arXiv:2301.01394v1 [math.CO] 4 Jan 2023

极大1-平面图中的大匹配

Therese Biedl* John Wittnebel

摘要

众所周知，若 $n \geq 14$，则每个极大平面图都有一个大小至少为$\frac{n+8}{3}$ 的匹配。本文研究极大*1*-平面图的类似匹配界，即可以绘制成每条边至多有一个交叉点的图。特别地，我们证明，每个 3-连通简单极大 1-平面图都有一个大小至少为 $\frac{2n+6}{5}$ 的匹配；若图不要求是 3-连通的，该界则降至 $\frac{3n+14}{10}$ 。对于附带固定 1-平面绘图或非简单的图，我们也给出了（较弱的）界。我们给出的所有界都是紧的，即存在满足相应限制且不存在更大匹配的图。

1 引言

匹配是图论中历史最悠久、研究最充分的问题之一，匹配理论的详尽综述可参见 [3, 17]。本文关注具有特殊绘图的图中的匹配。具体而言，如果一个图可以在平面上绘制且没有交叉点，就称其为平面图（详细定义见下文）。Nishizeki 和 Baybars [19]证明，每个具有 $n \geq X$ 个顶点的平面图都有一个大小至少为 $Yn + Z$的匹配，其中X，Y，Z 取决于图的最小度 δ 和连通度 κ （他们探讨了 δ 和 κ的所有可能情形）。他们给出的界是紧的。

举一个具体界限为例，Nishizeki 和 Baybars 证明，每个最小度为 3 的 3-连通平面图都存在大小至少为 $\frac{n+8}{3}$ if $n \geq 14$ 的匹配。由此特别可知，每个具有 $n \geq 14$ 的简单极大平面图都存在这一大小的匹配，因为这类图是 3-连通的，因此最小度为 3。后一个结果后来在 [4] 中以不同的技巧重新证明。

本文的目标是为极大1-平面图推导类似的结果。为此，我们首先需要明确“极大1-平面”的含义。通常，“极大”是指无法再添加边而仍留在该图类中，但我们是从固定绘图开始，还是可以考虑所有绘图？在某些限制条件下，是否允许出现环和平行边？“极大”的定义选择会影响最大匹配的大小，因此我们将分别给出简单饱和*1*-平面绘图 （其中无法在不违反1-平面性或简单性的情况下添加边）以及

*通讯作者。滑铁卢大学 David R. Cheriton计算机科学学院，地址：加拿大安大略省滑铁卢市，邮编 N2L 3G1。*biedl@uwaterloo.ca*。研究工作得到加拿大自然科学与工程研究委员会资助。

简单极大 1-平面图（其中所有可能的1-平面绘图都必须是简单饱和的）的界。与平面图不同，简单饱和1-平面绘图不一定表示一个3-连通图，因此我们还将根据图是否为3-连通图进一步区分，因为这同样会影响最大匹配的大小。表1展示了我们得到的结果；对于上述所有图类，我们都证明了匹配大小的一个下界，且对某些图而言，该下界是紧的。

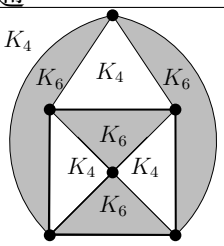
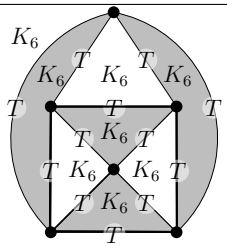
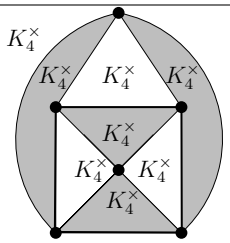
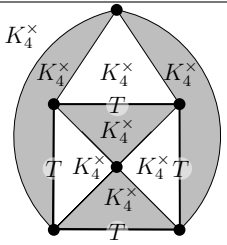
最大匹配的大小		
	3-连通	非 3-连通
简单极大 1-平面图	$\frac{2n+6}{5} \approx 0.4n$ 定理 4 图 8a 	$\frac{3n+14}{10} \approx 0.3n$ 定理 5 图 8c 
简单饱和 1-平面绘图	$\frac{n+4}{3} \approx 0.33n$ 定理 2 图 9b 	$\frac{n+6}{4} \approx 0.25n$ 定理 3 图 9c 

表1：本文的结果。我们列出了证明下界的定理，以及在何种图上该下界可达到的抽象描述；所列图示展示了该图的所有细节。

我们还简要研究了非简单图（这会影响匹配大小，因为此时只需较少的非平行边即可实现“极大”），并再次证明了在无环图中匹配大小的紧确界。

关于1-平面图中匹配问题的先前研究，我们知道有两项结果。首先，在推广 Nishizeki 和 Baybars [19], 的结果时，我们研究了最小度为 k 的1-平面图（对于 $k = 3, ...,7$），并给出了匹配大小的下界；对于 $k = 3, 4, 5$，这些下界是紧的 [6]。其次，Fabrici 等人证明，任何4-连通简单极大1-平面图都有一个哈密顿回路 [13]（事实上，“简单极大”可放宽为“在所有交叉点处，端点诱导 K_4”）。因此，它有一个大小为 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 的匹配，这显然是紧的。

其他相关工作： 我们关于匹配数界的证明依赖于 Tutte-Berge 公式[2, 3], ，该公式将最大匹配的大小与 $\max_{S \subset V}\{\text{odd}(G \backslash S) - |S|\}$ 联系起来，其中 $\text{odd}(G \backslash S)$ 表示 $G \backslash S$ 中具有奇数基数的连通分支数。然而，在几乎所有证明中，我们实际界定的是 $\max_S\{\text{comp}(G \backslash S) - |S|\}$，其中

comp($G\backslash S$) $\geq$ odd($G\backslash S$) 表示 $G\backslash S$的连通分支数，即同时计算具有偶数和奇数基数的连通分量。

有许多结果研究 comp($G\backslash S$) 与 $|S|$之间的关系。图的坚韧度 [9]定义为 $\max_{\emptyset\neq S\subset V}\{$ comp($G\backslash S$)/$|S|\}$。关于坚韧度已有许多研究成果，Bauer 等人 [1]对此作了综述。另一个相关概念是 ℓ-连通度 [8, 20], ，其定义为使 comp($G\backslash S$) $\geq \ell$成立的最小 $|S|$ 。关于这一概念及广义连通度的相关概念，详见 Li 和 Wei [16]的综述。

尽管坚韧度和 ℓ-连通度都涉及 comp($G\backslash S$) 与 $|S|$之间的关系，但坚韧度使两者的比值最大化，而 ℓ-连通度则针对给定的 comp($G\backslash S$) 值使$|S|$ 最小化。两者都不能直接推出关于二者之差的结果，因此据我们所知，本文的结果（对某些 1-平面图类中的 comp($G\backslash S$) $-|S|$ 给出了界）是新的。

2 预备知识

设 $G=(V,\ E)$ 是一个有 n 个顶点的图。我们假定读者熟悉图论中的基本术语，例如连通性；详情请参见 [11] 。如果一个图既没有环也没有平行边，则称为简单 图。在本文的大部分内容中，输入图是连通的、简单的，且具有 $n\geq 3$。不过，我们有时会在输入图中添加平行边（绝不添加环），也会考虑可能不连通或顶点很少的子图，因此，除非另有说明，我们的论断均适用于具有 $n\leq 2$ 的不连通非简单图。

图 G 的匹配 M 是一个边的集合，其中任意两条边都没有公共端点。如果一个顶点与 M 中的一条边关联，则称该顶点已匹配 ；否则称为未匹配 。我们用$\mu(G)$ 表示 G 的最大匹配的大小。

图 G 的连通分支 是一个极大的连通子图；如果它的顶点数为奇数，则称其为奇数 。我们分别用 comp(G) 和 odd(G) 表示 G 的连通分支数和奇连通分支数。我们主要将这些术语用于子图 $G\backslash S$： 该子图由删除集合 S 中的顶点及其关联边后得到。著名的 Tutte-Berge 公式 [2, 3] 将奇分支数与最大匹配的大小联系起来。

定理1 （Tutte-Berge 公式）。 我们有 μ（G） $=\frac{1}{2}\max_{S\subseteq V}\{|V|+|S|-$ 奇数（$G\backslash S$）$\}$。等价地，任意最大匹配都有$\max_{S\subseteq V}\{$奇数（$G\backslash S$） $-|S|\}$ 个未匹配顶点。

若顶点集 S 满足 comp($G\backslash S$) $>$ comp(G)，则称其为割集 ； 若$|S|=1$ ，则称其为割点 ；若 $|S|=2$，则称其为割点对 。若图 G 没有大小为 $k-1$ 或更小的割集，则称其为 k-连通 。

平面图和 1-平面图： 图的绘图 Γ 将顶点映射到 $\mathbb{R}^2$中的点，将边映射到 $\mathbb{R}^2$ 中的曲线，使边曲线连接相应的端点。所有绘图均假定为良好（例如参见 [21]），这意味着：(a) 任意两个顶点

点都不重合，且边曲线除端点外不与顶点相交；(b) 如果两条边曲线在点 p 相交，且该点不是公共端点，那么它们在p处交叉；(c) 如果三条或更多边曲线在点 p相交，那么 p 是这些曲线的公共端点；(d) 如果两条边 e，e'的曲线在点 $p \neq p'$相交两次，那么 e，e'是平行边，且 p，p'是它们的端点；(e) 如果边 e 的曲线在点 p自相交，那么 e 是一个环，且 p 是其端点。

我们通常将图论对象（顶点、边）与表示它的几何对象（点、曲线）视为等同。若每条边至多参与 k 个交叉点，则称这种绘图为 k-平面 绘图；本文中的所有绘图都是1-平面的，有时我们也只讨论0-平面（平面）绘图。若一个图有平面/1-平面绘图，则称其为平面/1-平面 图。我们有时也会宽泛地用“绘图”一词指其底层图；特别是，我们可以说一个1-平面绘图是3-连通的或简单的。

在以下定义中，固定一个图 Γ 的平面绘图，该图可以是非连通图。Γ 的面 是 $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ 的连通区域。对于一个面 F，令 $\mathrm{comp}(F)$ 表示其边界的连通分量数。面边界 是 F的边界，将其视为图中的一组回路（其中一些回路可能仅由一个顶点构成，也可能是同一条边被经过两次）。定义 F的度 $\deg(F)$为 $m_F + 2\,\mathrm{comp}(F) - 2$，其中 m_F 是面边界中的边关联数（重复经过的边计数两次）。例如，图1a中的面有 $m_F = 3$，且 $\mathrm{comp}(F) = 2$（其中一个回路仅由一个顶点构成），因此其度为5。[1] 以下公式众所周知（例如，文献 [4]中就用到了它），但由于我们将其用于可能规模较小或非简单的非连通图，因此我们在附录中给出证明；据我们所知，尚无证明表明该公式也适用于这种情形。

引理 2.1. 设 Γ 为一个具有 n 个顶点的平面绘图，f_d 为度数为 d的面的数量。那么 $\sum_d (d-2) f_d = 2n - 4$，即使 Γ 不是简单图或不连通，或 $n \leq 2$。

我们有时用度为d 的面 来表示度数为 d的面，尤其是在 $d \in \{2, 3\}$的情况下。三角剖分的平面绘图是指所有面度数均为 3 的平面绘图。在三角剖分图中，我们明确允许存在平行边和环，只要它们不构成度为 2 或度为 1 的面。二边形 是一个三角剖分的 面 F，其边界为一个简单 2-圈，即 F 与两条不同的平行边关联。（若 $n \geq 3$，则所有度为 2 的面都是二边形。）

若一个平面绘图是简单的，且无法在不破坏其平面性或简单性的情况下向其中添加边，则称其为简单极大平面绘图。众所周知，任何简单极大平面绘图 Γ 都是三角剖分的且为 3-连通。惠特尼定理 [23] 指出，因此底层图 G 具有唯一的平面绘图，即 G 的所有平面绘图都具有相同的面边界。

对于以下定义，固定一个 1-平面绘图 Γ。如果一条边包含交叉点，我们称其为交叉 边；否则称为不交叉 边。$\Gamma^\times$ 的平面化 $\Gamma^\times$ 是通过将每个交叉点替换为一个度为 4 的虚拟顶点而得到的平面绘图。Γ 的单元 是其面

[1]度的这个定义可能看起来不太寻常，但为了使引理 2.1 对非连通图也成立，这是必要的。对于简单图，一个等价的定义是，将 $\deg(F)$ 设为满足以下条件的 d 的数量：通过插入边，可以将 F分割成 $d-2$个三角形。但我们的图并不总是简单图。

平面化 $\Gamma^{\times}$中的面。 Γ 的一个单元的角点 是 $\Gamma^{\times}$中对应面的顶点；角点是 Γ的顶点或交叉点。如果一个单元的所有角点都是顶点，则称该单元为不交叉 单元；否则称为交叉 单元。平面绘图中的大多数术语都可以通过平面化 $\Gamma^{\times}$自然地推广到 1-平面绘图 Γ 中。例如， Γ 中一个单元的度 和胞腔边界，分别是 $\Gamma^{\times}$中对应面的度和面边界；如果 $\Gamma^{\times}$ 是三角剖分的，则称 Γ 为三角剖分的 。

假设 Γ 没有环，并考虑胞腔边界的一条回路。它必定包含至少一个顶点 z （否则某条边会与自身交叉）。此外，从z 沿边界行进，直到再次到达 z，途中必定会遇到至少另一个顶点 z'；否则，要么存在一个环，要么恰有一个交叉点（此时与 z 关联的两条边彼此交叉），要么有两个连续的交叉点（此时某条边被交叉不止一次）。

设 x 是 Γ中的一个交叉点，例如位于边(v_0， v_2)与(v_1， v_3)之间。我们称 v_0， v_1， v_2， v_3 为该交叉点的端点；在没有环的良好绘图中，这四个顶点互不相同。对于 $i = 0$，1，2，3，我们称边 $e =$(v_i， v_{i+1})（下标模4相加）为 x 的风筝边，如果 F的面 $\Gamma^{\times}$ 与(v_i， x)和(x， v_{i+1})关联，同时也与 e关联。面 F可以是无界面。若 Γ 的每个交叉点都有四条风筝边，我们就称其具有所有可能的风筝边。由于缺少风筝边意味着存在度数至少为4的单元，因此有：

观察 2.2. 在三角剖分的 *1*-平面绘图中，所有可能的风筝边都存在。

具有 $n \geq 3$ 的 1-平面简单图至多有 $4n - 8$ 条边 [7]，类似的证明表明，在任意 1-平面绘图中，它至多有 $4n - 8$ 个单元。我们通过给出一个加权版本来加强这一界。

引理 2.3. 设 Γ 是一个包含所有可能风筝边的 *1*-平面绘图。对于单元 L，令 $w_0(L)$:=1，若 L 交叉；否则令 $w_0(L) := 2(\deg(L)-2)$。则 $\sum_{L\in\Gamma} w_0(L) = 4n - 8$。

证明。 通过对每个交叉点 x 删除两条交叉边中的一条，构造另一个图形 Γ'。由于 x 的四条风筝边都存在，这会将四个交叉单元（总权重为 $4 \cdot 1$）替换为两个不交叉的 3 度胞腔（总权重为 $2 \cdot 2$），因此总权重保持不变。所得图形 Γ' 是平面的，而 Γ' 的任意面 F 的权重为 2(deg(F)−2)。因此，根据引理 2.1， $\sum_{L\in\Gamma} w_0(L) = \sum_{F\in\Gamma'} 2(\deg(F)-2) = 4n - 8$。 □

极大1-平面绘图与图： 如果1-平面绘图 Γ 表示一个简单图，且添加任意一条边都会使 Γ 简单性或1-平面性遭到破坏，我们就称它为简单饱和。与平面图不同，简单饱和1-平面绘图不一定是三角剖分的；例如，参见图1b。反过来，三角剖分的1-平面绘图也不一定是饱和的（它可能违反下文定义的条件（S_2））， 因此，与平面绘图不同，“简单饱和”与“三角剖分的”之间没有关联。为便于后文参考，我们记下简单饱和1-平面绘图的一些性质（称为（$S_{...}$），因为“S”让人联想到“饱和”）；图2对此作了说明。

观察2.4。 简单的*1*-平面绘图 Γ 是简单饱和的，当且仅当：*(S_1)* 对于任何关联两个顶点 $z_0 \neq z_1$的单元，边 (z_0, z_1) 存在，并且

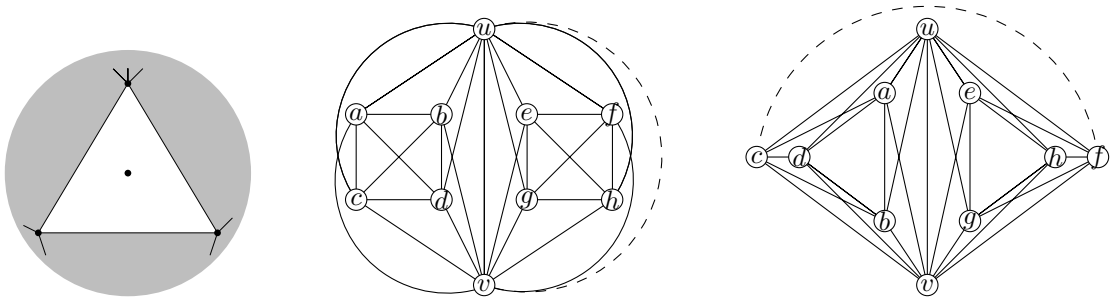


图1：（a）一个边界不连通且度为5的面。（b）一个图（实线）及其简单饱和1-平面绘图，只有添加一条平行边（虚线）才能使其成为三角剖分。（c）以另一种方式绘制同一个图，即可添加一条新边（虚线）。

(S_2) 对于任何有两个关联胞腔 L_0, L_1的不交叉边 (u, v) ，如果 L_i 包含一个顶点$z_i \neq u, v$，对于 $i = 0,1$，那么 $z_0 = z_1$ 或 (z_0, z_1) 存在。

此外，在任意简单饱和*1*-平面绘图中

(S_3) 没有胞腔边界是不连通的，且 *(S_4)* 没有单元与某个顶点存在多重关联。

证明。 如果 (S_1) 或 (S_2) 不成立，那么我们就可以添加一条新边 (z_0， z_1)。反过来，如果我们可以在 Γ 中添加一条新边 $e = (z_0, z_1)$，那么当 e 不交叉时，(S_1) 成立（在插入 e 的单元处）；当 e 交叉时，(S_2) 成立（在被 e 交叉的边 (u, v) 处）。

如果某个单元 L 的边界不连通，那么我们可以在它的每个回路上分别找到顶点 z_0， z_1，这与（S_1）矛盾，因为可以在L内画一条闭曲线，将 z_0， z_1 分隔开。如果 L 反复与顶点 v 关联，那么胞腔边界上 v 的两次出现之间的每一段都包含一个顶点，因此我们可以在 L上找到两个顶点 z_0， z_1，这与（S_1）矛盾，因为可以在 L内于 v 处画一个环，将 z_0， z_1 分隔开。 □

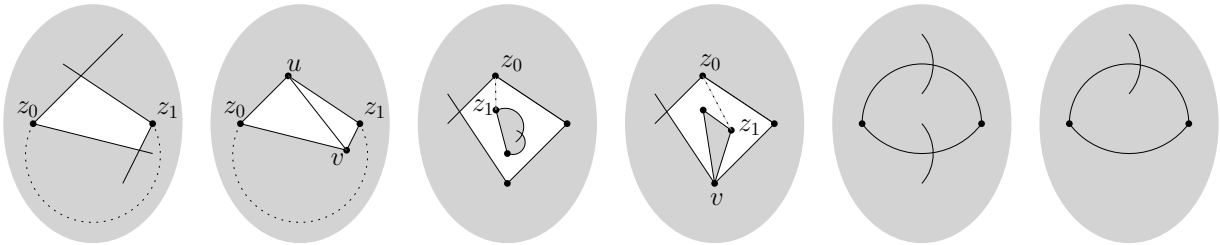


图2：违反我们某些性质的情形。虚线边并不存在（但本应存在）。

在三角剖分绘图中，(S_1)（因此 (S_3) 和 (S_4) 也）自动成立，因为只有三个角点的单元中不存在非相邻顶点。

如果一个 1-平面图 G 是简单图，且G 的每一个 1-平面绘图都是简单饱和的，则称其为简单极大 。请注意，这比“具有一个简单饱和的 1-平面绘图”条件更强；例如，图1b中的图具有图中所示的简单饱和1-平面绘图，但按照图1c所示的方式重新绘制后，还可以添加一条边，因此该图不是简单极大图。与平面图不同，即使是 3-连通的，简单极大1-平面图也不一定具有唯一的 1-平面绘图（图 8b 将给出一个具体例子）。

3 大匹配的存在性

本节中，我们证明表1中列出的关于 $\mu(G)$ 的下界。因此，假设给定一个 1-平面图 G ，它要么是简单极大的，要么带有一个简单饱和绘图 Γ_0。

我们先概述证明思路。与许多以往的匹配下界论文（例如参见 [4, 12,19]）一样，我们使用 Tutte-Berge 公式（定理1）。因此，要为最大匹配的大小建立下界，只需针对任意顶点集 S，找到 $\mathrm{odd}(G\backslash S)-|S|$ 的一个上界；而这又可通过为 $\mathrm{comp}(G\backslash S) - |S|$ 找到一个上界来实现。

为此，我们沿用 [4] 中的思路，以证明简单极大平面图 G 存在一个大小为 $\frac{n+8}{3}$ 的匹配。下面简要说明。取 G 的一个平面绘图 Γ ，并固定一个任意的顶点集 S。考虑诱导绘图 $\Gamma[S]$。这是一个平面绘图（可能不连通），其中有些面 覆盖 $V\backslash S$ 的顶点，即该顶点属于定义该面的 $\mathbb{R}^2$ 区域。令 $f_d^{\odot}$ 表示 $\Gamma[S]$ 中覆盖 $V\backslash S$ 顶点且度为 d 的面的数量。由于被覆盖的顶点构成 $G\backslash S$ [12] 的一个连通分量，因此 $\mathrm{comp}(G\backslash S) = \sum_d f_d^{\odot}$。结合这一点与 $\sum_d (d-2) f_d = 2|S|-4$，可得 $\mathrm{comp}(G\backslash S) - |S| \le \frac{1}{2} f_3^{\odot} - 2$。此外，$f_3^{\odot} \le \frac{1}{3}(2n-4)$，因为 $\Gamma[S]$ 中每个覆盖 $V\backslash S$ 顶点的面，至少覆盖 Γ 个面。这些不等式合起来得到 $\mathrm{odd}(G\backslash S) - |S| \le \mathrm{comp}(G\backslash S) - |S| \le \frac{n-8}{3}$，由此根据定理1可得匹配下界。

针对1-平面图 G 的论证基本上遵循相同的方法，但各个步骤要复杂得多。

- 如果没有给定，则固定 G 的一个1-平面绘图 Γ_0 。与平面图不同， Γ_0不一定是三角剖分的。我们将展示（在第3.1节中）如何通过添加平行边，在保持某些性质的同时，将 Γ_0 转换为三角剖分绘图 Γ。
- 对于给定的顶点集 S，子绘图 $\Gamma[S]$ 不一定是平面图，因此我们无法讨论其面。相反，我们定义了一个称为“补片”的概念（见第3.2节），这些补片大多对应于 $\Gamma[S]$ 的不交叉单元（或者实际上是 $\Gamma[S]$的一个子绘图 Γ_S 的不交叉单元），但有些补片对应于 Γ_S的交叉点。

- 由于我们向 Γ 添加了平行边，子绘图 Γ_S 可能会出现二边形。因此，$\mathrm{comp}(G\backslash S)$ 的上界 $-|S|$（平面图的上界为 $\frac{1}{2} f_3^{\odot} - 2$）变为 $|\mathcal{P}_2^{\odot}| + \frac{1}{2}|\mathcal{P}_3^{\odot}| - 2$，其中 $\mathcal{P}_d^{\odot}$ 是内部含有顶点且度为 d 的补片。不过

这还不够强，因此我们证明了一个更强的上界（见第 3.3 节中的引理 3.7），该上界考虑了更多类型的补片。

- 我们需要得到界 $f_3^{\odot} \le \frac{1}{3}(2n-4)$ 的等价形式。利用权函数 $w_0(\cdot)$ 和引理 2.3，很容易得到 $|\mathcal{P}_d^{\odot}|$ 的界，但这些界不够强，因此我们在 Γ 的各个单元之间转移一些权重，得到一个总权重不增加的新权函数 $w_\alpha(\cdot)$（第 3.4 节）。随后通过详尽的分类讨论，得到小补片权重的更好下界。

We 在第 3.5 节将所有结果整合起来，证明我们关于 $\mu(G)$ 的下界 .

3.1 图的三角剖分

首先，我们希望得到 G 的一个三角剖分的 1-平面绘图 Γ（如果 G 带有一个固定绘图 Γ_0，那么 Γ 应当是 Γ_0 的超绘图）。通过插入边，很容易将 1-平面绘图变为三角剖分的；但由于我们要求所得绘图满足某些性质（称为（$N_{...}$），因为这些性质与非简单性有关），这里我们重新回顾这一证明。我们先陈述这些条件（另见图2）：

定义 3.1. 定义 *1*-平面绘图的以下性质：

(N_1) 不存在环。*(N_2)* 如果一条边有两个或更多副本，那么至多一个副本交叉。*(N_3)* 如果一条边有两个或更多副本，那么所有副本都不交叉。

当然，(N_3) 蕴含 (N_2)，但只有在我们可以选择 Γ_0 时，才能保证 (N_3) .

引理 3.2. 设 Γ_0 是一个有 $n \ge 3$ 个顶点的简单饱和 *1*-平面绘图。那么存在一个三角剖分的 *1*-平面绘图 Γ，它由在 Γ_0 中添加不交叉的平行边得到，并且满足 *(N_1)-(N_2)* 以及 *(S_2)*。

证明。初始令 $\Gamma := \Gamma_0$。由于 Γ_0 是简单的，它满足 (N_1)-(N_2)。它同样没有二边形，并且由于 Γ_0 是简单饱和的，它满足 (S_1)-(S_4)；添加边时我们将保持所有这些性质。现在假设 Γ 尚未完成三角剖分。由于不存在二边形且 $n \ge 3$，Γ 的某个单元 L 必须具有 4 或更大的度。根据 (S_3)-(S_4)，L 的边界是一个不重复顶点的单一回路。由 $\deg(L) \ge 4$，它必定包含两个不相邻的顶点 z_0、z_1，因为不存在相邻交叉点。根据 (S_1)，Γ 中存在一条边 (z_0, z_1)。令 Γ' 为通过在 L 内插入 (z_0, z_1) 的一个新副本而由 Γ 得到的绘图。新边 e 没有交叉点，并连接两个不同的不相邻顶点，因此 (N_1)-(N_2) 成立，且不存在二边形。添加一条边不会导致性质 (S_1) 和 (S_4) 被违反。性质 (S_2) 对 Γ 成立，因此在 Γ' 中只能在 e 处被违反，但若如此，(S_1) 就会在 L 处被违反，这不可能。

现在对 $\Gamma := \Gamma'$ 重复此过程，它的单元数比 Γ 多。由于 $\sum_L w_0(L) = 4n-8$，且每个单元的权重都为正（因为它的度至少为 3），单元数至多为 $4n-8$。因此，该过程最终会停止，得到一个三角剖分绘图。 □

如果我们可以选择初始图形，那么也可以实现 (N_3)。

引理 3.3。 设 G 是一个简单极大 *1*-平面图。那么存在一个超图G^+ ，它是通过添加平行边从 G 得到的；并且存在 G^+的三角剖分的 *1*-平面绘图 Γ ，该绘图满足 (N_1)-(N_3)以及 (S_2)。

证明。 固定 G 的一个 1-平面绘图 Γ_0 ，使交叉边的数量最少，并令Γ 为利用引理 3.3 从 Γ_0 得到的 1-平面绘图。我们只需论证 (N_3)成立。只有在 $\Gamma \setminus \Gamma_0$的一条边 e 处，该条件才可能不成立；所有其他边都没有平行副本。边 e 在 Γ中未交叉。若 Γ中存在 e 的一条交叉副本 e' ，那么由于我们只添加未交叉边，Γ_0 中也存在 e' 。但这样一来，我们就可以取 Γ_0，删除 e' 并添加 e，从而得到 G 的一个交叉边更少的绘图。矛盾。 □

由于我们通过添加平行边创建了三角剖分绘图 Γ ，因此有$\mu(\Gamma) = \mu(G)$，所以只需给出 μ (Γ)的上界。

3.2 Γ_S、补片及其覆盖的连通分量

因此，从现在起，我们将处理满足(S_2)、(N_1)、(N_2)以及（可能还满足）(N_3)的三角剖分的 1- 平面绘图 Γ 。不过，下面的许多论断即使不具备其中某些性质也成立（例如，在引理 3.7 之前允许存在环），因此我们会在每条论断中明确列出所需的性质。

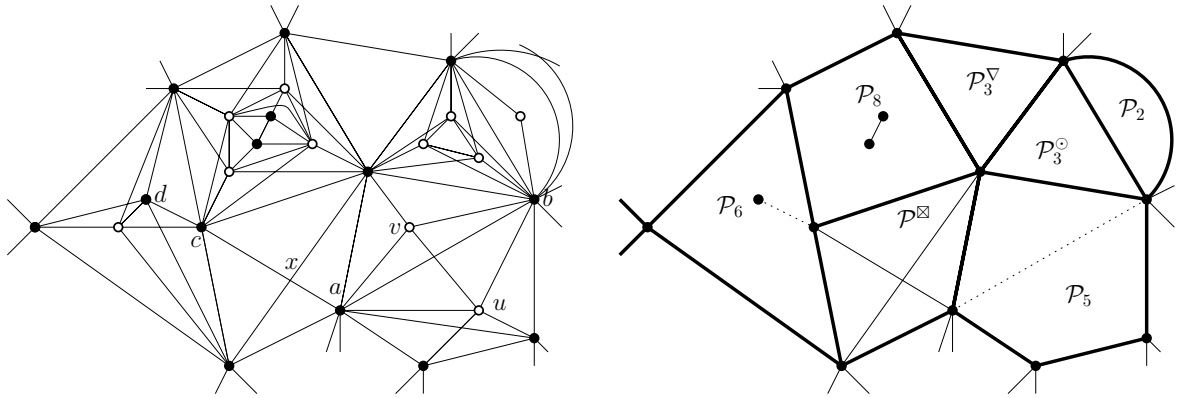
固定一个任意的顶点集 S；我们希望给出 comp(Γ$\setminus S$) $-|S|$的上界。我们通常会假设 comp(Γ$\setminus S$) ≥ 2 ；当我们在第 3.5 节汇总所有结果时，comp(Γ$\setminus S$) ≤ 1 的情形很容易单独处理。我们需要定义一个由 S 所蕴含的 Γ 的子绘图，后面将起到关键作用。

定义 3.4。 给定一个三角剖分的 *1*-平面绘图 Γ 和一个顶点集 S，如下定义子绘图 Γ_S 。

1. 从由 S 的顶点所诱导的子绘图 $\Gamma[S]$ 开始。*2.* 删除被 Γ 中某条边 (u, v) 交叉的任意边，其中 $u \notin S$ 或 $v \notin S$。例如，参见图*3*中的边 (a, b) 。*3.* 删除任意一条与图形中同一个单元关联两次的未交叉边。例如，参见图*3*中的边 (c, d) 。

图3b 展示了图形 Γ_S。由于 Γ_S 的所有顶点都在 S 中， Γ_S 的任意交叉 x 都是纯S交叉：其所有端点都在 S 中。此外，根据观察 2.2， x 的四条风筝边都在 Γ_S 中，因为它们已存在于 Γ 中。令交叉补丁 P_x 为由 x 的四条风筝边定义的 4-圈（这些边均未交叉），并令由 P_x 覆盖的单元为 Γ 中与 x 关联的四个单元。令 $\mathcal{P}^{\boxtimes}$ 为所有交叉补丁构成的集合。

L 中不与纯 S 交叉关联的任何单元都是不交叉的。令 L 的面补丁P_L 为 L的胞腔边界，即一组回路。由于 L 不交叉， P_L 的所有边在 Γ_S 中都不交叉；根据定义 3.4 的步骤 2，它们在 Γ 中也不交叉。根据定义 3.4 的步骤 3， P_L 不会重复经过任何边。令被.....覆盖的单元 P_L



(a) (b)

图3：（a）1-平面绘图的一部分。S 中的顶点为黑色。（b）图 Γ_S，补丁以粗体显示。边（a，b）和（c，d）属于 $\Gamma[S]$，但不属于 Γ_S。标记为 $\mathcal{P}_8$ 的面补丁 P 的连通分支数 comp(P) 为 $= 2$（其中一条回路两次经过同一条边），因此 deg(P) $= 8$。

为 Γ 中包含于单元 L的所有单元。根据定义，面补丁 P_L 是一组回路；但由于它对应于 Γ 中的一个单元 L，我们将诸如度、二边形 和连通分支数 comp(·) 这样的表达从单元 L 转移到补丁 P_L上。另见图3b。令 $\mathcal{P}_d$ 为度数为 d的面补丁集合。

注意，Γ 的每个单元恰好由 Γ_S的一个补丁覆盖。扩展“覆盖”的概念，我们称补丁 P 覆盖顶点 $v \in V\backslash S$，如果 v 与一个由 P覆盖的单元关联；这只有在 P 是面补丁，且 v 位于定义 Γ_S 的单元的 $\mathbb{R}^2$ 区域内，而该单元又定义了 P时才可能。若 x 与一个由 P覆盖的单元关联，则称单元 P覆盖 Γ 的交叉点 x。（由于任意补丁的边均不交叉，x 处的四个单元都由同一个补丁覆盖。）现在我们想进一步将“覆盖”的概念扩展到 $\Gamma\backslash S$的连通分量，并且必须论证这一定义是良定义的。

引理 3.5。设 Γ 是一个三角剖分的 *1*-平面绘图，且 S 是一个顶点集。那么对于 $\Gamma\backslash S$ 的每个连通分量 C，C 的所有顶点都由 Γ_S 的同一个面片覆盖。

证明。反设两个不同的面片 P_v 和 P_w 分别覆盖 C 中的顶点 v 和 w，并设 L_v 和 L_w 是 Γ_S 中分别定义了 P_v 和 P_w 的单元。设 π 是 v 到 w 的一条路径，且位于 C 内，因此不经过 S 中的顶点。路径 π 从单元 L_v 内部开始，在其外部结束，因此必然要经过 L_v 的边界。但这是不可能的：P_v 的顶点位于 S 中（因而不在 π 上），且 P_v 的边在 Γ 中是不交叉的。□

如果补片 P 覆盖一个连通分量 C of $\Gamma\backslash S$，我们称之为覆盖 $\Gamma\backslash S$ 的一个连通分量 C，如果 C 的所有顶点都由 P 覆盖。

引理 3.6。设 Γ 是一个三角剖分的 *1*-平面绘图，且 S 是一个顶点集。那么 Γ_S 的每个面片至多覆盖 $\Gamma\backslash S$ 的一个连通分量。

证明。Dillencourt 对平面图 [12], 证明了一个等价结果，其思路是利用平面化将其推广到 1-平面图。因此，设 $C_1, \ldots, C_k$ 是被面补丁 P 覆盖的$\Gamma\backslash S$ 的连通分量，并反设 $k \geq 2$。

考虑 Γ 的平面化 $\Gamma^\times$，它是一个三角剖分平面图形；设 $\Gamma_S^\times$ 为 $\Gamma^\times$ 中对应于 Γ_S的子绘图。面补丁 P 对应于 Γ_S的一个未交叉单元，因此对应于 $\Gamma_S^\times$ 的一个面 F。由于 C_i 中的每个顶点（对于 $i=1,\dots,k$）也存在于$\Gamma^\times$ 中，因此它属于 $\Gamma^\times \setminus S$ 中被 F 覆盖的某个连通分量 $C_i^\times$。由于 $\Gamma^\times$ 是平面三角剖分的，$\Gamma^\times\backslash S$的任一面至多覆盖一个连通分量 [12],，因此$C_1^\times = \cdots = C_k^\times =: C^\times$。

这并不能完全推出 $k=1$，因为 $C^\times$ 也有虚拟顶点，这些顶点可能在 $\Gamma^\times$ 中建立 Γ中原本不存在的连接。但这意味着，$C_1 \cup \cdots \cup C_k$中的任意两个顶点都可以通过 $C^\times$中的一条路径连接起来。设 π 是 $C^\times$ 中的一条最短路径，它连接顶点 $v_i \in C_i$ 与 C_j 中某个满足 $1 \le i \ne j \le k$ 的顶点 v_j。由于 π 是最短的，它只能经过虚拟顶点和 v_i，v_j。由于在 1-平面绘图中，任意两个虚拟顶点都不相邻，因此 $\pi = \langle v_i, v_j\rangle$ 或对于某个交叉点x 处的虚拟顶点 d，有 $\pi = \langle v_i, d, v_j\rangle$ Γ。前一种情况意味着存在一条边 $(v_i,\ v_j)$。后一种情况下，x 处的所有风筝边都存在，因此在 Γ中，边 $(v_i,\ v_j)$ 同样存在（交叉或不交叉）。这与 v_i，v_j 属于 $\Gamma\backslash S$的不同连通分量矛盾。

□

3.3 面补丁的类型

利用引理 3.6，我们可以立即用面补丁的数量来界定 comp($\Gamma\backslash S$)，但我们需要更强的界。回顾引理 2.3 中的权重函数：如果单元 L 是交叉的，则 $w_0(L)=1$；否则，$w_0(L)=2(\deg(L)-2)$。（由于 Γ 是三角剖分的，这意味着$w_0(L)=2$，对 Γ的所有未交叉单元都成立。）我们可以将此权函数扩展到补片 $P\in\mathcal{P}$：令 $w_0(P)$ 等于 P 所覆盖的所有单元的权重之和；也可以扩展到整个图形Γ，将 Γ中所有单元的权重相加；根据引理 2.3，我们知道 $w_0(\Gamma)=4n-8$。

回顾一下，$\mathcal{P}_d$ 表示度为 d 的面补丁。令 $\mathcal{P}_d^\odot$ 表示 $\mathcal{P}_d$ 中所有至少覆盖一个顶点（因此恰好对应 $\Gamma\backslash S$ 的一个连通分量）的面补丁。对于 $d\ne 3$，我们有 $\mathcal{P}_d^\odot=\mathcal{P}_d$，否则 Γ 就会有一个度为 $d\ne 3$ 的单元。但对于 $d=3$，这种区分很重要：$\mathcal{P}_3^\nabla := \mathcal{P}_3\backslash\mathcal{P}_3^\odot$ 中的补片对应于 Γ_S 中同时也是 Γ的单元、且不覆盖任何连通分量的 3度面；而$\mathcal{P}_3^\odot$中的补片则是 Γ_S 中不属于 Γ 的、并覆盖一个连通分量的 3度面。另见图3b。

引理 3.7。设 Γ 是一个三角剖分的 *1*-平面绘图。那么，对于任意满足连通分支数($\Gamma\backslash S$) ≥ 2 的顶点集 S，我们有 连通分支数($\Gamma\backslash S$) $-|S| \le \frac{1}{2}\big(\sum_d (4-d)|\mathcal{P}_d^\odot| - 2|\mathcal{P}^\boxtimes| - |\mathcal{P}_3^\nabla|\big) - 2$.

证明。由引理 3.5 和 3.6 可知，$\Gamma\backslash S$ 的每个连通分量都被一个面补丁覆盖，且没有面补丁覆盖其中两个。因此，comp($\Gamma\backslash S$) $\le \sum_d |\mathcal{P}_d^\odot|$. 此外，由引理 2.3 可得 $4|S|-8 = \sum_{\text{单元 } L \text{ 的 } \Gamma_S} w_0(L) = 4|\mathcal{P}^\boxtimes| + \sum_d 2(d-2)|\mathcal{P}_d|$，因为每个交叉片中有四个 Γ_S 的交叉单元，而 Γ_S 的一个未交叉单元 L 的权重为 2(deg(L) − 2)，并对应于 $\mathcal{P}_{\deg(L)}$中的一个面补丁。最后，我们知道 $|\mathcal{P}_d| = |\mathcal{P}_d^\odot|$ 对于 $d\ne 3$，并且

$|\mathcal{P}_3| = |\mathcal{P}_3^{\odot}| + |\mathcal{P}_3^{\nabla}|$。综上所述，因此

$$\begin{aligned} 4\big(\operatorname{comp}(\Gamma\backslash S) - |S|\big) &\le 4\sum_d |\mathcal{P}_d^{\odot}| - (4|S| - 8) - 8 \\ &= 4\sum_d |\mathcal{P}_d^{\odot}| - \Big(4|\mathcal{P}^{\boxtimes}| + \sum_d 2(d-2)|\mathcal{P}_d|\Big) - 8 \\ &= 4\sum_d |\mathcal{P}_d^{\odot}| - 4|\mathcal{P}^{\boxtimes}| - \sum_d 2(d-2)|\mathcal{P}_d^{\odot}| - 2|\mathcal{P}_3^{\nabla}| - 8 \end{aligned}$$

重新整理后即可得到结论。 □

由此，对 $\operatorname{comp}(\Gamma\backslash S) - |S|$ 进行上界估计的问题转化为对每种补片数量进行上界估计的问题；而要做到这一点，只需找到权重的下界。例如，由于（正如我们将看到的） $w_0(P) \ge 6$ 对所有 $P \in \mathcal{P}_3^{\odot}$ 都成立，因此有 $|\mathcal{P}_3^{\odot}| \le \frac{1}{6} w_0(\Gamma) = \frac{2n-4}{3}$。我们尤其需要对度较小的补片的权重给出界，因此需要了解这类补片可能呈现的形式。以下结果（见图 4）显然成立；为求完整，我们在附录中给出证明。

Obse观察 3.8。 假设 $\operatorname{comp}(\Gamma\backslash S) \ge 2$ 且不存在环。那么

1. 任意度为 *2* 的面补丁都是简单 *2*-圈，即二边形；*2.* 任意度为 *3* 的面补丁都是简单 *3*-圈；*3.* 任意度为 *4* 的面补丁要么是简单 *4*-圈，要么是由四条不同边和三个顶点构成的回路，要么由两个回路组成，其中一个由两条平行边构成，另一个是单顶点。

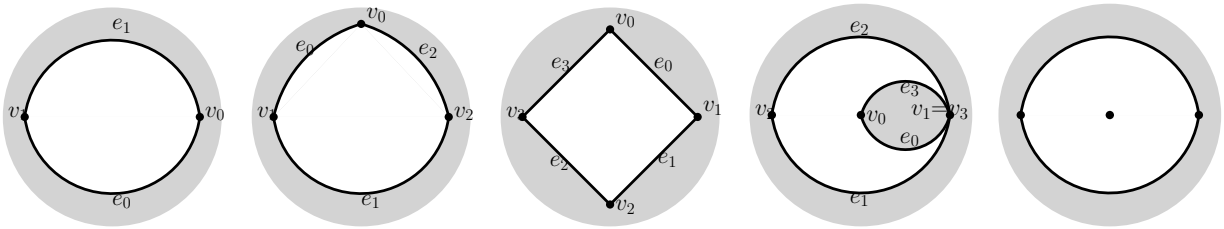


图 4：度为 2、3、4 的补片（白色）的可能构型。

我们首先 以较弱的形式重新表述引理 3.7，这种形式几乎总是适用。 s.

推论 3.9。 设 Γ 是一个无环的三角剖分的 *1*-平面绘图。那么，对于任意满足 连通分支数$(\Gamma\backslash S) \ge 2$ 的顶点集合 S，有 连通分支数 $(\Gamma\backslash S) - |S| \le |\mathcal{P}_2| + \frac{1}{2}|\mathcal{P}_3^{\odot}| - \frac{1}{2}|\mathcal{P}^{\boxtimes}| - \frac{1}{4}|\mathcal{P}_3^{\nabla}| - 2$。若 Γ 是 *3*- 连通的，则有 连通分支数$(\Gamma\backslash S) - |S| \le \frac{1}{2}|\mathcal{P}_3^{\odot}| - \frac{1}{2}|\mathcal{P}^{\boxtimes}| - \frac{1}{4}|\mathcal{P}_3^{\nabla}| - 2$.

证明。 如果 Γ 没有环，那么 $\mathcal{P}_1 = \emptyset$。如果 Γ 是 3-连通的，那么 $\mathcal{P}_2 = \emptyset$；否则，根据 $\operatorname{comp}(\Gamma\backslash S) \ge 2$，在 $\mathcal{P}_2$ 中围成补片的二边形内外都会有顶点，从而其上的两个顶点构成一个割点对。这些界可通过从引理 3.7 的不等式中省略若干负项得到。 □

现在我们来界定若干类型补片的权重。

引理 3.10. 假设连通分支数$(\Gamma\backslash S) \geq 2$ 且不存在环。设 P 是 $\mathcal{P}_d^{\odot}$ 中关于 $d \in \{2,3,4\}$ 的一个面补丁，且 $Z(P)$ 是被 P 覆盖的顶点。则 $w_0(P) = 4|Z(P)| + 2(d-2)$。

证明。设 Γ_P 是由 P 及所有被 P 覆盖的单元构成的 Γ 的子绘图。由引理 2.3 可得 $w_0(\Gamma_P) = 4|V(P)| + 4|Z(P)| - 8$，其中 $V(P)$ 表示位于 P 上的顶点集。将 Γ_P 中所有未被 P 覆盖的单元的权重减去后，即可得到 $w_0(P)$ 的一个上界。

首先假设 P 是一个简单的 d-环。那么，Γ_P 中唯一未被 P 覆盖的单元 L，就是这个 d-环的另一侧，其权重为 $w_0(L) = 2(d-2)$。此外，$|V(P)| = d$，因此 $w_0(P) = 4d + 4|Z(P)| - 8 - 2(d-2)$，如所需。

如果 P不是一个简单的 d-圈，那么根据观察 3.8，有 $d = 4$ 和 $|V(P)| = 3$。此外，Γ_P 中所有未被 P 覆盖的单元都是权重为 0 的二边形，因此 $w_0(P) = w_0(\Gamma) = 4 \cdot 3 + 4|Z(P)| - 8$，如所需。□

由于 $\mathcal{P}_d^{\odot}$ 中的任意补片至少覆盖一个顶点，引理 3.10 意味着，对于$P \in P_2$，有 $w_0(P) \geq 4$；对于 $P \in P_3^{\odot}$，有 $w_0(P) \geq 6$。由于权重非负，对于任意补片，我们还有 $w_0(P) \geq 0$。由此，我们可以得到关于匹配的第一个下界。

定理 2。 设 Γ 是一个 *3*-连通简单饱和 *1*-平面绘图，且 $n = 8$ 或 $n \geq 10$。那么 Γ具有一个大小至少为 $\frac{n+4}{3}$ 的匹配。

证明。根据引理 3.2，我们不妨假设 Γ 是三角剖分的且没有环；否则，我们可以通过添加平行边使其满足这些条件，而这不会影响匹配大小。令 M 为 Γ 的一个最大匹配；根据 Tutte-Berge 公式，$|M| = \frac{1}{2}(n - \text{奇数}(G\backslash S) + |S|)$，其中 $S \subseteq V$ 是某个集合。因此，只需证明对于任意 $S \subseteq V$，奇数$(G\backslash S) - |S| \leq \frac{n-8}{3}$；我们将（主要）改为对连通分支数$(G\backslash S) - |S|$ 作上界估计。

首先假设连通分支数$(\Gamma\backslash S) \geq 2$。那么根据引理 3.10，

$$4n - 8 = \sum_{P \in \mathcal{P}} w_0(P) \quad \geq \quad 4|\mathcal{P}_2| + 6|\mathcal{P}_3^{\odot}| + \sum_{\text{patch } P \notin \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3^{\odot}} 0 \quad \geq \quad 6|\mathcal{P}_3^{\odot}|.$$

By 推论 y 3.9 因此，奇数$(G\backslash S) - |S| \leq$连通分支数$(G\backslash S) - |S| \leq \frac{1}{2}|\mathcal{P}_3^{\odot}| - 2 \leq \frac{1}{12}(4n-8) - 2 = \frac{n-8}{3}$.

现在考虑 comp$(G\backslash S) \leq 1$ 的情形。如果 $n \geq 11$，则 comp$(G\backslash S) - |S| \leq 1 \leq \frac{n-8}{3}$ 自动成立。否则 $n = 8$，10，且 comp$(G\backslash S) \leq 1$ 意味着 odd$(G\backslash S) \leq |S|$，因为我们（根据 n，甚至）只有在 S 非空时，才可能有一个奇分支。因此 odd$(G\backslash S) - |S| \leq 0 \leq \frac{n-8}{3}$，因为 $n \geq 8$。□

3.4 重新分配权重

定理 2 的界（尤其是对于 $P \in \mathcal{P}_3^{\odot}$，$w_0(P) \geq 6$ 这一界）是紧的，另见第 4 节中的定理 8。为了在图形不是 3-连通，或可以选择图形时证明匹配界，我们必须给 $\mathcal{P}_2$ 和 $\mathcal{P}_3^{\odot}$ 中的补片分配更多权重，同时保持

总权重不变。为了定义这种权重转移，我们需要几个定义，图5对此作了说明。令 E_T（即 转移边）为所有属于 $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3^{\odot}$ 中补片的边。令 $\mathcal{T}$（即 转移单元）为 Γ 中所有与转移边关联的单元。我们将转移单元分为三类： $\mathcal{T}^{\times}$ 是交叉的转移单元， $\mathcal{T}^{\triangledown}$ 是不交叉且仅使用 S 中顶点的转移单元（因此它们对应于 $\mathcal{P}_3^{\triangledown}$ 中的补片），而 $\mathcal{T}^{\circ}$ 是 $\mathcal{T}$ 中其余的单元（它们是不交叉的，且恰有一个顶点不属于 S，因为转移边连接的是 S 中的顶点）。

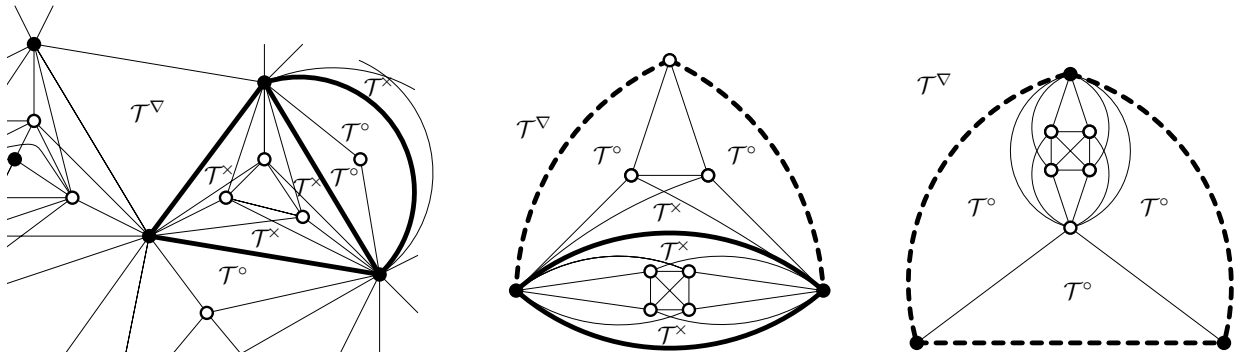


图5：转移边（粗体）和转移单元的类型。未标注的单元不在 $\mathcal{T}$ 中。(a) 图3的局部放大图。(b) $\mathcal{T}^{\triangledown}$ 中的一个单元可以与两条转移边关联，另一端的单元位于 $\mathcal{T}^{\circ}$ 中（虚线）；但如果像 (c) 那样有三条此类边，则 $\mathrm{comp}(\Gamma \backslash S) = 1$。

我们定义一个新的权函数 $w_\alpha(\cdot)$，它取决于满足 $0 \le \alpha \le 3$ 的参数 α。表2给出了定义以及之后将用到的 $\alpha \in \{\frac{4}{3}, 2, 3\}$ 的取值。为了说明 $w_\alpha(\cdot)$ 可以看作是通过转移边转移权重，我们需要一些观察结果。

	L 转移单元			L 非转移单元	
	$L \in \mathcal{T}^{\times}$	$L \in \mathcal{T}^{\triangledown}$	$L \in \mathcal{T}^{\circ}$	L交叉	L 不交叉
$w_\alpha(L)$: $=$	$w_0(L) - \alpha$ $= 1 - \alpha$	$w_0(L) - 2\alpha$ $= 2 - 2\alpha$	$w_0(L) + \alpha$ $= 2 + \alpha$	$w_0(L)$ $= 1$	$w_0(L)$ $= 2$
$w_{4/3}(L)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$	1	2
$w_2(L)$	-1	-2	4	1	2
$w_3(L)$	-2	-4	5	1	2

表2：各种类型单元 L 的 $w_\alpha(L)$ 定义。

断言3.11。 若 连通分支数$(\Gamma \backslash S) \ge 2$ 且 (N_1),(S_2) 成立，则对于任意转移边 e，至少有一个与其关联的转移单元属于 $\mathcal{T}^{\times}$ 或 $\mathcal{T}^{\triangledown}$。

证明。 设 L_0, L_1 是与 e 相 incident 的两个转移单元，并反设它们都在 $\mathcal{T}^{\circ}$ 中。对于 $i = 0, 1$，令 z_i 为 L_i 中不在 S 中的顶点，另见图6a。

令 $P \in \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3^{\odot}$ 为导致 e 成为转移边的补片；根据观察 3.8，这是一个由未交叉边组成的简单环。由于 z_0，$z_1 \notin S$，它们不在 P 中，因此被其分隔。这与 (S_2) 矛盾，因为 $z_0 \neq z_1$ 和 (z_0，z_1) 都不可能是边。 □

根据 $w_\alpha(\cdot)$ 的定义，任意单元 $L \in \mathcal{T}^{\circ}$ 都会收到 α 个单位的权重（与 $w_0(\cdot)$ 相比）。由于 L 是转移单元，它必定关联一条转移边 e；根据断言3.11，另一个与 e 关联的单元 L' 属于 $\mathcal{T}^{\times}$ 或 $\mathcal{T}^{\nabla}$，因此至少损失 α 个单位的权重。但我们必须说明，单元 L' 损失的权重不会被过多的转移边使用。对于 $\mathcal{T}^{\times}$，这一点显而易见；但对于 $\mathcal{T}^{\nabla}$，则完全不那么显而易见。

观察 3.12. 若 $L' \in \mathcal{T}^{\times}$，则 L' 至多有一条关联边是转移边，且该边关联一个属于 $\mathcal{T}^{\circ}$的单元。

证明. 单元 L' 有交叉且度为 3，因此只有一条可能成为转移边的未交叉边。

□

对于 $\mathcal{T}^{\nabla}$中的单元，可能有两条这样的关联边（见图 5b），但不会有三条。

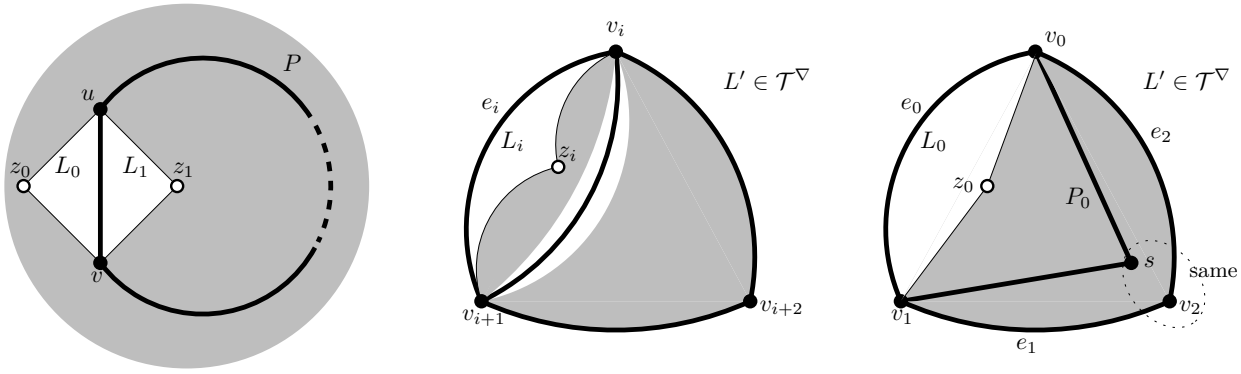
断言 3.13. 若 连通分支数($\Gamma \backslash S$) ≥ 2 且 (N_1),(S_2) 成立，则对于任意转移单元 $L' \in \mathcal{T}^{\nabla}$，至多有两条关联边是关联到 $\mathcal{T}^{\circ}$ 中某个单元的转移边。

证明。 由于单元 L' 对应于补片 $P' \in \mathcal{P}_3^{\nabla}$，它由一个简单 3-圈围成，该圈的三条边均未交叉：e_0，e_1，e_2 （观察 3.8）。图 6b、6c 展示了这一情形，其中 L' 为无界面。假设对所有 $i \in \{0,1,2\}$，边 e_i 都是转移边，且其另一个关联单元 L_i 属于 $\mathcal{T}^{\circ}$；否则结论已成立。记 $e_i =$ （v_i，v_{i+1}）（模 3 加法），并令 z_i 为 L_i 中不属于 S 的顶点。因此 $z_i \neq v_{i+2} \in S$，所以根据 (S_2)（应用于边 e_i），边 (z_i，v_{i+2}) 必须存在。这本身并不矛盾（参见图 5c 中的例子），但它与连通分支数($\Gamma \backslash S$) ≥ 2 矛盾。

我们将证明，对于某个 $i \in \{0,1,2\}$，存在一条由 Γ 的未交叉边构成的闭曲线 $\mathcal{C}_i$，将 z_i 与 v_{i+2} 分隔开；这会导致矛盾，因为这样一来 (z_i, v_{i+2}) 就不可能存在。为找到这条曲线，令 $P_0 \in \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3^{\odot}$ 为导致 e_0 成为转移边的补片。补片 P_0 必须覆盖单元 L_0，因为单元 L' 已由补片 $P' \in \mathcal{P}^{\nabla}$ 覆盖。若 $P_0 \in \mathcal{P}_2$，则它是一个简单 2-圈；这就是我们所需的曲线（见图 6b）。若 $P_0 \in \mathcal{P}_3^{\odot}$，则对于某个 $s \in S$，它是一个简单 3-圈$\langle v_0, v_1, s\rangle$。若 $s \neq v_2$，那么 P 就是我们所需的曲线，因此假设 $s = v_2$。若 P_0 使用完全相同的边 e_0、e_1、e_2 来围成 L'，那么 Γ_S 只有两个补片：P_0 和 P'。但此时 comp($\Gamma \backslash S$) $= 1$，因为 $P' \in \mathcal{P}_3^{\nabla}$，再次产生矛盾。因此我们可以假设 P_0 没有使用 e_1、e_2 中的一条，这意味着对于某个 $i \in \{1,2\}$，存在一个平行无交叉副本 (v_i, v_{i+1})，而曲线 $\mathcal{C}_i$ 由这条边与 e_i 构成。 □

因此，$\mathcal{T}^{\times}$ 和 $\mathcal{T}^{\nabla}$ 中有足够的转移单元，可以为 $\mathcal{T}^{\circ}$提供权重增益。事实上，转移过程中可能会有一些权重“损失”，但这只会使不等式对我们更有利。我们将其总结为以下引理。

断言 3.14。 若 连通分支数($\Gamma \backslash S$) ≥ 2 且 (N_1),(S_2) 成立，则对于任意 $\alpha \geq 0$，有 $w_\alpha(\Gamma) \leq w_0(\Gamma) = 4n - 8$。



(a) (b) (c)

图6：（a）与转移边关联的两个单元不能同时属于 $\mathcal{T}^\circ$。（b）两条平行非交叉边将 z_i 和 v_{i+2} 分隔开。（c） $P_0 \in \mathcal{P}_3^\odot$ 意味着存在一条平行非交叉边。

证明。 根据 $w_\alpha(\cdot)$ 的定义，我们有 $w_\alpha(\Gamma) = w_0(\Gamma) + \alpha(|\mathcal{T}^\circ| - |\mathcal{T}^\times| - 2|\mathcal{T}^\nabla|)$。令 $E_T^\circ \subseteq E_T$ 表示在 $\mathcal{T}^\circ$ 中与单元关联的转移边。根据断言3.11，$e \in E_T^\circ$ 的一个关联单元恰好位于 $\mathcal{T}^\circ$ 中，另一个位于 $\mathcal{T}^\times \cup \mathcal{T}^\nabla$ 中。因此，根据观察 3.12 和断言 3.13，$|\mathcal{T}^\circ| \le |E_T^\circ| \le |\mathcal{T}^\times| + 2|\mathcal{T}^\nabla|$。由 $\alpha \ge 0$，故有 $w_\alpha(\Gamma) \le w_0(\Gamma) = 4n-8$。 □

现在的目标是针对每种补片类型 P，给出 $w_\alpha(P)$ 的下界。表 3 总结了结果，其中用 χ_{N_3} 表示特征函数（若 (N_3) 成立，则其值为 1；否则为 0）。我们还给出了稍后会遇到的具体情形的权重。遗憾的是，这些下界的证明虽然相对直接，却需要进行冗长的分类讨论，因此我们将其推迟到附录中的断言B.1–B.5。

$P \in$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_3^\odot$	$\mathcal{P}_4$	$\mathcal{P}_d$	$\mathcal{P}^\boxtimes$	$\mathcal{P}_3^\nabla$
$w_\alpha(P) \ge$	最小值$\{4+2\alpha,$ $12+4\chi_{N_3}-2\alpha\}$	最小值$\{6+3\alpha, 6+6\chi_{N_3}-\alpha,$ $10+4\chi_{N_3}-3\alpha\}$	0	最小值$\{0, (2-\alpha)d\}$	$4-4\alpha$	$2-2\alpha$
断言	B.4	B.3	B.5	B.2	B.1	B.1
$\alpha = \frac{4}{3}$,(N_3)	$\frac{20}{3}$	10	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$\alpha = 2$	8	4	0	0	-4	-2
$\alpha = 3$, (N_3)	10	5	0	$-d$	-8	-4

表 3：在假设 $0 \le \alpha \le 3$ 和连通分支数$(\Gamma \backslash S) \ge 2$以及 (N_1),(N_2) 成立的情况下， $w_\alpha(P)$ 的下界汇总。

3.5 剩余的匹配界

现在，我们通过为每个对象选择一个合适的参数 α，然后将断言 3.14 与补片权重的下界结合起来，证明剩余的匹配界。

定理 3。 设 Γ 是一个简单饱和*1*-平面绘图，且 $n = 6$ 或 $n \ge 8$。那么 Γ 至少有一个大小为 $\frac{n+6}{4}$ 的匹配。 —

证明。根据引理 3.2，我们可以假设 Γ 是三角剖分的，并满足 (N_1)-(N_2)；否则，我们可以通过添加平行边使其满足这些条件，而这不会影响匹配的大小。（Γ 不一定满足 (N_3)。）设 M 是 Γ 的一个最大匹配；根据 Tutte-Berge 公式，$|M| = \frac{1}{2}(n - \text{奇数}(G\backslash S) + |S|)$，其中 $S \subseteq V$ 是某个集合。因此，只需证明对于任意 $S \subseteq V$，奇数(S) $- |S| \leq {}^{n-6}_{2}$。

首先假设，连通分支数($\Gamma\backslash S$) ≥ 2。利用断言 3.14 和 $\alpha = 2$，根据表 3

$$4n - 8 \geq \sum_{P \text{ patch}} w_2(P) \quad \geq \quad 8|\mathcal{P}_2| + 4|\mathcal{P}_3^{\odot}| + 0|\mathcal{P}_4| - \sum_{d \geq 5} 0|\mathcal{P}_d| - 4|\mathcal{P}^{\boxtimes}| - 2|\mathcal{P}_3^{\nabla}|.$$

由推论 3.9，因此

$$\text{comp}(G\backslash S) - |S| \quad \leq \quad |\mathcal{P}_2| + \tfrac{1}{2}|\mathcal{P}_3^{\odot}| - \tfrac{1}{2}|\mathcal{P}^{\boxtimes}| - \tfrac{1}{4}|\mathcal{P}_3^{\nabla}| - 2 \leq \tfrac{1}{8}(4n-8) - 2 = \tfrac{n-6}{2}.$$

现在假设连通分支数($\Gamma\backslash S$) ≤ 1。若 $n \geq 8$，则自动有连通分支数($\Gamma\backslash S$) $\leq 1 \leq {}^{n-6}_{2}$。否则，我们有 $n = 6$，且奇数($G\backslash S$) $\leq |S|$，因为只有当 S 非空时，我们才能（甚至根据 n）得到一个奇分支。因此，奇数($G\backslash S$) $- |S| \leq 0 = {}^{n-6}_{2}$。 □

定理 4. 设 G 是一个 *3*-连通简单极大 *1*-平面图，且 $n \geq 16$ 或 n =12，14。那么 G 有一个大小至少为 ${}^{2n+6}_{5}$ 的匹配。

证明。利用引理 3.3，我们可以找到一个满足(N_1)- (N_3)的 1-平面三角剖分图形 Γ，它表示由 G 添加平行边后得到的图，因此 $\mu(\Gamma) = \mu(G)$。设 M是 Γ的一个最大匹配；根据 Tutte-Berge 公式，对于某个集合 $S \subseteq V$，有 $|M| = \frac{1}{2}(n - \text{奇数}(\Gamma\backslash S) + |S|)$。因此，只需证明对于任意 $S \subseteq V$，奇数($\Gamma\backslash S$) $- |S| \leq {}^{n-12}_{5}$。

首先假设 comp($G\backslash S$) ≥ 2。利用断言 3.14 和 $\alpha = \frac{4}{3}$，由表 3 可得

$$4n - 8 \geq \sum_{P \text{ patch}} w_{4/3}(P) \geq \tfrac{20}{3}|\mathcal{P}_2^{\odot}| + 10|\mathcal{P}_3^{\odot}| - \tfrac{4}{3}|\mathcal{P}^{\boxtimes}| - \tfrac{2}{3}|\mathcal{P}_3^{\nabla}| \geq 10|\mathcal{P}_3^{\odot}| - 10|\mathcal{P}^{\boxtimes}| - 5|\mathcal{P}_3^{\nabla}|.$$

由推论 3.9（且由于 G，因此 Γ 也为 3-连通），可得

$$\text{comp}(G\backslash S) - |S| \quad \leq \quad \tfrac{1}{2}|\mathcal{P}_3^{\odot}| - \tfrac{1}{2}|\mathcal{P}^{\boxtimes}| - \tfrac{1}{4}|\mathcal{P}_3^{\nabla}| - 2 \leq \tfrac{1}{20}(4n-8) - 2 = \tfrac{n-12}{5}.$$

现在考虑 comp($G\backslash S$) ≤ 1的情形。若 $n \geq 17$，则 comp($G\backslash S$) $- |S| \leq 1 \leq {}^{n-12}_{5}$。若 $n = 12$, ~~14,~~ 16，则 comp($G\backslash S$) ≤ 1 意味着 odd($G\backslash S$) $\leq |S|$，因为只有当 S 非空时，我们才能（由 n even）得到一个奇分支。因此 odd($G\backslash S$) $- |S| \leq 0 \leq {}^{n-12}_{5}$。 □

对于第四个界，我们需要充分运用引理 3.7。

定理 5。设 G 是一个简单极大 *1*-平面图，且 $n \geq 10$ 或 $n = 8$。那么 G 有一个大小至少为 ${}^{3n+14}_{10}$ 的匹配。

证明。利用引理 3.3，我们可以找到一个满足 (N_1)- (N_3) 的 1-平面三角剖分图 Γ，它表示由 G 添加平行边后得到的图，因此 $\mu(\Gamma) = \mu(G)$。令 M为 Γ的一个最大匹配；根据 Tutte-Berge 公式，对于某个集合 $S \subseteq V$，有 $|M| = \frac{1}{2}(n - \text{奇数}(\Gamma\backslash S) + |S|)$。因此，只需证明对于任意 $S \subseteq V$，奇数($\Gamma\backslash S$) $- |S| \leq {}^{2n-14}_{5}$。

首先假设连通分支数$(\Gamma\backslash S) \geq 2$。利用断言 3.14 和 $\alpha = 3$，由表 3 可得

$$\begin{aligned} 4n-8 \geq \sum_{P \text{ patch}} w_3(P) &\geq 10|\mathcal{P}_2| + 5|\mathcal{P}_3^{\odot}| + 0|\mathcal{P}_4| - \sum_{d\geq 5} d|\mathcal{P}_d| - 8|\mathcal{P}^{\boxtimes}| - 4|\mathcal{P}_3^{\nabla}| \\ &\geq 10|\mathcal{P}_2| + 5|\mathcal{P}_3^{\odot}| - \sum_{d\geq 5}(5d-20)|\mathcal{P}_d| - 10|\mathcal{P}^{\boxtimes}| - 5|\mathcal{P}_3^{\nabla}| \\ &= \sum_{d\geq 2}(20-5d)|\mathcal{P}_d^{\odot}| - 10|\mathcal{P}^{\boxtimes}| - 5|\mathcal{P}_3^{\nabla}| \end{aligned}$$

因为 $|\mathcal{P}_d| = |\mathcal{P}_d^{\odot}|$ 对于 $d \neq 3$，且 $d \leq 5d-20$ 对于 $d \geq 5$。由引理 3.7（并且由于在不含环的图中 $|\mathcal{P}_1| = 0$），因此

$$\operatorname{comp}(G\backslash S) - |S| \leq \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{d\geq 2}(4-d)|\mathcal{P}_d^{\odot}| - 2|\mathcal{P}^{\boxtimes}| - |\mathcal{P}_3^{\nabla}|\Big) - 2 \leq \tfrac{1}{10}(4n-8) - 2 = \tfrac{2n-14}{5}.$$

现在假设 $\operatorname{comp}(\Gamma\backslash S) \leq 1$。若 $n \geq 10$，则自动推出 $\operatorname{comp}(\Gamma\backslash S) - |S| \leq 1 \leq \frac{2n-14}{5}$。否则，我们有 $n = 8$；并且由于只有在 S 非空时，才能（依据 n even）有奇分支，因此 $\operatorname{odd}(G\backslash S) \leq |S|$。所以 $\operatorname{odd}(G\backslash S) - |S| \leq 0 \leq \frac{2n-14}{5}$。 □

我们的所有下界（定理 2、3、4、5）都排除 n 的某些较小取值。很容易说明这是必要的；我们只对定理 5 进行说明，其余留给读者。若 G 有一个大小至少为 $\frac{3n+14}{10}$ 的匹配 M，则由整数性可得 $|M| \geq \lceil \frac{3n+14}{10} \rceil$，因此至少有 $2\lceil \frac{3n+14}{10} \rceil$ 个顶点被匹配。若 $n = 9$ 或 $n \leq 7$，则 $2\lceil \frac{3n+14}{10} \rceil > n$，这意味着定理 5 不可能成立。

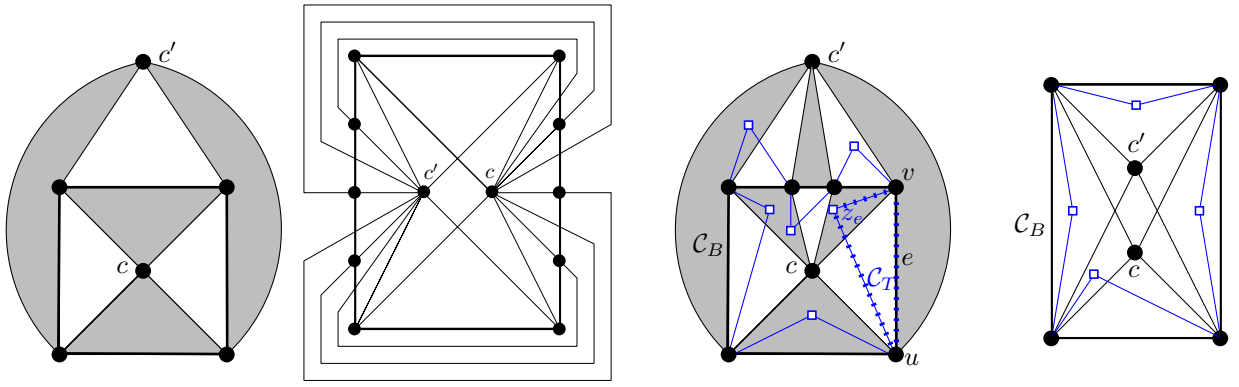
4 紧性

本节将证明，对于我们所考虑的所有图／绘图类别，匹配大小的下界都是紧的。

4.1 双锥及其 1-平面绘图

我们的构造均基于双锥 B_s，其构造取决于参数 $s \geq 5$（我们通常还要求 s 为偶数）。它由一个长度为 $s-2$的基圈 C_B以及两个顶点 c，c'组成，这两个顶点都与 C_B的所有顶点相邻。见图 7a。我们称 C_B 的边为底边，其他边为顶点边。注意，B_s 是平面且为三角剖分的，因此有唯一的平面绘图，其中有 $2s-4$ 个面。它还有 s 个顶点和 $3s-6$ 条边。如果 s 为偶数，那么它的所有顶点度数都是偶数；因此，B_s 的面可以染成黑色和白色，且任意两个相邻的面颜色不同，并且黑白面各有 $s-2$ 个。定义 S为 B_s的 s 个顶点；这是我们将在下文中用来通过 $\operatorname{comp}(G \setminus S) - |S|$ 界定 $\mu(G)$ 的集合。

B_s 的 1-平面绘图（遗憾的是）并不总是平面的，见图7b。不过，通过附加小型子图，我们可以迫使 B_s 以平面方式绘制。形式上，



(a) B_6。 (b) (c) B_8^T。 (d)

图 7：(a) 双锥的唯一平面绘图；基边用粗线表示。(b) B_{10}的 1-平面绘图。(c) 附加三角形。(d) B_6^T 的 1-平面绘图，其中 B_6 的诱导绘图不是平面绘图；这并不违反引理 4.2，因为 $s < 8$。

在一条边上附加一个三角形 $e = (u, v)$是指添加一个新顶点 z_e，并使其与 u 和 v 相邻，而不与其他顶点相邻。

引理 4.1。设 B_s^T 是由双锥 B_s 在所有基边处附加三角形后得到的图。若 $s \geq 8$，则在 B_s^T 的任意 *1*-平面绘图 Γ 中，基边都不交叉。

证明。设 $e = (u, v)$ 是一条基边，$T = \langle u, v, z_e \rangle$ 是附加在 e处的三角形。边 (u, v)、(v, z_e)、(z_e, u) 两两不能交叉，因为它们有公共端点，因此构成一条简单闭曲线 $\mathcal{C}_T$。另见图 7c。设 n_0 和 n_1 分别为严格位于 $\mathcal{C}_T$外部和内部的底圈顶点数；由于共有 $s - 2$ 个底圈顶点，且只有 u、v 位于 $\mathcal{C}_T$上，因此有 $n_0 + n_1 = s - 4 \geq 4$。如果顶点 c、c' 位于 $\mathcal{C}_T$的两侧，那么 $n_0 + n_1$ 条顶点边会交叉 $\mathcal{C}_T$。由于该图形是 1-平面绘图，且曲线 $\mathcal{C}_T$ 由三条边组成，这意味着 $n_0 + n_1 \leq 3$，矛盾。因此，c、c'（不妨设）都位于 $\mathcal{C}_T$ 外部，且至少有 $2n_1$ 条边交叉 $\mathcal{C}_T$。

由此可知，$n_1 \leq 1$，这是由整数性以及至多三条边交叉 $\mathcal{C}_T$ 得出的。如果 $n_1 = 1$（例如，w 位于 $\mathcal{C}_T$ 内部），那么从 w 到 B_s 的其他顶点有六条边不相交路径：边 (w, c) 和 (w, c')，与 w 相 incident 的两条基边，以及沿着连接在这些基边上的三角形的两条路径。由于 u、v 中至多一个与 w 相邻，这些路径中有四条从 w（位于 $\mathcal{C}_T$ 内部）通向严格位于 $\mathcal{C}_T$ 外部的顶点。这同样违反了 1-平面性。因此，B_s 的所有顶点都位于 u、v 上，或严格位于 $\mathcal{C}_T$ 外部。

现在假设有一条边 e' 与 $e = (u, v)$ 交叉，因此 e' 与 $\mathcal{C}_T$ 交叉。于是 e' 延伸到 $\mathcal{C}_T$ 内部的点，并且根据 1-平面性，不能再次与 $\mathcal{C}_T$ 交叉，因此必须以 u、v、z_e 之一为端点。但它不能以 z_e 为端点，因为 z_e 只有邻点 u、v。所以 e' 和 e 共有一个端点，这与我们拥有良好绘图矛盾。

□

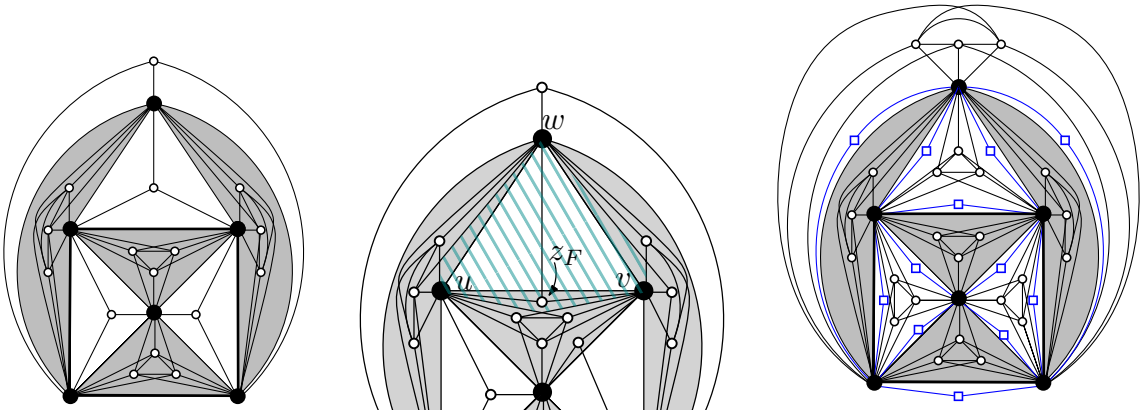
引理 4.2. 设 B_s^T 是由双锥 B_s 在所有底边上附加三角形后得到的图。若 $s \geq 8$，那么对于 B_s^T 的任意 *1*-平面绘图 Γ，其诱导绘图 Γ_B *of* B_s 是平面绘图。

证明。 反设 B_s 的两条边在 x 处交叉；由前一个引理可知，这两条边都不是基边。由于绘图良好，它们也不可能与同一个顶点相邻，因此 c 和 c' 都是交叉点 x 的端点。我们知道基圈 C_B 不交叉；令 $\mathcal{C}_B$ 为 Γ_B 中对应的简单闭曲线，其中 x （不妨如此）位于内部。因此， c, c' 也位于 $\mathcal{C}_B$ 内，而且与它们相连的所有关联于 c, c' 的边也都在内部，因为它们不能与 $\mathcal{C}_B$ 交叉。因此， Γ 中可能位于 $\mathcal{B}$ 外部的顶点只有附加三角形中度为 2 的顶点；这些顶点不属于 Γ_B。

因此， Γ_B 的无界面与 $\mathcal{C}_B$的所有顶点相邻。现在可以按如下方式得到$K_{4,\ s-2}$ 的 1-平面绘图：复制 Γ_B，将副本所在的平面反转，并将 $\mathcal{C}_B$的两个副本合并，然后删除基边。这是不可能的，因为 1-平面二部图最多包含 $3n-8$ 条边 [15] ，但$K_{4,\ s-2}$ 有 $s+2$ 个顶点，且（根据 $s \geq 8$）有$4s-8 > 3(s+2)-8$ 条边。 □

4.2 极大 1-平面图

为了定义我们的构造，还需要另外两种修改双锥 B_s的方法。设Γ 为一个简单平面绘图， Γ 的 F 为一个 3 度面。在 F 中插入一个 K_4 ，是指添加一个新顶点 z_F，并使其与 F 的所有顶点相邻（因此 $F \cup \{z_F\}$ 构成一个 K_4）。在 F 中插入一个 K_6 ，则是类似地添加三个新顶点，使它们与 F 的所有顶点以及彼此相邻。



(a) G_1。 (b) 替代绘图。 (c) G_2。

图 8：用于说明匹配数界是紧的图。为便于绘图，此处展示 $s = 6$，但实际构造使用 $s \geq 8$。(b) 中的条纹区域表示 z_F 的所有可能位置。

定理 6. 对于任意 N，都存在一个具有$n \geq N$ 个顶点的 *3*-连通简单极大 *1*-平面图，使得任何匹配的大小至多为 $\frac{2n+6}{5}$ 。

证明。 令 $s = \max\{8, \frac{N+8}{5}\}$ 向上取整到最近的偶整数。取图 B_s 的唯一平面绘图 Γ_B ；由于 s 是偶数，我们可以将其面染成黑色和白色。定义 G_1

为从 Γ_s 得到的图：在每个白色面中插入 K_4，并在每个黑色面中插入 K_6。见图 8a。为证明 G_1 是 3-连通的，回顾一下， B_s 是 3-连通的，而 G_1 可以通过反复添加至少有三个不同邻点的顶点得到；这一操作保持 3-连通性。Γ_B 中有 $s-2$ 个黑色面和 $s-2$ 个白色面，因此 G_1 有 $n = s + (s-2) + 3(s-2) = 5s - 8 \geq N$ 个顶点。此外， $G_1 \backslash S$ 有 $2s-4$ 个奇分支（每个 B_s 的面对应一个），所以 $\text{odd}(G_1 \backslash S) - |S| = s - 4 = \frac{n-12}{5}$，根据 Tutte-Berge 公式，因此 $\mu(G_1) \leq \frac{2n+6}{5}$。

剩下要证明的是， G_1 是简单极大 1-平面图，也就是说， G_1 的任意 1-平面绘图 Γ' 都是简单饱和的。注意， G_1 包含 B_s^T作为子图（插入的 K_4在基边处形成了三角形）。由引理 4.2 可知， Γ' 内部 B_s 的绘图 Γ'_B 是平面绘图，因此根据 B_s的平面绘图唯一性，它恰好就是绘图 Γ_B。

对于 Γ_B的每个黑色面 $F = \{u, v, w\}$，我们添加了三个新顶点 z、z'、z''，以构成一个K_6。正如 [13], 中所论证的，这迫使 z、z'、z''位于面 F中，因为 K_6的 1-平面绘图在重新命名意义下是唯一的，而且 $\langle u, v, w\rangle$ 是以不交叉的方式绘制的。

对于 Γ_B 的每个白色面 $F = \{u, v, w\}$，我们添加了一个新顶点 z_F，它与所有 u、v、w 相邻。K_4 只有两种可能的 1- 平面绘图（忽略重新命名）；它要么绘制为平面图，要么恰有一个交叉点。因此， z_F 位于 Γ_B 的一个面中，该面包含 $\{u, v, w\}$ 中的两个元素，所以它要么位于 F 中，要么位于与之相邻的一个黑色面中。另见图 8b。若 z_F 位于黑色面 F' 中，那么 F' 也包含一个 K_6；顶点 z_F 必须避开该 K_6 的边（否则某条边会被交叉两次），因此留在 $\Gamma' \setminus z_F$ 的单元内，该单元紧邻 F 与 F' 的公共边。这就描述了绘制 Γ' 的所有可能方式；可以验证，(S_1) 和 (S_2) 对所有可能情形均成立，并且 Γ' 是简单饱和的。 □

定理 7. *对于任意 N，存在一个具有 $n \geq N$ 个顶点的简单极大 1-平面图，使得任何匹配的大小至多为 $\frac{3n+14}{10}$。*

证明。令 $s =$ 为 $\{8, \frac{N+18}{10}\}$ 向上取整到最近的偶整数。定义 G_2 为从 B_s 出发，在每个面中插入 K_6，并在 B_s 的每条边上附加一个三角形后得到的图。见图 8c。 B_s 中有 $2s-4$ 个面和 $3s-6$ 条边，因此 G_2 有 $n = s+3(2s-4) + (3s-6) = 10s-18 \geq N$ 个顶点。此外，$G_2 \backslash S$ 有 $(2s-4) + (3s-6) = 5s-10$ 个奇分支（ B_s 的每个面和每条边各对应一个），因此 $\text{odd}(G_2 \backslash S) - |S| = 4s - 10 = \frac{2n-14}{5}$，且 $\mu(G_2) \leq \frac{3n+14}{10}$。

我们必须证明 G_2 是简单极大 1-平面图。图 G_2 包含 B_s^T的一个副本，因此在 G_2 的任何 1-平面绘图 Γ' 中， B_s 的诱导绘图都是平面的，故恰好是 Γ_B。所有插入的 K_6 都必须插入到 Γ_B的相应面中。令 Γ^+ 为插入所有 K_6 后的绘图Γ_B，并考虑 B_s的一条边 $e = (u, v)$：我们在 e处附加了一个含新顶点 z_e 的三角形。可以验证， Γ^+ 中与 u 关联的所有胞腔都存在交叉。因此，(u, z_e) 必须在 Γ'中以不交叉的方式绘制，否则某条边就会被交叉两次。同理，(v, z_e) 必须在 Γ'中以不交叉的方式绘制。因此， z_e 被放置在 Γ^+中与 (u, v) 关联的两个胞腔之一内。这描述了绘制 Γ'的所有可能方式；可以验证，(S_1) 和 (S_2) 对所有可能方式都成立，并且 Γ' 是简单饱和的。

□

4.3 极大 1-平面绘图

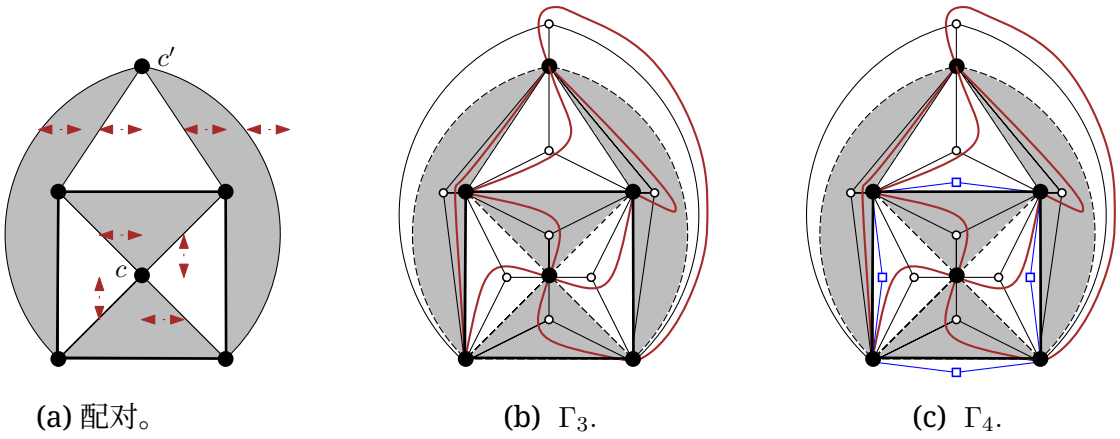
为了构造匹配较小的 1-平面绘图，我们再次从双锥 B_s开始，但这次在每个面中都插入一个带交叉点的 K_4。形式化地说，注意我们可以在 B_s 的各面与顶点边之间建立配对，使得每个面都与一条关联边配对。见图 9a。将 $K_4^\times$插入面 F，是指在F内部添加一个新顶点 v，使其与 F的全部三个顶点相邻，然后重新布置与 F 配对的边 e，使得 e 与 v 处的非关联边交叉。

定理 8。 对于任意 N，存在一个 *3*-连通简单饱和 *1*-平面绘图 Γ_3，其具有 $n \geq N$ 个顶点，使得 $\mu(\Gamma_3) \leq \frac{n+4}{3}$。

证明。令 $s = \max\{8, \frac{N+4}{3}\}$ 向上取整为最接近的偶整数。令 Γ_3 为从 B_s 的平面绘图出发，在每个面中插入 $K_4^\times$后得到的绘图，另见图 9b。容易验证，Γ_3 是简单饱和的。由于它具有一个三角剖分平面绘图，因此它是 3-连通的（将交叉边替换为图 9b 中的虚线边）。B_s中有 $2s-4$个面，因此 Γ_3 具有 $n = s + (2s-4)$ 个顶点。此外，$\Gamma_3 \backslash S$ 有 $2s-4$ 个奇分支（B_s的每个面对应一个），因此 $\text{odd}(\Gamma_3 \backslash S) - |S| = s - 4 = \frac{n-8}{3}$ 且 $\mu(\Gamma_3) \leq \frac{n+4}{3}$。□

定理 9. 对于任意 N，存在一个简单饱和*1*-平面绘图 Γ_4，其具有 $n \geq N$个顶点，使得 $\mu(\Gamma_4) \leq \frac{n+6}{4}$。

证明。令 $s = \max\{8, \frac{N+6}{4}\}$ 向上取整到最接近的偶整数。取定理 8 中的图形 Γ_3，并在每条基边处附加一个三角形，另见图 9c。可以验证，所得图形 Γ_4 是简单饱和的。$s-2$ 中有 $2s-4$ 条基边和 B_s个面，因此 Γ_3有 $n = s + (s-2) + (2s-4) = 4s-6 \geq N$个顶点。此外，$\Gamma_4 \backslash S$有 $(s-2) + (2s-4)$ 个奇分支（B_s的每条基边和每个面各对应一个），所以 $\text{odd}(\Gamma_4 \backslash S) - |S| = 2s-6 = \frac{n-6}{2}$，且 $\mu(\Gamma_4) \leq \frac{n+6}{4}$。□



(a) 配对。　(b) Γ_3.　(c) Γ_4.

图 9：用于说明匹配数界是紧的绘图。为便于绘制，这里展示 $s = 6$，但实际构造使用 $s \geq 8$。

5 非简单图和绘图

在所有结果中，我们都假设输入图（或图形）是简单的。这通常是一个合理的假设，因为添加平行边或环不会增加匹配的大小。然而，添加平行边和环可以使原本不饱和的图形变为饱和，因此“饱和绘图”或“极大图”的类别可能发生变化，相应地，对于这类图形/图，总是存在的匹配的大小也会改变。

在进一步解释之前，我们首先需要澄清，对于非简单图形，什么才算“饱和”。我们不能允许度为一或二的单元，否则总能添加更多边。若一个单元的度为 3 或更高，则称其为正规 单元；若一个 1-平面绘图 Γ正规面饱和 ，则表示其所有单元都是正规单元，并且添加任意一条边都会破坏 1-平面性或产生非正规单元。

首先假设输入图允许包含环。我们几乎所有论断都假设不存在环（即条件 (N_1)），因此存在环时无法得到良好的匹配界也就不足为奇了。为此，取$K_{1,\,n}$，并在中心顶点处添加环，将所有其他顶点彼此隔开。所得的三角剖分绘图见图10a。可以验证 (S_2)，因此该图形是正规面饱和的，但至多只有一条边能属于一个匹配。不过，如果没有环，我们就能证明非平凡的匹配界。

定理10。 设 Γ 是一个没有环的*1*-平面正规面饱和图形 Γ 。则（当 n充分大时）， Γ具有一个大小至少为 $\binom{n+6}{4}$ 的匹配；如果 Γ 是*3*-连通的，则匹配大小至少为 $\binom{n+4}{3}$ 。——

证明。 我们基本上采用与定理 2 和定理 3 相同的证明，仅在此说明现在有所不同之处。我们再次首先按照引理 3.2，通过添加未交叉边对 Γ 进行三角剖分。所得图形满足（N_1），因为 Γ 没有环，且我们没有添加任何环。它也满足（S_2），但可能不满足（N_2）。

检查第3节可知，（N_2）仅用于表 3中的结果。附录B中的相应断言明确说明了何时需要（N_2）：

1. 对于 $\mathcal{P}_2$ 中覆盖偶数个顶点的补片；2. 对于 $\mathcal{P}_4$ 中的补片，

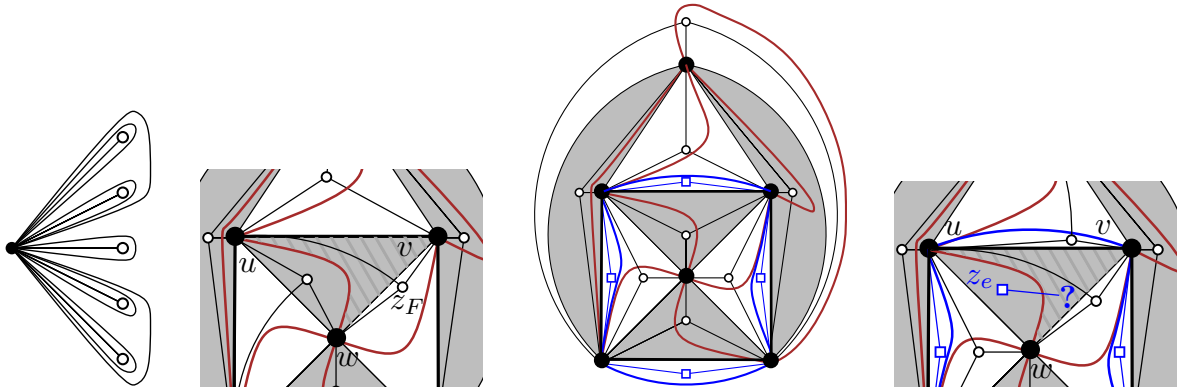
若 $\alpha > 2$。

定理 2 和 3 的证明使用 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 2$，因此第二个问题会自动解决。第一个问题意味着我们不再拥有 comp($\Gamma \backslash S$) 的上界，但完全相同的证明也适用于 odd($\Gamma \backslash S$) 的上界，而这正是匹配上界所需的全部条件。

□

与简单情形（定理 8 和 9）相同的绘图表明这些界是紧的。但令人惊讶的是，即使对于 适当单元最大 *1*-平面图，这些界仍然是紧的；也就是说，只要所有单元都是适当的，我们就可以自由选择 1-平面绘图。

定理 11. 对于任意 N，都存在一个不含环、具有 $n \geq N$ 个顶点的 *3*-连通适当单元最大 *1*-平面图，使得任何匹配的大小至多为 $\binom{n+4}{3}$ 。此外，还存在一个不含环、具有 $\overline{n \geq N}$ 个顶点的适当单元最大 *1*-平面图，使得任何匹配的大小至多为 $\binom{n+6}{4}$ 。



(a) (b) G_5 （特写）。 (c) $G_{6\infty}$ (d)

图 10：具有适当胞腔绘图的非简单图。（b）胞腔 F' （阴影部分）被一条与 z_F 相 incident 的边平分。（d）与 z_e 相 incident 的边都不能交叉。

证明。 取定理 8 中的图形 Γ_3 （即在每个面中插入 $K_4^\times$ 的双锥），并复制顶点边，另见图 10b。将所得图称为 G_5，注意它是 3-连通的，具有适当胞腔 1-平面绘图，并且根据定理 8， $\mu(G_5) \leq \binom{n+4}{3}$ 。接下来只需证明， G_5 的任意适当胞腔 1-平面绘图 Γ 都是适当胞腔饱和的。

令 $\Gamma_B^{\shortparallel}$ 为 Γ 的子绘图，它由 B_s 的所有边组成，包括平行顶点边。由于 G_5 包含 B_s^T，且对于 B_s^T，任意一对平行边中的任一条都可以使用，因此绘图 $\Gamma_B^{\shortparallel}$ 必须是平面的。由于 B_s 是 3- 连通的，绘图 $\Gamma_B^{\shortparallel}$ 因而是唯一的，并且每对平行顶点边都构成一个二边形。这 $2(s-2)$ 个二边形不能是 Γ' 中的单元，因此每个二边形都覆盖了在 B_s 的每个面中插入 $K_4^\times$ 时添加的 $2s-4$ 个顶点之一。根据鸽巢原理，每个二边形恰好覆盖这些顶点中的一个，反之亦然。考虑因 B_s 的某个面 $F = \{u, v, w\}$ 而插入的顶点 z_F，以及覆盖 z_F 的 $\Gamma_B^{\shortparallel}$ 的二边形 $\mathcal{B}$。由 $\{u, v, w, z_F\}$ 形成的 K_4 在 Γ' 中至多有一个交叉点；由于 z_F（位于 $\mathcal{B}$ 内）只能有两条未交叉边连接到 u、v、w，我们有（例如）边（z_F， u）与边（v， w）交叉。（这使 $\mathcal{B}$ 成为由（v， w）形成的二边形。）令 $F' = \{u, v, w\}$ 为 $\Gamma_B^{\shortparallel}$ 中与 F 对应的 3 度面；于是边（z_F， u）将（在 Γ 中）面 F' 分成两个交叉的 3 度胞腔。因此，所有未交叉单元都位于二边形内，故其中任意两个都不共享未交叉边。此外，（容易验证） Γ 的所有单元的度均为 3，因此（S_1）和（S_2）成立，且该绘图是正规面饱和的。

对于另一界，取 G_5，在每条基边上附加一个三角形，并复制这些基边以得到 $G_{6\infty}$ （这相当于绘制定理 9 中的 Γ_4 ，再添加平行边使其成为三角剖分的；另见图 10c。）由定理 9 可知 $\mu(G_6) \leq \binom{n+6}{4}$ 。剩下要证明的是， G_6 的任意适当胞腔 1-平面绘图 Γ 都是适当胞腔饱和的。

令 $\Gamma_B^{\shortparallel}$ 为 Γ 的子绘图，由 B_s的所有边（包括平行边）组成；如上所述，它是平面的，平行边构成二边形。这些 $3s-6$ 二边形必须各自覆盖为插入的 $K_4^\times$或三角形而添加的一个 $3s-6$ 顶点。令 Γ_B^+ 为 Γ 的子绘图，除 $\Gamma_B^{\shortparallel}$ 外，还包含插入的 K_4的顶点。如上所述，

因此，Γ''_B 中的每个 3 度面 F' 在 Γ^+_B 中都会被替换为两个交叉的 3 度胞腔。

现在考虑一个属于附着三角形且被二边形 $\mathcal{B}$ 覆盖的顶点 z_e。反设一条关联边（z_e，y）在 Γ 中交叉，假设它与边（u，w）相交。（另见图10d。）由于 $\mathcal{B}$ 不覆盖其他顶点，边（u，w）围成 $\mathcal{B}$。与（u，v）关联的另一个单元原本是（在 Γ''_B 中）一个单元 $F' = \{u, v, w\}$，它（在 Γ^+_B 中）被分成两个交叉的 3 度胞腔。边（z_e，y）进入其中一个交叉的 3 度胞腔，但之后无法离开，因为它没有其他交叉点；它也不可能在此终止，因为该 3 度面中除 u，v 外没有其他顶点（而具有公共端点的边不会交叉）。这就产生了矛盾，因此与 z_e 关联的边均不交叉，这意味着 $\mathcal{B}$ 是由 e 构成的二边形。由此，Γ 的所有单元又都是三角形，所有未交叉单元都位于二边形内，并且可以验证（S_1）和（S_2）成立。

□

因此，只要不存在环，我们就能为适当单元最大 1-平面图得到非平凡的匹配数界。对于平面图，情况并非如此。考虑 $K_{2,\,n}$，其中（例如）a，b 是 2-边上的两个顶点。我们可以添加 n 条边 $(a,\ b)$ 的副本，从而得到一个平面三角剖分图。这显然是适当面饱和的平面图（并且除重新命名外，这是唯一的适当面饱和的平面图，因此该图是适当面极大的平面图）。但是，任何匹配至多只能包含两条边。

6 展望

本文给出了简单极大1-平面图中最大匹配大小的紧确界，具体讨论了四种情形，取决于图是否为 3-连通，以及是否给定了 1-平面绘图。我们还简要研究了非简单图，并同样给出了紧确界。

一个尚未解决的问题是，我们希望能有更好的工具来探索图可能的 1-平面绘图。由于需要论证某个图的所有 1-平面绘图都是饱和的，我们在第 4 节和第 5 节中的论证颇为繁琐。能否通过一小组操作来描述图的所有 1-平面绘图，例如平面绘图中的惠特尼翻转 [24]？能否将它们存储在合适的数据结构中，例如平面绘图中的 SPQR树 [10]？什么条件会迫使 1-平面绘图唯一，或迫使一条边不交叉？

此外，还有许多其他值得探索的相关图类。例如，简单极大 2-平面图中匹配的大小下界是多少？

最后，我们的界依赖于 Tutte-Berge 公式，因此除了使用通用的最大匹配算法 [18, 22] 外，并不能据此设计出寻找达到已证明规模的匹配的算法。对于最小度为 3 的平面图和 1-平面图，已有线性时间算法能够寻找符合该类图匹配已知界的匹配 [5, 14]。我们能否为简单极大 1-平面图和／或简单饱和 1-平面绘图开发类似的算法？

参考文献

[1] D. Bauer、H. Broersma 和 E. Schmeichel。《图的坚韧度——综述》。*GraphsComb.*，22(1):1–35，2006。[2] C. Berge。图论中的两个定理。美国国家科学院院刊，43:842–844，1957。[3] C. Berge。图与超图，第 *2* 版。North-Holland，1976。译自*Graphes et Hypergraphes，Dunod，1970*。[4] T. Biedl、E. Demaine、C. Duncan、R. Fleischer 和 S. Kobourov。极大匹配与最大匹配的紧确界。《离散数学》，285(1-3):7–15，2004。[5] T. Biedl 和 F. Klute。高效寻找 1-平面图中的大匹配。载于图论概念国际研讨会（*WG'20*），第 12301 卷《计算机科学讲义》，第 248–260 页。施普林格，2020。[6] T. Biedl 和 J. Wittnebel。最小度较大的 1-平面图中的匹配。《图论杂志》，99(2):217–320，2022。[7] R. Von Bodendiek、H. Schumacher 和 K. Wagner。关于 G. Ringel 的一个六色问题的评论。汉堡大学数学研讨会论文集，53:41–52，1983。[8] G. Chartrand、S. Kappor、L. Lesniak 和 D. Lick。图的广义连通度。孟买数学讨论会通报，2:1–6，1984。[9] V. Chv´atal。坚韧图与哈密顿回路。《离散数学》，5(3):215–228，1973。[10] G. Di Battista 和 R. Tamassia。在线平面性测试。*SIAM*《计算杂志》，25(5)，1996。[11] R. Diestel。《图论》，第 *4* 版，数学研究生教材第 173 卷。施普林格，2012。[12] M. Dillencourt。坚韧度与德劳内三角剖分。离散与计算几何，5:575–601，1990。[13] I. Fabrici、J. Harant、T. Madaras、S. Mohr、R. Sot´ak 和 C. T. Zamfirescu。局部极大1-平面图中的长圈和生成子图。《图论杂志》，95(1):125–137，2020。[14] R. Franke、I. Rutter 和 D. Wagner。具有固定最小度的平面图中大匹配的计算。《理论计算机科学》，412(32):4092–4099，2011。[15] D. Karpov。近似平面二分图边数的上界。《数学科学杂志》，196:737–746，2013。

[16] X. Li 和 M. Wei. （广义）图熵近期研究成果综述。$CoRR$，abs/1505.04658，2015。[17] L. Lov´asz 和 M. D. Plummer。《匹配理论》。North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1986。《离散数学年刊》，29。[18] S. Micali 和 V. V. Vazirani。一种用于求解一般图中最大匹配的 $O(\sqrt{|V|}\cdot|E|)$算法。载于计算机科学基础（*FOCS'80*），第 17–27 页。IEEE计算机学会，1980。[19] T. Nishizeki 和 I. Baybars. 平面图最大匹配基数的下界。《离散数学》，28(3):255–267，1979。[20] O.R. Oellermann. 关于图的l-连通度。$Graphs\ Comb.$，3(1):285–291，1987。[21] M. Schaefer. 图交叉数及其变体：综述。《组合学电子期刊》 *[仅电子版]*, 20, 04 2013。[22] V. Vazirani. 用于证明一般图最大匹配算法正确性的交错路径与花理论$O(\sqrt{VE})$。《组合数学》，14(1):71–109，1994。[23] H. Whitney. 全等图与图的连通度。$Amer.\ J.\ Math.$，54:150–168，1932。[24] H. Whitney. 2-同构图。$Amer.\ J.\ Math.$，55(1-4):245–254，1933。

—

缺失的证明

在本附录中，我们首先证明引理 2.1：对于任意平面绘图 Γ，都有 $\sum_d (d-2)f_d = 2n-4$，即使 Γ 含有环或平行边，或者不连通，或者 n 很小。

证明。令 m 为边数，f 为面数，ℓ 为 Γ的连通分支数。首先假设 $\ell = 1$，因此 Γ是连通的。欧拉公式（例如参见 [11]）指出，$m = f + n - 2$；即使 $n = 1$，2，或存在环或平行边时，这一公式仍然成立。由于 Γ 是连通的，每个面 F 都由一个回路围成，而 $\deg(F)$表示 F的边关联数。由于每条边都对应两个这样的关联，因此有 $\sum_F \deg(F) = 2m = 2f + 2n - 4$，整理后即可得出结论。

现在我们对 ℓ 进行归纳；基础情形已在上文处理。对于 $\ell > 1$，存在一个面 F_0，它与 $k \geq 2$ 个 Γ 的连通分量相邻。我们可以假设 F_0 是无界面，并将界定 F_0 的回路记为 C_1、……、C_k。令 Γ_i（对于 $i = 1$、……、k）为位于 C_i 上或其内部的子绘图；它的连通分量较少，因此可以应用归纳法。令 F_i 为 Γ_i 的无界面；它的边界是连通的，因此其度就是边关联的数量。因此，$\sum_{i=1}^{k} \deg(F_i)$ 等于边关联的数量

F_0 的边关联数，且 $\deg(F_0) = \sum_{i=1}^{k} \deg(F_i) + 2k - 2$。$\Gamma$ 的任何有界面也恰好是某个 Γ_i 中的有界面；若令 $n(\Gamma_i)$ 表示绘图 Γ_i 的顶点数，则 $\sum_{i=1}^{k} n(\Gamma_i) = n$。综上所述，我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_d (d-2) f_d &= \sum_{\text{face } F \text{ of } \Gamma} (\deg(F)-2) = (\deg(F_0)-2) + \sum_{\text{bounded face } F \text{ of } \Gamma} (\deg(F)-2) \\
&= \Big(2k - 2 + \sum_{i=1}^{k} \deg(F_i)\Big) - 2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\text{bounded face } F \text{ of } \Gamma_i} (\deg(F)-2) \\
&= 4k - 4 + \sum_{i=1}^{k} (\deg(F_i)-2) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\text{bounded face } F \text{ of } \Gamma_i} (\deg(F)-2) \\
&= 4k - 4 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\text{face } F \text{ of } \Gamma_i} (\deg(F)-2) = 4k - 4 + \sum_{i=1}^{k} \big(2n(\Gamma_i) - 4\big) = 2n - 4 \quad \square
\end{aligned}$$

现在我们证明观察 3.8，它刻画了小度数补片的可能构型。

证明。固定一个度为 $d \in \{2,3,4\}$ 的面补丁 P，并令 L 为 Γ_S 的对应单元。由于 $\mathrm{comp}(\Gamma \setminus S) \geq 2$，根据引理 3.6，至少有两个补丁，因此 Γ_S 至少有两个单元，所以 $L \neq \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_S$。因此，$P$（即 L 的边界）必须包含一条简单闭曲线 $\mathcal{C}$，它将一些被 P 覆盖的单元与一些未被 P 覆盖的单元分隔开。曲线 $\mathcal{C}$ 沿着 P 的边延伸，这些边均不交叉。由于没有环，$\mathcal{C}$ 中的边数 $m_{\mathcal{C}}$ 至少为 2，并且这些边也都计入 L 的 m_L（边关联数）。因此，$d = m_L + 2\,\mathrm{comp}(L) - 2 \geq m_{\mathcal{C}} + 2\,\mathrm{comp}(L) - 2$。

若 $d = 2$，则 $\mathrm{comp}(L) \leq \frac{1}{2}(d - m_{\mathcal{C}} + 2) \leq \frac{3}{2}$，由整数性可知 $\mathrm{comp}(L) = 1$。因此 P是一个回路。若该回路重复经过某个顶点，则由于它只有两条或三条边关联，必然包含一个环，这不可能。因此 P 是一个简单的 d-圈。

对于 $d = 4$，若 $\mathrm{comp}(L) \geq 2$，则 $m_L \geq m_{\mathcal{C}} \geq 2$ 给出 $4 = m_L + 2\,\mathrm{comp}(L) - 2 \geq m_{\mathcal{C}} + 2 \geq 4$，因此各处都取等号，且 $m_L = m_{\mathcal{C}} = 2$ 和 $\mathrm{comp}(L) = 2$。所以 $\mathcal{C}$ 等于 P中的一个回路，它有两条边，而另一个回路没有边关联，因此是一个单顶点。

最后考虑 $d = 4$ 且 $\mathrm{comp}(P) = 1$的情形，因此 P 是一个具有四条边关联的回路。若某条边 e 被 P经过两次，则 e 会与 L关联两次；我们在构造 Γ_S 时已移除了这类边（见定义 3.4 的第 3 步）。因此 P 与四条不同的边关联。若 P 上没有顶点重复出现，则它是一个简单 4-圈。否则至多只有一个顶点会重复出现，因为不然就会有四条平行边，而且 L 就不会是 Γ_S的一个单元。 $\square$

B 补丁的权重

在本附录中，我们证明表 3 中的界（按难度递增排序）。

命题 B.1. $w_\alpha(P) \geq 2-2\alpha$ 对任意 $P \in \mathcal{P}_3^{\nabla}$，以及 $w_\alpha(P) \geq 4-4\alpha$ 对任意 $P \in \mathcal{P}^{\boxtimes}$。

证明。每个补片 $P \in \mathcal{P}_3^{\nabla}$恰好覆盖一个未交叉单元；若该单元是转移单元，其权重为 $2-2\alpha$，否则为 2。每个补片 $P \in \mathcal{P}^{\boxtimes}$ 恰好覆盖四个交叉单元；若其中某个单元是转移单元，其权重为 $1-\alpha$，否则为 1。 □

命题 B.2. $w_\alpha(P) \geq$最小值$\{0,(2-\alpha)d\}$ 对任意 $P \in \mathcal{P}_d \setminus P_3^{\nabla}$。

证明。设 $x_1,\ldots,x_k$ 是 P 覆盖的交叉点，并注意到它们不是纯-S-交叉点，因为 $P \notin \mathcal{P}^{\boxtimes}$。对于 $i=1,\ldots,k$，令 $m_T(x_i)$ 表示作为 x_i 风筝边的转移边数量；由于 x_i 至少有一个端点不在 S 中，因此 $m_T(x_i) \leq 2$。定义 $w_\alpha(x_i)$ 为与 x_i 关联的四个交叉单元的总权重；我们有$w_\alpha(x) = 4-\alpha\cdot m_T(x_i) \geq (2-\alpha)m_T(x_i)$。因此，$P$ 覆盖的所有交叉单元的权重为 $\sum_{i=1}^k w_\alpha(x_i) \geq (2-\alpha)\sum_{i=1}^k m_T(x_i)$。$P$ 覆盖的所有未交叉单元都不在 $\mathcal{T}^{\nabla}$ 中，因此权重非负，所以 $w_\alpha(P) \geq (2-\alpha)\sum_{i=1}^k m_T(x_i)$。若 $\alpha \leq 2$，则此值非负。若$\alpha > 2$，则此值至少为 $(2-\alpha)d$，因为构成 P 的回路至多包含 d 个边关联，因此 $\sum_{i=1}^k m_T(x_i) \leq d$。 □

命题 B.2 中的界是紧的；例如，考虑一个由 d-圈围成的补片 P（d 为偶数时），它覆盖一个顶点 v 和 $d/2$ 个交叉点。然而，对于 $d \leq 4$，我们无法在不违反（N_2）的情况下构造这样的补片，因此可以得到更好的界。回忆引理 3.10，$Z(P)$ 表示补片 $P \in \mathcal{P}_d^{\odot}$ 覆盖的（非空）顶点集，并且（对于 $d \leq 4$）有 $w_0(P) = 4|Z(P)| + 2(d-2)$。

命题 B.3。假设 $\mathrm{comp}(\Gamma\backslash S) \geq 2$，且不存在环。对于任意补片 $P \in \mathcal{P}_3^{\odot}$，有 $w_\alpha(P) \geq \min\{6+3\alpha, 6+6\chi_{N_3}-\alpha, 10+4\chi_{N_3}-3\alpha\}$。

证明。根据观察 3.8，补片 P 是一个简单 3-圈；设其边为 e_0、e_1、e_2。对于 $i=0$，取 1、2，令 $e_i=(v_i,v_{i+1})$（模 3 加法），并令 L_i 为与 e_i 相邻且被 P 覆盖的单元。单元 L_i 的度为 3，其第三个角（除 v_i、v_{i+1} 外）要么是一个交叉点 x_i，要么是一个顶点 $z_i \notin S$，因为 $P \notin \mathcal{P}^{\nabla}$。另见图 11a。根据定义，边 e_i 是一条转移边，因此 L_i 属于 $\mathcal{T}^{\circ}$ 或 $\mathcal{T}^{\times}$（它不可能属于 $\mathcal{T}^{\nabla}$，因为 $P \notin \mathcal{P}_3^{\nabla}$），并且 $w_\alpha(L_i) = w_0(L_i) \pm \alpha$，具体取决于 L_i 是否交叉。因此，一旦知道 L_0、L_1、L_2 中有多少条边交叉，就很容易从 $w_0(P)$ 得到 $w_\alpha(P)$。回忆 $w_0(P) = 4|Z(P)|+2 \geq 6$，并分情况讨论。

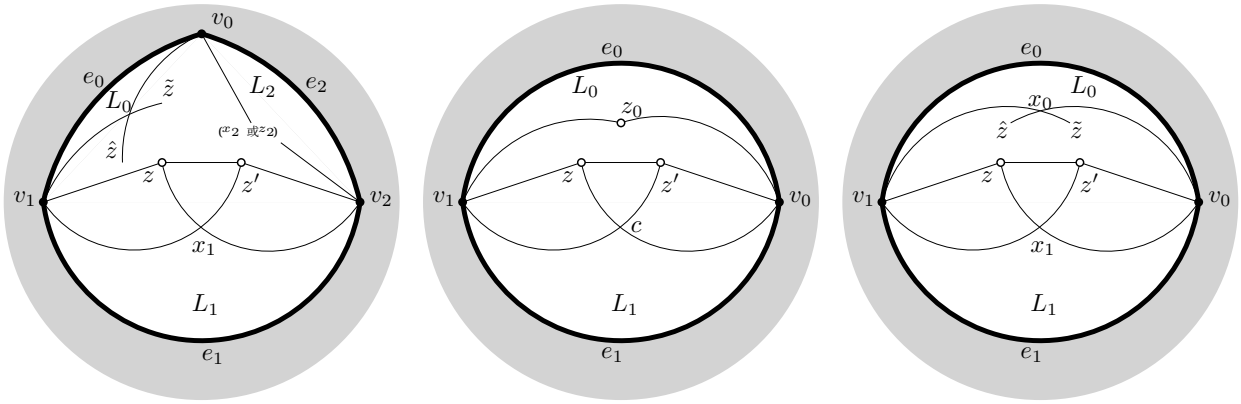
- 如果 L_0, L_1, L_2 中至少有一个是不交叉的，那么 $w_\alpha(P) \geq w_0(P) + \alpha - 2\alpha \geq 6-\alpha$。
- 如果 L_0, L_1, L_2 都交叉，那么 x_0, x_1, x_2 不可能都属于同一个交叉点，否则该交叉点的风筝边会包含三角形 e_0, e_1, e_2，这是不可能的。因此 P 至少覆盖两个交叉点（即八个交叉单元），且 $w_0(P) \geq 8$。这意味着 $w_0(P) \geq 10$，因为 $w_0(P) = 4|Z(P)|+2$ 等价于模 4 余 2。因此 $w_\alpha(P) \geq 10-3\alpha$。

如果 (N_3) 成立，那么我们可以得到一个更好的界。

- 如果所有的 L_0，L_1，L_2 都不交叉，那么 $w_\alpha(P) = w_0(P) + 3\alpha \geq 6+3\alpha$。

• 如果（例如） L_1 是交叉的，那么 v_0 不是 x_1的端点；否则，对某个 $i \in \{1,2\}$，将存在边 $(v_i,\ v_0)$，它在 x_1 处交叉，而在 P 中不交叉，这与 (N_3) 矛盾。因此，对于某个 $z,$ $z' \in Z(P)$，$(v_0,\ z)$ 与 $(v_1,\ z')$ 相交，这意味着 $|Z(P)| \geq 2$ 并且$w_0(P) \geq 10$。另见图 11a。

– 如果 L_0, L_2 都是不交叉的，那么 $w_\alpha(P) \geq 10+\alpha \geq \min\{6+3\alpha, 14-3\alpha\}$。– 如果 $|Z(P)| \geq 3$，那么 $w_0(P) \geq 14$ 且 $w_\alpha(P) \geq 14-3\alpha$。– 我们声称这些情况必有其一。为此，假设 L_0 是交叉的，例如 $(v_0, \hat{}z)$ 在 x_0 处与 $(v_1, \tilde{z})$ 交叉，其中 $\hat{}z, \tilde{z} \in Z(P)$。我们有 $\tilde{z} \notin \{z, z'\}$，否则交叉边 $(v_1, \tilde{z})$ 会有一条平行边（在 x_1 中，或作为 x_1 的风筝边），这与 (N_3) 矛盾。因此 $|Z(P)| \geq 3$。 □



(a) $\mathcal{P}_3^{\odot}$。 (b) $\mathcal{P}_2$； L_0 不交叉。 (c) $\mathcal{P}_2$； L_0 交叉。

图 11：为补片的权重给出下界。

对于 $\mathcal{P}_2$ 中的补片，即使 (N_3) 不成立，有时我们仍需要 (N_2)；为分析第 5 节中的非简单图，我们在此准确陈述所需内容。

断言 B.4。 假设 连通分支数$(\Gamma \backslash S) \geq 2$ 且不存在环。固定一个补片 $P \in \mathcal{P}_2$。若 (N_2) 成立，或者 $|Z(P)|$ 为奇数，则 $w_\alpha(P) \geq$最小值$\{4+2\alpha, 12+4\chi_{N_3}-2\alpha\}$。

证明。 根据观察 3.8，补片 P 是一个二边形，设边 e_0, e_1 都连接 v_0 和 v_1。对于$i=0,1$，设 L_i 是与 e_i 关联且被 P覆盖的单元。如果 L_i 交叉，则设 x_i 为其关联的交叉点；否则，设 $z_i \notin S$ 为 L_i的第三个顶点。根据定义，边 e_i 是转移边，因此 L_i 属于 $\mathcal{T}^\circ$ 或 $\mathcal{T}^\times$，且 $w_\alpha(L_i) = w_0(L_i) \pm \alpha$，这取决于 L_i是否不交叉。因此，只要知道 L_0, L_1 中有多少条边交叉，就很容易得到 $w_\alpha(P)$ $w_0(P)$。回想一下， $w_0(P) = 4|Z(P)| \geq 4$，并分类讨论：

• 如果 L_0, L_1 均不交叉，则 $w_\alpha(P) \geq w_0(P) + 2\alpha \geq 4+2\alpha$。
• 如果（例如） L_1 被交叉，那么令 (v_0, z)、(v_1, z') 为在某个 x_1 处相交的边，其中$z,$ $z' \in Z(P)$。因此 $|Z(P)| \geq 2$ 且 $w_0(P) \geq 8$。见图 11c 和 11b。–如果 L_0 不交叉，那么 $w_\alpha(P) = w_0(P) + \alpha - \alpha = 8 \geq \min\{4+2\alpha, 12-2\alpha\}$。

– 如果 $|Z(P)| \geq 3$，那么 $w_\alpha(P) \geq w_0(P) - 2\alpha \geq 12 - 2\alpha$。– 我们断言，这些情况必有一种成立。反设不然，则 $|Z(P)| = 2$，按假设，这意味着 (N_2) 成立。令 x_0 处的交叉点位于 $(v_0, \hat{}z)$ 与 $(v_1, \tilde{z})$ 之间，其中 $\hat{}z, \tilde{z} \in Z(P)$。由 (N_2) 可得 $\tilde{z} \neq z'$。由 $|Z(P)| = 2$，因此 $\tilde{z} = z$，同理可得 $\hat{}z = z'$。因此，$(v_1, \tilde{z})$ 和 (z, v_1) 构成一条被 $(v_0, \hat{}z)$ 交叉的闭曲线，故 v_0 和 $\hat{}z$ 位于曲线两侧。由于（不交叉的）边 (z', v_0) 和 $\hat{}z = z'$，这是不可能的。

若 (N_3) 成立，则我们可以得到一个更好的界。

– 若 $|Z(P)| \geq 4$，则 $w_\alpha(P) \geq w_0(P) - 2\alpha \geq 16 - 2\alpha$。– 若 L_0 不交叉，则 $z_0 \neq z, z'$，否则 (v_0, z_0) 或 (v_1, v_0) 将同时交叉且不交叉，这与 (N_3) 矛盾。因此 $|Z(P)| \geq 3$，且 $w_\alpha(P) \geq 12 + \alpha - \alpha = 12 \geq \min\{4 + 2\alpha, 16 - 2\alpha\}$。– 我们断言，这些情况必有一种成立。为此，假设 L_0 交叉，即 $(v_0, \hat{}z)$ 与 $(v_1, \tilde{z})$ 在 x_0 处交叉，其中 $\hat{}z, \tilde{z} \in Z(P)$。我们有 $\tilde{z} \notin \{z, z'\}$，否则就会存在交叉边 $(v_1, \tilde{z})$ 的平行副本，这与 (N_3) 矛盾。同理，$\hat{}z \notin \{z, z'\}$，所以 $|Z(P)| \geq 4$。

□

断言 B.5。 假设$\mathrm{comp}(\Gamma \backslash S) \geq 2$ 且不存在环。固定一个补片 $P \in \mathcal{P}_4$ 和某个 $\alpha \leq 4$。如果 (N_2) 成立，或者 $\alpha \leq 2$，那么 $w_\alpha(P) \geq 0$。

证明。 若 $\alpha \leq 2$，由命题 B.2 即得结论，因此不妨设其不成立，这意味着 (N_2) 成立。我们先处理一个简单情形： P 由多个回路组成。根据观察 3.8，补片 P 只使用两条边，因此至多覆盖两个转移单元，且这些单元都不在$\mathcal{T}^\nabla$中。此外， $w_0(P) = 4|Z(P)| + 4 \geq 8$，因此 $w_\alpha(P) \geq 8 - 2\alpha \geq 0$。

现在假设 P是一个由互不相同的边 e_0, e_1, e_2, e_3组成的单一回路。对于 $i = 0,1,2,3$，令 $e_i = (v_i, v_{i+1})$（模 4 加法），并令 L_i 为与 e_i 关联且被P覆盖的单元。如果 L_i 交叉，则令 x_i 为其关联的交叉点。由于$P \notin \mathcal{P}_3^\nabla$，我们有 $w_\alpha(L_i) \geq w_0(L_i) - \alpha$；如果 L_i 不交叉，则 $w_\alpha(L_i) \geq w_0(L_i) = 2$。现在分情况讨论:

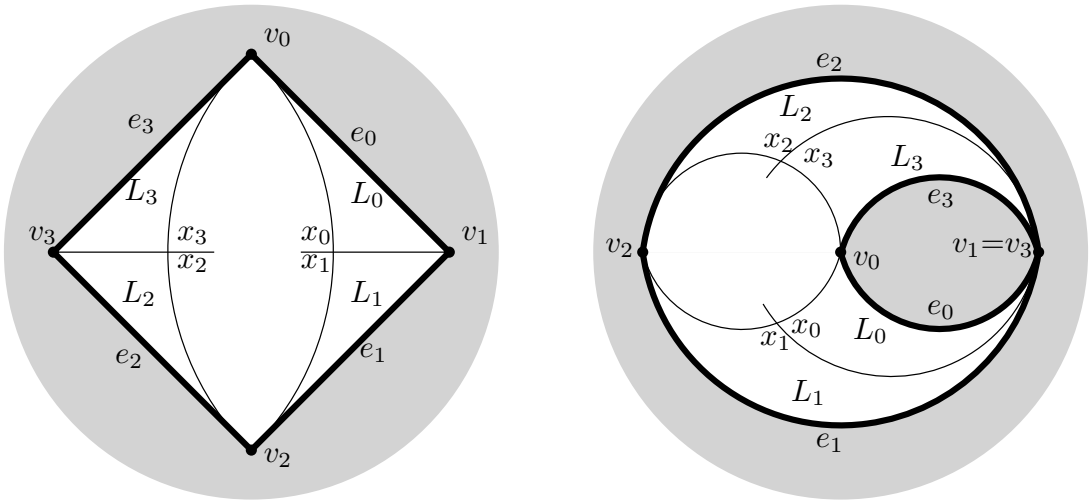
- 首先假设，对于每个由 P 覆盖的交叉点 x，至多有一条风筝边属于 P。那么， x 至多有一个相邻单元是转移单元，并且 $w_\alpha(x)$（即与 x 相邻的四个单元的总权重）至多为 $4 - \alpha \geq 0$。任何由 P 覆盖的未交叉单元，其权重均非负。因此 $w_\alpha(P) \geq 0$。

- 因此，我们可以假设存在一个由 P 覆盖的交叉点 x，且至少有两条风筝边是转移边（因此属于 $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$）。 x 的风筝边必须包括 e_i， e_{i+1}（其中某个 $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ 按模 4 计算），并排除 e_{i+2}， e_{i+3}；否则， x 的端点将是 $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$，而 x 将是纯-S-交叉点，这与 $P \notin \mathcal{P}^\boxtimes$ 矛盾。因此， x_i=x_{i+1} 和 x_{i+2}， x_{i+3}（若存在）都不同于 x_i。图 12 展示了 $i = 0$ 时的情形。下面分情况讨论。

  –如果 L_{i+2}， L_{i+3}都不交叉，那么 $w_\alpha(P) \geq w_0(P) - 2\alpha \geq 8 - 2\alpha \geq 0$.– 如果（例如） L_{i+2} 是交叉的，且 P 覆盖至少一个未交叉单元，那么结合 $x_i \neq x_{i+2}$ 处的八个交叉单元，可得 $w_0(P) \geq 10$。这迫使 $w_0(P) \geq 12$，因为$w_0(P) = 4|Z(P)| + 4$能被 4 整除。因此 $w_\alpha(P) \geq 12 - 3\alpha \geq 0$。

– 如果 L_{i+2}, L_{i+3} 都交叉，且 $x_{i+2} \neq x_{i+3}$，那么 P 覆盖至少三个交叉点，因此 $w_0(P) \geq 12$ 且 $w_\alpha(P) \geq 12 - 3\alpha \geq 0$。

–我们断言上述情况必有一种成立。反设 L_{i+2} 和 L_{i+3} 均交叉，且 $x_{i+2}{=}x_{i+3}$。那么 $x_{i+2}{=}x_{i+3}$ 使用边 (v_{i+2}, v_i)，但 (v_i, v_{i+2})的一个副本也参与了另一个交叉点$x_i{=}x_{i+1}$。这与 (N_2)矛盾。 □



(a) $\mathcal{P}_4$; P 是一个简单 4-圈。 (b) $\mathcal{P}_4$; P 重复了一个顶点。

图 12：给出 $\mathcal{P}_4$ 中一个补片权重的下界。