arXiv:2301.01390v1 [math-ph] 3 Jan 2023

拓扑量子场论、同调代数与 K.Saito 原始形式理论要义：一位数学物理学家撰写数学文本的尝试

安德烈·洛谢夫

Abstract. 本文旨在阐释拓扑量子场论（TQFT）的概念、其在同调代数中的应用，以及它与 K.Saito 原始形式理论中好截面理论的关系。本文在狄拉克–塞加尔框架下阐释 TQFT，并详细说明一维例子。作为第一个应用，我们展示如何在缩并一个子复形后，显式构造 ∞-结构的约化。随后，我们用这一语言解释结合性方程和交换性方程。我们运用这些结果构造交换性方程的解，并为树级 BCOV 理论满足定向结合性方程这一事实给出新的证明。

1. Preface for mathematicians: please do not be afraid to try to read this text

如今很清楚，人们所谓的现代数学物理（有些人称之为数学量子场论），其实是未来纯数学某一章的草稿。这是一份非常初步的启发式草稿，充满了启发式思想和未经证明的猜想。此外，在数学物理文本中，省略定义、不区分猜想与定理是一种不良习惯。因此，这类文本对普通数学家来说是不可读的。这些文本大多被视为启发式思想的来源，而这些思想应当得到恰当的表述、研究，并转化为数学。将启发式内容转化为数学，是数学家可能并不具备的一项额外技能。此外，只有数学家已经花费大量时间阅读这些启发式内容并对其进行思考，才能完成这种转化。因此，即使具备这项技能的数学家，也更愿意节省自己的时间，等待有人替他们翻译数学物理文本。

数学物理学家有朝一日写出数学家能够读懂的文本，这是相当合乎逻辑的期待。鉴于数学物理学家目前的声誉，这类文本潜在的可读性应当在标题中予以说明。在此，我尝试撰写这样一篇文本。

乍看之下，这篇文章包含许多“数学物理用语”，如量子力学、量子场论、振幅等。不过，我会

2010 *Mathematics Subject Classification.* 18G99 和 81T45 。*Key words and phrases.* 原始形式理论、同调代数、拓扑量子场论（TQFT）。

尽量对所有将要使用的概念作出定义，同时保留这些对象的标准名称。

这可以与一类关于同调代数的文本相比较。这类文本会使用“微分”“圈”和“边界”等名称。要理解这类文本，读者无需了解微分几何。所有对象都用线性代数来定义，只是沿用了它们在微分几何实现中的名称。

本文旨在阐释拓扑量子场论（TQFT）的概念、它在同调代数中的应用，以及它与 K.Saito 原始形式理论中“好截面”概念的联系。本文将在狄拉克–塞加尔框架下阐释 TQFT，并详细讲解一维实例。作为第一个应用，我们将展示如何在缩并一个子复形后，显式构造 ∞-结构的约化。随后，我们将用这一语言解释结合性方程和交换方程。我们利用这些结果构造交换性方程的解，并为“树级 BCOV 理论满足定向结合性方程”这一事实给出一种新的证明。

2. TQFT for mathematicians

2.1. 狄拉克–塞加尔量子场论。定义。根据 Segal，[1] 一个 D 维量子场论可以被视为一个幺半函子 I，其作用于带装饰的光滑定向 D 维配边所成的幺半范畴与向量空间所成的幺半范畴之间。所谓带装饰的配边，是指在定向 D 维光滑流形上赋予某种几何数据，例如度量、复结构或近复结构等。当沿 $D-1$ 维子流形切开流形时，几何数据会诱导到切割所得的结果上。

定义的解释。该函子源于泛函积分，因此被称为 I。

对象是 $D-1$ 定向的维流形，Γ 而 $I(\Gamma)$ 是向量空间；因此，如果我们将 Γ 的定向改变为 Γ^{opp}，其像就是对偶空间：

$$I(\Gamma^{opp}) = I(\Gamma)^* \tag{1}$$

我们将 D 维流形称为 Σ，将其上的几何数据称为 g。该函子将这一对 (Σ, g) 映射为 $I(\Sigma, g)$；对于每个固定的 g，它属于 $I(\partial\Sigma)$，因此函子 I 可以被视为 $I(\partial\Sigma)$ 的张量积与定义在可能的几何数据空间 $Geom_\Sigma$ 上的函数空间中的一个元素，其中几何数据定义在 Σ 上：

$$I \in I(\partial\Sigma) \otimes Fun(Geom_\Sigma) \tag{2}$$

函子性条件的含义如下。假设 Σ 被切开，且切割线不自交，也不穿过边界 Γ，从而得到 Σ^Γ。切割后流形上的几何数据由原流形诱导而来，因此我们有一个映射：

$$Cut : Geom(\Sigma) \to Geom(\Sigma^\Gamma) \tag{3}$$

其逆像 Cut^* 是一个线性映射

$$Cut^* : Fun(Geom(\Sigma^\Gamma) \to Fun(Geom(\Sigma)) \tag{4}$$

Σ^Γ 的边界是不交并，由 Σ 的边界和两个方向相反的Γ 构成，因此

$$I(\partial\Sigma^\Gamma) = I(\partial\Sigma \cup \Gamma \cup \Gamma^{opp}) = I(\partial\Sigma) \otimes I(\Gamma) \otimes I(\Gamma)^* \tag{5}$$

这里我们利用了该函子将不交并映射为张量积的幺半性质。

注意，存在一个自然映射 $Glue_\Gamma$

$$Glue_\Gamma : I(\partial\Sigma^\Gamma) \to I(\partial\Sigma) \tag{6}$$

它由 $I(\Gamma)$ 与 $I(\Gamma)$ 之间的典范缩并诱导而来*。

函子性意味着

$$Glue_\Gamma \otimes Cut^*(I(\Sigma^\Gamma)) = I(\Sigma) \tag{7}$$

一维示例——量子力学。

如果这看起来还是太抽象，我就用 $D = 1$ 举个例子。设 Σ 是一个区间，几何数据取为一个度量。那么，几何数据的空间就是正数 $\mathbb{R}_+$ 构成的空间。区间的边界是由两个点组成的集合。如果我们用 $V = I(point)$ 表示该点的正向，那么

$$I(\partial\Sigma) = I(point \cup point^{opp}) = V \otimes V^* \tag{8}$$

and

$$I(\Sigma) \in V \otimes V^* \otimes Fun(\mathbb{R}_+) = Maps(\mathbb{R}_+, End(V)) \tag{9}$$

因此，方程（7）意味着该映射是$\mathbb{R}_+$ 在 $End(V)$中的半群表示。

为说明这一点，我们将 I 在 t 处的取值记为 I_t：

$$I_t = ev_t I(\Sigma)$$

如果我们在点 P 处将长度为 t 的区间切分为长度分别为 t_1和 t_2的两个区间，那么，根据幺半函子性

$$I_t(\Sigma^P) = I_{t_1} \otimes I_{t_2} \tag{10}$$

主要方程（7）可写为

$$I_{t_1+t_2} = I_{t_1} \circ I_{t_2} \tag{11}$$

其中，$\circ$ 表示 $End(V)$中的复合。因此，这就是半群表示条件。

该条件的通解为

$$I_t = \exp(-tH) \tag{12}$$

其中 $H \in End(V)$ 在物理学中称为哈密顿算符。

这种量子力学（1 维量子场论）的表述由狄拉克于 1930 年前后提出。因此，我常将量子场论的塞加尔表述称为狄拉克-塞加尔表述。

2.2. 有向图上的量子力学。颇为有趣的是，尽管狄拉克-塞加尔表述最初针对的是流形，一维量子场论也可以推广到包含图的情形。通过将切割公理 (7) 应用于配有边长的有向图，即可实现这种推广。

定义的动机。图的顶点可分为一价顶点（我们称之为外部顶点）和其余顶点（我们称之为内部顶点）。切除内部顶点的邻域后，图就被切分为区间和“p-花冠”（花冠是指一种连通树，其顶点为 p 1-价，并且

p 条边将这些顶点连接到一个 p-价顶点）。根据图的定向，p-花冠应表示为

$$Cor_p \in V^{*\otimes(p-q)} \otimes V^{\otimes q} \otimes Fun(\mathbb{R}^p_+) \tag{13}$$

当花冠的所有边长趋于零时，我们得到 PROR——一个具有 $p-q$ 个输入和 q 个输出的多线性运算：

$$m^q_{p-q} = \lim_{t_1,\dots,t_p\to 0} Cor_p \in V^{*\otimes(p-q)} \otimes V^{\otimes q} \tag{14}$$

定义。幺半函子的推广将张量值函数与有向图 γ 联系起来，该函数定义在边长空间上，我们称之为 I_γ：

$$I_\gamma = < \otimes^{n_e}_{i=1} I(t_i), \otimes^{n_c}_{\alpha=1} m_\alpha >_\gamma \in Fun(\mathbb{R}^{n_e}_+), \tag{15}$$

其中，n_e 是图的边数，n_c 是内部顶点（花冠）的数量，$<$、$>_\gamma$ 是由图的关联关系确定的配对。

例 2.2.1。

对于一个有两个输入和一个输出的 Y形图，$I_Y \in V^{*\otimes 2} \otimes V$，且其在 $v_1 \otimes v_2$ 上的取值等于：

$$I_Y(v_1, v_2) = \exp(-t_3 H)(m^1_2(\exp(-t_1 H)v_1, \exp(-t_2 H)v_2)) \tag{16}$$

例 2.2.2. 对于由长度为 t_1、t_2、t_3 的 3 个区间组成的区间图，其花冠是线性算子 ϕ，与该图对应的算子为

$$I_{3int} = \exp(-t_3 H)\phi \exp(-t_2 H)\phi \exp(-t_1 H) \tag{17}$$

预振幅的定义。假设 H 是半正定的。在这种情况下，可以考虑所谓的预振幅 PA，它们是当所有外部边（连接外部顶点与图其余部分的边）的长度趋于 $+\infty$ 时，I_γ 的极限。在这种情况下，与这些边对应的算子变为 H 的核上的投影算子，我们将其记为 Π。因此，与 Y 图对应的预振幅等于

$$PA_Y = \Pi(m^1_2(\Pi, \Pi)) \in KerH \otimes KerH \to KerH \tag{18}$$

而与 3 区间图对应的预振幅是作用在 $KerH$ 上的一个线性算子，其等于

$$PA_{3int} = \Pi\phi \exp(-t_2 H)\phi\Pi \tag{19}$$

注。物理学家正在研究振幅。我认为，更恰当的做法是引入预振幅，使得振幅可由它们通过对几何数据空间积分得到，见下文。特别是，在弦理论中，模空间上的测度是最著名的预振幅实例。

2.3. 塞加尔表述中的拓扑量子理论。拓扑量子场论的定义。拓扑量子场论（TQFT）的概念可以通过对量子场论的狄拉克-塞加尔表述进行如下“超对称化”得到。第一次“超对称化”是用复形替换向量空间。我们用字母 Q 表示这些复形中的微分，这一记号是数学物理文献中的惯例。第二次“超对称化”是用超空间 $\Pi(T)Geom$替换几何数据空间 $Geom$，该超空间表示空间 $Geom$ 的切丛，其纤维的奇偶性反转。

空间 $\Pi(T)Geom$ 上的函数空间就是超交换的德拉姆超代数 $\Omega^*(Geom)$。因此，拓扑量子场论函子属于复形张量代数中的微分形式值元素：

$$I(\Sigma) \in V(\partial\Sigma) \otimes \Omega^*(Geom(\Sigma)) \tag{20}$$

注意，超流形并非点的集合，因此严格来说，上述定义不能视为量子场论定义的特例，而应视为其推广。函子性公理 (7) 的形式完全相同。

拓扑量子场论的闭合公理。拓扑量子场论还有一条额外公理，即函子的完全闭合公理。具体而言，

$$(d+Q)I(\Sigma) = 0 \tag{21}$$

其中， d 是作用于 $\Omega^*(Geom)$ 上的德拉姆微分。

评论。闭合公理意味着，微分形式 $I(\Sigma)$ 限制到 $V(\partial)$ 中的闭子空间后成为闭形式。如果我们进一步专门考虑 $\Omega^*(Geom)$ 中的零次微分形式，那么这意味着这类函数在各个连通分支上都是常数，即它们不依赖于几何数据，因此是拓扑不变量。这一性质使这类量子场论得名“拓扑”，而在导出数学中，用微分形式取代函数、用仅要求闭合取代要求局部常值，都是标准做法。

2.4. 一维的普适拓扑量子场论。与一维量子场论类似，很容易找到一维的普适拓扑量子场论。也就是说，这个拓扑量子场论由一个复形 V 及其微分 Q 和额外的微分 G控制，并且

$$\begin{aligned} I(t,dt) &= \exp(\{d+Q,-tG\}) = \\ &= \exp(-t\{Q,G\} - dtG) = \exp(-t\{Q,G\})(1-dtG) \end{aligned} \tag{22}$$

由上面的第一个等式可知，这样的 I 满足闭合公理。

由式 (22) 可知，将其限制到函数上后，我们得到一个具有非常特殊哈密顿量的一维量子场论

$$H = \{Q,G\} \tag{23}$$

这类哈密顿量称为超对称哈密顿量。这类哈密顿量在微分几何中早已为人所知。

2.5. 超对称哈密顿量的例子。例 2.5.1. 第一个例子是作用在黎曼流形 X 上的微分形式复形 $\Omega^*(X)$ 上的拉普拉斯算子 Δ ，其微分 Q 是 X上的德拉姆微分：

$$\Delta = \{d, d^*\} \tag{24}$$

其中

$$G = d^* = -*d* \tag{25}$$

是霍奇共轭算子。

例 2.5.2. 作用于同一复形 $\Omega^*(X)$ 上的此类哈密顿量的第二个例子是沿 X 上的向量场 v 的李导数 Lie_v：

$$Lie_v = \{d, \iota_v\} \tag{26}$$

其中

$$G = \iota_v \tag{27}$$

是微分形式与向量场 v 的缩并算子。

例 2.5.3。第三个例子来自同调代数。考虑一个复形 V，以及它分解为可缩子复形 V_c 与剩余子复形 V_r 的直和：

$$V = V_r \oplus V_c \tag{28}$$

因此我们有嵌入算子和投影算子

$$i : V_r \to V \ , \quad \pi : V \to V_r \tag{29}$$

以及一个奇的同伦算子（它在可缩子复形 V_c 上对微分求逆）

$$h : V \to V \ , \ h \circ h = h \circ i = \pi \circ h = 0, \ \{Q, h\} = Proj_{V_c} = id - i \circ \pi, \tag{30}$$

这里 $Proj_{V_c}$ 表示到可缩子复形上的投影算子。

这些数据意味着我们有一个拓扑量子力学，其

$$G = h, \quad H = Proj_{V_c} \tag{31}$$

这个例子的 I 还有另一个重要性质，下面我们会用到，即当 t 趋于 $+\infty$时，它存在极限：

$$\lim_{t \to +\infty} \exp(-tH) = \pi \circ i = Proj_{V_r}, \tag{32}$$

其中 $Proj_{V_r}$ 是空间 V_r上的投影算子。

2.6. 量子场论中的局域可观测量。根据 Segal 的定义，量子场论中的主要对象 I 对应于带边界的流形。现在我们来定义量子场论中可观测量的概念。考虑如下构造：取 Σ 中的一个子流形 C，并考虑它的一个小管状邻域 $Tub\, C_\epsilon$，即 Σ 中到 C 的距离不大于 ϵ的点所构成的空间。令 $\Gamma_{C,\ \epsilon}$ 为 $Tub\, C_\epsilon$的边界。考虑将管状邻域 $Tub\, C_\epsilon$从 Σ中切除后得到的空间 $\Sigma_{Tub\, C_\epsilon}$：

$$\Sigma_{Tub\, C_\epsilon} = \Sigma \backslash Tub\, C_\epsilon \tag{33}$$

$\Sigma_{Tub\, C_\epsilon}$ 的边界是不交并，由 Σ 的边界和 $\Gamma_{C,\ \epsilon}$组成。因此

$$I_{\Sigma_{Tub\, C_\epsilon}} \in V_{\partial\Sigma} \otimes V_{\Gamma_{C,\epsilon}} \tag{34}$$

可观测量的定义。若向量族 $v_\epsilon \in V^*_{\Gamma_{C,\ \epsilon}}$ 存在极限，我们就称它是良好的

$$\lim_{\epsilon \to 0} < v_\epsilon, I_{\Sigma_{Tub\, C_\epsilon}} >$$

如果这个极限等于零，这个向量族就称为零族。我们将与 C 相关联的可观测量空间 Obs_C 定义为良族空间模去零族空间所得的陪集。上述极限定义在可观测量空间上，我们将此极限的值称为与子流形 C 相关联的可观测量的关联函数：

$$I(O_C) = \lim_{\epsilon \to 0} < v_\epsilon, I_{\Sigma_{Tub\, C_\epsilon}} > \tag{35}$$

如果 C 是一个点，我们就称这样的可观测量为局域可观测量。

示例。考虑一维示例。唯一的可观测量就是局域可观测量。区间上一个点的管状邻域也是一个区间，因此局域可观测量就是线性算子：

$$Obs_P = End(V)$$

而拓扑量子力学中一个可观测量的关联函数等于

$$I(O_P)(t_1,t_2) = \exp(-t_1H - dt_1G)O\exp(-t_2H - dt_2G) \tag{36}$$

其中， t_1 和 t_2 分别是点 P 到区间左右端点的距离。我们看到，在一维理论中，可观测量对应于二价内部顶点。

注：局域可观测量是理论空间的切向量。需要注意的是，局域可观测量对应于量子场论形变空间的切空间，这些形变不会改变与边界相关联的向量空间。这是一个一般性的论述，但我们可以用拓扑量子力学来说明。实际上，如果我们将 Q 改为 δQ，则对应于长度为 t 的区间的 I 会按如下方式变化：

$$\delta I = \int_{t_1+t_2=t,t_i\geq 0} \exp(-t_1H - dt_1G)\delta Q\exp(-t_2H - dt_2G) \tag{37}$$

3. Topological quantum mechanics on trees and constructive induction of operations after contraction of the subcomplex

这里我将说明，例 2.5.3 中定义在树上的拓扑量子力学（即一维拓扑量子场论的另一种称呼）如何用于构造性地证明 Kadeishvili 型定理 [2]，这些定理涉及在剩余子复形上诱导 ∞-结构（例如式 (28) 中的子复形 V_r）。

3.1. 振幅与 Kadeishvili 定理。考虑拓扑量子力学中定义在有根有向树上的预振幅。要定义这样的理论，我们需要一个三元组，由 Q、G 和一组运算 m_1、.....、m_k 组成，其中 Q 和 G 如例 2.5.3 中所述，且 $m_n \in V^{*\otimes n}\otimes V$。

在例 2.5.3 的情形中，与叶相关联的投影算子 Π 可视为将 V_r 嵌入 V 的算子 i；与根相关联的投影算子 Π 则可视为从 V 到 V_r 的投影 π。设 n_l 为有根树的叶数， n_c 为内部顶点（花冠）的数量。与树 γ 相关联的前振幅是一个作用于 V_r、取值于边长所对应的微分形式的 n_l-元运算。其形式如下：

$$PA_\gamma = <\otimes_{i=1}^{n_e} I(t_i), \otimes_{\alpha=1}^{n_c} m_\alpha \otimes i^{\otimes n_l}\otimes\pi>_\gamma \in \Omega^*(\mathbb{R}_+^{n_e})\otimes V_r^{*\otimes n_l}\otimes V_r, \tag{38}$$

张量的缩并按照该树进行。

例如，对于 Y 树，前振幅只是 V_r 上二元运算的限制；而对于 3 区间树（该树只有 m_1 运算 ϕ），前振幅等于

$$PA_{3int} = \pi\phi\exp(-tProj_{V_c} - dth)\phi i \tag{39}$$

树振幅的定义。令我们将树振幅 $A_{n_l}\in V_r^{*\otimes n_l}\otimes V_r$ 定义为对所有具有 n_l 个叶的有根树的预振幅在

边长空间上的积分之和（并将每个积分除以树的对称群中元素的个数n_γ）：

$$A_{n_l} = \sum_\gamma 1/n_\gamma \int_{\mathbb{R}_+^{n_e}} PA \tag{40}$$

由于该积分可以很容易地计算，

$$\int_{\mathbb{R}_+} \exp(-tProj_{V_c} - dth) = -h, \tag{41}$$

于是我们得到振幅的以下公式：

$$A_{n_l} = \sum_\gamma (-1)^{n_e}/n_\gamma < h^{\otimes n_e}, \otimes_{\alpha=1}^{n_c} m_\alpha \otimes i^{\otimes n_l} \otimes \pi >_\gamma, \tag{42}$$

一个叶子的例子。特别地，如果唯一的运算是 m_1 （我们仍将其记为 π），那么一个叶子的振幅等于

$$A_1 = \pi\phi i - \pi\phi h\phi i + \pi\phi h\phi h\phi i - \dots \tag{43}$$

Kadeishvili 定理。

假设运算 $Q+m_1$、m_2、$m_3\dots$ 构成一个 L_∞ 代数，那么由 Q 和振幅 $Q+A_1$、A_2、$A_3\dots$ 构造的运算也构成一个 L_∞ 代数。这个代数称为通过子复形的缩并得到的代数。

3.2. 单叶情形下的 Kadeishvili 定理。在继续讨论证明之前，先考察一个特例是很有启发性的，也就是唯一非零运算为 $m_1 = \phi$ 的情形。此时，该定理实际上表明，若 ϕ 是 Maurer-Cartan 方程的一个解

$$\{Q, \phi\} + \phi^2 = 0 \tag{44}$$

then

$$\{Q, A_1\} + A_1^2 = 0 \tag{45}$$

注。我们还可以进一步特化，考虑 Q-闭的 ϕ，并令 V_r 为 Q 的上同调，因此构造的输入是一个双复形。(43) 中的各项看起来像是谱序列构造中的微分。不过，两者有一个重要区别：在谱序列构造中，微分作用于不同的空间，而这些空间分别是前一个微分的上同调；而 (43) 的所有加项都作用于同一个空间，即 Q 的上同调（谱序列的第一个微分）。此外，谱序列构造中的微分是典范定义的，而 (43) 中的算子则取决于空间 V 直和分解为上同调与可缩复形的选取，也取决于同伦的选取。因此，微分 A_1 似乎包含了比谱序列微分更多的信息；然而，可以证明，所有在分解与同伦的选取改变下保持不变的信息，都包含在谱序列微分中。另一方面，构造 (43) 明确回答了这样一个问题：如何在 Q 的上同调上构造一个微分，使得所构造微分的上同调等于总微分的上同调（如果 (43) 中的和只含有限项）。稍后我们将在讨论 Massey 运算时看到类似的现象。

现在来讨论如何证明一个定理。

3.3. Kadeishvili 定理的直接证明概要。单叶情形中的微妙问题在于， ϕ 的分次为零，因此和式 (43) 可能发散。因此，我们必须将其视为形式上的和，也就是说，我们取

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \epsilon^k \tag{46}$$

并将 ϵ 视为形式参数。由 Maurer-Cartan 方程可得

$$\{Q, \phi_1\} = 0, \ \{Q, \phi_2\} = -\phi_1^2, \ \dots \tag{47}$$

在 ϵ 的一阶项中，定理的陈述是 $\pi\phi_1 i$ 的 Q-闭性，而这由 ϕ_1 的 Q-闭性推出。在二阶项中，将表达式 (43) 代入 (45) 得到

$$\begin{aligned} &\{Q, \pi\phi_2 i - \pi\phi_1 h \phi_1 i\} + \pi\phi_1 i \pi\phi_1 i = \\ &\pi\{Q, \phi_2\} i + \pi\phi_1 \{Q, h\} \phi_1 i + \pi\phi_1 (1 - \{Q, h\}) \phi_1 i = 0 \end{aligned} \tag{48}$$

其中我们用到了 (47)

可以证明，在更高阶也会发生类似的抵消。

多叶情形可以用类似的方法处理，即通过直接计算和树的组合学。振幅的复合会产生 $i\pi$ 项，可用 $(1 - \{Q, h\})$ 替换。将 1 与 Q 对运算 m_n 的作用相结合所产生的贡献，会导出 Maurer-Cartan 表达式；而 $\{Q, h\}$ 项则会被 Q 在同伦上的作用抵消。这可以视为一种组合学技巧。我们有理由寻求更具概念性的解释，并将在下一小节给出。值得注意的是，这种更具概念性的解释可以推广到高于 1 维的情形。

3.4. 基于前振幅性质的归纳定理证明。为了说明主要思路，我们先在最简单的情形下给出证明： V_r 是 Q 的上同调空间，并且毛雷尔－卡坦方程中的两项分别等于零，即所有运算 m_k 都是Q-闭的，且这些运算构成无穷代数。之后我们将讨论如何修改这一证明以涵盖一般情形。

我们将在此给出的证明基于两个性质：闭性和因子分解。闭性是指每个前振幅作为边长空间上的形式都是闭的。这一性质源于与区间相关的演化算子 $d+Q$ 的闭性$I(t, dt)$，以及运算 Q、投影 m_i和嵌入 π的闭性 i。

因子分解是指，当其中一条边的长度趋于无穷时，前振幅因子分解为若干前振幅的复合，这些前振幅对应于沿该边切割原树后得到的树。这一点源于

$$\lim_{t \to +\infty} \exp(-tProjV_c)(1 - dth) = ProjV_r = i \circ \pi \tag{49}$$

证明的思路是将树的长度空间紧化为一个n_e 超立方体，取前振幅的一个 $n_e - 1$-形式分量，并沿超立方体的边界对其积分。由于前振幅是闭的，其 $n_e - 1$-形式分量也闭合。因此，积分等于零。对应于长度无限的树的各个面的贡献将构成振幅的复合。零长度面的贡献将构成一个与某棵树对应的振幅，而该树的一个内部顶点处包含运算的复合

。将所有树的贡献相加时，这类顶点的贡献会由于运算满足无穷代数条件而相互抵消。对于单叶树，这一推导由 Lysov [3] 得出。

值得指出的是，单叶情形的长度空间可以视为一个模空间 RM_n：对于实直线上的点，该模空间是关于公共平移的模空间：

$$RM_n = \mathbb{R}^n/\mathbb{R} \tag{50}$$

在下一节中，我们将研究这类模空间的复版本。

注 1. Kontsevitch[4] 在其关于变形量子化的工作中证明 ∞-态射定理时，使用了这一思想。他采用了圆盘上复结构的模空间，其中圆盘内部和边界上都有标记点。他构造的二维拓扑场论在该模空间上产生了闭微分形式。结果发现，边界贡献恰好就是 ∞-态射陈述。

注 2. 如果 V_r 等于 Q 的上同调，那么多叶情形的振幅可以视为 Massey 运算的推广，这与 A_1 是谱序列微分的推广相同。Massey 运算通常被理解为部分定义的典范运算（当上同调中的某些乘积为零时），而振幅始终有定义，但取决于复形分解的选择以及同伦的选择。振幅构成一种 L_∞ 结构，而辅助数据的变化只会将这种结构变为与之等价的结构。

4. Configuration spaces in two dimensional theories

在上一节中，我们看到，考虑一维量子场论中的预振幅很有用。这些预振幅是模空间（有时是构形空间）上的闭形式。对模空间上的预振幅进行积分，最终会得到满足有趣二次方程的结果。在一维情形中，振幅最终成为上同调上的诱导运算，而二次方程则变为无穷结构方程。

现在，我们想在二维共形场论中进行类似的尝试。

¯4.1. WDVV 方程。考虑模空间的 Deligne-Mumford 紧化$M_{0,\ n+1}$，其中有 $\mathbb{CP}^1$ 个标记点。取其中具有一种定向的 n 个点（称为输入点），以及一个具有相反定向的点（称为输出点）。根据前几节所阐述的拓扑量子场论的一般性质，拓扑理论中的前振幅为输入点关联向量空间 W，为输出点关联向量空间 W^*（其中 W 是局域可观测量空间中 Q 的上同调空间）。量子场论为具有 n 个标记点的 $\mathbb{CP}^1$ 关联一个前振幅

$$PA_n \in \Omega^*(\bar{M}_{0,n+1}) \otimes Hom(W^{\otimes n}, W) \tag{51}$$

这个前振幅满足两个主要性质：
1.输入置换下的对称性 2.闭性，即

$$dPA_n = 0 \tag{52}$$

¯其中， d 是$M_{0,\ n+1}$上的德拉姆微分，$_{n+1}$。

3.因子分解。考虑模空间$\bar{M}_{0,\ n+1}$的紧化除子$D_{n_1,\ n_2}$，其中射影空间退化为两个射影空间：不包含输出点的分支上有 n_1+1，包含输出点的分支上有 n_2+1 个点。将前振幅限制在这样的除子上，它便因子分解为：

$$PA_n|_{D_{n_1,n_2}} = PA_{n_2} \circ PA_{n_1} \tag{53}$$

因此，我们可以通过对前振幅在边界除子上积分，得到振幅的二次关系；这些边界除子在模空间的同调中等于零。

¯最简单的情形由$\bar{M}_{0,\ 4}$给出，此处我们将输入点标记为1、2和3。这个模空间就是 CP^1。紧化除子表示两个射影空间相交于一点的曲面，其中两个输入点属于第一个射影空间 $\mathbb{CP}^1$，第三个输入点和输出点属于第二个射影空间$\mathbb{CP}^1$。由于模空间是连通的，除子的差（我们称之为D_a）在模空间的同调中等于零。我们称它为 D_a，因为在此除子上计算振幅会得到二入一振幅的结合性。

这一关系引出了其他模空间中的关系（称为 Keel 关系[5]）。考虑一个遗忘映射

$$f : \bar{M}_{0,4+k} \to \bar{M}_{0,4} \tag{54}$$

除子 $f^*(D_a)$ 是紧化除子。它们对应于由两份 $\mathbb{CP}^1$ 构成、并在一点处相交的曲面，输入点分布在各个分支上（使得不含输出点的分支上至少有两个输入点，而含有输出点的分支上至少有一个输入点）。

考虑总振幅 TA，它是所有振幅之和，因此映射

$$TA \in \oplus_{n=2}^{+\infty} S^n W \to W, \tag{55}$$

作为 W 上的形式向量场 v。

用向量场 v 表示时，Keel 关系具有如下形式。设 T^a、$a=1$、.....、μ 为 W 上的线性坐标。考虑二阶偏导数 f^a_{bc}：

$$f^a_{bc} = \frac{\partial^2 v^a}{\partial T^b \partial T^c} \tag{56}$$

Keel 关系表明，f^a_{bc} 构成结合交换代数的结构常数——定向结合方程：

$$\sum_{a=1}^{\mu} f^a_{bc} f^e_{ad} = \sum_{a=1}^{\mu} f^a_{cd} f^e_{ba} \tag{57}$$

假设空间 W 具有非退化标量积 η，使得在将 W 与 W^* 识别后，n 对一个振幅的作用在所有 $n+1$ 自变量下都是对称的。在这种情况下，该向量场具有势形式，即

$$v^a = \sum_{b=1}^{\mu} \eta^{ab} \frac{\partial F}{\partial T^b} \tag{58}$$

势向量场的定向结合性方程被称为 WDVV，或简称结合性方程。

4.2. 洛谢夫-马宁模空间、最简单空间与交换性方程。在 [6] 洛谢夫和马宁为带有标记点的黎曼曲面引入了一种新的模空间。

洛谢夫-马宁模空间的定义。标记点分为两种颜色——黑色和白色。当一个把手退化，或一个曲面分解为两个通过一点粘合的曲面时，这种退化由白点描述（一个输入点和一个输出点）。白点的行为与模空间的德利涅-芒福德紧化中的标记点完全相同。黑点与白点的区别在于，黑点可以与其他黑点重合，但不能与白点重合。

在振幅的构造中，与黑点关联的向量空间不同于与白点关联的向量空间——我将这些空间记为 V。

洛谢夫-马宁模空间最简单的例子是模空间 L_k：带有两个白点（一个输入点和一个输出点）以及 k 个黑点的射影空间（为了稳定性，k 应为正）。

空间 L_k 可以描述为陪集 $(\mathbb{C}^*)^k/\mathbb{C}^*$ 的紧化，其中 $\mathbb{C}^*$ 通过乘法作对角作用。事实上，可以将输入白点置于零点，将输出点置于无穷远点；$(\mathbb{C}^*)^k$ 是黑点位置的空间，而 $\mathbb{C}^*$ 是带有两个白色标记点的 $\mathbb{CP}^1$ 的自同构作用。

当一组 k_1 点趋于零（或者等价地，一组 $k-k_1$ 点趋于无穷）时，就形成复余维 1 中的非紧方向。此类极限通过两个 $\mathbb{CP}^1$ 紧化，使第一个 $\mathbb{CP}^1$的无穷远点与第二个 $\mathbb{CP}^1$的零点相识别。第一个 $\mathbb{CP}^1$ 带有 k_1 个黑点，而第二个 $\mathbb{CP}^1$ 带有 $k-k_1$ 个黑点。我们将此类除子称为$D_{k_1,\ k_2}$。

限制在除子$D_{k_1,\ k_2}$ 上的模空间为 $L_{k_1}\times L_{k_2}$。

这些预振幅是在 L_k 上的闭微分形式，其取值于 $S^kV^*\otimes End(W)$；与德利涅-芒福德情形类似，我们应当有一个因子化条件：

$$PA_k|_{D_{k_1,k_2}} = PA_{k_2}\circ PA_{k_1} \tag{59}$$

其中复合是 $End(W)$中的复合。

与 Keel 关系的情形一样，存在一个在同调中等于零的基本紧化除子。考虑 L_2，它可以由两个黑点的坐标之比参数化：$w=z_1/z_2$。由于 L_2 是连通的，该除子

$$D_c=\{w=0\}-\{w=\infty\}$$

在 L_2 的同调中为零。这意味着，如果我们将 PA_1 视为从 V 到$End(W)$ 的映射，那么

$$[PA_1(u_1),PA_1(u_2)]=0 \tag{60}$$

由于这种交换性，我们称除子 D_c 为交换除子。

与德利涅-芒福德情形类似，存在遗忘映射

$$f: L_{k+2}\to L_2 \tag{61}$$

因此，交换除子 $f^*(D_c)$ 的原像在同调中也等于零。结果发现，这些方程可以写成如下形式。令 A_n 为 V 上取值于 $End(W)$ 的函数 A_{tot} 的泰勒级数的第 n 个系数。记 d^v 为 V 上的德拉姆算子。那么，这些方程将

被称为交换性方程，形式如下：

$$d^v A_{tot} \circ d^v A_{tot} = 0, \tag{62}$$

其中，复合意味着作为 $End(W)$ 的元素同时进行复合，并作为 V 上的 1-形式进行外部乘法。颇为引人注目的是，这个方程最早出现在 K.Saito 的原始形式理论中。

4.3. 从具有强霍奇性质的双复形构造交换方程的解。本小节将明确地根据线性代数数据构造空间 L_k 上的预振幅。我会在最简单的情形下给出显式构造，并简要说明如何将其推广到更一般的情形。此外，我将重点讨论具有强霍奇条件的线性数据；关于如何按照 Khoroshkin、Markarian 和 Shadrin 的方法推广到霍奇条件，请参见他们的论文 [7]。

强霍奇性质的定义。考虑带微分 Q 和 G_- 的 Z_2 分次双复形 V。令 W 为 Q、G 同伦的上同调，并令 i_W 和 π_W 分别为上同调的嵌入和到上同调的投影。这里所说的强霍奇性质是指以下条件：

$$G_- i_W = \pi_W G_- = 0 \quad \{G, G_-\} = 0 \tag{63}$$

为了构造交换方程的解，我们需要一个交换族。

简化交换族的定义。简化交换族是一个偶形式映射 U，从 V 到 $End(W)$的交换子代数。我们要求该映射满足简化的 Maurer-Cartan 性质：

$$[Q, U] = 0; \quad [[G_-, U], U] = 0 \tag{64}$$

为 L_k 空间构造前振幅。

我们如下构造 L_k 上的一个微分形式。设用坐标对 $\mathbb{C}^k$ 上的点进行参数化

$$z_a = \exp(t_a + i\phi_a)$$

并记

$$t_{aa-1} = t_a - t_{a-1}, \quad \phi_{aa-1} = \phi_a - \phi_{a-1}$$

那么，前振幅 PA_k 具有以下形式：

$$\begin{aligned} PA_k \quad &= \quad \pi_W U \exp(-t_{kk-1}\{G, Q\} - dt_{kk-1}G + id\phi_{kk-1}G_-)U \ldots \\ &\quad \ldots U \exp(-t_{21}\{G, Q\} - dt_{21}G + id\phi_{21}G_-)U i_W \end{aligned} \tag{65}$$

现在考虑 $d^V PA_k$。由上述性质可知，$d^V PA_k$ 是空间 L_k上的闭微分形式。实际上，我们需要验证当 t_{aa-1} 趋于零时，该形式不会发生跳跃，并且可以延拓到紧化空间上。第二个性质源于这样一个事实： G_- 湮灭了上同调 W。第一个性质则较为棘手，它源于代数的交换性以及

$$\{d^V U, [G_-, U]\} = 0 \tag{66}$$

可由简化的 Maurer–Cartan 条件（以及目标代数的交换性）推导得出。 PA_k 的因子化性质显而易见，

因此，对空间 L_k 积分并对 k 求和，我们得到

$$A = d^V(\sum_{k=0}^{+\infty} \pi_W(U(-GG_-U)^k)i_W) \tag{67}$$

平方为零，即 A 满足交换方程。由上面的证明可知， G_- 是沿圆周作用的向量场进行缩并的算子，而斋藤 K 微分（见最后一节）：

$$Q_S = Q + zG_- \tag{68}$$

是相对于圆周作用的等变微分。

纯同调证明。

同样，给出公式（67）的另一种证明也很有启发性，这种证明完全属于标准同调代数的范畴。考虑双复形 $V \otimes \Omega^*(V)$，其中第一个微分等于 Q ，第二个微分 ϕ 定义为

$$\phi = d^V U + [G_-, U] \tag{69}$$

ϕ 根据（66）平方为零。

现在，根据（43），我们诱导出 ϕ 在 Q的上同调上的作用，即在 W 上的作用。我们得到 A_1 ，其中包含定义在 V 上的不同次数的微分形式。由于G_- 消去 W ，因此不包含零次形式。关系 $A_1^2 = 0$ 从关于一形式的方程开始，我们将其简单地记作 A。由 ϕ的显式形式可推出， A 实际上具有（67）中的形式，由此证明完成。

尽管这个证明很简单，却掩盖了这些公式的二维起源。

这两种证明都可以推广到未简化的毛雷尔–嘉当情形，即:

$$[Q, U] + [[G_-, U], U] = 0 \tag{70}$$

4.4. 树级 BCOV 理论作为有向结合性方程的一个解。在上一节中，我们用线性代数构造了交换方程¯的一个解。回想一下，模空间 $M_{0,k}$ 可以由空间 L_{k-2} 通过吹起黑点构形空间中的对角线得到。因此，可以推测，将直线替换为三价树，便可得到一种类似于构造交换方程解的方法。

支持这一想法的另一个论据，是黎曼曲面的热带化这一概念，它用三价图取代一般曲面。可以认为，热带曲面的模空间的上同调等于上同调¯of $M_{0,k}$。

基于这些启发式论证，我们将用代数数据构造结合性方程的解。这种构造被称为 BCOV 理论，不过，直到洛谢夫和Shadrin [8] 的工作中，才证明这种构造确实给出了结合性方程的解。那篇论文中的证明采用了组合学方法，过程相当复杂。这里我们将概述一个简单的证明，该证明基于交换方程解的构造。

这里我们将解释定向版本，不过，所有论证都可以推广到非定向版本。

定向结合方程解的构造。

假设给定以下数据：
1. 一个超交换结合的微分 Z_2-分次代数 B，其乘法为 m，微分为 Q。

2. 一个二阶奇微分算子 G_-，其平方为零，与 Q 反交换，并消去 Q-上同调。

3. 一个同伦 G，它将一个代数收缩到其上同调 W，并且与 G_-反交换。

我们为一棵有 n_l 个叶的有根有向树 γ 构造如下运算 A_γ：

$$A_\gamma : W^{\otimes n_l} \to W, \tag{71}$$

这与诱导运算理论中的做法相同，唯一的变化是：边不仅对应同伦，还对应一个乘积 GG_-，如同构造交换性方程解的过程。

洛谢夫-沙德林定理：

$$A = \sum_\gamma A_\gamma / n_\gamma, \tag{72}$$

其中，n_γ 是图的对称群的阶，且它是定义在 V 上的形式向量场，满足定向结合方程（57）。

利用交换方程的新证明概要：
1. 取图的一片叶子并将其连接到根上。我们得到一条线，线上各点附着着不同的树，它们作为 $End(B)$的线性算子作用于这条线（树的根插入乘法算子的某个入口）。对所有树求和，并将其视为 $End(W)$中的一个元素 X。

2. 检查这些算子（对树求和后）是否满足毛雷尔-卡当方程。

3. 因此，元素 X 满足交换方程，并且在交换两个 W 时具有对称性——一个对应于指定的叶子，另一个对应于原始树的一片普通叶子。因此，它是定向结合方程的一个解。

备注。表达式 (72) 在 BCOV 理论[9]中被定义为一个振幅。然而，作者没有注意到，它实际上满足结合性方程。

5. Good sections and Commutativity equation in K.Saito theory of Primitive form

考虑 W——关于变量 X_1、…、X_N 的拟齐次多项式 n。考虑由偏导数 $\frac{\partial W}{\partial X_i}$ 生成的理想 I，以及米尔诺环：

$$R = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]/I \tag{73}$$

假设米尔诺环是有限维的，且作为复数域上的向量空间，其维数为 μ。取该环的一组基，并选取多项式Φ_k 来表示 I 的等价类。由此可以构造一个族

$$W_t = W + \sum_{k=1}^{\mu} t_k \Phi_k \tag{74}$$

这个族称为该奇点的整体变形。下文中我们只在 t 个变量上的形式圆盘上考虑它，也就是在 $Spec\,\mathbb{C}[[t_1,\dots,t_\mu]]$ 上考虑。

例如，对于 $N=1, W=X^n$ （在一维情形下，我们省略下标 1）， $\mu=n-1$。如果我们取米尔诺环中各元素的最低阶代表元，就会得到

$$W_t = X^n + \sum_{k=1}^{n-1} t_k X^{k-1} \tag{75}$$

考虑 $\mathbb{C}^N$ 上由多项式微分形式构成的德拉姆复形 Ω，其微分为 d。定义

$$\Omega_t = \Omega \otimes \mathbb{C}[[t_1,\dots,t_\mu]] \tag{76}$$

我们将 Ω_t 视为一个微分相同的复形 d ——这只是沿 X 方向的德拉姆微分。

以上内容基本上都是标准且众所周知的。然而，基于对超曲面周期的研究

$$W_t = 0$$

以及后来对如下形式的指数积分的研究

$$\int \exp(W/z)\omega$$

K.Saito [10] 将复形扩展为

$$\Omega_{t,z} = \Omega_t \otimes \mathbb{C}[[z]] \tag{77}$$

并引入了微分

$$d^S_{t,z} = zd + dW_t \tag{78}$$

令 $H_{t,z}$ 表示 $d^S_{t,z}$ 在 $\Omega_{t,z}$中的上同调。

乘以 Φ_k 与 $d^S_{t,0}$可交换，因此它在上同调$H_{t,0}$上诱导一个线性算子，记为 C_k:

$$C_i : H_{t,0} \to H_{t,0} \tag{79}$$

这个算子在下文中将非常重要。

上同调 $H_{t,z}$ 构成 $Spec\ \mathbb{C}[[t_1,\dots,t_\mu]]$上的一个向量丛，但这个丛没有自然的平坦联络。

然而，如果我们在 $z=0$ 处局部化，即考虑

$$\hat{\Omega}_{t,z} = \Omega_t \otimes \mathbb{C} << z >> \tag{80}$$

$\hat{}$ 及其对应的上同调 $H_{t,\ z}$，则存在一个由 K.Saito 称为高斯-马宁联络的典范平坦联络。该联络由其协变平坦截面给出

$$S^{GM} = [\exp(-\frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\mu} t_k \Phi_k)\omega]_{d^S_{t,z}} \tag{81}$$

其中 ω 是与 t 无关的微分形式，而 $[,]_{d^s}$ 表示相应上同调中的一个类。Gauss-Manin 这一名称意味着，在将其解释为超曲面周期上的联络时，它实际上是一个 Gauss-Manin 联络。

可缩基底上的一个平坦联络并不包含任何有趣的信息。然而，K.Saito 发明了另一种联络，我将其称为 K.Saito 的联络。它的定义稍显复杂，分几个步骤进行。

步骤 1. 考虑投影 π - 对 $z=0$ 求值:

$$\pi : H_{t,z} \to H_{t,0} \tag{82}$$

我们取 S - 一个使投影可逆的截面:

$$S : H_{t,0} \to H_{t,z}; \quad \pi \circ S = id \tag{83}$$

步骤 2. 令 $h \in H_{t,\ z}$，令 ω 为该类的一个$d_{t,\ 0}^{S}$ 闭代表元，$[\omega]=h$。我们将沿切向量 ϵ_k 的联络定义为沿 $\epsilon\ T_{\epsilon}^{S}$的平行移动所得结果，它在 h 上的作用如下:

$$T_{\epsilon}^{S}(h)=[\omega+z^{-1}(-\sum_{k=1}^{\mu}\epsilon_k\Phi_k+S\circ\pi(\sum_{k=1}^{\mu}\epsilon^k\Phi_k))\omega]_{d_{t+\epsilon,z}^{S}} \tag{84}$$

需要作以下说明。首先，括号中的项实际上是$d_{t+\epsilon,\ z}^{S}$ 闭的（与Gauss–Manin联络比较即可轻易看出）。

其次，括号中的两项关于 $d_{t,\ 0}^{S}$ 都是闭的，而且它们在 $d_{t,\ 0}^{S}$ 上同调中的类相等，因此，括号的上同调类 $d_{t+\epsilon,\ z}^{S}$ 在 $z=0$处消失，所以这种平行移动的结果实际上属于 $H_{t+\epsilon,\ z}$，ˆ而不仅仅属于 $H_{t,\ z}$ （注意，Gauss–Manin联络中的平行移动属于 ˆ$H_{t+\epsilon,\ z}$ ）。

第三，如果我们在 $z=0$ 处局部化齐藤K.连接（即将其视为 ˆ$H_{t,\ z}$ 上的连接），就可以将其与 Gauss–Manin联络进行比较，并得到如下非凡关系

$$\nabla^{S}=\nabla^{GM}+z^{-1}\sum_{k=1}^{\mu}dt_kC_k \tag{85}$$

第四，对于一般截面，齐藤K.连接并不可积。然而，如果该截面沿齐藤K.连接平行，则齐藤K.连接是可积的。因此，K.Saito 定义了一个好截面，使得如果我们在零点处找到它，就可以将其输运到整个形式圆盘 $Spec\,\mathbb{C}[[t_1,\ldots,t_\mu]]$。

此外，给定一个好截面，就可以将 Gauss–Manin联络平凡化；在这种平凡化下，齐藤K.连接写成

$$(\nabla^{S})_{GM\ frame}=d+z^{-1}A \tag{86}$$

由齐藤K.连接的平坦性可知:

$$A^2=0 \tag{87}$$

$$dA=0 \tag{88}$$

注意，方程组（87）和（88）恰好对应于交换方程！这就是交换方程实际上由 K.Saito 发现的原因。

这看起来像是一个奇迹。在 [11] 中对此作了如下解释。

存在一种复霍奇理论的类比，其中复结构的作用由函数 W_t 承担。微分 Q_t 依赖于 W_t，而微分 G_-

则不依赖。霍奇性质通过调和形式来识别 Q 和 G_- 的上同调；这些调和形式同时被 Q 和 G_- 湮灭。齐藤 K. 连接是这样一种上同调上的连接：其中 Q_t 的对应类在 G_- 上同调中保持不变。这就是它可积的原因。好截面是奇点处调和形式芽的全纯部分的一个类，而限制在 $Q_t + zG_-$ 的类上的霍奇连接与 K.Saito联络一致。

霍奇理论可以构造交换方程的解，因此 K. Saito 的好截面理论也能做到这一点。

References

[1] G. Segal，《共形场论的定义》。理论物理中的微分几何方法。北约高级科学研究所系列 C：数学物理科学，第 250 卷，第 165-171 页。克吕维尔学术出版社，多德雷赫特（1988）[2] T. Kadeishvili，上同调中的 A_∞-代数结构与有理同伦群，奥伯沃尔法赫会议论文集，1985 年 9 月 1 日至 6 日。[3] V.Lysov，拓扑量子力学中的反交换方程，《JETP Letters》76， 724 727, 2002 - M. Kontsevich，泊松流形的变形量子化 I，《数学快报》66：157-216，2003[4] [5] S. Keel，零亏格稳定 n 标记曲线模空间的交叉理论。《美国数学会会刊》330，545-574，1992[6] A. Losev, Yu. Manin，标记曲线的新模空间与平坦联络铅笔，电子预印本 arXiv:math/0001003[7] A. Khoroshkin，N. Markarian，S. Shadrin，超交换幺半群歌剧作为 BV 的同伦商，《数学物理通讯》，第 322, 3, 697 729 卷，第 [8] 322, 3, 697 729 期，第 - 页。A. Losev，S. Shadrin，从茨维巴赫不变量到盖茨勒关系，《数学物理通讯》，第 271 卷，第 3 期，649–679，2007[9] M. Bershadsky，S. Cecotti，H. Ooguri，C. Vafa，小平–斯宾塞引力理论与量子弦振幅的精确结果，《数学物理通讯》，第 165 卷，第 2 期，第 311 428,1994 - K. Saito，与原始形式相关的周期映射，《京都大学数理解析研究所刊》19 (3)，1231-1264，1983[10] [11] A. Losev，霍奇弦与 K. Saito 原始形式理论的要素，拓扑场论、原始形式及相关主题。柏原正树、松尾笃、齐藤恭司和佐武一郎编。由伯克豪泽出版社出版，波士顿，马萨诸塞州，美国，第 305 页，1998

Wu Wen-Tsun Key Lab of Mathematics、 Chinese Academy of Sciences、 Scientific Research Institute of System Development;、 National Research University Higher School of Economics;、 and Institute for Theoretical and Experimental Physics.*Email address*: aslosev2@gmail.com