足如下形式的上界： $A_1(A_2)^{\sum_{i=1}^n |l_i|}$

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(1 + l_i + \frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}})}.$$

结合 (3.4)，我们得出，对于 H_γ 上的任意欧几里得范数，该级数每一项的绝对值都有如下界：

$$\Big|\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{l_i}}{\Gamma(1 + l_i + \frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}})}\Big| \le A_1(A_2)^{\sum_{i=1}^n |l_i|}\Big|\prod_{i=1}^{n} x_i^{l_i}\Big| \le A_3(A_2)^{\sum_{i=1}^n |l_i|}\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^n l_i\hat{\psi}_i}. \tag{3.5}$$

我们注意到，集合 $L_{c,\gamma,\sigma}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个（低维）多面锥 C_σ 的平移中的格点集合，该多面锥由等式 $\sum_{i=1}^n l_i v_i = 0$ 和对所有 $i \notin \sigma$ 成立的不等式 $l_i \ge 0$ 给出。我们可以假设 $\hat{}\ \psi$ 给出一个严格 Σ-凸函数。于是，对于 C_σ 的任意射线生成元 l，有

$$\sum_i l_i\hat{\psi}_i > 0.$$

$\hat{}\,\hat{}$ 的确，根据凸性，对于 ψ，任意 $l \in C_\sigma$ 都满足不等式 $\sum_i l_i\psi_i \ge 0$ $\hat{}$（证明与 (3.3) 的证明相同）；即使对 ψ 作微小变形，该不等式仍然成立，因此只有当 $l = 0$ 时才能取等号。由此可知，存在一个常数 r，使得

$$\sum_{i=1}^{n} |l_i| \le r(\sum_i l_i\hat{\psi}_i)$$

关于 C_σ。

$\hat{}$ 因此，我们可以将 ψ 替换为其自身的一个足够大的倍数，并利用 (3.5) 得到在区域 (3.2) 的任意紧子集上

$$\Big|\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{l_i}}{\Gamma(1 + l_i + \frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}})}\Big| \le A_4\mathrm{e}^{-A_5\sum_{i=1}^n l_i\hat{\psi}_i}$$

对于某个 $A_5 > 0$。由于 $L_{c,\gamma,\sigma}$ with $\sum_{i=1}^n l_i \hat{}\psi_i \in [m, m+1)$ 中的项数有关于 m 的多项式上界，因此我们得到所需的收敛。□

存在一个类似定义的 Γ-级数解 Γ°，它是 bbGKZ(C°, 0) 的解，取值于 $H^c = \bigoplus_\gamma H^c_{\gamma\circ}$。我们定义

$$\Gamma_c^\circ(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_\gamma \sum_{l \in L_{c,\gamma}} \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{l_i + \frac{D_i}{2\pi \mathrm{i}}}}{\Gamma(1 + l_i + \frac{D_i}{2\pi \mathrm{i}})} \left(\prod_{i \in \sigma} D_i^{-1} \right) F_\sigma$$

其中 σ 是满足 $l_i \in \mathbb{Z}_{<0}$ 的 i 的集合。

命题 3.9。对于适当选择的 ψ，级数 Γ° 在区域 ˆ (3.2) 的紧子集上一致收敛。

证明。证明的思路与命题 3.8 相同，细节留给读者。□

我们的下一个目标是理解以下对象的渐近行为

$$\Gamma_c(t^{-\psi(v_1)} x_1, \ldots, t^{-\psi(v_n)} x_n)$$

对于实数 $t \to +\infty$。我们可以假设 x_i 是一般的非零复数，因此当 t 足够大时，我们就落在 Γ 的收敛范围内。

对于每个 c，我们考虑包含 c 的 Σ 的最小锥 $\sigma(c)$。我们有 $c = \sum_{j \in \sigma(c)} c_j v_j$。它定义了一个扭曲扇区 $\gamma(c) = \sum_{j \in \sigma(c)} \{c_j\} v_j$。我们还考虑对偶扭曲扇区 $\gamma^\vee(c) = \sum_{j \in \sigma(c),\ c_j \notin \mathbb{Z}} (1 - \{c_j\}) v_j$。存在一个特殊元素

$$-c = \sum_{i \in I} (-c_i) v_i \tag{3.6}$$

在 $L_{c,\ \gamma^\vee(c)}$。

引理 3.10. 当 $t \to +\infty$ 时，对于 $c \in C \cap N$ 和 $\gamma \neq \gamma^\vee(c)$，$\Gamma_c(t^{-\psi(v_1)} x_1, \ldots, t^{-\psi(v_n)} x_n)$ 的 γ 加项为 $o(t^{\psi(c)})$。对于 $\gamma = \gamma^\vee(c)$，我们有

$$\Gamma_c(t^{-\psi(v_1)} x_1, \ldots) = t^{\psi(c)} \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{\frac{D_i}{2\pi \mathrm{i}} (\log x_i - \psi(v_i) \log t)} \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{-c_i}}{\Gamma(1 - c_i + \frac{D_i}{2\pi \mathrm{i}})} (1 + o(1)).$$

证明。令 $\gamma = \sum_{j \in \sigma(\gamma)} \gamma_j v_j$。令 (l_i) 为 $L_{c,\gamma}$ 的一个元素。当且仅当满足以下条件时，$\Gamma_c(t^{-\psi(v_1)} x_1, \ldots\ldots)$ 中的贡献才非零：对于某个 i 的集合，$l_i \in \mathbb{Z}_{<0}$ 与 $\sigma(\gamma)$ 一起构成 Σ 中的一个锥。因此，满足 l_i 为负的 i 位于 Σ 的一个锥中。因此，

$$\sum_{l_i < 0} (-l_i) \psi(v_i) = \psi(\sum_{l_i < 0} (-l_i) v_i) = \psi(c + \sum_{l_i > 0} l_i v_i) \leq \sum_{l_i > 0} l_i \psi(v_i) + \psi(c), \tag{3.7}$$

这意味着

$$-\sum_{i=1}^{n} l_i \psi(v_i) \le \psi(c). \tag{3.8}$$

现在注意到，(3.8) 中的等式成立，当且仅当 $\sum_{l_i<0}(-l_i)v_i$ 的极小锥是 Σ 中的一个锥，并且该锥包含 c 以及所有满足 $l_i > 0$ 的 v_i。于是，这个锥将包含 c 以及所有满足 $l_i \neq 0$ 的 v_i。这意味着 $l_i = -c_i$，从而推出 $\gamma = \gamma^\vee(c)$。这就得到了所述的渐近贡献。

仅仅界定每个单独项在 $t \to \infty$ 时的渐近行为是不够的，还需要确保其余各项合在一起的贡献不会大于 $o(t^{\psi(c)})$。这既可由命题 3.8 的估计推出，也可直接由以下事实得出：我们在 x 处有绝对收敛，因此所有其他项衰减得更快。事实上，若我们有一个绝对收敛级数 $\sum_{i\ge 0} a_i$，再考虑满足 $\alpha_0 - \alpha_i$ 大于某个正数 ε 的 $\sum_{i\ge 0} a_i t^{\alpha_i}$，那么当 $t \to \infty$ 时，我们有

$$\sum_{i\ge 0} a_i t^{\alpha_i} = a_0 t^{\alpha_0}(1 + o(1))$$

因为

$$\Big|\sum_{i>0} a_i t^{\alpha_i - \alpha_0}\Big| \le t^{-\varepsilon} \sum_{i>0} |a_i|.$$

我们可以将其应用于当前情形，因为 (l_i) 属于一个可数集，并且存在 $\varepsilon > 0$，使得对于所有其他项，不等式 (3.8) 至少严格成立 ε。对数项 $\prod_i (t^{-\psi(v_1)}x_i)^{\frac{D_i}{2\pi \mathrm{i}}}$ 可以通过略微改变 ε 来吸收。□

我们可以对 Γ° 陈述类似的结果。对于 $d \in C^\circ$，我们考虑 $L_{d,\gamma^\vee(d)}$ 中的元素

$$-d = \sum_{i\in\sigma(d)} (-d_i)v_i.$$

引理 3.11. 当 $t \to +\infty$ 时，对于 $c \in C \cap N$ 和 $\gamma \neq \gamma^\vee(d)$，$\Gamma_d^\circ(t^{-\psi(v_1)}x_1, \dots, t^{-\psi(v_n)}x_n)$ 的 γ 项为 $o(t^{\psi(d)})$。对于 $\gamma = \gamma^\vee(d)$，我们有

$$\Gamma_d(t^{-\psi(v_1)}x_1, \dots) = t^{\psi(d)} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{D_i}{2\pi \mathrm{i}}(\log x_i - \psi(v_i)\log t)} \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{-d_i}}{\Gamma(1 - d_i + \frac{D_i}{2\pi \mathrm{i}})} \left(\prod_{i\in\sigma(d)} D_i^{-1}\right) F_{\sigma(d)}(1 + o(1)).$$

证明。证明与引理 3.10 的证明类似，留给读者完成。□

现在，我们利用关于 Γ 和 Γ°的渐近行为的信息来计算常数 $\langle \Gamma, \Gamma^\circ \rangle = \sum_{c,\ d,\ I} \xi_{c,\ d,\ I} \mathrm{Vol}_I \left(\prod_{i \in I} x_i \right) \Gamma_c \otimes \Gamma^\circ_d$，其中$\xi$ 在定理 2.4 中定义。

与第 2 节中一样，设 I 是 $\{1, \ldots, n\}$ 的一个子集，其大小为 $\mathrm{rk} N$；它可能是也可能不是 Σ 中的一个锥。设 c 和 d 满足 $c + d = \sum_{i \in I} v_i$ 和 $c + \varepsilon v$，且当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，$d - \varepsilon v \in \sum_{i \in I} \mathbb{R}_{\geq 0} v_i$。下面的观察是关键。

命题 3.12. 在关于 c、d、I 的上述假设下，我们有

$$\lim_{t \to +\infty} \prod_{i=1}^{n} (t^{-\psi(v_i)} x_i) \Gamma_c(t^{-\psi(v_1)} x_1, \ldots) \Gamma^\circ_d(t^{-\psi(v_1)} x_1, \ldots) = 0$$

除非 $\gamma(d) = \gamma^\vee(c)$，且 I 包含 $\sigma(\gamma(c))$。

证明. 由于 c 和 d 包含于 $\sum_{i \in I} \mathbb{R}_{\geq 0} v_i$ 和 $c + d = v_I$ 中，我们有

$$c = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i,\ d = \sum_{i \in I} (1 - \alpha_i) v_i$$

其中 $\alpha_i \in [0, 1]$。由 ψ 的凸性可知

$$\psi(c) \leq \sum_i \alpha_i \psi(v_i),\ \psi(d) \leq \sum_i (1 - \alpha_i) \psi(v_i) \tag{3.9}$$

这导致 $\psi(c) + \psi(d) - \sum_i \psi(v_i) \leq 0$，因此我们可以利用命题 3.10 和命题 3.11 得出，t的首项幂非正。事实上，除非 (3.9) 中的不等式取等号，否则该首项幂为负；这意味着，对于 I 中满足 $\alpha_i > 0$ 的子集，它是 Σ中的一个锥，$\alpha_i < 1$的子集也类似。这就证明了所述结论。□

命题 3.13. 若 $\gamma(c) = \gamma^\vee$，$\gamma(d) = \gamma = \sum_{i \in I} \gamma_i v_i$，则我们将 I 中满足以下条件的子集定义为 I_c：c 的系数 c_i 等于 1；对于 I_d也作类似定义。当 $t \to \infty$ 时，其渐近行为为

$$\prod_{i=1}^{n} (t^{-\psi(v_i)} x_i) \Gamma_c(t^{-\psi(v_1)} x_1, \ldots) \Gamma^\circ_d(t^{-\psi(v_1)} x_1, \ldots) = o(1) + \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^{\mathrm{rk}\, N - |\sigma(\gamma)|}}$$

$$\cdot \frac{D_{I_c}}{\prod_{i \in \sigma(\gamma)} \Gamma(\gamma_i + \frac{D_i}{2\pi \mathrm{i}}) \prod_{i \in \mathrm{Star}(\sigma(\gamma)) \setminus \sigma(\gamma)} \Gamma(1 + \frac{D_i}{2\pi \mathrm{i}})} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{D_i}{2\pi \mathrm{i}} (\log x_i - \psi(v_i) \log t)}$$

$$\bigotimes \frac{F_{I_d}}{\prod_{i \in \sigma(\gamma)} \Gamma(1 - \gamma_i + \frac{D_i}{2\pi \mathrm{i}}) \prod_{i \in \mathrm{Star}(\sigma(\gamma)) \setminus \sigma(\gamma)} \Gamma(1 + \frac{D_i}{2\pi \mathrm{i}})} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{D_i}{2\pi \mathrm{i}} (\log x_i - \psi(v_i) \log t)}$$

在 $H_\gamma \otimes H^c_{\gamma^\vee}$ 中。

证明。命题 3.12 的证明表明，除 $o(1)$ 之外，唯一可能的贡献来自那些对 Φ_c 和 Φ_d的渐近行为产生优于 $o(t^{\psi(c)})$ 和 $o(t^{\psi(d)})$ 贡献的项。因此，根据命题

3.10 和 3.11，唯一的贡献来自 $L_{c,\gamma^\vee}$ 和 $L_{d,\gamma}$中的元素，它们由下式给出

$$-c=\sum_{i\in I}(-c_i)v_i,\ -d=\sum_{i\in I}(c_i-1)v_i.$$

对于 $i\in\sigma(\gamma)$，我们注意到 $\gamma_i=1-c_i$ 如果 $c_i\in(0,1)$。对于 $i\in I_c$，我们使用

$$\frac{1}{\Gamma(1-c_i+\frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}})}=\frac{1}{\Gamma(\frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}})}=\frac{\frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}}}{\Gamma(1+\frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}})}$$

对于 $i\in I_d$ 也同理，结论由此得出。 □

现在我们回顾一下，$\langle\Gamma,\Gamma^\circ\rangle$ 是常数。

推论 3.14。常数配对 $\langle\Gamma,\Gamma^\circ\rangle$ 属于 $\bigoplus_\gamma H_\gamma\otimes H^c_{\gamma^\vee}$，其表达式为

$$\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^{\mathrm{rk}\,N}}\bigoplus_\gamma\sum_{\substack{c\in C,d\in C^\circ\\|I|=\mathrm{rk}\,N}}\xi_{c,d,I}\,\mathrm{Vol}_I(2\pi\mathrm{i})^{|\sigma(\gamma)|}\frac{D_{I_c}}{\widehat{\Gamma}_\gamma}\otimes\frac{F_{I_d}}{\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}}$$

其中 $\widehat{\Gamma}_\gamma=\prod_{i\in\sigma(\gamma)}\Gamma(\gamma_i+\frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}})\prod_{i\in\mathrm{Star}(\sigma(\gamma))\setminus\sigma(\gamma)}\Gamma(1+\frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}})$，$\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}$ 也同理。对于每个 k，还有

$$\begin{aligned}0=&\bigoplus_\gamma\sum_{\substack{c\in C,d\in C^\circ\\|I|=\mathrm{rk}\,N}}\xi_{c,d,I}\,\mathrm{Vol}_I(2\pi\mathrm{i})^{|\sigma(\gamma)|}\Big(D_k\frac{D_{I_c}}{\widehat{\Gamma}_\gamma}\Big)\otimes\frac{F_{I_d}}{\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}}\\&+\bigoplus_\gamma\sum_{\substack{c\in C,d\in C^\circ\\|I|=\mathrm{rk}\,N}}\xi_{c,d,I}\,\mathrm{Vol}_I(2\pi\mathrm{i})^{|\sigma(\gamma)|}\frac{D_{I_c}}{\widehat{\Gamma}_\gamma}\otimes\Big(D_k\frac{F_{I_d}}{\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}}\Big).\end{aligned}$$

证明。命题 3.13 给出了 $\langle\Gamma,\Gamma^\circ\rangle$ 关于 $\log x_i$ 的多项式渐近行为。然而，根据定理 2.4，我们也知道它是一个常数。命题的第一个结论是读出该多项式的常数项，第二个结论是读出 $\log x_k$ 的系数。□

4. 欧拉示性数配对

现在我们准备证明，伽马级数 $\langle\Gamma,\Gamma^\circ\rangle$ 的配对是 $\mathbb{P}_\Sigma$ 上欧拉示性数配对的逆。在陈述本节的主要定理之前，我们先给出一个有用的观察，它是光滑流形的 Γ 类与托德类之间关系的一个轨形类似物。回忆一下，$*$ 是命题 3.7 中定义在 H 上的对偶映射。

引理 4.1. $(\widehat{\Gamma}_\gamma)^*\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}=(2\pi\mathrm{i})^{|\sigma(\gamma)|}(-1)^{\deg\gamma^\vee}\mathrm{Td}(\gamma^\vee)$.

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$证明。我们可以将 $(\Gamma_\gamma)^*\Gamma_{\gamma^\vee}$ 展开为

$$\prod_{i\in\sigma(\gamma)}\Gamma(\gamma_i+\frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}})^*\Gamma(1-\gamma_i+\frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}})\quad\cdot\prod_{i\in\mathrm{Star}(\sigma(\gamma))\setminus\sigma(\gamma)}\Gamma(1+\frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}})^*\Gamma(1+\frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}})$$
$$=\prod_{i\in\sigma(\gamma)}\Gamma(\gamma_i-\frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}})\Gamma(1-\gamma_i+\frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}})\quad\cdot\prod_{i\in\mathrm{Star}(\sigma(\gamma))\setminus\sigma(\gamma)}\Gamma(1-\frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}})\Gamma(1+\frac{D_i}{2\pi\mathrm{i}}).$$

我们使用恒等式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=-\frac{2\pi}{即1-\frac{\pi\mathrm{i}z}{2\pi\mathrm{i}z}\mathrm{e}}$，将第一个乘积改写为

$$(-2\pi\mathrm{i})^{|\sigma(\gamma)|}\mathrm{e}^{\sum_{i\in\sigma(\gamma)}\pi\mathrm{i}\gamma_i}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{i\in\sigma(\gamma)}D_i}\prod_{i\in\sigma(\gamma)}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_i-D_i}}.$$

$_z$对于第二个乘积，我们使用 $\Gamma(1-\frac{z}{2\pi\mathrm{i}})\underline{\Gamma}(1+\frac{z}{2\pi\mathrm{i}})\underline{=}\ {}_z\frac{-\frac{z}{2}}{\mathrm{el}-\ \mathrm{e}^{-z}}$，将其改写为

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{i\in\mathrm{Star}(\sigma(\gamma))\setminus\sigma(\gamma)}D_i}\prod_{i\in\mathrm{Star}(\sigma(\gamma))\setminus\sigma(\gamma)}\frac{D_i}{1-\mathrm{e}^{-D_i}}.$$

将这两个公式合并，我们得到

$$(\widehat{\Gamma}_\gamma)^*\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}=(2\pi\mathrm{i})^{|\sigma(\gamma)|}(-1)^{\deg\gamma^\vee}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{i\in\mathrm{Star}(\sigma(\gamma))}D_i}\frac{\prod_{i\in\mathrm{Star}(\sigma(\gamma))\setminus\sigma(\gamma)}D_i}{\prod_{i\in\mathrm{Star}(\sigma(\gamma))}1-\mathrm{e}^{-D_i}}$$
$$=(2\pi\mathrm{i})^{|\sigma(\gamma)|}(-1)^{\deg\gamma^\vee}\,\mathrm{Td}(\gamma^\vee)$$

其中我们使用了 $\sum_{i\in\mathrm{Star}(\sigma(\gamma))}D_i=\sum_{i=1}^n D_i=0$。□

现在我们可以陈述并证明本节的主要定理。回想一下，我们定义了良态 GKZ 系统的解上的配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。将其应用于 Γ 和 Γ° 时，我们得到 $H\otimes H^c$ 的一个常值元素。

定理 4.2. 常数配对 $\langle\Gamma,\Gamma^\circ\rangle$ 等于欧拉示性数配对 $\chi(-,-)$ 的逆，至多相差一个常数因子：$H\otimes H^c\to\mathbb{C}$。

证明. 显然，我们可以分别考察每个扭曲扇区。对于固定的 γ，该陈述等价于断言

$$\sum_{\substack{c\in C,d\in C^\circ\\|I|=\mathrm{rk}\,N}}\xi_{c,d,I}\,\mathrm{Vol}_I(2\pi\mathrm{i})^{|\sigma(\gamma)|}\chi\left(P,\frac{F_{I_d}}{\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}}\right)\frac{D_{I_c}}{\widehat{\Gamma}_\gamma}=P$$

$\widehat{\ }$ 对所有类 $P\in H_\gamma$ 都成立。由于类 Γ_γ 在 H_γ 中可逆，除以它会在上同调上诱导一个自同构，因此只需证明

$$\sum_{\substack{c\in C,d\in C^\circ\\|I|=\mathrm{rk}\,N}}\xi_{c,d,I}\,\mathrm{Vol}_I(2\pi\mathrm{i})^{|\sigma(\gamma)|}\chi\left(\frac{P}{\widehat{\Gamma}_\gamma},\frac{F_{I_d}}{\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}}\right)\frac{D_{I_c}}{\widehat{\Gamma}_\gamma}=\frac{P}{\widehat{\Gamma}_\gamma}\tag{4.1}$$

对所有 P 均成立。我们通过对 P 的次数进行归纳法来证明这一点。

基例 $\deg\ P=0$ 对应于 $P=1_\gamma$。由于

$$\chi\left(\frac{1_\gamma}{\widehat{\Gamma}_\gamma},\frac{F_{I_d}}{\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}}\right)=0$$

除非 $|I_d|=\mathrm{rk}N-|\sigma(\gamma)|$，否则该方程变为

$$\sum_{|I_d|=\mathrm{rk}\,N-|\sigma(\gamma)|}\xi_{\gamma^\vee,\gamma+v_{I_d},I_d\sqcup\sigma(\gamma)}\,\mathrm{Vol}_{I_d\sqcup\sigma(\gamma)}(2\pi\mathrm{i})^{|\sigma(\gamma)|}\chi\left(\frac{1_\gamma}{\widehat{\Gamma}_\gamma},\frac{F_{I_d}}{\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}}\right)\frac{1_\gamma}{\widehat{\Gamma}_\gamma}=\frac{1_\gamma}{\widehat{\Gamma}_\gamma}. \tag{4.2}$$

由 χ 的定义和引理 4.1 可得

$$\begin{aligned}\chi\left(\frac{1_\gamma}{\widehat{\Gamma}_\gamma},\frac{F_{I_d}}{\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}}\right)&=\frac{1}{|\,\mathrm{Box}(\sigma(\gamma))|}\int_{\gamma^\vee}\mathrm{Td}(\gamma^\vee)\left(\frac{1}{\widehat{\Gamma}_\gamma}\right)^*\frac{F_{I_d}}{\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}}\\&=\frac{1}{|\,\mathrm{Box}(\sigma(\gamma))|}\int_{\gamma^\vee}\frac{F_{I_d}}{(\widehat{\Gamma}_\gamma)^*\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}}\,\mathrm{Td}(\gamma^\vee)\\&=\frac{1}{|\,\mathrm{Box}(\sigma(\gamma))|}\int_{\gamma^\vee}\frac{F_{I_d}}{(2\pi\mathrm{i})^{|\sigma(\gamma)|}(-1)^{\deg\gamma^\vee}}\\&=\frac{(-1)^{\deg\gamma^\vee}}{(2\pi\mathrm{i})^{|\sigma(\gamma)|}\,\mathrm{Vol}_{\overline{I_d}}|\,\mathrm{Box}(\sigma(\gamma))|}\end{aligned}$$

这里，$\mathrm{Vol}^{\overline{I_d}}$ 表示商扇 $\Sigma/\sigma(\gamma)$ 中锥 $\overline{\sigma_{I_d}}$ 的体积。注意，我们有

$$\mathrm{Vol}_{I_d\sqcup\sigma(\gamma)}=\mathrm{Vol}_{\overline{I_d}}|\,\mathrm{Box}(\sigma(\gamma))|$$

因此 (4.2) 变为

$$\sum_{|I_d|=\mathrm{rk}\,N-|\sigma(\gamma)|}(-1)^{\deg\gamma^\vee}\xi_{\gamma^\vee,\gamma+v_{I_d},I_d\sqcup\sigma(\gamma)}=1.$$

若我们用 εv 扰动 $\gamma^\vee$，则它将落在 Σ 中恰好一个极大锥的内部，而对应的系数 ξ 是上述求和中唯一的非零项（回想定理 2.4 中 $\xi_{c,\ d,\ I}$ 的定义），其值等于

$$(-1)^{\deg\gamma^\vee}(-1)^{\deg\gamma^\vee}=1$$

因此，基例得证。

现在我们假设等式 (4.1) 对所有次数小于m的类都成立。由于上同调 H_γ 由类 D_k作为代数生成，因此只需证明恒等式

$$\sum_{\substack{c\in C,d\in C^\circ\\|I|=\mathrm{rk}\,N}}\xi_{c,d,I}\,\mathrm{Vol}_I(2\pi\mathrm{i})^{|\sigma(\gamma)|}\chi\left(\frac{D_kP}{\widehat{\Gamma}_\gamma},\frac{F_{I_d}}{\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}}\right)D_{I_c}=D_kP$$

对于每个 D_kP，其中 $P \in H_\gamma$的次数为 $m-1$。由于 D_k关于 χ 配对是反对称的，上述陈述可以改写为

$$D_kP = -\sum_{\substack{c\in C, d\in C^\circ \\ |I|=\operatorname{rk} N}} \xi_{c,d,I} \operatorname{Vol}_I (2\pi\mathrm{i})^{|\sigma(\gamma)|} \chi\left(\frac{P}{\widehat{\Gamma}_\gamma}, \frac{D_kF_{I_d}}{\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}}\right) D_{I_c}.$$

另一方面，我们可以将归纳假设乘以 P D_k，得到

$$\sum_{\substack{c\in C, d\in C^\circ \\ |I|=\operatorname{rk} N}} \xi_{c,d,I} \operatorname{Vol}_I (2\pi\mathrm{i})^{|\sigma(\gamma)|} \chi\left(\frac{P}{\widehat{\Gamma}_\gamma}, \frac{F_{I_d}}{\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}}\right) D_k\, D_{I_c} = D_kP.$$

比较这两个恒等式，只需证明

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{\substack{c\in C, d\in C^\circ \\ |I|=\operatorname{rk} N}} \xi_{c,d,I} \operatorname{Vol}_I \left(D_k \cdot \frac{D_{I_c}}{\widehat{\Gamma}_\gamma}\right) \otimes \frac{F_{I_d}}{\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}} \\ &+ \sum_{\substack{c\in C, d\in C^\circ \\ |I|=\operatorname{rk} N}} \xi_{c,d,I} \operatorname{Vol}_I \frac{D_{I_c}}{\widehat{\Gamma}_\gamma} \otimes \left(D_k \cdot \frac{F_{I_d}}{\widehat{\Gamma}_{\gamma^\vee}}\right) \end{aligned} \tag{4.3}$$

这由推论 3.14 得出。 □

注 4.3. 定理 4.2 特别蕴含，定理 2.4 中的配对是非退化的，且与 v 无关。我们尚不知道这一事实是否存在直接证明。

我们将通过解释定义定理 2.4 中系数 $\xi_{c,\ d,\ I}$ 的动机来结束本节。这个定义受到 Fulton-Sturmfels [6] 提出的以下扇位移对角线分解公式的启发。

命题 4.4. 设 X 是对应于格 N 中完备扇 Σ 的环面簇，将对角嵌入 $X \hookrightarrow X \times X$ 记为 δ。设 $\sigma \in \Sigma$ 是任意一个锥，且 v 是 N 中的一般点，则对角类可分解为

$$[\delta(V(\sigma))] = \sum_{\sigma_1,\sigma_2} m^\sigma_{\sigma_1,\sigma_2} \cdot [V(\tau_1) \times V(\tau_2)]$$

其中 $m^\sigma_{\sigma_1,\ \sigma_2} = [N\colon N_{\sigma_1} + N_{\sigma_2}]$，求和遍及所有满足 $\operatorname{codim} \sigma_1 + \operatorname{codim} \sigma_2 = \operatorname{codim} \sigma$ 的锥 σ_1、$\sigma_2 \in \Sigma$，以及满足 $(v+\sigma_1) \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ 的 $\sigma \subseteq \sigma_1$、$\sigma_2$。

注意，系数 $m^\sigma_{\sigma_1,\ \sigma_2}$ 恰好是由 σ_1 和 σ_2 张成的锥的体积 $\operatorname{Vol}_{\sigma_1\cup\sigma_2}$。这个公式不能直接应用于我们的情形，因为他们研究的托里克簇是完备的，而我们的不是。尽管如此，$\xi_{c,\ d,\ I}$ 的定义与 Fulton-Sturmfels 公式中的条件之间仍存在以下关系。

命题 4.5。设 c、$d \in \sigma_I$ 和 v 是 C° 中的一般点。那么，对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$，$c + \varepsilon v$ 和 $d - \varepsilon v$ 均属于 σ_I°，当且仅当

$$(v + \sigma(c)) \cap \sigma(d) \neq \emptyset$$

其中，$\sigma(c)$ 表示包含 c 的 Σ 的极小锥。

证明。假设 $c+\varepsilon v$和 $d-\varepsilon v$都属于 σ_I°。那么我们可以写成 $c+\varepsilon v = \sum_{i\in I} s_i v_i$，其中所有 $s_i \in (0, 1)$。回顾 $I = \sigma(c)\cup\sigma(d) = I_c \sqcup I_d \sqcup \sigma(\gamma(c))$，该等式可以改写为 $v = v_1 - v_2$ 的形式，其中 $v_1 \in \sigma(c)$ 且$v_2 \in \sigma(d)$，这与第二个陈述等价。反方向可以类似地证明。□

注 4.6。我们认为，我们的方法应当能够给出 Fulton-Sturmfels 公式的新证明，这可以通过将我们的结果限制到紧致的扭曲扇区来实现。本文不再进一步详述。

5. Extensions and open questions

良态 GKZ 系统还有一个更一般的版本，其中包含参数 $\beta \in N_{\mathbb{C}}$；我们迄今考虑的情形是 $\beta = 0$。具体而言，定义 1.1 中的环面齐次方程为

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \mu, v_i \rangle x_i \partial_i \Phi_c + \langle \mu, c - \beta \rangle \Phi_c = 0$$

对于 Ψ_d，情况也类似。本文中的许多结果都适用于参数为 $\pm\beta$ 的一对良态 GKZ 系统。例如，我们很容易看到，第 2 节中的论证对任意参数 β 都成立，从而得到 bbGKZ(C, β) 与 bbGKZ($C^\circ, -\beta$) 的解空间之间的配对。

我们希望考察一般的 β 在正则子划分 Σ 所给出的极限情形。尽管 [8] 中讨论了 H 和 H^c 的某些版本，但为方便起见，我们只需按照原始 GKZ 论文中解的思路，写出由 Γ-级数给出的 Vol(Δ) 个线性无关解 [7]。

设 Σ 为 C的正则细分。对于每个最大维锥σ，我们在 $\mathbb{P}_\Sigma$的大 K¨ahler 极限下考虑 Vol(σ) 个线性无关的解，它们与 $N/\sum_{i\in\sigma}\mathbb{Z}v_i$的元素 γ 一一对应。具体而言，我们定义集合 $L_{c,\ \gamma,\ \sigma;\beta} \subset \mathbb{C}^n$ 如下

$$\sum_{i=1}^{n} l_i v_i = \beta - c$$

并满足性质 $l_i \in \mathbb{Z}$ 对所有 $i \notin \bar{\sigma}$和 $c+\sum_{i\notin\sigma} l_i v_i = -\gamma$ 模 $\sum_{i\in\sigma}\mathbb{Z}v_i$成立。于是，对每个 γ，我们定义 bbGKZ(C, β) 的一个解 $\Phi^{\gamma,\sigma}$ 如下：

$$\Phi_c^{\gamma,\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{l\in L_{c,\gamma,\sigma;\beta}} \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{l_i}}{\Gamma(1 + l_i)}.$$

同理，我们通过以下方式定义 bbGKZ($C^\circ, -\beta$) 的 Γ-级数解 $\Psi^{\gamma,\sigma}$：

$$\Psi_d^{\gamma,\sigma}(x_1,\dots,x_n) = \sum_{l\in L_{d,\gamma,\sigma;-\beta}} \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{l_i}}{\Gamma(1+l_i)}.$$

注意，在一般的 β 情形下，bbGKZ($C^\circ, -\beta$) 的每个解都可以唯一延拓为 bbGKZ($C, -\beta$) 的解。不难证明，对于适当选择的 ψ，这些 Φ_c 和 Ψ_d 在区域 (3.2) ˆ 内的紧集上一致收敛。此外，随着 σ 和 γ 的变化，我们得到解空间的基；由于它们属于绕 $x_i = 0$ 的小回路对应的单值算子的不同特征子空间，因而线性无关。

单值性方面的考虑表明，对于第 2 节中的配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，除非 $\sigma = \sigma'$ 和 $\gamma = -\gamma'$ 模 $\sum_{i\in\sigma}\mathbb{Z}v_i$，否则有 $\langle\Phi^{\gamma,\sigma}, \Psi^{\gamma',\sigma'}\rangle = 0$。在后一种情形下，当 $i \notin I$ 时，$l_i + l_i' = 0$ 会产生常数项；当 $i \in I$ 时，$l_i + l_i' = -1$ 会产生常数项。如果 l_i,l_i' 中任意一个是负整数，那么相应项就会因 Γ 的极点而消失，因此我们可以假设它们对于 $i \notin \sigma$ 都是非负的，这便意味着

$$I = \sigma;\ l_i + l_i' = -1,\ \text{for } i \in \sigma;\ l_i = l_i' = 0 \text{ for } i \notin \sigma.$$

这意味着 $c = -\gamma$ 模 $\sum_{i\in\sigma}\mathbb{Z}v_i$ 和 $d = \gamma$ 模 $\sum_{i\in\sigma}\mathbb{Z}v_i$。

我们声称，对于任意 γ，存在唯一一对 (c, d) 属于 σ，满足此约束以及 $\xi_{c,\ d,\ \sigma} \neq 0$。配对的系数 ξ 的定义意味着我们还必须有 $c + d = \sum_{i\in\sigma} v_i$，其中 $c + \varepsilon v$ 和$d - \varepsilon v$ 对于所有足够小的 $\varepsilon > 0$都位于相应的锥 $\sum_{i\in\sigma}\mathbb{R}_{\geq 0}v_i$ 中。我们可以将 β、v 和 γ 唯一地写成

$$\beta = \sum_{i\in\sigma}\beta_i v_i,\ v = \sum_{i\in\sigma} s_i v_i,\ \gamma = \sum_i \gamma_i v_i$$

其中 $\gamma_i \in [0, 1)$。由此很容易看出，$\xi_{c,\ d,\ \sigma}$ 非零当且仅当

$$c = \sum_{\{i:\gamma_i\neq 0\}} (1-\gamma_i)v_i + \sum_{\{i:\gamma_i=0, s_i<0\}} v_i,$$
$$d = \sum_{\{i:\gamma_i\neq 0\}} \gamma_i v_i + \sum_{\{i:\gamma_i=0, s_i>0\}} v_i.$$

因此，对于 $\gamma_i \neq 0$，我们有 $l_i = \beta_i - 1 + \gamma_i$, $l_i' = -\beta_i - \gamma_i$. 对于 $\gamma_i = 0$ 和 $s_i > 0$，我们有 $l_i = \beta_i$, $l_i' = -1 - \beta_i$；对于 $\gamma_i = 0$ 和 $s_i < 0$，我们有 $l_i = -1 + \beta_i$, $l_i' = -\beta_i$.。特别地，

$$\deg(c) = -\deg(\gamma) + \mathrm{rk}N - \#\{i : \gamma_i = 0, s_i > 0\}.$$

因此，配对由下式给出

$$\begin{aligned}\langle \Phi^{\gamma,\sigma}, \Psi^{-\gamma,\sigma}\rangle &= (-1)^{\deg(c)}\operatorname{Vol}(\sigma)\prod_{\gamma_i\neq 0}\frac{1}{\Gamma(\beta_i+\gamma_i)\Gamma(1-\beta_i-\gamma_i)}\\ &\quad\prod_{\gamma_i=0,s_i>0}\frac{1}{\Gamma(1+\beta_i)\Gamma(-\beta_i)}\prod_{\gamma_i=0,s_i<0}\frac{1}{\Gamma(\beta_i)\Gamma(1-\beta_i)}\\ &= (-1)^{\deg(c)}\operatorname{Vol}(\sigma)\prod_{\gamma_i\neq 0}\frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\beta_i+\gamma_i)}-1}{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}(\beta_i+\gamma_i)}}\\ &\quad\prod_{\gamma_i=0,s_i>0}\frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\beta_i+1)}-1}{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}(\beta_i+1)}}\prod_{\gamma_i=0,s_i<0}\frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\beta_i}-1}{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\beta_i}}\\ &= \frac{(-1)^{\deg(c)}\operatorname{Vol}(\sigma)}{(2\pi\mathrm{i})^{\mathrm{rk}N}}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\sum_{i\in\sigma}(\beta_i+\gamma_i)}\prod_{\gamma_i=0,s_i>0}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}\prod_{i\in\sigma}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\beta_i+\gamma_i)}-1)\\ &= \frac{\operatorname{Vol}(\sigma)}{(2\pi\mathrm{i})^{\mathrm{rk}N}}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\deg(\beta)-2\pi\mathrm{i}\deg(\gamma)}\prod_{i\in\sigma}(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\beta_i+\gamma_i)})\\ &= \frac{e^{-\pi\mathrm{i}\deg(\beta)}\operatorname{Vol}(\sigma)}{(2\pi\mathrm{i})^{\mathrm{rk}N}}\prod_{i\in\sigma}(1-e^{2\pi\mathrm{i}(\beta_i+\gamma_i)}).\end{aligned}$$

注 5.1. 上述计算的一个直接推论是，对于一般的 β，配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是非退化的。

进一步的方向。我们在本节末尾提出一些与我们的构造相关的开放问题，顺序不分先后。

- 本文中的配对对于所有 β 都是非退化的吗？我们知道，当 $\beta=0$ 和 β 一般时，情况确实如此，而且这似乎很可能始终成立。
- 我们希望解决 [1] 的解析延拓猜想，将 [4] 的主要结果推广到良态 GKZ 系统。定理 4.2 的一个推论是，我们只需研究通常的 K 理论，而紧支撑版本应可由对偶推出。
- 从镜像势的 Fukaya–Seidel 范畴的角度来看，本文配对的同调镜像对称对应物是什么？我们的配对公式相当简单，因此其镜像版本想必也应如此。背景介绍请参阅 [5], [11] 。
- bbGKZ 系统的解带有一种继承自 $\mathbb{P}_\Sigma$ 的 K 理论的格结构（它独立于 Σ）。这种结构能否在任意 Γ 级数的收敛域之外局部定义？

References

[1] L.Borisov、R.P. Horja, *Applications of homological mirror symmetry to hypergeometric systems: duality conjectures.* 271 2015 153 187 《数学进展》 () : –。

[2] L. Borisov、Z. Han、C. Wang, *On duality of certain GKZ hypergeometric systems.*《亚洲数学杂志》25.1（2021）：65–88。[3] L. Borisov、R.P. Horja, *On the better behaved version of the GKZ hypergeometric system.* 357 2 2013 585 603 《数学年刊》。（）：–。

[4] L. Borisov、R.P. Horja, *Mellin-Barnes integrals as Fourier-Mukai transforms.*《数学进展》207.2（2006）：876–927。[5] K. Fukaya、Y.-G. Oh、H. Ohta、K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction* 2 2010 ，第二部分。第 卷。

美国数学会，。[6] W. Fulton、B. Sturmfels, *Intersection theory on toric varieties.*《拓扑学》36（1997），第 2 期，335–353。[7] I. Gelfand、M. Kapranov、A. Zelevinsky, *Generalized Euler integrals and A–*《数学进展》。（）：–。

[8] R.P. Horja, *hypergeometric functions. Toric Deligne-Mumford stacks and the better behaved version of the GKZ hypergeometric system.* 84 2 1990 257 271 《弦、

规范场及其背后的几何：Maximilian Kreuzer 的遗产》。2013。329–348。[9] R. Hotta、K. Takeuchi、T. Tanisaki, *D-modules perverse sheaves and representation* ，，。

theory 236 2007 第 卷。施普林格科学与商业媒体，。[10] L. Matusevich、E. Miller、U. Walther, *Homological methods for hypergeometric families* 18 4 2005 919 941 。《美国数学会杂志》。

（）：–。[11] P. Seidel, *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*。第 10 卷。欧洲数学会，2008。

Department of Mathematics, Rutgers University, Piscataway, NJ 08854
Email address: borisov@math.rutgers.edu

Department of Mathematics, Rutgers University, Piscataway, NJ 08854
Email address: zh223@math.rutgers.edu