arXiv:2301.01401v1 [math.NA] 4 Jan 2023

纳维–斯托克斯方程一致分裂 GSAV 格式的误差估计*

XIAOLI LI† 和JIE SHEN‡

摘要。本文对一种用于具有无滑移边界条件的纳维–斯托克斯方程的一阶时间半离散一致分裂格式进行了严格的误差分析，该格式结合了广义标量辅助变量（GSAV）方法。该格式是线性的、无条件稳定的，并且每个时间步只需依次求解一系列泊松型方程。利用 GSAV 方法内在的无条件稳定性，我们推导出二维情形下速度和压力近似的最优全局时间误差估计，以及三维情形下的最优局部时间误差估计。

关键词。纳维–斯托克斯方程；一致分裂；标量辅助变量（SAV）；能量稳定性；误差估计

AMS 主题分类：35Q30、65M12、65J15。

1. 引言。本文研究以下非定常不可压缩 Navier-Stokes 方程的数值逼近：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad in\ \Omega\times J, \tag{1.1a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad in\ \Omega\times J, \tag{1.1b}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad on\ \partial\Omega\times J, \tag{1.1c}$$

其中，Ω 是 $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) 中的一个有界开区域，其边界 $\partial\Omega$ 足够光滑；$J = (0, T]$, (u p) 分别表示未知速度和压力，f 是外力，$\nu > 0$是黏性系数，n 是区域 Ω 的单位外法向量。

已有大量研究致力于 Navier-Stokes 方程的数值逼近，例如参见 [5, 34, 6, 11]，以及其中的参考文献。众所周知，非线性项以及速度与压力之间的耦合，长期以来一直是 Navier-Stokes 方程数值分析与模拟的主要难点。从数值计算的角度来看，显式处理非线性项更为理想，这样每个时间步只需求解简单的常系数线性方程。然而，简单地采用显式处理通常会对时间步施加严格的稳定性约束。

最近提出的基于标量辅助变量（SAV）方法的格式 [20, 18, 14, 19, 36] 通过显式处理非线性项 [29] 可以无条件地实现能量递减；上述工作中展示的大量数值结果表明，这些隐式-显式（IMEX）类型格式（即显式处理非线性项）具有很高的效率和稳健性。

*X. Li 的研究得到国家自然科学基金委员会项目（12271302、11971407）的资助。J. Shen 的研究部分得到美国国家科学基金会项目 DMS-2012585 和美国空军科学研究办公室项目 FA9550-20- 1-0309 的资助。

†中华人民共和国山东省济南市山东大学数学学院，邮编：250100。电子邮箱：xiaoli- math@sdu.edu.cn。

‡通讯作者。美国印第安纳州西拉斐特市普渡大学数学系，邮编：47907。电子邮箱：shen7@purdue.edu。

另一方面，处理不可压缩约束的数值方法通常分为两类：耦合方法和解耦方法。耦合方法计算开销较大，因为每个时间步都需要求解一个鞍点问题 [5, 1, 4]。解耦方法源自所谓的投影方法 [2, 31], ，效率可能更高，因为每个时间步只需依次求解一系列泊松型方程。人们已广泛致力于构造各种投影型格式，这些格式大致可分为三类 [9]：压力修正方法 [27, 35, 8, 28, 19], 、速度修正方法 [10, 25] 和一致分裂方法 [7, 16, 30] （另见规范方法 [3, 24]）。其中，一致分裂格式有以下两方面的突出优势：（i）不存在算子分裂误差，因此能够达到时间离散的完整精度；（ii）从计算角度看，速度与压力近似空间之间不必满足 inf-sup条件。

然而，关于一致分裂方法的稳定性和误差分析，目前相关研究非常有限。Liu等人在 [21] 中推导了拉普拉斯算子与Leray投影算子之间交换子的一条关键不等式，并在 [22] 中为二维和三维情形下的一阶一致分裂格式建立了局部误差估计。最近，Huang等人基于广义SAV方法 [15], ，针对具有周期边界条件的纳维–斯托克斯方程，在 [14] 中构造了高阶一致分裂格式；针对具有无滑移边界条件的情形，则在 [36]中构造了相应格式。此外，对于周期边界条件，他们在 [14] 中建立了最优误差估计（最高达五阶）；在二维情形下，该估计在时间上是整体的，而在三维情形下则是局部的。然而，将相应的误差分析推广到非周期边界条件下并非易事：（i）压力泊松方程带来了额外困难；（ii）与周期边界条件情形相比，稳定性结果较弱。

本文的主要目的是针对具有无滑移边界条件的纳维–斯托克斯方程，对一阶一致分裂SAV格式开展严格的误差分析。我们的主要贡献如下：

- 在二维情形下，建立了速度在 $L^\infty(0,T;\ H^1(\Omega)) \bigcap L^2(0,T;\ H^2(\Omega))$中的全时间误差估计，以及压力在$L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega)) \bigcap L^2(0,T;\ H^1(\Omega))$中的全时间误差估计。据我们所知，这似乎是针对具有无滑移边界条件的一致分裂格式所得到的首个全时间误差估计。
- 在三维情形下，建立了速度在 $L^\infty(0,T_*;\ H^1(\Omega)) \bigcap L^2(0,T_*;\ H^2(\Omega))$ $(T_* \le T)$中的局部时间误差估计，以及压力在 $L^\infty(0,T_*;\ L^2(\Omega)) \bigcap L^2(0,T_*;\ H^1(\Omega))$中的局部时间误差估计。

本文的组织结构如下。第2节介绍一些预备知识。第3节基于 SAV 方法构造一阶一致分裂格式。第4节对一阶GSAV一致分裂格式进行严格的误差估计。第5节给出一些数值实验，以验证我们的理论结果。

2. 预备知识。下面介绍本文中将频繁用到的一些记号和结果。

全文中，我们用 C（无论是否带下标）表示正常数，其在不同位置可能取不同的值。

设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) 中的一个有界开区域，我们采用标准记号L^2(Ω)、 H^k(Ω) 和 H_0^k(Ω) 表示 Ω 上通常的索伯列夫空间。与 H^k(Ω) 对应的范数简记为 $\|\cdot\|_k$。特别地，我们用 $\|\cdot\|$ 表示L^2(Ω) 中的范数。此外，$(\cdot,\cdot)$ 表示 L^2(Ω) 中的内积，粗体字母表示向量函数和向量空间。

我们定义

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0\}, \quad \mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\},$$

以及斯托克斯算子

$$A\mathbf{u} = -P_H \Delta \mathbf{u}, \quad \forall\ \mathbf{u} \in D(A) = \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{V},$$

其中， P_H 是从$\mathbf{L}^2$(Ω)到$\mathbf{H}$上的正交投影算子，而斯托克斯算子 A 是$\mathbf{H}$上的一个无界正定自伴闭算子，其定义域为 $D(A)$。

我们回顾以下不等式，它们将在下文 [34, 13]中用到：

$$\|\nabla \mathbf{v}\| \le c_1 \|A^{\frac{1}{2}} \mathbf{v}\|, \quad \|\Delta \mathbf{v}\| \le c_1 \|A\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in D(A) = \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}. \tag{2.1}$$

利用庞加莱不等式，我们由上式可得

$$\|\mathbf{v}\| \le c_1 \|\nabla \mathbf{v}\|, \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \|\nabla \mathbf{v}\| \le c_1 \|A\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in D(A), \tag{2.2}$$

其中， c_1 是一个仅依赖于Ω的正常数。

接下来，三线性型 $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ 定义如下：

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x}.$$

我们很容易得出，三线性型 $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ 关于其最后两个自变量是反对称的，即：

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad \forall\ \mathbf{u} \in \mathbf{H}, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{2.3}$$

and

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall\ \mathbf{u} \in \mathbf{H}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

通过结合使用分部积分、Holder 不等式和 Sobolev 不等式， [33, 27], 我们得到，对于 $d \le 4$,

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \le \begin{cases} c_2 \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1, & \forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ c_2 \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|_1, & \forall\ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H},\ \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ c_2 \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|, & \forall\ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H},\ \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ c_2 \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_2 \|\mathbf{w}\|, & \forall\ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H},\ \mathbf{u} \in \mathbf{H}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ c_2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|_2 \|\mathbf{w}\|_1, & \forall\ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H},\ \mathbf{u} \in \mathbf{H}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.5}$$

此外，我们还有以下更精确的不等式 [32, 14]:

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) \leq \begin{cases} c_2\|\mathbf{u}\|_1^{1/2}\|\mathbf{u}\|^{1/2}\|\mathbf{v}\|_1^{1/2}\|\mathbf{v}\|_2^{1/2}\|\mathbf{w}\|, & d \leq 2, \\ c_2\|\mathbf{u}\|_1\|\nabla\mathbf{v}\|_{1/2}\|\mathbf{w}\|, & d \leq 3, \end{cases} \tag{2.6}$$

其中， c_2 是一个仅取决于 Ω 的正常数。

我们将经常使用以下离散版格朗沃尔引理 [26, 12]:

LEMMA 2.1. 设 a_k、 b_k、 c_k、 d_k、 γ_k、 Δt_k 为满足下列条件的非负实数:

$$a_{k+1} - a_k + b_{k+1}\Delta t_{k+1} + c_{k+1}\Delta t_{k+1} - c_k\Delta t_k \leq a_k d_k \Delta t_k + \gamma_{k+1}\Delta t_{k+1} \tag{2.7}$$

对所有 $0 \leq k \leq m$均成立。则

$$a_{m+1} + \sum_{k=0}^{m+1} b_k\Delta t_k \leq \exp\left(\sum_{k=0}^{m} d_k\Delta t_k\right)\{a_0 + (b_0+c_0)\Delta t_0 + \sum_{k=1}^{m+1}\gamma_k\Delta t_k\}. \tag{2.8}$$

为获得三维情形下的局部误差估计，我们回顾以下引理[21, 23]:

LEMMA 2.2. 设 F: $(0, \infty)$ 到 $\to(0, \infty)$ 是连续且递增的，并令 T_*满足 $0 < T_* < \int_M^\infty dx/F(x)$，其中 $M > 0$。设量 x_n、 $\omega_n \geq 0$ 满足

$$x_n + \sum_{k=0}^{n-1}\Delta t\omega(k) \leq M + \sum_{k=0}^{n-1}\Delta t F(x_k),\ \forall n \leq n_*,$$

其中 $n_*\Delta t \leq T_*$。于是有 $M + \sum_{k=0}^{n_*-1}\Delta t F(x_k) \leq C_*$，其中 C_* 与 Δt 无关。

3. 基于 SAV 方法的一阶一致分裂格式。本节针对纳维–斯托克斯方程 [36]，构造基于 SAV 方法的一阶一致分裂格式。

Set

$$\Delta t = T/N,\ t^n = n\Delta t,\ d_t g^{n+1} = \frac{g^{n+1}-g^n}{\Delta t},\ \text{for } n \leq N,$$

并引入一个 SAV

$$R(t) = E(\mathbf{u}) + K_0,\ E(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2, \tag{3.1}$$

其中包含一些 $K_0 > 0$，并将控制系统改写为以下等价形式:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & (3.2) \\ \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{R}{E(\mathbf{u})+K_0}\left(-\nu\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + (\mathbf{f},\mathbf{u})\right), & (3.3) \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0. & (3.4) \end{cases}$$

显然，上述系统与原系统等价。受 SAV 方法和一致分裂格式的启发，我们构造了以下一阶线性解耦格式，该格式与 [36] 中的一阶格式几乎相同：通过求解以下方程，求得 ($\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$,$\mathbf{u}^{n+1}$, p^{n+1}, ξ^{n+1}, R^{n+1})

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}-\tilde{\mathbf{u}}^{n}}{\Delta t}-\nu\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}=\mathbf{f}^{n+1}-(\mathbf{u}^{n}\cdot\nabla)\mathbf{u}^{n}-\nabla p^{n},\quad \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}|_{\partial\Omega}=0; \tag{3.5}$$

$$\frac{R^{n+1}-R^{n}}{\Delta t}=\frac{R^{n+1}}{E(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})+K_0}\left(-\nu\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2+(\mathbf{f}^{n+1},\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})\right); \tag{3.6}$$

$$\xi^{n+1}=\frac{R^{n+1}}{E(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})+K_0},\ \eta^{n+1}=1-(1-\xi^{n+1})^2,\ \mathbf{u}^{n+1}=\eta^{n+1}\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}; \tag{3.7}$$

$$(\nabla p^{n+1},\nabla q)=\left(\mathbf{f}^{n+1}-(\mathbf{u}^{n+1}\cdot\nabla)\mathbf{u}^{n+1}-\nu\nabla\times\nabla\times\tilde{\mathbf{u}}^{n+1},\nabla q)\right),\ \forall q\in H^1(\Omega). \tag{3.8}$$

通过采用与 [36], 中类似的过程，我们可以容易地得到如下无条件能量稳定性：

THEOREM 3.1. 设 $\|\mathbf{f}(\cdot,t)\|\le M_{\boldsymbol{f}},\ \forall t\in[0,T]$，且 $K_0\ge\max\{2M_{\boldsymbol{f}},1\}$。则给定 $R^n>0$，我们有 $\xi^{n+1}>0$ 以及

$$0<R^{n+1}<R^{n},\quad \forall n\le T/\Delta t. \tag{3.9}$$

此外，存在一个仅依赖于 T 的常数 C_T，使得

$$\|\boldsymbol{u}^{n}\|+\nu\sum_{k=0}^{n}\Delta t\xi^{k+1}\|\nabla\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}\|^2\le C_T,\quad \forall n\le T/\Delta t, \tag{3.10}$$

其中，$\mathbf{u}^n$ 是格式(3.5)-(3.8)的解。

4. 误差分析。本节中，我们对二维和三维情形下的一阶半离散格式(3.5)-(3.8)进行严格的误差分析。

我们设

$$\begin{cases}\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}=\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}-\mathbf{u}(t^{n+1}), & e_{\mathbf{u}}^{n+1}=\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}(t^{n+1}),\\ e_p^{n+1}=p^{n+1}-p(t^{n+1}), & e_R^{n+1}=R^{n+1}-R(t^{n+1}).\end{cases}$$

接下来，我们给出一些预备知识，以估计压力部分。类似于 [21], ，我们令 $\mathcal{P}$ 表示投影到无散场上的 Leray-Helmholtz 投影算子，定义如下。给定任意 $\mathbf{b}\in L^2(\Omega\ \mathbb{R}^d)$，存在唯一的 $q\in H^1(\Omega)$，满足 $\int_\Omega q=0$，使得 $\mathcal{P}\mathbf{b}=\mathbf{b}+\nabla q$ 成立

$$(\mathbf{b}+\nabla q,\nabla\phi)=(\mathcal{P}\mathbf{b},\nabla\phi)=0,\ \forall\phi\in H^1(\Omega). \tag{4.1}$$

于是，对于 $\mathbf{u}\in L^2(\Omega\ \mathbb{R}^d)$，我们有 [21]

$$\Delta\mathcal{P}\mathbf{u}=\Delta\mathbf{u}-\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}=-\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}. \tag{4.2}$$

接下来我们回顾拉普拉斯算子与 Leray-Helmholtz 投影算子的交换子估计。

LEMMA 4.1. *[21]* 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个具有 C^3 边界的连通有界区域。则对于任意 $\epsilon > 0$, 存在正常数 $C \geq 0$，使得对于所有向量场 $\mathbf{u} \in H^2 \cap H_0^1(\Omega\ \mathbb{R}^d)$,

$$\int_\Omega |(\Delta\mathcal{P} - \mathcal{P}\Delta)\boldsymbol{u}|^2 \leq (\frac{1}{2} + \epsilon) \int_\Omega |\Delta \boldsymbol{u}|^2 + C \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2. \tag{4.3}$$

我们将斯托克斯压力 $p_s(\mathbf{u})$定义为

$$\nabla p_s(\mathbf{u}) = (\Delta\mathcal{P} - \mathcal{P}\Delta)\mathbf{u}, \tag{4.4}$$

其中，斯托克斯压力由二维和三维情况下边界处涡量的切向分量通过 [21, 22] 产生

$$\int_\Omega \nabla p_s(\mathbf{u}) \cdot \nabla \phi = \int_\Gamma (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \phi),\ \forall \phi \in H^1(\Omega). \tag{4.5}$$

于是，利用 (4.2)，我们有

$$\nabla p_s(\mathbf{u}) = (\Delta\mathcal{P} - \mathcal{P}\Delta)\mathbf{u} = (I - \mathcal{P})\Delta\mathbf{u} - \nabla\nabla \cdot \mathbf{u} = (I - \mathcal{P})(\Delta\mathbf{u} - \nabla\nabla \cdot \mathbf{u}). \tag{4.6}$$

回顾 (4.1)，我们有

$$\int_\Omega \nabla p_s(\mathbf{u}) \cdot \nabla \phi = \int_\Omega (\Delta\mathbf{u} - \nabla\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \nabla \phi,\ \forall \phi \in H^1(\Omega). \tag{4.7}$$

本节的主要结果由以下定理陈述。

THEOREM 4.2. 假设 $\mathbf{u} \in H^2(0,T; \mathrm{L}^2(\Omega)) \bigcap H^1(0,T; \mathrm{H}^2(\Omega)) \bigcap L^\infty(0,T; \mathrm{H}^2(\Omega))$, $p \in H^1(0,T;\ L^2(\Omega))$ 并且

$$\Delta t \sum_{k=0}^{n+1} \|\boldsymbol{f}^k\|^2 + \Delta t \|\Delta \boldsymbol{u}^0\|^2 + \|\nabla \boldsymbol{u}^0\|^2 \leq C^*$$

取 $C^* > 0$，则对于满足 $\Delta t \leq \frac{1}{1+C_0^2}$的一阶格式 (3.5)-(3.8)，有

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}(t^{n+1})\|^2 + \|\nabla(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}(t^{n+1}))\|^2 + \Delta t \sum_{k=0}^{n} \|\Delta(\boldsymbol{u}^{k+1} - \boldsymbol{u}(t^{k+1}))\|^2 \\ &\leq \begin{cases} C(\Delta t)^2, & d = 2,\ \forall n \leq T/\Delta t, \\ C(\Delta t)^2, & d = 3,\ \forall n \leq T_*/\Delta t, \end{cases} \end{aligned} \tag{4.8}$$

and

$$\|\nabla(p^{n+1} - p(t^{n+1}))\|^2 + \Delta t \sum_{k=0}^{n} \|\nabla(p^{k+1} - p(t^{k+1}))\|^2 \leq \begin{cases} C(\Delta t)^2, & d = 2,\ \forall n \leq T/\Delta t, \\ C(\Delta t)^2, & d = 3,\ \forall n \leq T_*/\Delta t, \end{cases} \tag{4.9}$$

其中，T_* 定义见式 (4.25)，常数 C_0 和 C 是与 Δt 无关的正常数。

证明。首先 我们假设存在一个正常数 C_0 ，使得

$$|1-\xi^k| \le C_0\Delta t,\ \forall k \le T/\Delta t, \tag{4.10}$$

这　将在下面的归纳过程中通过自举论证予以证明。
我们很容易得到，(4.10) 对于 $k=0$ 成立。现在假设

$$|1-\xi^k| \le C_0\Delta t,\ \forall k \le n, \tag{4.11}$$

并且我们将证明 $|1-\xi^{n+1}| \le C_0\Delta t$ 成立。
步骤 1：二维和三维情形下， $k \le n$ 条件下 $\tilde{\mathbf{u}}^k$ 和 $\mathbf{u}^k$ 的 H^2 界。首先，按照 [14], 中完全相同的步骤，我们很容易得到

$$\frac{1}{2} \le |\xi^k|,\ |\eta^k| \le 2, \tag{4.12}$$

在条件 $\Delta t \le \min\{\frac{1}{4C_0}, 1\}$ 下。回顾定理 3.1，可得

$$\|\tilde{\mathbf{u}}^k\| + \nu\sum_{l=0}^{n}\Delta t\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + \nu\sum_{l=0}^{n}\Delta t\|\nabla\mathbf{u}^{k+1}\|^2 \le 8C_T,\quad C_0 \ge 1, \tag{4.13}$$

其中 C_T 与 C_0 无关。

注意到

$$\Delta\mathbf{u} - \nabla\nabla\cdot\mathbf{u} = -\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}, \tag{4.14}$$

并将 $q = p^{k+1}$ 代入 (3.8)，可得

$$\|\nabla p^{k+1}\| \le \|\mathbf{f}^{k+1} - (\mathbf{u}^{k+1}\cdot\nabla)\mathbf{u}^{k+1}\| + \nu\|\nabla p_s^{k+1}(\tilde{\mathbf{u}})\|. \tag{4.15}$$

回顾 (4.7) 和引理 4.1，可得

$$\nu\|\nabla p_s^{k+1}(\tilde{\mathbf{u}})\|^2 \le \nu\alpha\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + \nu C_\alpha\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2, \tag{4.16}$$

其中正常数 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$。

将式 (3.5) 与 $-2\Delta t\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}$ 取内积，可得

$$\begin{aligned}
&(\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 - \|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 + \|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - \nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2) + 2\nu\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2\\
\le& 2\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|\|\mathbf{f}^{k+1} - (\mathbf{u}^k\cdot\nabla)\mathbf{u}^k\| + 2\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|\|\nabla p^k\|\\
\le& 2\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|(\|\mathbf{f}^{k+1} - (\mathbf{u}^k\cdot\nabla)\mathbf{u}^k\| + \|\mathbf{f}^k - (\mathbf{u}^k\cdot\nabla)\mathbf{u}^k\| + \nu\|\nabla p_s^k(\tilde{\mathbf{u}})\|)\\
\le& \nu\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + \nu\alpha\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 + \nu\Delta t C_\alpha\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 + \frac{1-\alpha}{4}\nu\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2\\
&+ \frac{8}{(1-\alpha)\nu}\Delta t(\|\mathbf{f}^k\|^2 + \|\mathbf{f}^{k+1}\|^2) + \frac{16}{(1-\alpha)\nu}\Delta t\|(\mathbf{u}^k\cdot\nabla)\mathbf{u}^k\|^2.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

接下来我们将估计非线性项。注意到，利用 Ladyzhenskaya 不等式和 Sobolev 嵌入定理 [17, 21] 以及 (2.6)，可得

$$\|(\mathbf{u}^k\cdot\nabla)\mathbf{u}^k\|^2 \le \begin{cases} \|\mathbf{u}^k\|_{L^4}^2\|\nabla\mathbf{u}^k\|_{L^4}^2 \le C\|\mathbf{u}^k\|_{L^2}\|\nabla\mathbf{u}^k\|_{L^2}^2\|\nabla\mathbf{u}^k\|_{H^1}, & d=2,\\ \|\mathbf{u}^k\|_{L^6}^2\|\nabla\mathbf{u}^k\|_{L^3}^2 \le C\|\nabla\mathbf{u}^k\|_{L^2}^3\|\nabla\mathbf{u}^k\|_{H^1}, & d=3. \end{cases} \tag{4.18}$$

此外，利用椭圆正则性估计 $\|\mathbf{u}^k\|_{H^2} \le C\|\Delta\mathbf{u}^k\|$ 并回忆 $\mathbf{u}^k = \eta^k \tilde{\mathbf{u}}^k$，可得

$$\|(\mathbf{u}^k \cdot \nabla)\mathbf{u}^k\|^2 \le \begin{cases} \frac{(1-\alpha)^2\nu^2}{64}\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 + C\|\mathbf{u}^k\|^2\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^4, & d=2, \\ \frac{(1-\alpha)^2\nu^2}{64}\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 + C\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^6, & d=3. \end{cases} \tag{4.19}$$

因此，对于 $d=2$，我们可以将 (4.17) 改写如下：

$$\begin{aligned} &(\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 - \|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 + \|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - \nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2) + \nu\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 \\ \le&\frac{1-\alpha}{4}\nu\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + \frac{1-\alpha}{4}\nu\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 + \nu\alpha\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 + \nu\Delta t C_\alpha\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 \\ &+ C\Delta t(\|\mathbf{f}^k\|^2 + \|\mathbf{f}^{k+1}\|^2) + C\Delta t\|\mathbf{u}^k\|^2\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 \\ \le&\frac{1-\alpha}{4}\nu\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + (\nu C_\alpha + C\|\mathbf{u}^k\|^2\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2)\Delta t\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 \\ &+ (\frac{1-\alpha}{4}\nu + \alpha\nu)\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 + C\Delta t(\|\mathbf{f}^k\|^2 + \|\mathbf{f}^{k+1}\|^2). \end{aligned} \tag{4.20}$$

对 k、$k=0$、2、.....、n 将 (4.20) 求和，并利用 (4.13) 和引理 2.1，可得

$$\begin{aligned} &\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 + \Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 \\ &\qquad \le C\Delta t\sum_{k=0}^{n+1}\|\mathbf{f}^k\|^2 + C\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^0\|^2 + C\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^0\|^2 \le C^*, \quad d=2, \end{aligned} \tag{4.21}$$

其中，C^* 与 Δt 和 C_0 无关。回顾 (4.12)，对于 $d=2$，我们有

$$\|\nabla\mathbf{u}^n\|^2 + \Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\Delta\mathbf{u}^k\|^2 \le C, \tag{4.22}$$

其中，C 与 Δt 和 C_0 无关。

接下来考虑 $d=3$ 的情形。利用 (4.19)，我们可以将 (4.17) 转化为如下形式：

$$\begin{aligned} &(\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 - \|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 + \|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - \nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2) + \nu\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 \\ \le&\frac{1-\alpha}{4}\nu\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + \frac{1-\alpha}{4}\nu\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 + \nu\alpha\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 + \nu\Delta t C_\alpha\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 \\ &+ C\Delta t(\|\mathbf{f}^k\|^2 + \|\mathbf{f}^{k+1}\|^2) + C\Delta t\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^6. \end{aligned} \tag{4.23}$$

将 (4.23) 对 k、$k=0$、2、.....、n 求和可得

$$\begin{aligned} &\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 + \Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 \\ &\qquad \le C\Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^6 + C\Delta t\sum_{k=0}^{n+1}\|\mathbf{f}^k\|^2 + C\Delta t\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^0\|^2 + C\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^0\|^2, \quad d=3, \end{aligned} \tag{4.24}$$

回顾引理 2.2，令 $M_0 > 0$ 和 $F(x) = x^6$，并选择满足 $0 < T^* < \int_{M_0}^{\infty} dx/F(x)$ 的 T^*，则可如下估计 (4.24)：

$$\|\nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|^2 + \Delta t \sum_{k=0}^{n} \|\Delta \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + \Delta t \sum_{k=0}^{n} \|\Delta \mathbf{u}^{k+1}\|^2 \leq C_*, \quad d = 3, \ \forall n \leq T_*/\Delta t, \tag{4.25}$$

其中 $T_* = \min\{T^*, T\}$，且 C_* 与 Δt 和 C_0 无关。

步骤 2：误差估计：二维和三维情形下 $\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}$ 的 H^2 界。

我们首先建立与 (3.5) 对应的误差方程。令 $\mathbf{S}_{\mathbf{u}}^{k+1}$ 为如下定义的截断误差：

$$\mathbf{S}_{\mathbf{u}}^{k+1} = \frac{\partial \mathbf{u}(t^{k+1})}{\partial t} - \frac{\mathbf{u}(t^{k+1}) - \mathbf{u}(t^k)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} (t^k - t) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dt. \tag{4.26}$$

将 (3.2) 在 t^{k+1} 处的表达式从 (3.5) 中相减，得到

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1} - \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k}}{\Delta t} - \nu \Delta \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1} &= (\mathbf{u}(t^{k+1}) \cdot \nabla)\mathbf{u}(t^{k+1}) \\ &\quad - (\mathbf{u}^k \cdot \nabla)\mathbf{u}^k - \nabla(p^k - p(t^{k+1})) + \mathbf{S}_{\mathbf{u}}^{k+1}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

接下来，我们通过以下方式建立与 (3.8) 对应的压力误差方程：

$$\begin{aligned} (\nabla e_p^{k+1}, \nabla q) = &\Big((\mathbf{u}(t^{k+1}) \cdot \nabla)\mathbf{u}(t^{k+1}) - (\mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{k+1}, \nabla q \Big) \\ &- (\nu \nabla \times \nabla \times \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}, \nabla q), \ \forall q \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{4.28}$$

将 $q = e_p^{k+1}$ 代入 (4.28)，得到

$$\begin{aligned} \|\nabla e_p^{k+1}\| \leq &\|(\mathbf{u}(t^{k+1}) \cdot \nabla)\mathbf{u}(t^{k+1}) - (\mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{k+1}\| + \nu \|\nabla e_{ps}^{k+1}(\tilde{e}_{\mathbf{u}})\| \\ \leq &\nu \|\nabla e_{ps}^{k+1}(\tilde{e}_{\mathbf{u}})\| + \|(e_{\mathbf{u}}^{k+1} \cdot \nabla)\mathbf{u}(t^{k+1})\| \\ &+ \|(\mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla) e_{\mathbf{u}}^{k+1}\| \end{aligned} \tag{4.29}$$

回顾 (4.7) 和引理 4.1，可得

$$\nu \|\nabla e_{ps}^{k+1}(\tilde{e}_{\mathbf{u}})\|^2 \leq \nu\alpha \|\Delta \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + \nu C_\alpha \|\nabla \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2, \tag{4.30}$$

其中 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ 为正常数。将 (4.27) 与 $-2\Delta t \Delta \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}$ 作内积，得到

$$\begin{aligned} &(\|\nabla \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 - \|\nabla \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k}\|^2 + \|\nabla \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1} - \nabla \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k}\|^2) + 2\nu \Delta t \|\Delta \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 \\ &\leq 2\Delta t \|\Delta \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\| \|(\mathrm{u}(t^{k+1}) \cdot \nabla)\mathrm{u}(t^{k+1}) - (\mathrm{u}^k \cdot \nabla)\mathrm{u}^k\| + 2\Delta t \|\Delta \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\| \|\nabla e_p^k\| + 2\Delta t \|\Delta \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\| (\|p(t^n) - p(t^{k+1})\| + \|\mathrm{S}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|) \\ &\leq 2\Delta t \|\Delta \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\| \|\nabla e_p^k\| + 2\Delta t \|\Delta \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\| (\|(e_{\mathbf{u}}^k \cdot \nabla)\mathrm{u}(t^k)\| + \|(\mathrm{u}^k \cdot \nabla) e_{\mathbf{u}}^k\|) \\ &\quad + 2\Delta t \|\Delta \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\| (\|p(t^n) - p(t^{k+1})\| + \|\mathrm{S}_{\mathbf{u}}^{k+1}\| + \|(\mathrm{u}(t^{k+1}) \cdot \nabla)\mathrm{u}(t^{k+1}) - (\mathrm{u}(t^k) \cdot \nabla)\mathrm{u}(t^k)\|) \\ &\leq 2\nu \Delta t \|\Delta \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\| \|\nabla e_{ps}^k(\tilde{e}_{\mathbf{u}})\| + 3\Delta t \|\Delta \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\| (\|(e_{\mathbf{u}}^k \cdot \nabla)\mathrm{u}(t^k)\| + \|(\mathrm{u}^k \cdot \nabla) e_{\mathbf{u}}^k\|) \\ &\quad + 2\Delta t \|\Delta \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\| (\|p(t^n) - p(t^{k+1})\| + \|\mathbf{S}_{\mathbf{u}}^{k+1}\| + \|(\mathbf{u}(t^{k+1}) \cdot \nabla)\mathbf{u}(t^{k+1}) - (\mathbf{u}(t^k) \cdot \nabla)\mathbf{u}(t^k)\|). \end{aligned} \tag{4.31}$$

利用柯西–施瓦茨不等式，(4.31) 右端的第一项可估计为

$$2\nu\Delta t\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|\|\nabla e_{ps}^{k}(\tilde{e}_{\mathbf{u}})\| \leq \nu\Delta t\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + \nu\alpha\Delta t\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k}\|^2 + \nu C_\alpha\Delta t\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k}\|^2. \tag{4.32}$$

回顾 Sobolev 嵌入定理和 Ladyzhenskaya 不等式，我们有

$$\int_\Omega |(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g}|^2 \leq \left(\int_\Omega |\mathbf{f}|^6\right)^{1/3}\left(\int_\Omega |\nabla\mathbf{g}|^3\right)^{2/3} \leq C\|\nabla\mathbf{f}\|^2\|\nabla\mathbf{g}\|\|\nabla\mathbf{g}\|_{H^1}. \tag{4.33}$$

由 (4.33) 以及 (4.21) 和 (4.25) 中 H^2 有界的 $\tilde{\mathbf{u}}^k$，(4.31) 右端的第二项可估计为

$$\begin{aligned}
&3\Delta t\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|(\|(e_{\mathbf{u}}^k\cdot\nabla)\mathbf{u}(t^k)\| + \|(\mathbf{u}^k\cdot\nabla)e_{\mathbf{u}}^k\|)\\
\leq&\frac{(1-\alpha)\nu}{6}\Delta t\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + C\Delta t\|(e_{\mathbf{u}}^k\cdot\nabla)\mathbf{u}(t^k)\|^2 + C\Delta t\|(\mathbf{u}^k\cdot\nabla)e_{\mathbf{u}}^k\|^2\\
\leq&\frac{(1-\alpha)\nu}{6}\Delta t\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + C\Delta t\|(e_{\mathbf{u}}^k\cdot\nabla)\mathbf{u}(t^k)\|^2 + C\Delta t\|(\mathbf{u}^k\cdot\nabla)e_{\mathbf{u}}^k\|^2\\
\leq&\frac{(1-\alpha)\nu}{6}\Delta t\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + C\Delta t\|\nabla e_{\mathbf{u}}^k\|^2\|\nabla\mathbf{u}(t^k)\|\|\nabla\mathbf{u}(t^k)\|_{H^1} + C\Delta t\|\nabla\mathbf{u}^k\|^2\|\nabla e_{\mathbf{u}}^k\|\|\nabla e_{\mathbf{u}}^k\|_{H^1}\\
\leq&\frac{(1-\alpha)\nu}{6}\Delta t\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + \frac{(1-\alpha)\nu}{12}\Delta t\|\Delta e_{\mathbf{u}}^k\|^2 + C\Delta t\|\nabla e_{\mathbf{u}}^k\|^2.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

由 (3.7) 和 (4.11)，我们有

$$\begin{aligned}
\|\Delta e_{\mathbf{u}}^k\|^2 \leq&2\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^k\|^2 + 2|1-\eta^k|^2\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2\\
\leq&2\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^k\|^2 + 2\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2C_0^4(\Delta t)^4,
\end{aligned} \tag{4.35}$$

and

$$\begin{aligned}
\|\nabla e_{\mathbf{u}}^k\|^2 \leq&2\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^k\|^2 + 2|1-\eta^k|^2\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2\\
\leq&2\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^k\|^2 + 2\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2C_0^4(\Delta t)^4.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

因此，我们可以将 (4.34) 改写为

$$\begin{aligned}
&3\Delta t\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|(\|(e_{\mathbf{u}}^k\cdot\nabla)\mathbf{u}(t^k)\| + \|(\mathbf{u}^k\cdot\nabla)e_{\mathbf{u}}^k\|)\\
\leq&\frac{(1-\alpha)\nu}{6}\Delta t\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + \frac{(1-\alpha)\nu}{6}\Delta t\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k}\|^2 + C\Delta t\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k}\|^2\\
&+C(\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2 + \|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2)C_0^4(\Delta t)^5.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

利用柯西–施瓦茨不等式，(4.31) 右端的最后一项可估计为

$$\begin{aligned}
&2\Delta t\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|(\|p(t^k)-p(t^{k+1})\| + \|\mathbf{S}_{\mathbf{u}}^{k+1}\| + \|(\mathbf{u}(t^{k+1})\cdot\nabla)\mathbf{u}(t^{k+1}) - (\mathbf{u}(t^k)\cdot\nabla)\mathbf{u}(t^k)\|)\\
\leq&\frac{(1-\alpha)\nu}{6}\Delta t\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + C(\Delta t)^2\left(\int_{t^n}^{t^{k+1}}\|p_t\|^2dt + \int_{t^n}^{t^{k+1}}\|\mathbf{u}_{tt}\|^2dt\right)\\
&+C(\Delta t)^2\left(\int_{t^n}^{t^{k+1}}\|\nabla\mathbf{u}_t\|^2dt\|\mathbf{u}(t^{k+1})\|_{H^2}^2 + \|\mathbf{u}(t^k)\|_{H^1}^2\int_{t^n}^{t^{k+1}}\|\mathbf{u}_t\|_{H^2}^2dt\right).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

最后，结合 (4.31) 与 (4.32)–(4.38)，可得

$$\begin{aligned}
&(\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2-\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k}\|^2+\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}-\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k}\|^2)+(1-\frac{1-\alpha}{3})\nu\Delta t\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2\\
\leq&(\alpha+\frac{1-\alpha}{6})\nu\Delta t\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k}\|^2+\nu C_\alpha\Delta t\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k}\|^2+C\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k}\|^2\\
&+C(\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2+\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2)C_0^4(\Delta t)^5+C(\Delta t)^2\left(\int_{t^n}^{t^{k+1}}\|p_t\|^2dt+\int_{t^n}^{t^{k+1}}\|\mathbf{u}_{tt}\|^2dt\right)\\
&+C(\Delta t)^2\left(\int_{t^n}^{t^{k+1}}\|\nabla\mathbf{u}_t\|^2dt\|\mathbf{u}(t^{k+1})\|_{H^2}^2+\|\mathbf{u}(t^k)\|_{H^1}^2\int_{t^n}^{t^{k+1}}\|\mathbf{u}_t\|_{H^2}^2dt\right).
\end{aligned}\tag{4.39}$$

将 (4.39) 对 k、 $k=0$、2、.....、 n 求和，并使用 (4.21)、(4.25) 和引理 2.1，可得

$$\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2+\Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2\leq\begin{cases}C_1\left(1+C_0^4(\Delta t)^2\right)(\Delta t)^2, & d=2,\ \forall n\leq T/\Delta t,\\ C_1\left(1+C_0^4(\Delta t)^2\right)(\Delta t)^2, & d=3,\ \forall n\leq T_*/\Delta t,\end{cases}\tag{4.40}$$

其中 C_1 与 C_0 和 Δt 无关。

接下来估计 $\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|$。将 (4.27) 与 $2\Delta t\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}$ 取内积，并采用上述类似步骤，可得

$$\begin{aligned}
\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2+\Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2\leq&C_2\Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2+C\Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2\\
&+C(\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2+\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^k\|^2)C_0^4(\Delta t)^4+C(\Delta t)^2.
\end{aligned}\tag{4.41}$$

其中 C_2 与 C_0 和 Δt 无关。取 $\Delta t\leq\frac{1}{2C_2}$，利用 (4.40) 和离散 Gronwall 不等式，可得

$$\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2+\Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2\leq\begin{cases}C_3\left(1+C_0^4(\Delta t)^2\right)(\Delta t)^2, & d=2,\ \forall n\leq T/\Delta t,\\ C_3\left(1+C_0^4(\Delta t)^2\right)(\Delta t)^2, & d=3,\ \forall n\leq T_*/\Delta t,\end{cases}\tag{4.42}$$

其中 C_3 与 C_0 和 Δt 无关。

步骤 3： $|1-\xi^{n+1}|$的估计。我们首先建立与 (3.6) 对应的误差方程。令 S_R^{k+1} 为如下定义的截断误差

$$\mathbf{S}_R^{k+1}=\frac{\partial R(t^{k+1})}{\partial t}-\frac{R(t^{k+1})-R(t^k)}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\int_{t^k}^{t^{k+1}}(t^k-t)\frac{\partial^2R}{\partial t^2}dt.\tag{4.43}$$

将 (3.6) 减去 t^{k+1} 处的 (3.3)，可得

$$\begin{aligned}
\frac{e_R^{k+1}-e_R^k}{2\Delta t}=&\frac{R^{k+1}}{E(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1})+K_0}\left(-\nu\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2+(\mathbf{f}^{k+1},\tilde{\mathbf{u}}^{k+1})\right)\\
&-\frac{R(t^{k+1})}{E(\mathbf{u}(t^{k+1}))+K_0}\left(-\nu\|\nabla\mathbf{u}(t^{k+1})\|^2+(\mathbf{f}^{k+1},\mathbf{u}(t^{k+1}))\right)+\mathbf{S}_R^{k+1}.
\end{aligned}\tag{4.44}$$

利用 (3.9)，右侧的前两项 (4.44) 可估计为

$$
\begin{aligned}
&\frac{R^{k+1}}{E(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1})+K_0}\left(-\nu\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2+(\mathbf{f}^{k+1},\tilde{\mathbf{u}}^{k+1})\right)\\
&-\frac{R(t^{k+1})}{E(\mathbf{u}(t^{k+1}))+K_0}\left(-\nu\|\nabla\mathbf{u}(t^{k+1})\|^2+(\mathbf{f}^{k+1},\mathbf{u}(t^{k+1}))\right)\\
=&\frac{R^{k+1}}{E(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1})+K_0}\left(\nu\|\nabla\mathbf{u}(t^{k+1})\|^2-\nu\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2+(\mathbf{f}^{k+1},\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1})\right)\\
&+\left(\frac{R^{k+1}}{E(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1})+K_0}-\frac{R(t^{k+1})}{E(\mathbf{u}(t^{k+1}))+K_0}\right)\left(-\nu\|\nabla\mathbf{u}(t^{k+1})\|^2+(\mathbf{f}^{k+1},\mathbf{u}(t^{k+1}))\right)\\
\le&C\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|+C\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|+C|E(\mathbf{u}(t^{k+1}))-E(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1})|+C|e_R^{k+1}|\\
\le&C\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|+C\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|+C\|\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\|\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|+C|e_R^{k+1}|.
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

然后，对 (4.44) 与 $2\Delta t e_R^{k+1}$ 取内积，得到

$$
\begin{aligned}
&(|e_R^{k+1}|^2-|e_R^k|^2+|e_R^{k+1}-e_R^k|^2)\\
\le&C\Delta t|e_R^{k+1}|^2+C\Delta t\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2+C\Delta t\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

将 (4.46) 对 k、$k=0$、2、.....、n 求和，并利用 (4.40) 和 (4.42)，得到

$$
\begin{aligned}
|e_R^{n+1}|^2\le&C_4\Delta t\sum_{k=0}^{n}|e_R^{k+1}|^2+C\Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2+C\Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2\\
\le&\begin{cases}C_4\Delta t\sum\limits_{k=0}^{n}|e_R^{k+1}|^2+C\left(1+C_0^4(\Delta t)^2\right)(\Delta t)^2, & d=2,\ \forall n\le T/\Delta t,\\ C_4\Delta t\sum\limits_{k=0}^{n}|e_R^{k+1}|^2+C\left(1+C_0^4(\Delta t)^2\right)(\Delta t)^2, & d=3,\ \forall n\le T_*/\Delta t,\end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

其中 C_4 和 C 与 C_0 和 Δt 无关。因此，取 $\Delta t\le\frac{1}{2C_4}$ 并利用离散 Gronwall 不等式，可得

$$
|e_R^{n+1}|^2\le\begin{cases}C_5\left(1+C_0^4(\Delta t)^2\right)(\Delta t)^2, & d=2,\ \forall n\le T/\Delta t,\\ C_5\left(1+C_0^4(\Delta t)^2\right)(\Delta t)^2, & d=3,\ \forall n\le T_*/\Delta t,\end{cases}
\tag{4.48}
$$

其中 C_5 与 C_0 和 Δt 无关。

接下来，我们按如下方式完成归纳过程。回顾 (3.7)，可得

$$
\begin{aligned}
|1-\xi^{n+1}|=&\left|\frac{R(t^{k+1})}{E(\mathbf{u}(t^{k+1}))+K_0}-\frac{R^{n+1}}{E(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})+K_0}\right|\\
\le&C(|e_R^{n+1}|+\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|)\\
\le&\begin{cases}C_6\Delta t\sqrt{1+C_0^4(\Delta t)^2}, & d=2,\ \forall n\le T/\Delta t,\\ C_6\Delta t\sqrt{1+C_0^4(\Delta t)^2}, & d=3,\ \forall n\le T_*/\Delta t,\end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

其中 C_6 与 C_0 和 Δt无关。

令 $C_0 = \max\{2C_6, \sqrt{2C_4}, \sqrt{2C_2}, 4\}$ 和 $\Delta t \le \frac{1}{1+C_0^2}$，我们可以得到

$$C_6\sqrt{1 + C_0^4(\Delta t)^2} \le C_6(1 + C_0^2\Delta t) \le C_0. \tag{4.50}$$

将 (4.49) 与 (4.50) 结合，得到

$$|1 - \xi^{n+1}| \le \begin{cases} C_0\Delta t, & d = 2,\ \forall n \le T/\Delta t, \\ C_0\Delta t, & d = 3,\ \forall n \le T_*/\Delta t, \end{cases} \tag{4.51}$$

这就完成了归纳过程 (4.10)。

现在将 (4.40) 与 (4.42) 结合，可得

$$\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 + \|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 + \Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 \le \begin{cases} C(\Delta t)^2, & d = 2,\ \forall n \le T/\Delta t, \\ C(\Delta t)^2, & d = 3,\ \forall n \le T_*/\Delta t. \end{cases} \tag{4.52}$$

注意到 (3.7) 和 (4.51)，并利用稳定性结果 (4.25) 和 (4.22)，可得

$$\begin{aligned} &\|e_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 + \|\nabla e_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 + \Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\Delta e_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 \\ \le& 2(\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 + |\xi^{n+1} - 1|^4\|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2) + 2(\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 + |\xi^{n+1} - 1|^4\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2) \\ &+ 2\Delta t\sum_{k=0}^{n}(\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + |\xi^{n+1} - 1|^4\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2) \\ \le& 2(\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 + |\xi^{n+1} - 1|^4\|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2) + 2(\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2 + |\xi^{n+1} - 1|^4\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2) \\ &+ 2\Delta t\sum_{k=0}^{n}(\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + |\xi^{n+1} - 1|^4\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|^2) \\ \le& \begin{cases} C(\Delta t)^2, & d = 2,\ \forall n \le T/\Delta t, \\ C(\Delta t)^2, & d = 3,\ \forall n \le T_*/\Delta t, \end{cases} \end{aligned} \tag{4.53}$$

由此得到所需结果 (4.8)。

接下来估计压力误差。回顾（4.30），我们可以将（4.29）转化为以下形式:

$$\begin{aligned} \Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\nabla e_p^{k+1}\|^2 \le& C\Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\Delta\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 + C\Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2 \\ &+ C\Delta t\sum_{k=0}^{n}\|\nabla e_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2\|\nabla\mathbf{u}(t^{k+1})\|\|\nabla\mathbf{u}(t^{k+1})\|_{H^1} \\ &+ C\Delta t\sum_{k=0}^{n}\Delta t\|\nabla\mathbf{u}^{k+1}\|^2\|\nabla e_{\mathbf{u}}^{k+1}\|\|\nabla e_{\mathbf{u}}^{k+1}\|_{H^1} \\ \le& \begin{cases} C(\Delta t)^2, & d = 2,\ \forall n \le T/\Delta t, \\ C(\Delta t)^2, & d = 3,\ \forall n \le T_*/\Delta t. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.54}$$

将 $q=\Delta^{-1}e_p^{k+1}$ 代入（4.28），并利用（2.5），可得

$$\begin{aligned}\|e_p^{k+1}\|^2=&\Big((\mathbf{u}(t^{k+1})\cdot\nabla)\mathbf{u}(t^{k+1})-(\mathbf{u}^{k+1}\cdot\nabla)\mathbf{u}^{k+1},\Delta^{-1}e_p^{k+1}\Big)\\&-(\nu\nabla\times\nabla\times\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1},\Delta^{-1}e_p^{k+1})\\\leq&C\|e_{\mathbf{u}}^{k+1}\|_1\|\nabla\mathbf{u}(t^{k+1})\|_1+C\|\mathbf{u}^{k+1}\|_1\|e_{\mathbf{u}}^{k+1}\|_1\\&+C\|\nabla e_{\mathbf{u}}^{k+1}\|^2+\frac{1}{2}\|e_p^{k+1}\|^2\\\leq&\begin{cases}C(\Delta t)^2,\quad d=2,\ \forall n\leq T/\Delta t,\\C(\Delta t)^2,\quad d=3,\ \forall n\leq T_*/\Delta t,\end{cases}\end{aligned}\tag{4.55}$$

由此得到所需的结果 (4.9)。 □

5. 数值实验与总结性评论。本节将介绍一些数值实验，随后给出一些总结性评论。

5.1. 数值结果。我们首先进行一些数值测试，以验证用于纳维–斯托克斯方程的一阶 GSAV一致分裂方法 (3.5)-(3.8) 的精度。在以下所有例子中，我们取 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$。令 $T=1$, $K_0=1$，空间离散采用交错网格上的 MAC 格式，并取 $N_x=N_y=250$，从而对于实验中采用的时间步，空间离散误差相较于时间离散误差可以忽略不计。

例 1. 方程右端项根据以下解析解计算：

$$\begin{cases}p(x,y,t)=t(x^3-0.25),\\u_1(x,y,t)=-tx^2(x-1)^2y(y-1)(2y-1),\\u_2(x,y,t)=ty^2(y-1)^2x(x-1)(2x-1).\end{cases}$$

例 2. 方程右端项根据以下解析解计算：

$$\begin{cases}p(x,y,t)=\sin(t)(\sin(\pi y)-2/\pi),\\u_1(x,y,t)=\sin(t)\sin^2(\pi x)\sin(2\pi y),\\u_2(x,y,t)=-\sin(t)\sin(2\pi x)\sin^2(\pi y).\end{cases}$$

我们在表 5.1–5.6 中展示了例 1 和例 2 在不同黏性系数$\nu=1$、0.1、0.01 下的数值结果。可以很容易地观察到，速度和压力在不同范数下的数值结果均与定理 4.2 中的误差估计一致。

5.2. 总结性评论。我们对具有无滑移边界条件的纳维–斯托克斯方程的一阶半离散（时间离散）一致分裂 GSAV 格式进行了严格的误差分析。该格式是线性的、无条件稳定的，并且在每个时间步只需依次求解一系列泊松型方程。得益于其无条件稳定性，我们得以在二维（分别在三维）情形下，针对速度和压力近似推导出最优的全时间（分别为局部时间）误差估计

TABLE 5.1
Errors and convergence rates for Example 1 with $\nu = 1$.

Δt	$\|e_{\mathbf{u}}\|_{l^\infty}$	Rate	$\|\nabla e_{\mathbf{u}}\|_{l^\infty}$	Rate	$\|e_p\|_{l^\infty}$	Rate	$\|\nabla e_p\|_{l^2}$	Rate
1/10	8.45E-3	—	4.30E-2	—	5.27E-2	—	2.85E-1	—
1/20	4.43E-3	0.93	2.28E-2	0.92	2.87E-2	0.88	1.92E-1	0.57
1/40	2.24E-3	0.98	1.15E-2	0.98	1.46E-2	0.97	1.12E-1	0.78
1/80	1.12E-3	1.00	5.78E-3	1.00	7.32E-3	1.00	5.98E-2	0.90

TABLE 5.2
Errors and convergence rates for Example 1 with $\nu = 0.1$.

Δt	$\|e_{\mathbf{u}}\|_{l^\infty}$	Rate	$\|\nabla e_{\mathbf{u}}\|_{l^\infty}$	Rate	$\|e_p\|_{l^\infty}$	Rate	$\|\nabla e_p\|_{l^2}$	Rate
1/10	5.10E-2	—	2.74E-1	—	3.36E-2	—	1.86E-1	—
1/20	2.71E-2	0.91	1.47E-1	0.90	1.85E-2	0.86	1.19E-1	0.64
1/40	1.40E-2	0.95	7.62E-2	0.95	9.70E-3	0.93	6.88E-2	0.80
1/80	7.10E-3	0.98	3.88E-2	0.97	4.95E-3	0.97	3.69E-2	0.90

情形下的结果。据我们所知，这是针对具有无滑移边界条件的纳维–斯托克斯方程的一致分裂格式首次获得的全时间误差估计。

尽管本文仅考虑了时间上的半离散情形，但通过采用与 [22] 中类似的速度 C^1 子空间和压力 C^0 子空间，经过繁琐的分析后，该方法可以扩展到全离散近似。一致分裂 GSAV 格式也可以很容易地扩展到高阶 [36]。然而，将当前的误差分析扩展到高阶情形并非易事，这将是未来研究的一个课题。

参考文献

[1] F. BREZZI AND M. FORTIN, *Mixed and hybrid finite element methods*, 第15卷, Springer Science & Business Media, 2012年。[2] A. J. CHORIN, *Numerical solution of the Navier-Stokes equations*, 《计算数学》, 22（1968）, 第745–762页。[3] W. E AND J.-G. LIU, *Gauge method for viscous incompressible flows*, 《数学科学通讯》, 1（2003）, 第317–332页。[4] H. C. ELMAN, D. J. SILVESTER, AND A. J. WATHEN, *Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics* 2014 , 牛津大学出版社, 美国, 。[5] V. GIRAULT AND P.-A. RAVIART, *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*, 《数学讲义》, 柏林施普林格出版社, 749（1979）。[6] R. GLOWINSKI, *Finite element methods for incompressible viscous flow*, 《数值分析手册》, 9（2003）, 第3–1176页。[7] J. GUERMOND AND J. SHEN, *A new class of truly consistent splitting schemes for incompressible flows*, 《计算物理学杂志》, 192（2003）, 第262–276页。[8] J. GUERMOND AND J. SHEN, *On the error estimates for the rotational pressure-correction projection methods*, 《计算数学》, 73（2004）, 第1719–1737页。[9] J. L. GUERMOND, P. MINEV, AND J. SHEN, *An overview of projection methods for incompressible flows*, 《计算方法与应用力学和工程》, 195（2006）, 第6011–6045页。[10] J.-L. GUERMOND AND J. SHEN, *Velocity-correction projection methods for incompressible flows*, SIAM数值分析杂志, 41（2003）, 第112–134页。

TABLE 5.3
Errors and convergence rates for Example 1 with $\nu = 0.01$.

Δt	$\|e_{\mathbf{u}}\|_{l^\infty}$	Rate	$\|\nabla e_{\mathbf{u}}\|_{l^\infty}$	Rate	$\|e_p\|_{l^\infty}$	Rate	$\|\nabla e_p\|_{l^2}$	Rate
1/10	1.00E-1	—	7.66E-1	—	1.45E-2	—	8.36E-2	—
1/20	5.11E-2	0.97	3.97E-1	0.95	6.41E-3	1.18	4.76E-2	0.81
1/40	2.58E-2	0.98	2.03E-1	0.97	3.01E-3	1.09	2.63E-2	0.86
1/80	1.30E-2	0.99	1.02E-1	0.99	1.46E-3	1.04	1.39E-2	0.92

TABLE 5.4
Errors and convergence rates for Example 2 with $\nu = 1$.

Δt	$\|e_{\mathbf{u}}\|_{l^\infty}$	Rate	$\|\nabla e_{\mathbf{u}}\|_{l^\infty}$	Rate	$\|e_p\|_{l^\infty}$	Rate	$\|\nabla e_p\|_{l^2}$	Rate
1/10	6.59E-3	—	5.04E-2	—	4.17E-2	—	4.06E-1	—
1/20	3.24E-3	1.02	2.50E-2	1.01	2.15E-2	0.96	2.62E-1	0.63
1/40	1.59E-3	1.03	1.22E-2	1.03	1.04E-2	1.04	1.48E-1	0.82
1/80	7.86E-4	1.02	6.02E-3	1.02	5.05E-3	1.04	7.79E-2	0.93

[11] M. D. Gunzburger, *Finite element methods for viscous incompressible flows: a guide to theory, practice, and algorithms* 2012

[12] Y. He and W. Sun, *Stability and convergence of the Crank-Nicolson/Adams-Bashforth scheme for the time-dependent Navier-Stokes equations* 45 2007 837 869 , SIAM数值分析杂志, （）, 第–页。[13] J. G. Heywood and R. Rannacher, *Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem. I. regularity of solutions and second-order error estimates for spatial discretization* , SIAM数值分析杂志, 19（1982）, 第275–311页。[14] F. Huang and J. Shen, *Stability and error analysis of a class of high-order IMEX schemes for Navier–Stokes equations with periodic boundary conditions*, SIAM数值分析杂志, 59（2021）, 第2926–2954页。[15] F. Huang and J. Shen, *A new class of implicit-explicit BDFk SAV schemes for general dissipative systems and their error analysis* 392 2022 114718, 25 , 《计算方法与应用力学和工程》, （）, 论文编号为。[16] H. Johnston and J.-G. Liu, *Accurate, stable and efficient Navier–Stokes solvers based on explicit treatment of the pressure term* 199 2004 221 259 , , 《计算物理学杂志》, （）, 第–页。[17] O. A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon & Breach, （1969）。

[18] X. Li and J. Shen, *Error analysis of the SAV-MAC scheme for the Navier-Stokes equations*, SIAM数值分析杂志, 58（2020）, 第2465–2491页。[19] X. Li, J. Shen, and Z. Liu, *New SAV-pressure correction methods for the Navier-Stokes equations: stability and error analysis* 91 2022 141 167 , 《计算数学》, （）, 第–页。

[20] L. Lin, Z. Yang, and S. Dong, *Numerical approximation of incompressible Navier-Stokes equations based on an auxiliary energy variable* 388 2019 1 22 , 《计算物理学杂志》, （）, 第–页。[21] J.-G. Liu, J. Liu, and R. L. Pego, *Stability and convergence of efficient Navier-Stokes solvers via acommutator estimate*, 《纯粹与应用数学通讯：库朗数学科学研究所发行的期刊》, 60（2007）, 第1443–1487页。[22] J.-G. Liu, J. Liu, and R. L. Pego, *Error estimates for finite-element Navier-Stokes solvers without standard inf-sup conditions* 30 2009 743 768 , 《中国数学年刊》B辑, （）, 第–页。[23] J.-G. Liu and R. Pego, *Stable discretization of magnetohydrodynamics in bounded domains*, 《数学科学通讯》, 8（2010）, 第235–251页。[24] R. Nochetto and J.-H. Pyo, *Error estimates for semi-discrete gauge methods for the Navier-Stokes equations* 74 2005 521 542 , 《计算数学》, （）, 第–页。

[25] D. Serson, J. Meneghini and S. J. Sherwin *Velocity-correction schemes for the incompressible Navier–Stokes equations in general coordinate systems* 316 2016 243 , , , 《计算物理学杂志》, （）, 第–254页。

TABLE 5.5
Errors and convergence rates for Example 2 with $\nu = 0.1$.

Δt	$\|e_{\mathbf{u}}\|_{l^\infty}$	Rate	$\|\nabla e_{\mathbf{u}}\|_{l^\infty}$	Rate	$\|e_p\|_{l^\infty}$	Rate	$\|\nabla e_p\|_{l^2}$	Rate
1/10	6.48E-2	—	4.59E-1	—	4.10E-2	—	3.45E-1	—
1/20	3.34E-2	0.95	2.58E-1	0.94	2.26E-2	0.86	2.05E-1	0.66
1/40	1.69E-2	0.98	1.32E-1	0.97	1.17E-2	0.95	1.17E-1	0.81
1/80	8.52E-3	0.99	6.62E-2	0.99	5.90E-3	0.98	6.21E-2	0.91

TABLE 5.6
Errors and convergence rates for Example 2 with $\nu = 0.01$.

Δt	$\|e_{\mathbf{u}}\|_{l^\infty}$	Rate	$\|\nabla e_{\mathbf{u}}\|_{l^\infty}$	Rate	$\|e_p\|_{l^\infty}$	Rate	$\|\nabla e_p\|_{l^2}$	Rate
1/10	2.54E-1	—	2.50E-0	—	1.36E-1	—	5.96E-1	—
1/20	1.37E-1	0.89	1.36E-0	0.88	7.57E-2	0.85	3.01E-1	0.98
1/40	7.07E-2	0.95	7.00E-1	0.96	3.89E-2	0.96	1.48E-1	1.02
1/80	3.59E-2	0.98	3.54E-1	0.98	1.96E-2	0.99	7.32E-2	1.02

[26] J. SHEN, *Long time stability and convergence for fully discrete nonlinear Galerkin methods*, 《应用分析》, 38 (1990), 第 201–229 页。[27] J. SHEN,
On error estimates of projection methods for Navier-Stokes equations: first-order schemes, SIAM数值分析杂志, 29 (1992), 第 57–77 页。[28] J. SHEN, *Modeling and numerical approximation of two-phase incompressible flows by a phase-field approach*, 《材料模拟的多尺度建模与分析》, (2012), 第 147–195 页。[29] J. SHEN, J. XU, AND J. YANG,
A new class of efficient and robust energy stable schemes for gradient flows, 《SIAM 综述》, 61 (2019), 第 474–506 页。
[30] J. SHEN AND X. YANG, *Error estimates for finite element approximations of consistent splitting schemes for incompressible flows* 8 2007 663 675 ,《离散与连续动力系统-B》, ( ), 第 – 页。[31] R. TEMAM, *Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (ii)* 33 1969 377 385 ,《理性力学与分析档案》, ( ), 第 – 页。[32] R. TÉMAM, *Nonlinear functional analysis and Navier-Stokes equations*, SIAM, 费城, (1983)。
[33] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*, CBMS-NSF 应用数学区域会议系列第 66 卷，工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，第二版，1995 年。[34] R. TEMAM,
Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis, 第 343 卷，美国数学学会，2001 年。
[35] E. WEINAN AND J.-G. LIU, *Projection method I: convergence and numerical boundary layers*, SIAM数值分析杂志, (1995), 第 1017–1057 页。[36] K. WU, F. HUANG, AND J. SHEN,
A new class of higher-order decoupled schemes for the incompressible Navier-Stokes equations and applications to rotating dynamics, 《计算物理学杂志》, 458 (2022), 第 111097 页。