arXiv:2301.01411v1 [math.AP] 4 Jan 2023

无界漂移和界面下非散度形式椭圆均匀化中的定量估计

Yiping Zhang*

摘要

本文研究了具有无界漂移和界面的非散度形式椭圆均匀化中的定量估计，延续了 Hairer 和 Manson [《概率年刊》39（2011）648-682],的先前工作；他们研究了这类过程在扩散尺度变换下的长期/大尺度极限行为。我们确定了有效方程，并获得了格林函数梯度的大小估计以及（一般而言）最优的收敛速率。证明首先依赖于将非散度形式转化为散度形式，使其系数矩阵在界面两侧分别以指数速率衰减到某个（不同的）周期矩阵；随后研究散度形式均匀化中的这一特殊结构。

1 引言

本文研究具有无界漂移的非散度型椭圆方程，其低阶系数（即漂移项）在一个具有有限厚度的“界面区域”之外是周期的；这类方程源于在扩散尺度变换下带漂移项的扩散过程。实际上，本文延续了 Hairer 和 Manson[13], 此前的研究。在此前的工作中，他们借助 Freidlin 和 Wentzell [8] 为图上的扩散过程建立的框架，研究了这类过程在扩散尺度变换下长期/大尺度行为的极限，以确定极限过程的生成元。然而，我们从偏微分方程而非随机过程的角度研究这一问题，并能够确定有效方程，获得最优的$O(\varepsilon)$收敛速率。

更确切地说，对于 $0<\varepsilon<1$ 和 $d\geq 3$，我们考虑以下方程

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon u_\varepsilon=\tilde{a}_{ij}^\varepsilon\partial_{ij}u_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\tilde{b}_i^\varepsilon\partial_i u_\varepsilon=f \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d, \tag{1.1}$$

*雁栖湖北京数学与应用数学研究院，北京 101408，中国；丘成桐数学科学中心，清华大学，北京 100084，中国，（zhangyip- ing161@mails.ucas.ac.cn）。

其中我们假设存在正数常量 $0<\lambda\le\Lambda$，使得对于任意 $\xi\in\mathbb{R}^{d}$ 和 $A=:(\tilde{a}_{ij})$，

$$\begin{aligned}&\tilde{A}=\tilde{A}^{*};\ \lambda|\xi|^{2}\le\tilde{A}\xi\cdot\xi\le\Lambda|\xi|^{2};\\&\tilde{A}\text{ is 1-periodic},\ \tilde{A}\in C^{\infty}(\mathbb{Y}),\end{aligned}\tag{1.2}$$

且漂移项 b 满足

$$\tilde{b}(y)=\begin{cases}\tilde{b}_{+}(y)&\text{if}\quad y_{1}>1,\\\text{smooth connection, if}&-1\le y_{1}\le 1,\\\tilde{b}_{-}(y)&\text{if}\quad y_{1}<-1,\end{cases}\tag{1.3}$$

其中 b_{+} 和 b_{-} 是光滑的 1-周期向量场。

$\tilde{a}_{ij}$ 是 1-周期的，意味着对于任意 $y\in\mathbb{R}^{d}$ 和 $z\in\mathbb{Z}^{d}$，$\tilde{a}_{ij}(y+z)=\tilde{a}_{ij}(y)$。全文采用求和约定。同时，如果上下文含义明确，我们将记$\partial_{i}=:\partial_{x_{i}}$，$f^{\varepsilon}(x)=:f(x/\varepsilon)$ 和 $\mathbb{Y}=:[0,1)^{d}\cong\mathbb{R}^{d}/\mathbb{Z}^{d}$。我们定义 $\mathbb{D}=\mathbb{R}\times\mathbb{T}^{d-1}$，其中 $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$；若 u 关于 y' 是 1-周期的，则称 u 是 $\mathbb{D}$-周期的，其中 $y=(y_{1},y')\in\mathbb{R}^{d}$。此外，我们将使用齐次索伯列夫空间$\dot{H}^{1}(\mathbb{R}^{d})=\left\{v:\ \nabla v\in L^{2},||u||_{L^{\frac{2d}{d-2}}}\le C(d)||\nabla v||_{L^{2}}\right\}$，其中 $d\ge 3$。

在继续之前，我们先介绍无界漂移非散度型椭圆形式周期均匀化的一些基本结果。具体而言，对于 $0<\varepsilon<1$，定义算子

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\pm,\varepsilon}=:\tilde{a}_{ij}^{\varepsilon}\partial_{ij}\cdot+\frac{1}{\varepsilon}\tilde{b}_{\pm}^{\varepsilon}\cdot\nabla\cdot.\tag{1.4}$$

已知于 [5, 第 3 章。3] 与 $\mathcal{L}_{\pm,\varepsilon}$相关的不变测度 $m_{\pm}$ 定义为

$$\begin{cases}\partial_{y_{i}y_{j}}\left(\tilde{a}_{ij}(y)m_{\pm}(y)\right)-\partial_{y_{i}}\left(\tilde{b}_{\pm,i}(y)m_{\pm}(y)\right)=0\text{ in }\mathbb{Y},\\m_{\pm}\text{ is 1-periodic},\ \displaystyle\int_{\mathbb{Y}}m_{\pm}dy=1,\ 0<c_{1}\le m_{\pm}\le c_{2}.\end{cases}\tag{1.5}$$

此外，已知于 [5, 第 3 章。4] 在假设 (1.2)-(1.3) 下，若 $f\in L^{2}(\Omega)$ 中的 Ω 是 $\mathbb{R}^{d}$ 内的有界 $C^{1,1}$ 区域，且满足 $d\ge 2$ 和 $\int_{\mathbb{Y}}\tilde{b}_{\pm,i}m_{\pm}dy=0$，那么对于$i=1,\cdots,d$，$\tilde{\mathcal{L}}_{\pm,\varepsilon}u_{\pm,\varepsilon}=f$ 在 Ω 中的有效方程（其中 $u_{\pm,\varepsilon}\in H_{0}^{1}(\Omega)$）为

$$\begin{cases}\widehat{\tilde{a}}_{\pm,ij}\partial_{ij}u_{\pm,0}=f&\text{in }\Omega,\\u_{\pm,0}=0&\text{on }\partial\Omega,\end{cases}\tag{1.6}$$

其中，有效算子 $\tilde{a}_{\pm,\ ij}$ 定义为

$$\widehat{\tilde{a}}_{\pm,ij}=\fint_{\mathbb{Y}}\left(\tilde{a}_{ij}+2\tilde{a}_{ik}\partial_{y_{k}}\tilde{\chi}_{\pm,j}+\tilde{a}_{k\ell}\partial_{y_{k}}\tilde{\chi}_{\pm,i}\partial_{y_{\ell}}\tilde{\chi}_{\pm,j}\right)m_{\pm}(y)dy,\tag{1.7}$$

且 $\tilde{\chi}_{\pm,\ j}$, $j=1,\cdots,d$ 是由下式定义的校正函数

$$\begin{cases}\tilde{a}_{ik}\partial_{y_iy_k}\tilde{\chi}_{\pm,j}+\tilde{b}_{\pm,i}\partial_{y_i}\tilde{\chi}_{\pm,j}=-\tilde{b}_{\pm,j}\text{ in }\mathbb{Y},\\ \quad\tilde{\chi}_{\pm,j}\text{ is 1-periodic with }\displaystyle\int_{\mathbb{Y}}\tilde{\chi}_{\pm,j}=0.\end{cases}$$

另请参阅我们先前的工作 [15], ，其中我们首先将非散度形式 (1.4) 转化为散度形式，然后通过紧性论证获得了 $O(\varepsilon)$ 收敛速率和内部 Lipschitz 估计。此外，我们还给出了两个例子，说明所谓中心化条件的必要性以及 Lipschitz 正则性估计的最优性。更多详情请参阅 [15] 。

˜接下来，对于满足 $d\geq 2$ 的 (1.1) 中定义的算子 $\mathcal{L}_\varepsilon$ ， [13, 命题 5.5] 证明，存在唯一的（相差一个比例因子）不变测度 m，使得

$$\begin{cases}\partial_{y_iy_j}\left(\tilde{a}_{ij}(y)m(y)\right)-\partial_{y_i}\left(\tilde{b}_i(y)m(y)\right)=0\text{ in }\mathbb{D},\\ \quad m\text{ is }\mathbb{D}\text{-periodic, }0<c_1'\leq m\leq c_2'.\end{cases}\tag{1.8}$$

关于不变测度 m 的正性，请参阅 [5, 第 3.3 章。3] 此外，利用 (1.8) 中定义的不变测度 m ，我们将方程 (1.1) 乘以 $m^\varepsilon(x)$，并令

$$a_{ij}^\varepsilon=\tilde{a}_{ij}^\varepsilon m^\varepsilon,\quad \beta_i^\varepsilon=\tilde{b}_i^\varepsilon m^\varepsilon,\quad \tilde{f}^\varepsilon=fm^\varepsilon.\tag{1.9}$$

我们得到

$$a_{ij}^\varepsilon\partial_{ij}u_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\beta_i^\varepsilon\partial_iu_\varepsilon=\tilde{f}^\varepsilon\quad\text{ in }\quad\mathbb{R}^d.$$

因此， u_ε 是以下方程的解

$$\mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon=:\partial_i\left(a_{ij}^\varepsilon\partial_ju_\varepsilon\right)+\frac{1}{\varepsilon}b_i^\varepsilon\partial_iu_\varepsilon=\tilde{f}^\varepsilon\quad\text{ in }\quad\mathbb{R}^d.\tag{1.10}$$

其中

$$b_i(y)=\beta_i(y)-\partial_{y_j}a_{ij}(y)\quad\text{is }\mathbb{D}\text{-periodic.}\tag{1.11}$$

于是，由 (1.8) 和 (1.9) 可得

$$\partial_{y_i}b_i=0\quad\text{in}\quad\mathbb{D}.\tag{1.12}$$

此外，将单位胞 $C_{\pm,j}$ 和 $q_\pm$ 记为

$$\begin{aligned}&C_{+,j}=[j,j+1]\times\mathbb{T}^{d-1},\ C_{-,j}=[-j-1,-j]\times\mathbb{T}^{d-1};\\&q_\pm=\lim_{j\to\infty}m(C_{\pm,j})=\lim_{j\to\infty}\int_{C_{\pm,j}}m(y)dy.\end{aligned}$$

˜ ˜类似地，在 (1.10) 和 (1.11) 中分别用 $m_\pm$ 和 $b_\pm$ 替换 m 和 b，即可得到算子$\mathcal{L}_{\pm,\varepsilon}$ 的定义。

有了上述记号，我们可以确定算子 $\{\mathcal{L}_\varepsilon\}_{1>\varepsilon>0}$的有效算子，具体如下文定理所述。

定理 1.1. 在假设 (1.1)-(1.3) 下，对于 $\mathbb{R}^d$ 中任意有界利普希茨区域 Ω，$f \in L^2(\Omega)$ 且 $\int_{\mathbb{Y}} \tilde{b}_{\pm,i} m_{\pm} dy = 0$，对于 $i = 1, \cdots, d$ 且满足 $d \geq 2$，由 (1.10) 定义的算子 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的有效方程为

$$\mathcal{L}_0 u_0 =: \operatorname{div}(\widehat{A}(x)\nabla u_0) = f(x)(q_+ I_{x_1>0} + q_- I_{x_1<0})(x) \ in\ \Omega,$$

for

$$\widehat{A}(x) = \begin{cases} q_+ \widehat{A_+}, & if \quad x_1 > 0, \\ q_- \widehat{A_-}, & if \quad x_1 < 0, \end{cases} \tag{1.13}$$

其中，$A_\pm$ 是与$\mathcal{L}_{\pm,\varepsilon}$相关的均匀化矩阵，而 $I_{x_1>0}$ 和 $I_{x_1<0}$ 是特征函数。一般而言，矩阵 A 在界面$\mathcal{I} = \{x$两侧是不连续的：$x_1 = 0\}$。

注 1.2。实际上，方程 (1.1) 的极限过程的生成元也已通过概率方法在 *[13]*中得到。然而，要获得与该极限过程生成元相关的有效方程并不容易。而在定理 1.1 中，我们可以给出有效方程的显式表达式。

此外，我们还可以得到以下最优的 $O(\varepsilon)$ 收敛速率（关于非散度形式椭圆周期均匀化中不含漂移项的一般情形下的最优 $O(\varepsilon)$ 收敛速率，参见 [19]）：

定理 1.3。在假设 (1.1)–(1.3) 下，$f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \cap L^{2d/(d+4)}(\mathbb{R}^d)$ 对某个$p \in (d, \infty)$成立，并且 $\int_{\mathbb{Y}} \tilde{b}_{\pm,i} m_{\pm} dy = 0$。对于 $i = 1、\cdots、d$ 且满足 $d \geq 3$的情形，设 $u_\varepsilon、u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ 分别是在 $\mathbb{R}^d$中求解方程 $\mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon = f m^\varepsilon$ 以及在 $\mathbb{R}^d$中求解 $\mathcal{L}_0 u_0 = f(x)(q_+ I_{x_1>0} + q_- I_{x_1<0})(x)$ 的解，则有

$$||u_\varepsilon - u_0||_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^d)} + ||u_\varepsilon - u_0||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon ||f||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \cap L^{2d/(d+4)}(\mathbb{R}^d)},$$

其中，常数 C 仅依赖于 d、p、A 和 b。

请注意，在定理 1.3 中，我们假设 $d \geq 3$，因为我们需要索伯列夫嵌入不等式来保证 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ 中 u_ε 和 u_0 的存在，以及算子 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 和 $\mathcal{L}_0$ 在 $\mathbb{R}^d$中的格林函数的大小估计。此外，在某些情况下还会提及 $d = 2$的情形。

近年来，人们对均匀化中散度形式的理论已有广泛了解，例如 L^2 和 H_0^1 的收敛速率、利普希茨估计、$W^{1,p}$ 估计，以及格林函数和基本解的渐近行为；尤其是周期情形和遍历随机情形，详情可参阅一些优秀的综述[1, 5, 14, 18] 。然而，对于均匀化中的非散度形式，人们所知甚少，尤其是涉及无界漂移的均匀化情形。

没有无界漂移的重要定性分析或可追溯至 Avellaneda-Lin [4]，，他们通过使用紧致性方法，获得了椭圆周期均匀化中非散度形式边值问题解的统一 $C^{0,\alpha}$，$C^{1,\alpha}$ 以及 $C^{1,1}$ 先验估计。后来

Armsrtong-Lin [2] 针对非散度形式的线性一致椭圆方程，获得了随机均匀化的定量结果。在对系数作出强独立性假设的条件下，他们获得了校正函数次二次增长的最优估计，其概率界为拉伸指数型界。另请参阅 Armsrtong-Smart [3] 关于遍历随机情形下非散度形式的早期研究。最近，Sprekeler-Tran [19] 普遍获得了最优的 O（ε）收敛速率。更具体地说，他们获得了

$$\text{for any } p \in (1,\infty),\ ||u_\varepsilon - u_0||_{W^{1,p}} = O(\varepsilon),\ \text{if } f \in W^{3,q} \text{ for some } q > d.$$

此外，关于 Guo-Tran 在二维情形下，针对非散度形式且系数具有某些附加结构时的 an $O(\varepsilon^2)$ 收敛速率猜想，参见 [12]；关于 Guo-Sprekeler-Tran 对这一 $O(\varepsilon^2)$ 收敛速率猜想给出的肯定答案，参见 [9]。顺便提一下，我们还请读者参阅 [5, 第 3.4-3.5], 章，其中作者利用概率方法和双尺度展开，在存在无界漂移的情况下，在假设 $f \in W^{3,q}$ 对某个 $q > d$ 成立时，得到了有效方程以及 $O(\varepsilon)$ L^∞- 收敛速率。

在本节末尾，我们简要说明如何得到定理 1.3 中结果的思路。

步骤 1（第 2 节）。我们考虑散度形式 $\mathcal{L}_{\varepsilon,>}u_\varepsilon = \partial_i(a_{>,ij}(x/\varepsilon)\partial_j u_\varepsilon) = f$，其中系数矩阵 $A_>$ 关于 y' 是 1-周期的，并以指数速度衰减至某个周期矩阵 A_+。对于该算子 $A_>$，我们引入校正函数的定义，确定有效算子；在对 $A_>$ 和 f 作出适当的正则性假设后，可以得到收敛速率和一致内部 Lipschitz 估计。

步骤 2（第 3 节）。我们将散度形式 (1.10) 转换为$\mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon = \partial_i\left(a^\varepsilon_{1,\ ij}\partial_j u_\varepsilon\right) = fm^\varepsilon$，其中系数矩阵$A_1$具有有限厚度的界面；当 $y_1 \to +\infty$ 时， A_1 以指数速度快速衰减至 A_+；当 $y_1 \to -\infty$ 时， A_1 以指数速度快速衰减至 A_-，其中 $A_\pm$ 为某些周期矩阵。实际上，出发点是，在周期情形（即不存在“界面区域”）下，存在所谓的通量校正子 ϕ，使得 $\varepsilon^{-1}b^\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon = \partial_i\left(\phi^\varepsilon_{ij}\partial_j u_\varepsilon\right)$，且当漂移项 b 为均值周期无散向量场时，有 $\phi_{ij} = -\phi_{ji}$，这意味着

$$\mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon = \operatorname{div}\left[\left(A^\varepsilon + \phi^\varepsilon\right)\nabla u_\varepsilon\right] = fm^\varepsilon. \tag{1.14}$$

注意，对于任意 $\xi \in \mathbb{R}^d$，$(A+\phi)\xi\cdot\xi = A\xi\cdot\xi$，如果 $m \equiv 1$，则可归结为 [18] 中所考虑的情形。

步骤 3（第 4 节）。对于步骤 2 中得到的散度形式，我们引入校正函数的定义，确定有效算子，并在适当的正则性假设下，得到该算子的格林函数及其梯度的大小估计，从而推出所需的收敛速率。实际上，步骤 3 中证明的思路源于 [6, 16], ，因为有效算子与 [16] 中所考虑的情形几乎相同。

2 散度型的基本结果

在本小节中，我们考虑均匀化中的二阶散度形式椭圆方程。更确切地说，对于 $d \geq 2$ 和 $0 < \varepsilon < 1$，考虑

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\varepsilon,>} u_\varepsilon = \partial_i \left(a_{>,ij}(x/\varepsilon) \partial_j u_\varepsilon \right) = f & \text{in } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

where 主系数矩阵 $A_> = (a_{>,\ ij})$ 满足椭圆性条件

$$\lambda |\xi|^2 \leq a_{>,ij}(y) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2 \quad \text{for } y \in \mathbb{R}^d \text{ and } \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{2.2}$$

其中 $0 < \lambda \leq \Lambda$，并且在 $y' = (y_2, \cdots, y_d)$ 中满足 1-周期性条件

$$A_>(y + z) = A_>(y) \quad \text{for } y \in \mathbb{R}^d \text{ and } z = (0, z') \text{ with } z' \in \mathbb{Z}^{d-1}, \tag{2.3}$$

并且沿着 y_1 的方向，存在常数 $\kappa > 0$ 和 1-周期矩阵值函数 $A_+(y)$，满足 (2.2)，使得

$$|A_>(y) - A_+(y)| \leq \exp\{-\kappa |y_1|\}, \quad \text{for } y \in \mathbb{R}^d, \tag{2.4}$$

以及 $VMO(\mathbb{R}^d)$ 光滑性条件。为了量化光滑性，我们将施加以下条件： $A_> \in VMO(\mathbb{R}^d)$ 意味着

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \fint_{B(x,t)} |A_> - \fint_{B(x,t)} A_>| \leq \rho(t), \quad \text{for } 0 < t \leq 1, \tag{2.5}$$

其中 ρ 是 $[0, 1]$ 上的非递减连续函数，且 $\rho(0) = 0$。实际上，条件 (2.3) 和 (2.4) 表明 A 是 $\mathbb{D}$-周期的，并且在 y_1 中以指数速度衰减至 A_+。请注意， [6] 中研究了一个更一般的情形。此外，校正子 χ_k、 $k = 1$、 $\cdots$、 d 定义如下

$$\begin{cases} \partial_{y_i} \left(a_{>,ij}(y) \partial_{y_j} \chi_{>,k} \right) = -\partial_{y_i} a_{>,ik} \text{ in } \mathbb{D}, \\ \chi_{>,k} \ is \ 1\text{-periodic in } y'. \end{cases} \tag{2.6}$$

下面的引理陈述了校正函数 $\chi_{>,k}$的唯一性和存在性。

引理 2.1. 假设矩阵 $A_>$ 满足 (2.2)-(2.4)，则方程 (2.6) 存在唯一的$\mathbb{D}$-周期解 $\chi_{>,k}$ ，使得

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{D}} |\nabla_y (\chi_{>,k} - \chi_{+,k})|^2 \leq C(d, \lambda, \Lambda, \kappa); \\ |\chi_{>,k} - \chi_{+,k}| \to 0 \ as \ |y_1| \to +\infty. \end{cases} \tag{2.7}$$

其中 $\chi_{+,\ k}$ 在 (2.8) 中定义，是 1-周期矩阵 A_+ 的校正函数，而常数C 仅取决于 d、 λ、 Λ 和 κ。

证明。对于椭圆周期矩阵 A_+，校正函数 $\chi_{+,\,k}$、 $k=1$、$\cdots$、d 定义如下：

$$\begin{cases} \partial_{y_i}\left(a_{+,ij}\left(y\right)\partial_{y_j}\chi_{+,k}\right)=-\partial_{y_i}a_{+,ik} \text{ in } \mathbb{Y}, \\ \qquad \chi_k \ is \text{ 1-periodic with} \fint_{\mathbb{Y}}\chi_{+,k}=0. \end{cases} \tag{2.8}$$

那么，差值 $\chi_k-\chi_{+,k}$ 满足以下方程

$$\begin{aligned} \partial_{y_i}\left(a_{>,ij}\left(y\right)\partial_{y_j}(\chi_{>,k}-\chi_{+,k})\right) &= -\partial_{y_i}(a_{>,ik}-a_{+,ik})-\partial_{y_i}[(a_{>,ij}-a_{+,ij})\partial_{y_i}\chi_{+,k}] \\ &=: \operatorname{div} F(A_>,A_+,\chi_{+,k}) \quad \text{ in } \mathbb{D}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

对于任意 $1\le p<\infty$，不难看出

$$\int_{\mathbb{D}}|a_{>,ik}-a_{+,ik}|^p(y)dy\le\int_{\mathbb{D}}\exp\{-\kappa p|y_1|\}dy\le C_p. \tag{2.10}$$

此外，利用 χ_+的周期性，我们有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}}|(a_{>,ij}-a_{+,ij})\partial_{y_i}\chi_{+,k}|^p &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{[m,m+1]\times\mathbb{T}^{d-1}}|(a_{>,ij}-a_{+,ij})\partial_{y_i}\chi_{+,k}|^p dy \\ &\le C\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\exp\{-\kappa p|m|\}\int_{[m,m+1]\times\mathbb{T}^{d-1}}|\partial_{y_i}\chi_{+,k}|^p dy \\ &\le C\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\exp\{-\kappa p|m|\}||\nabla_y\chi_+||^p_{L^p(\mathbb{Y})} \\ &\le C_p||\nabla_y\chi_+||^p_{L^p(\mathbb{Y})}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

那么，根据经典的 Lax-Milgram 定理，在 (2.10) 和 (2.11) 中选取 $p=2$ 后，存在一个解 $\chi_{>,k}-\chi_{+,k}$，满足 (2.9)；或者等价地，存在一个唯一解 $\chi_{>,k}$，满足 (2.6)，使得

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{D}}|\nabla_y(\chi_{>,k}-\chi_{+,k})|^2\le C(d,\lambda,\kappa); \\ |\chi_{>,k}(y)-\chi_{+,k}(y)|\to 0 \text{ as } |y_1|\to+\infty. \end{cases} \tag{2.12}$$

此外，如果 $A_>\in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ 且 $A_+\in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$，其中某个固定的 $\alpha>0$，那么根据经典的 Schauder 估计，由 (2.9)、(2.12) 以及$\nabla_y\chi_+\in C^{0,\alpha}(\mathbb{Y})$，我们有 $\nabla_y\chi_>\in C^{0,\alpha}(\mathbb{D})$。 □

为了引入有效算子，若（2.13）中的极限存在，我们首先引入以下记号：

$$\langle b\rangle =: \lim_{N\to\infty}\fint_{\mathbb{D}_N}b(y)dy, \text{ for } b \text{ being } \mathbb{D}\text{-periodic}, \tag{2.13}$$

其中 $\mathbb{D}_N =: (-N, N) \times \mathbb{T}^{d-1}$. 不难看出

$$\langle b \rangle := \fint_{\mathbb{Y}} b(y)dy, \quad \text{if } b \text{ is 1-periodic in } y. \tag{2.14}$$

接下来，我们可以为 $A_>$ 引入有效算子 $\widehat{A_>}$：

$$\widehat{A_>} =: \langle A_> \rangle + \langle A_> \nabla \chi_> \rangle = \langle (a_{>,ij}) \rangle + \langle (a_{>,ik} \partial_{y_k} \chi_{>,j}) \rangle. \tag{2.15}$$

实际上，有效算子 $\widehat{A_>}$ 由所谓的双尺度展开决定。为简洁起见，这里省略其内容，周期情形下的相关讨论请参见 [18,第 2 章2]。

引理 2.2. 假设矩阵 $A_>$ 满足 (2.2)-(2.4)，则 $\widehat{A_>} = \widehat{A_+}$，其中 $\widehat{A_+}$ 是周期矩阵 A_+ 对应的有效算子。

证明. 众所周知，

$$\widehat{A_+} = \fint_{\mathbb{Y}} (A_+ + A_+ \nabla \chi_+).$$

于是，根据 (2.4) 和 (2.14)，容易看出

$$\begin{aligned} |\langle A_> \rangle - \langle A_+ \rangle| &\le \lim_{N\to\infty} \fint_{\mathbb{D}_N} |A_> - A_+| \\ &\le \lim_{N\to\infty} \fint_{\mathbb{D}_N} \exp\{-\kappa |y_1|\} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.16}$$

and

$$\begin{aligned} |\langle A_> \nabla \chi_> \rangle - \langle A_+ \nabla \chi_+ \rangle| &\le \lim_{N\to\infty} \fint_{\mathbb{D}_N} (|A_>||\nabla \chi_> - \nabla \chi_+| + |A_> - A_+||\nabla \chi_+|) \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned} \tag{2.17}$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &\le \lim_{N\to\infty} \left(\fint_{\mathbb{D}_N} |A_>|^2 \right)^{1/2} \left(\fint_{\mathbb{D}_N} |\nabla \chi_> - \nabla \chi_+|^2 \right)^{1/2} \\ &\le C \lim_{N\to\infty} N^{-1/2} = 0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

并且根据 (2.12),

$$\begin{aligned} I_2 &\le \lim_{N\to\infty} \left(\fint_{\mathbb{D}_N} |A_> - A_+|^2 \right)^{1/2} \left(\fint_{\mathbb{D}_N} |\nabla \chi_+|^2 \right)^{1/2} \\ &\le \langle |\nabla \chi_+|^2 \rangle^{1/2} \langle |A_> - A_+|^2 \rangle^{1/2} = 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

因此，由（2.16）—（2.19）可直接得到所需的等式 $\widehat{A_>} = \widehat{A_+}$。 □

此外，我们可以得到算子序列 $\mathcal{L}^{\ell}_{\varepsilon_\ell,\ >}$ 在 H-收敛意义下是 H-紧的 [20]。

引理 2.3. 设 $\{A_{\ell,>}(y)\}$ 是一列满足 (2.2)-(2.4) 的 $\mathbb{D}$周期矩阵，且具有相同的常数 λ、Λ；并设某个周期矩阵 $A_{\ell,\ +}$ 满足 (2.2)，且具有相同的常数 κ。设 $F_\ell \in H^{-1}(\Omega)$，其中 Ω 为有界利普希茨区域。假设

$$\mathcal{L}^{\ell}_{\varepsilon_\ell,>}(u_\ell) = \operatorname{div}\left(A_{\ell,>}(x/\varepsilon_\ell)\nabla u_\ell\right) = F_\ell \ \text{in } \Omega, \tag{2.20}$$

其中 $\varepsilon_\ell \to 0$ 且 $u_{\ell,\ >} \in H^1(\Omega)$。我们进一步假设

$$\begin{cases} F_\ell \to F \ \text{strongly in } H^{-1}(\Omega), \\ u_{\ell,>} \rightharpoonup u \ \text{weakly in } H^1(\Omega), \\ \widehat{A_{\ell,>}} \to A^0, \end{cases} \tag{2.21}$$

其中 $\widehat{A_{\ell,>}}$ 表示 $\mathcal{L}^{\ell}_{\varepsilon_\ell,\ >}$ 的有效算子。那么 A^0 是一个满足 g

$$A^0\xi\cdot\xi \geq \lambda|\xi|^2, \quad \text{for any } \xi\in\mathbb{R}^d, \tag{2.22}$$

且 $u \in H^1(\Omega)$ 是以下方程的弱解

$$\operatorname{div}\left(A^0\nabla u\right) = F \ \text{in } \Omega. \tag{2.23}$$

证明. 证明是经典的，依赖于散度-旋度引理 [18, 定理 2.3.1]。因此，我们仅强调其主要要点：矩阵 $A_>$ 存在校正函数$\chi_{>,\ k}$、$k=1$、$\cdots$、d，使得

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{D}} |\nabla_y(\chi_{>,k}-\chi_{+,k})|^2 \leq C(d,\lambda,\kappa); \\ |\chi_{>,k}(y)-\chi_{+,k}(y)| \to 0 \text{ as } |y_1|\to+\infty, \end{cases}$$

并且对于任意有界利普希茨区域 Ω，满足以下弱收敛关系于$L^2(\Omega\ \mathbb{R}^d)$，

$$\begin{aligned} \nabla_y\chi_{>,k}(x/\varepsilon) &= (\nabla_y\chi_{>,k}(x/\varepsilon) - \nabla_y\chi_{+,k}(x/\varepsilon)) + \nabla_y\chi_{+,k}(x/\varepsilon) \\ &\rightharpoonup 0 \text{ weakly in } L^2(\Omega,\mathbb{R}^d), \end{aligned} \tag{2.24}$$

因为

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla_y\chi_{>,k}(x/\varepsilon) - \nabla_y\chi_{+,k}(x/\varepsilon)|^2 dx &= \varepsilon^d \int_{\varepsilon^{-1}\Omega} |\nabla_y\chi_{>,k}(y) - \nabla_y\chi_{+,k}(y)|^2 dy \\ &\leq C\varepsilon \int_{\mathbb{D}} |\nabla_y\chi_{>,k}(y) - \nabla_y\chi_{+,k}(y)|^2 dy, \end{aligned}$$

这里我们用到了 $\nabla_y\chi_k(y)-\nabla_y\chi_{+,k}(y)$ 关于 y' 是 1-周期的。同理，我们有

$$\begin{aligned}(A_>\cdot(\nabla_y y_k+\nabla_y\chi_{>,k}))(x/\varepsilon)=&[(A_>-A_+)\cdot(\nabla_y y_k+\nabla_y\chi_{>,k})](x/\varepsilon)\\&+[A_+\cdot(\nabla_y\chi_{>,k}-\nabla_y\chi_{+,k})](x/\varepsilon)\\&+[A_+\cdot(\nabla_y y_k+\nabla_y\chi_{+,k})](x/\varepsilon)\\&\rightharpoonup\widehat{A_+}\nabla_y y_k \text{ weakly in } L^2(\Omega,\mathbb{R}^d).\end{aligned}\tag{2.25}$$

因此，由 (2.20)-(2.21)、(2.24)-(2.25) 和散度-旋度引理可得所需性质 (2.23)。

□

引理 2.4. 假设矩阵 $A_>$ 满足 (2.2)-(2.5)，并进一步假设 A_+ 满足 VMO 光滑性条件 (2.5)。那么，对于任意 $1<p<\infty$,$\chi_{>,\,k}-\chi_{+,\,k}$ 满足以下一致的 $W^{1,\,p}$ 估计：

$$||\nabla_y(\chi_{>,k}-\chi_{+,k})||_{L^p(\mathbb{D})}\le C_p,\tag{2.26}$$

其中常数 C_p 仅依赖于 d、 p、 λ、 Λ、 κ 和 ρ。

证明. 由于 $\chi_{>,\,k}-\chi_{+,\,k}$ 满足方程 (2.9) 且为 $\mathbb{D}$-周期的，因此根据 VMO 系数的内部 $W^{1,\,p}$ 估计，对于任意 $2<p<\infty$ 和$N\in\mathbb{N}$, $\square_N=:\ \{x\in\mathbb{R}^d:\ |x_i|<N, i=1,\cdots,d\}$，存在仅依赖于 d、 p、λ、 Λ、 κ 和 ρ的常数 C_p，使得

$$\begin{aligned}\left(\fint_{\square_N}|\nabla_y(\chi_{>,k}-\chi_{+,k})|^p\right)^{1/p}\le&C_p\left(\fint_{\square_{2N}}|(a_{>,ij}-a_{+,ij})\partial_{y_i}\chi_{+,k}|^p\right)^{1/p}\\&+C_p\left(\fint_{\square_{2N}}|a_{>,ik}-a_{+,ik}|^p\right)^{1/p}+C_p\left(\fint_{\square_{2N}}|\nabla_y(\chi_{>,k}-\chi_{+,k})|^2\right)^{1/2},\end{aligned}$$

注意到 y' 中的周期性后，这等价于

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{D}_N}|\nabla_y(\chi_{>,k}-\chi_{+,k})|^p\right)^{1/p}\le&C_pN^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{D}_{2N}}|\nabla_y(\chi_{>,k}-\chi_{+,k})|^2\right)^{1/2}\\&+C_p\left(\int_{\mathbb{D}_{2N}}|a_{>,ik}-a_{+,ik}|^p\right)^{1/p}+C_p\left(\int_{\mathbb{D}_{2N}}|(a_{>,ij}-a_{+,ij})\partial_{y_i}\chi_{+,k}|^p\right)^{1/p}.\end{aligned}\tag{2.27}$$

然后，将 $N\to\infty$ 代入 (2.27) 可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}}|\nabla_y(\chi_{>,k}-\chi_{+,k})|^p&\le C_p\int_{\mathbb{D}}|a_{>,ik}-a_{+,ik}|^p+\int_{\mathbb{D}}|(a_{>,ij}-a_{+,ij})\partial_{y_i}\chi_{+,k}|^p\\&\le C_p,\end{aligned}\tag{2.28}$$

注意到 (2.7)、(2.10) 和 (2.11) 后。为了证明 $1<p<2$，我们采用对偶论证。对于任意满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ 的 $f\in(L^{p'}(\mathbb{D}))^d$，我们可以找到唯一的 u_R（相差一个常数），使得 $\nabla u_R\in L^2(\mathbb{D})\cap L^{p'}(\mathbb{D})$ 是下列方程的解

$$\partial_i(a^*_{>,ij}\partial_j u_R)=\operatorname{div} f_R\quad\text{ in }\mathbb{D},$$

其中 $f_R = f\eta_R$，若 $|x_1| \le R$，则 $\eta_R(x_1) = 1$；若 $|x_1| \ge R+1$，则 $\eta_R(x_1) = 0$。由 $W^{1,p}$ 的估计 (2.26) 可知，当 $2 < p' < \infty$ 时，我们有

$$||\nabla u_R||_{L^{p'}(\mathbb{D})} \le C_{p'}||f_R||_{L^{p'}(\mathbb{D})} \le C_{p'}||f||_{L^{p'}(\mathbb{D})}. \tag{2.29}$$

于是，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} \nabla_y(\chi_{>,k} - \chi_{+,k}) \cdot f_R &= -\int_{\mathbb{D}} (\chi_{>,k} - \chi_{+,k}) \operatorname{div}(f_R) = -\int_{\mathbb{D}} (\chi_{>,k} - \chi_{+,k})\partial_i(a^*_{>,ij}\partial_j u_R) \\ &= -\int_{\mathbb{D}} \partial_i(a_{>,ij}\partial_j(\chi_{>,k} - \chi_{+,k}))u_R = \int_{\mathbb{D}} F(A_>, A_+, \chi_+)\nabla u_R,\end{aligned}$$

其中 $F(A_>, A_+, \chi_+)$ 定义于 (2.9) 中，这意味着

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{D}} \nabla_y(\chi_{>,k} - \chi_{+,k}) \cdot f_R\right| &\le C||\nabla u_R||_{L^{p'}(\mathbb{D})}||F(A_>, A_+, \chi_+)||_{L^p(\mathbb{D})} \\ &\le C||f||_{L^{p'}(\mathbb{D})}||F(A_>, A_+, \chi_+)||_{L^p(\mathbb{D})}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

在 (2.30) 中令 $R \to \infty$，并注意到 $f \in (L^{p'}(\mathbb{D}))^d$ 是任意的，得到

$$||\nabla_y(\chi_{>,k} - \chi_{+,k})||_{L^p(\mathbb{D})} \le C_p||F(A_>, A_+, \chi_+)||_{L^p(\mathbb{D})},$$

结合 (2.10) 和 (2.11)，即可得到所需的估计 (2.26)。 □

引理 2.5. 在引理 2.4 的假设下，我们进一步假设 $A_>, A_+ \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ 对某个固定的 $\alpha > 0$ 成立，则

$$||\nabla_y(\chi_{>,k} - \chi_{+,k})||_{L^1(\mathbb{D})\cap L^\infty(\mathbb{D})} \le C, \tag{2.31}$$

其中常数 C 仅依赖于 $d, \kappa, A_>$ 和 A_+。

证明。根据经典的 $C^{1,\alpha}$-估计、(2.9) 和 (2.12)，我们知道 $\nabla_y(\chi_{+,k}) \in C^{0,\alpha}(\mathbb{D})$ 一致有界。于是，对于任意 $2 < p < \infty$，

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{D}} |\nabla_y(\chi_{>,k} - \chi_{+,k})|^p\right)^{1/p} &\le ||\nabla_y(\chi_{>,k} - \chi_{+,k})||^{1-2/p}_{L^\infty(\mathbb{D})} \left(\int_{\mathbb{D}} |\nabla_y(\chi_{>,k} - \chi_{+,k})|^2\right)^{1/p} \\ &\le C,\end{aligned} \tag{2.32}$$

其中 C 与 $p > 2$ 无关。然后，按照引理 2.4 中的对偶论证，对于任意 $1 > \delta > 0$，我们有

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla_y(\chi_{>,k} - \chi_{+,k})|^{1+\delta} \le C, \text{ with } C \text{ being independent of } \delta, \tag{2.33}$$

将 $\delta \to 0$ 代入 (2.33) 后，得到

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla_y(\chi_{>,k} - \chi_{+,k})| \le C.$$

至此，我们完成了证明。 □

为继续进行，我们需要以下定义在 $\mathbb{D}$ 中的泊松方程具有可解性。

引理 2.6. 设 $f \in L^1(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$，则存在泊松方程 $\Delta u = f$ 在 $\mathbb{D}$中的一个解 u，使得 $\nabla u \in C^{0,\beta'}(\mathbb{D})$，对任意 $\beta' \in (0,1)$ 均成立。

证明. 实际上，这个结果已在 [16], 中得到，这里给出证明以求完整。首先，我们将 $f(y) = f_1(y_1) + f_2(y)$ 分解为，其中

$$f_1(y_1) = \fint_{\mathbb{T}^{d-1}} f(y_1, y')dy'.$$

于是容易看出

$$f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D}), \ \fint_{\mathbb{T}^{d-1}} f_2(y_1, y')dy' = 0. \tag{2.34}$$

记

$$N_1(y_1) = \int_0^{y_1} \int_0^t f_1(s)dsdt,$$

则 $\Delta N_1(y_1) = \partial_1^2 N_1(y_1) = f_1(y_1)$。因此，根据 (2.34) 和正则性理论， $\nabla N_1 \in C^{0,\beta'}(\mathbb{D})$，对任意 $\beta' \in (0,1)$ 均成立。

接下来，在注意到 (2.34) 后，将 y_1 视为参数，我们可以求解以下方程，

$$\Delta_{y'} N_2(y_1, y') = f_2(y_1, y') \text{ in } \mathbb{T}^{d-1}, \ \text{ with } \fint_{\mathbb{T}^{d-1}} N_2(y_1, y')dy' = 0. \tag{2.35}$$

定义 $\mathbb{D}$-周期函数 $g =: (0, \partial_2 N_2, \cdots, \partial_d N_2)$。根据能量估计，我们有$||\nabla_{y'} N_2(y_1, \cdot)||_{L^2(\mathbb{T}^{d-1})} \leq C||f_2(y_1, \cdot)||_{L^2(\mathbb{T}^{d-1})}$，其中 C与 y_1无关，进而可得$||\nabla_{y'} N_2||_{L^2(\mathbb{D})} \leq C||f_2||_{L^2(\mathbb{D})}$ 以及$||g||_{L^2(\mathbb{D})} \leq C||f_2||_{L^2(\mathbb{D})}$。

根据方程 (2.35)，我们可以将 f_2 表示为 $f_2 = \operatorname{div}_y g$，其中 $g \in L^2(\mathbb{D})$，$\tilde{}$。于是，根据经典的 Lax-Milgram 定理，存在一个 N_2 满足泊松方程$\Delta \tilde{N}_2 = \operatorname{div} g$，其中 $\nabla \tilde{N}_2 \in L^2(\mathbb{D})$。此外，由于 $\Delta \tilde{N}_2 = f_2$, $\nabla \tilde{N}_2 \in L^2(\mathbb{D})$ 且 $f_2 \in L^1(\mathbb{D}) \cap \in L^\infty(\mathbb{D})$，因此根据 $C^{1,\alpha}$ 正则性估计， $\nabla \tilde{N}_2 \in C^{0,\beta'}(\mathbb{D})$，对任意 $\beta' \in (0,1)$。

因此， $N_1 + \tilde{N}_2$ 是所需的解，满足 $\nabla(N_1 + \tilde{N}_2) \in C^{0,\beta'}(\mathbb{D})$，对任意 $\beta' \in (0,1)$ 均成立。

□

借助引理 2.5 和引理 2.6，我们引入所谓的通量校正子$\phi_>$，并在下面的引理中予以陈述。

引理 2.7。在引理 2.5 的假设下，记

$$B_{>,ij} = \widehat{a}_{>,ij} - a_{>,ij} - a_{>,ik}\partial_{y_k}\chi_{>,j} \quad in \ \mathbb{D}. \tag{2.36}$$

于是存在所谓的 $\mathbb{D}$-周期通量校正子 $\phi_>$，使得

$$B_{>,ij} = \partial_{y_k}\phi_{>,kij} \ in \ \mathbb{D}, \ \phi_{>,kij} = -\phi_{>,ikj}, \ \phi_> \in L^\infty(\mathbb{D}). \tag{2.37}$$

证明。与周期情形的证明类似，我们希望找到一个矩阵函数 $N_> =(N_{>,ij})$，使其满足

$$\Delta_y N_{>,ij} = B_{>,ij} \quad \text{in } \mathbb{D}. \tag{2.38}$$

首先，对于周期情形，已知

$$\Delta_y N_{+,ij} = B_{+,ij} =: \widehat{a}_{+,ij} - a_{+,ij} - a_{+,ik}\partial_{y_k}\chi_{+,j} \quad \text{in } \mathbb{Y}.$$

接着，由引理 2.2，$N_{>,\ ij} - N_{+,\ ij}$ 满足

$$\begin{aligned}\Delta_y(N_{>,ij} - N_{+,ij}) &= (a_{+,ij} - a_{>,ij}) + (a_{+,ik} - a_{>,ik})\partial_{y_k}\chi_{+,j} + a_{>,ik}(\partial_{y_k}\chi_{+,j} - \partial_{y_k}\chi_{>,j}) \\ &=: \tilde{f} \quad \text{in } \mathbb{D}.\end{aligned} \tag{2.39}$$

根据 (2.4) 和引理 2.5，$f \in L^1(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$，由此再根据引理 2.6，可知存在 $N_{>,\ ij} - N_{+,\ ij}$，其满足方程 (2.39) 且满足 $||\nabla_y(N_{>,\ ij} - N_{+,\ ij})||_{L^\infty(\mathbb{D})} \leq C$。直接推论是，存在 $N_{>,\ ij}$，其满足方程 (2.38) 且满足 $||\nabla_y N_{>,\ ij}||_{L^\infty(\mathbb{D})} \leq C$。

由于根据 (2.6) 和 (2.36)，$\Delta_y \partial_{y_i} N_{>,\ ij} = \partial_{y_i} B_{>,\ ij} = 0$ 在 $\mathbb{D}$ 中，$N_{>,\ ij}$ 在 y' 中是周期的，且 $||\nabla_y N_{+,\ ij}||_{L^\infty(\mathbb{D})} \leq C$，我们知道 $\partial_{y_i} N_{>,\ ij}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中是有界调和函数，因此 $\partial_{y_i} N_{>,\ ij}$ 是常数。令

$$\phi_{>,kij} =: \partial_{y_k} N_{>,ij} - \partial_{y_i} N_{>,kj}.$$

then

$$\partial_{y_k}\phi_{>,kij} = \Delta_y N_{>,ij} - \partial_{y_i}\partial_{y_k} N_{>,kj} = B_{>,ij} \quad \text{in } \mathbb{D},$$

and

$$\phi_{kij} \in L^\infty(\mathbb{D}).$$

因此，我们完成了这个证明。 □

引理 2.8. 在引理 2.5 的假设下，$||\chi_>||_{L^\infty(\mathbb{D})} \leq C$。

证明. 对任意 $\tilde{y} = (\tilde{y_1}, \tilde{y'}) \in \mathbb{D}$，并根据方程 (2.9)、(2.10)-(2.12) 的局部 L^∞-估计，我们有

$$\begin{aligned}|\chi_{>,k}(\tilde{y}) - \chi_{+,k}(\tilde{y})| \leq & C\int_{(\tilde{y_1}-1,\tilde{y_1}+1)\times\mathbb{T}^{d-1}} |\chi_{>,k}(x_1,x') - \chi_{+,k}(x_1,x')|\,dx + C \\ \leq & C\int_{(\tilde{y_1}-1,\tilde{y_1}+1)\times\mathbb{T}^{d-1}} \left|\int_{x_1}^{\infty} \partial_{y_1}(\chi_{>,k}(s,x') - \chi_{+,k}(s,x'))ds\right| dx + C \\ \leq & C\int_{(\tilde{y_1}-1,+\infty)\times\mathbb{T}^{d-1}} |\partial_{y_1}(\chi_{>,k} - \chi_{+,k})|\,dx + C,\end{aligned}$$

注意到 $||\chi_+||_{L^\infty(\mathbb{D})} \leq C$ 以及引理 2.5 后，即可得到所需的估计。 □

鉴于周期情形下的均匀化理论，我们已为求得矩阵 $A_>(x/\varepsilon)$ 的收敛速率做好了所有准备工作。

定理 2.9（收敛速率）。假设矩阵 $A_>$ 满足 (2.2)-(2.4)，并且进一步假设 $A_>, A_+ \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$，其中 $\alpha > 0$ 为某个常数。设 $u_{>,\varepsilon} \in H_0^1(\Omega), u_{>,0} \in H_0^1(\Omega)$ 是方程 $\mathcal{L}_{>,\varepsilon} u_{>,\varepsilon} = f$ 和 $\mathcal{L}_{>,0} u_{>,0} = f$ 在 Ω 中的弱解，其中 $f \in L^2(\Omega)$，且 Ω 分别是 $\mathbb{R}^d$ 中有界的 $C^{1,1}$ 区域，则有以下收敛速率估计：

$$||u_{>,\varepsilon} - u_{>,0}||_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon ||f||_{L^2(\Omega)},$$

其中，常数 C 仅依赖于 d、Ω、κ、$A_>$ 和 A_+。

证明。记

$$w_{>,\varepsilon} = u_{>,\varepsilon} - u_{>,0} - \varepsilon \chi^\varepsilon_{>,j} \partial_j u_{>,0}, \tag{2.40}$$

根据引理 2.7，直接计算可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{>,\varepsilon} w_{>,\varepsilon} &= \mathcal{L}_{>,0} u_{>,0} - \mathcal{L}_{>,0} u_{>,\varepsilon} - \mathcal{L}_{>,\varepsilon} \left(\varepsilon \chi^\varepsilon_{>,j} \partial_j u_{>,0} \right) \\
&= \operatorname{div} \left[(\widehat{A_>} - A^\varepsilon) \nabla u_{>,0} \right] - \operatorname{div} \left(A^\varepsilon_> \nabla_y \chi^\varepsilon_{>,j} \partial_j u_{>,0} \right) - \varepsilon \operatorname{div} \left(A^\varepsilon_> \chi^\varepsilon_j \nabla \partial_j u_{>,0} \right) \\
&= \operatorname{div} \left(B^\varepsilon_> \nabla u_{>,0} \right) - \varepsilon \operatorname{div} \left(A^\varepsilon_> \chi^\varepsilon_{>,j} \nabla \partial_j u_{>,0} \right) \\
&= \varepsilon \partial_k \left(\phi^\varepsilon_{>,kij} \partial_{ij} u_{>,0} \right) - \varepsilon \operatorname{div} \left(A^\varepsilon_> \chi^\varepsilon_{>,j} \nabla \partial_j u_{>,0} \right).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

似乎根据 $\chi_>$、$\phi_> \in L^\infty$，我们可以得到

$$||u_{>,\varepsilon} - u_{>,0}||_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon ||u_{>,0}||_{H^2(\Omega)} \leq C\varepsilon ||f||_{L^2(\Omega)}, \tag{2.42}$$

将方程 (2.41) 乘以 $w_{>,\varepsilon}$ 并分部积分后，

然而，上述计算并不严谨，因为 $w_{>,\varepsilon} \neq 0$ 在边界$\partial\Omega$上。实际上，若考虑采用边界截断函数的 ε-平滑方法，可以得到 $O(\varepsilon^{1/2})$ 收敛速率，并通过对偶论证得到 $O(\varepsilon)$ 收敛速率。为简洁起见，这里略去相关细节。为方便读者，更多细节请参阅 [18,定理 3.3.2、定理 3.4.3]。 □

此外，我们还可以得到以下内部 Lipschitz 估计。

定理 2.10（内部 Lipschitz 估计）。在定理 2.9 的假设下，设 $u_{>,\varepsilon} \in H^1(B)$ 是方程 $\mathcal{L}_{>,\varepsilon} u_{>,\varepsilon} = f$ 的一个弱解，其中 $f \in L^p(B)$，对于某个 $p > d$ 以及某个球 $B = B(x_0, 2R)$，满足 $x_0 \in \mathbb{R}^d$ 和 $R > 0$，则

$$||\nabla u_{>,\varepsilon}||_{L^\infty(B(x_0,R))} \leq C_p \left\{ \left(\fint_B |\nabla u_{>,\varepsilon}|^2 \right)^{1/2} + R \left(\fint_B |f|^p \right)^{1/p} \right\},$$

其中，C 仅依赖于 d、p、κ、$A_>$ 和 A_+。

证明。定理 2.10 的证明基于紧性论证方法，分为以下三个步骤：

步骤 1. [一步改进]。我们利用多尺度问题 $\mathcal{L}_{>,\,\varepsilon}u_{>,\,\varepsilon}=f$ 在 B 上一致 H-收敛到齐次有效问题 $\mathcal{L}_{>,\,0}u_{>,\,0}=f$在 B上的这一性质；该性质表明，多尺度解 $u_{>,\,\varepsilon}$ 继承了解 $u_{>,\,0}$的中尺度正则性。在这一步中，我们使用引理 2.3、关于$u_{>,\,\varepsilon}$ 的内部 Caccioppoli 不等式，以及关于$u_{>,\,0}$的 $C^{1,\,\alpha}$ 正则性估计。

步骤 2. [迭代]。对前面的估计进行迭代，可以获得$u_{>,\,\varepsilon}$ 一直到尺度 ε的 Lipschitz 正则性。在此步骤中，我们需要注意$\mathcal{L}_{>,\,\varepsilon}$ 的缩放性质，以及$u_{>,\,\varepsilon}$的内部 Caccioppoli 不等式。

步骤 3. [放大论证]。我们利用$\mathcal{L}_{>,\,1}$ 的正则性结果，结合 $A_>\in C^{0,\,\alpha}$，获得小于 ε 的尺度上的 Lipschitz 正则性。

由于上述所有操作与 [18, 定理 4.11],的证明完全类似，为简洁起见，我们省略具体过程；详细内容请参阅 [18, 定理 4.1。1] □

3 将非散度形式转换为散度形式

本节研究周期均匀化中带有界面的非散度型椭圆方程 (1.1)，其中漂移项无界；该方程源于扩散尺度变换下带漂移项的扩散过程。

回顾一下，在第 1 节中，我们引入了以下记号：

$$C_{+,j}=[j,j+1]\times\mathbb{T}^{d-1},\ C_{-,j}=[-j-1,-j]\times\mathbb{T}^{d-1};\ q_{\pm}=\lim_{j\to\infty}m(C_{\pm,j}). \tag{3.1}$$

正如 [13], 所指出的，将 [13] 中的证明稍作调整，即可涵盖非恒定扩散率的情形。因此，由 [13, 命题 5.5] 可得

$$\begin{aligned}&\left|\int_{(k,k+1)\times\mathbb{T}^{d-1}}(m(y)-q_+m_+(y))dy\right|+\left|\int_{(-k,-k+1)\times\mathbb{T}^{d-1}}(m(y)-q_-m_-(y))dy\right|\\&\qquad\le C\exp\{-Ck\}\quad\text{as}\quad k\to+\infty.\end{aligned}$$

实际上，由 [13, 命题 5.5] 以及 $m-q_{\pm}m_{\pm}$的全变差定义可得

$$\begin{aligned}&\int_{(k,k+1)\times\mathbb{T}^{d-1}}|m(y)-q_+m_+(y)|\,dy+\int_{(-k,-k+1)\times\mathbb{T}^{d-1}}|m(y)-q_-m_-(y)|\,dy\\&\qquad\le C\exp\{-Ck\}\quad\text{as}\quad k\to+\infty.\end{aligned} \tag{3.2}$$

此外，根据 (1.3)、(1.5) 和 (1.8)，容易看出 $m(y)-q_+m_+(y)$ 满足

$$\partial_{y_iy_j}\left[\tilde{a}_{ij}(y)(m-q_+m_+)\right]-\partial_{y_i}\left[\tilde{b}_i(y)\,(m-q_+m_+)\right]=0\quad\text{if } y_1>1, \tag{3.3}$$

于是，由 L^∞-估计、Lipschitz正则性估计和 (3.2) 可得

$$|(m-q_+m_+)(y)|+|\nabla_y(m-q_+m_+)(y)|\le C\exp\{-C|y_1|\},\quad \text{for } y_1\to+\infty, \tag{3.4}$$

类似地，我们有

$$|(m-q_-m_-)(y)|+|\nabla_y(m-q_-m_-)(y)|\le C\exp\{-C|y_1|\},\quad \text{for } y_1\to-\infty. \tag{3.5}$$

接下来，将方程（1.10）乘以 u_ε，并利用（1.12）对所得方程在 $\mathbb{R}^d$ 上积分，可得

$$\begin{aligned}||\nabla u_\varepsilon||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}&\le C||f||_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^d)}||u_\varepsilon||_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^d)}\\&\le C||f||_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^d)}||\nabla u_\varepsilon||_{L^2(\mathbb{R}^d)},\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中，常数 C 仅取决于 d、λ 和 Λ。因此，根据经典的 Lax-Milgram 定理，若 $f\in L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^d)$ 且满足 $d\ge 3$，则方程（1.10）存在一个解 u_ε，使得 $||u_\varepsilon||_{\dot H^1(\mathbb{R}^d)}\le C||f||_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^d)}$。回顾一下，我们使用了齐次Sobolev空间 $\dot H^1(\mathbb{R}^d)=\left\{v:\ \nabla v\in L^2,\ ||u||_{L^{\frac{2d}{d-2}}}\le C(d)||\nabla v||_{L^2}\right\}$，且满足 $d\ge 3$。

在以下内容中，我们主要致力于将方程（1.10）转化为第2节中讨论的散度形式（2.1）。接着，根据（2.1）和（2.4），我们需要证明与（1.14）相关的 ϕ 在 y_1 中以指数速度衰减至某个1-周期矩阵ϕ_+，若 $y_1\to\infty$；而在 $y_1\to-\infty$ 的情况下也类似。然后，我们给出以下结果。

引理 3.1. 假设 f 在 y_1 中指数快速衰减，即 $|f(y)|\le C\exp\{-C|y_1|\}$，$f$ 是 $\mathbb{D}$-周期的，且 $\mathrm{supp}(f)\subset[0,\infty]\times\mathbb{T}^{d-1}$，其中 $\int_{(0,\infty)\times\mathbb{T}^{d-1}}f\,dy=0$。那么存在一个 $\mathbb{D}$-周期解 u，满足泊松方程 $\Delta u=f$（定义于 $\mathbb{D}$ 中），且 $\nabla u\in C^{0,\beta'}(\mathbb{D})$，对任意 $\beta'\in(0,1)$ 均成立，并且 ∇u 在 y_1 中指数快速衰减。

证明. 与引理 2.6 的证明类似，我们将 $f(y)$ 分解为 $=f_1(y_1)+f_2(y)$，其中

$$f_1(y_1)=\fint_{\mathbb{T}^{d-1}}f(y_1,y')dy'.$$

于是很容易看出

$$\begin{aligned}&f_1,f_2\text{ decays exponentially fast in }y_1,\ \mathrm{supp}(f_2)\subset[0,\infty]\times\mathbb{T}^{d-1},\\&\mathrm{supp}(f_1)\subset[0,\infty],\ \int_0^{+\infty}f_1(y_1)dy_1=0,\ \fint_{\mathbb{T}^{d-1}}f_2(y_1,y')dy'=0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

记

$$N_1(y_1)=\int_{y_1}^{+\infty}\int_t^{+\infty}f_1(s)dsdt,$$

则 $\Delta N_1(y_1) = \partial_1^2 N_1(y_1) = f_1(y_1)$。因此，根据 (3.7) 和正则性理论，对于任意 $\beta' \in (0,1)$，有 $\nabla N_1 \in C^{0,\beta'}(\mathbb{D})$。此外，

$$\begin{aligned} \partial_1 N_1(y_1) &= -\int_{y_1}^{+\infty} f_1(s)ds = -\int_0^{+\infty} f_1(s)ds = 0, \quad \text{if } y_1 \le 0; \\ |\partial_1 N_1(y_1)| &\le \int_{y_1}^{+\infty} |f_1(s)|ds \le C\exp\{-C|y_1|\}, \quad \text{if } y_1 > 1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

接下来，注意到 (3.7) 后，将 y_1 视为参数，我们可以求解以下方程:

$$\Delta_{y'} N_2(y_1, y') = f_2(y_1, y') \text{ in } \mathbb{T}^{d-1}, \quad \text{with } \fint_{\mathbb{T}^{d-1}} N_2(y_1, y')dy' = 0. \tag{3.9}$$

~与引理 2.6 的说明类似，存在泊松方程 $\Delta\tilde{N}_2 = f_2$的一个解 N_2，满足 $\nabla\tilde{N}_2 \in L^2(\mathbb{D})$ 和 $\nabla\tilde{N}_2 \in C^{0,\beta'}(\mathbb{D})$，对任意 $\beta' \in (0,1)$ 均成立。此外，将方程 $\Delta\tilde{N}_2 = f_2$乘以 $\tilde{N}_2$，并在 (R_1, R_2) 上积分，$\times\,\mathbb{T}^{d-1}$对任意 $R_2 > R_1 \ge 1$ 均成立，可得

$$\begin{aligned} \int_{(R_1,R_2)\times\mathbb{T}^{d-1}} \nabla\tilde{N}_2 \cdot \nabla\tilde{N}_2 &= \int_{\{R_2\}\times\mathbb{T}^{d-1}} \partial_{y_1}\tilde{N}_2 \cdot \tilde{N}_2 - \int_{\{R_1\}\times\mathbb{T}^{d-1}} \partial_{y_1}\tilde{N}_2 \cdot \tilde{N}_2 \\ &\quad - \int_{(R_1,R_2)\times\mathbb{T}^{d-1}} f_2\tilde{N}_2 \\ &=: I_1 - I_2 - I_3. \end{aligned} \tag{3.10}$$

接下来，将方程 $\Delta\tilde{N}_2 = f_2$ 乘以 1，并在 (R_1, R_2) 上积分，$\times\,\mathbb{T}^{d-1}$对任意 $R_2 > R_1 \ge 1$ 均成立，可得

$$\int_{\{R_2\}\times\mathbb{T}^{d-1}} \partial_{y_1}\tilde{N}_2 - \int_{\{R_1\}\times\mathbb{T}^{d-1}} \partial_{y_1}\tilde{N}_2 = -\int_{(R_1,R_2)\times\mathbb{T}^{d-1}} f_2 = 0,$$

这意味着

$$\int_{\{R\}\times\mathbb{T}^{d-1}} \partial_{y_1}\tilde{N}_2 = 0, \tag{3.11}$$

对任意 $R \ge 1$ 均成立，这是因为 $\nabla\tilde{N}_2 \in L^2(\mathbb{D})$。记 $C(R, \tilde{N}_2) =: \fint_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{N}_2(R, y')dy'$，则

$$I_1 = \int_{\{R_2\}\times\mathbb{T}^{d-1}} \partial_{y_1}\tilde{N}_2 \cdot \tilde{N}_2 = \int_{\{R_2\}\times\mathbb{T}^{d-1}} \partial_{y_1}\tilde{N}_2 \cdot (\tilde{N}_2 - C(R_2, \tilde{N}_2)),$$

使用 Poincar´e 不等式后，这意味着

$$|I_1| \le C\int_{\{R_2\}\times\mathbb{T}^{d-1}} |\nabla_y\tilde{N}_2|^2. \tag{3.12}$$

类似地，

$$|I_2| \le C\int_{\{R_1\}\times\mathbb{T}^{d-1}} |\nabla_y\tilde{N}_2|^2. \tag{3.13}$$

为估计 I_3，注意到 (3.7) 后，我们有：

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{R_1}^{R_2} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} f_2(y_1, y') \tilde{N}_2(y_1, y') dy' dy_1 \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} f_2(y_1, y') \left(\tilde{N}_2(y_1, y') - C(y_1, \tilde{N}_2) \right) dy' dy_1, \end{aligned}$$

利用 Poincar´e 不等式和 Holder 不等式后，可推出

$$\begin{aligned} |I_3| &\le C \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_{\mathbb{T}^{d-1}} |f_2(y_1, y')|^2 dy' \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{T}^{d-1}} |\nabla_{y'} \tilde{N}_2(y_1, y')|^2 dy' \right)^{1/2} dy_1 \\ &\le C \left(\int_{(R_1, R_2) \times \mathbb{T}^{d-1}} |f_2|^2 dy \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{(R_1, R_2) \times \mathbb{T}^{d-1}} |\nabla_y \tilde{N}_2|^2 dy \right)^{1/2} \\ &\le C \exp\{-CR_1\} \left(\int_{(R_1, R_2) \times \mathbb{T}^{d-1}} |\nabla_y \tilde{N}_2|^2 dy \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

因此，由于 $\nabla \tilde{N}_2 \in L^2(\mathbb{D})$，并将 (3.10)–(3.14) 结合起来，在 (3.10) 中令 $R_2 \to +\infty$ 后，我们得到

$$\int_{(R_1, +\infty) \times \mathbb{T}^{d-1}} |\nabla \tilde{N}_2|^2 dy \le C \int_{\{R_1\} \times \mathbb{T}^{d-1}} |\nabla \tilde{N}_2|^2 dy' + C \exp\{-CR_1\},$$

由 Gronwall 引理可进一步推出

$$\int_{(R_1, +\infty) \times \mathbb{T}^{d-1}} |\nabla \tilde{N}_2|^2 dy \le C \exp\{-\theta R_1\}, \tag{3.15}$$

˜，其中 $\theta > 0$ 为某个常数。然后，根据 Lipschitz正则性估计，$|\nabla N_2| \leq C \exp\{-\theta |y_1|\}$，当 $y_1 \to \infty$ 时成立。同理，我们可以得到 $|\nabla N_2| \le C\exp\{-\theta |y_1|\}$，当$y_1 \to -\infty$时成立。

因此，$N_1 + \tilde{N}_2$ 是满足 $\nabla(N_1 + \tilde{N}_2) \in C^{0,\beta'}(\mathbb{D})$ 的所需解，其中˜任意取自 (0, 1)，并且 $\nabla(N_1 + N_2)$ 关于 y_1 指数快速衰减。至此，我们完成了证明。

□

为引出以下结果，我们记

$$\mathcal{H} = \left\{ u : \nabla u \in L^2(\mathbb{D}), \fint_{\mathbb{D}_1} u = 0 \right\},$$

这是一个配备如下内积的希尔伯特空间：

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} =: \int_{\mathbb{D}} \nabla u \cdot \nabla v dy.$$

引理 3.2. 设 $f \in L^2(\mathbb{D})$ 满足 $supp(f) \in \mathbb{D}_1$，则泊松方程 $\Delta u = f$ 在 $\mathbb{D}$ 中存在唯一解 $u \in \mathcal{H}$，并满足能量估计 $||\nabla u||_{L^2(\mathbb{D})} \leq C||f||_{L^2(\mathbb{D})}$，其中常数 C 仅依赖于 d。此外，对于 R_1，我们有以下衰减估计，

$$\begin{aligned} &\int_{(R_1,+\infty)\times\mathbb{T}^{d-1}} |\nabla u|^2 dy \leq C\exp\{-\theta|R_1|\}, \quad if\ R_1 > 1; \\ &\int_{(-\infty,-R_1)\times\mathbb{T}^{d-1}} |\nabla u|^2 dy \leq C\exp\{-\theta|R_1|\}, \quad if\ R_1 < -1, \end{aligned} \tag{3.16}$$

对于某个仅依赖于 d 的常数 θ。

证明。对于任意 $v \in \mathcal{H}$，定义

$$F(v) =: \int_{\mathbb{D}} fvdy = \int_{\mathbb{D}_1} fvdy = \int_{\mathbb{D}_1} f\left(v - \fint_{\mathbb{D}_1} v\right) dy$$

由庞加莱不等式可得

$$|F(v)| \leq C||f||_{L^2(\mathbb{D})}||\nabla v||_{L^2(\mathbb{D})}.$$

因此，F 是定义在 $\mathcal{H}$ 上的有界线性泛函。根据经典的 Lax–Milgram 定理，存在唯一解 $u \in \mathcal{H}$，它是 $\mathbb{D}$ 中泊松方程 $\Delta u = f$ 的解，并满足能量估计 $||\nabla u||_{L^2(\mathbb{D})} \leq C||f||_{L^2(\mathbb{D})}$。

为了说明积分 $\int_{(R_1,+\infty)\times\mathbb{T}^{d-1}} |\nabla u|^2 dy$ 关于 $R_1 > 1$ 指数快速衰减，我们首先注意到，当 $y_1 > 1$ 时，u 满足方程 $\Delta u = 0$。对于 $\infty > R_2 > R_1 > 1$，将方程 $\Delta u = 0$ 乘以 u，并在 (R_1, R_2) 上积分 $\times\,\mathbb{T}^{d-1}$，可得

$$\int_{(R_1,R_2)\times\mathbb{T}^{d-1}} \nabla u \cdot \nabla u = \int_{\{R_2\}\times\mathbb{T}^{d-1}} \partial_{y_1} u \cdot u - \int_{\{R_1\}\times\mathbb{T}^{d-1}} \partial_{y_1} u \cdot u. \tag{3.17}$$

接下来，与 (3.11) 类似，对于任意 $R > 1$，有

$$\int_{\{R\}\times\mathbb{T}^{d-1}} \partial_{y_1} u = 0.$$

那么，完全类似于 (3.15) 的证明，我们有

$$\int_{(R_1,+\infty)\times\mathbb{T}^{d-1}} |\nabla u|^2 dy \leq C\exp\{-\theta R_1\}, \tag{3.18}$$

其中某个常数为 $\theta > 0$。$R_1 < -1$ 的证明与 (3.18) 的证明完全类似。因此，我们完成了此证明。

□

引理 3.3. 在条件 (1.2)-(1.3) 和 $\int_{\mathbb{Y}} \tilde{b}_{\pm,i} m_{\pm} dy = 0$ 下，对于 $i = 1, \cdots, d$，存在一个 $\mathbb{D}$-周期矩阵函数 ϕ_b，使得

$$\begin{aligned} &b_i(y) = \partial_k \phi_{b,ki}(y),\ \phi_{b,ki}(y) = -\phi_{b,ik}(y),\ \phi_b \in L^\infty(\mathbb{D}); \\ &\phi_{b,ki}\ decays\ exponentially\ fast\ to\ q_+\phi_{+,ki}\ in\ y_1 > 1; \\ &\phi_{b,ki}\ decays\ exponentially\ fast\ to\ q_-\phi_{-,ki}\ in\ y_1 < -1, \end{aligned} \tag{3.19}$$

其中 $b$de 在 (1.11) 中定义，对于某个满足 $\phi_\pm = -\phi_\pm^*$ 和 $\phi_\pm \in L^\infty$($\mathbb{R}^d$ 的 1-周期函数 $\phi_\pm$).

˜证明。记 $\beta_{\pm,\ i}=b_{\pm,\ i}m_{\pm}$ 和 $a_{\pm,\ ij}=\tilde{a}_{ij}m_{\pm}$，然后令

$$b_{\pm,i}(y)=\beta_{\pm,i}(y)-\partial_{y_j}a_{\pm,ij}(y), \tag{3.20}$$

于是，由 (1.5) 和 $\int_{\mathbb{Y}}\tilde{b}_{\pm,\ i}m_{\pm}dy=0$ 可得，对于 $i=1$、$\cdots$、d，有

$$\partial_{y_i}b_{\pm,i}=0 \text{ in } \mathbb{Y}, \quad \int_{\mathbb{Y}}b_i(y)dy=0. \tag{3.21}$$

I由 (3.21) 可知，存在 1-周期矩阵函数 $\phi_{\pm}$，使得

$$b_{\pm,i}(y)=\partial_k\phi_{\pm,ki}(y),\ \phi_{\pm,ki}(y)=-\phi_{\pm,ik}(y) \text{ in } \mathbb{Y}, \quad \fint_{\mathbb{Y}}\phi_{\pm}=0, \tag{3.22}$$

它们分别通过先求解泊松方程

$$\Delta N_{\pm,i}=b_{\pm,i} \quad \text{in } \mathbb{Y}, \quad \fint_{\mathbb{Y}}N_{\pm,i}=0,$$

然后令

$$\phi_{\pm,ki}=\partial_{y_k}N_{\pm,i}-\partial_{y_i}N_{\pm,k}.$$

类似地，我们希望求解泊松方程

$$\Delta N_{b,i}=b_i \quad \text{in} \quad \mathbb{D}. \tag{3.23}$$

选取截断函数 $\psi_{\pm}(x_1)$，使得

$$\begin{aligned}&\psi_+(x_1)=1,\ \text{if } x_1\geq 1,\ \psi_+(x_1)=0,\ \text{if } x_1\leq 0;\\&\psi_-(x_1)=1,\ \text{if } x_1\leq -1,\ \psi_-(x_1)=0,\ \text{if } x_1\geq 0.\end{aligned} \tag{3.24}$$

那么，泊松方程（3.23）有解等价于以下方程:

$$\begin{aligned}&\Delta(N_{b,i}-q_+\psi_+N_{+,i}-q_-\psi_-N_{-,i})\\=&b_i-q_+\psi_+\Delta N_{+,i}-q_-\psi_-\Delta N_{-,i}-2q_+\nabla\psi_+\nabla N_{+,i}\\&-2q_-\nabla\psi_-\nabla N_{-,i}-q_+\Delta\psi_+N_{+,i}-q_-\Delta\psi_-N_{-,i}\\=&(1-\psi_+-\psi_-)b_i+\psi_+(b_i-q_+b_{+,i})+\psi_-(b_i-q_-b_{-,i})\\&-2q_+\nabla\psi_+\nabla N_{+,i}-2q_-\nabla\psi_-\nabla N_{-,i}-q_+\Delta\psi_+N_{+,i}-q_-\Delta\psi_-N_{-,i}\\=&:\tilde{G}_1+\tilde{G}_2+\tilde{G}_3,\end{aligned} \tag{3.25}$$

˜ ˜对于 $G_2=:\ \psi_+(b_i-q_+b_{+,\ i})$ 和 $G_3=:\ \psi_-(b_i-q_-b_{-,\ i})$。注意

$$\begin{aligned}\psi_{\pm}(b_i-q_{\pm}b_{\pm,i})=&\psi_{\pm}\left(\beta_i-\partial_{y_j}a_{ij}-q_{\pm}\beta_{\pm,i}+q_{\pm}\partial_{y_j}a_{\pm,ij}\right)\\=&\psi_{\pm}\left[\tilde{b}_{\pm,i}(m-q_{\pm}m_{\pm})-\partial_{y_i}(\tilde{a}_{ij}(m-q_{\pm}m_{\pm}))\right],\end{aligned} \tag{3.26}$$

˜这里我们用到了 (1.11) 和 (3.20)。由 (3.2) 和 (3.4) 可知， G_2 关于 y_1 指数级快速衰减。此外，我们可以假设 $b_i - q_+b_+$，$_i \neq 0$ 在 $[0,1]\times\mathbb{T}^{d-1}$ 上；否则，我们可以在 $[1,\infty)\times\mathbb{T}^{d-1}$ 中定义 $m \equiv q_+m_+$，由 (3.26) 以及当 $y_1 \geq 1$ 时 $\tilde{b}(y) = \tilde{b}_+(y)$ 可知，这意味着 $b_i - q_+b_+$，$_i \equiv 0$ 在 $[0,+\infty)\times\mathbb{T}^{d-1}$ 中。因此， b_i 在 $[0,+\infty)\times\mathbb{T}^{d-1}$ 中是光滑的，这意味着根据 (1.9) 和 (1.11)，m 在 $[0,+\infty)\times\mathbb{T}^{d-1}$ 中也是光滑的，因为 $\tilde{b}$ 和 $\tilde{a}$ 是光滑的。由 $\partial_i b_i = q_+\partial_i b_+$，$_i = 0$ 在 $[0,+\infty)\times\mathbb{T}^{d-1}$ 中可知，我们刚刚定义的这个 m 满足方程 $\partial_{y_iy_j}(\tilde{a}_{ij}(y)m(y)) - \partial_{y_i}\left(\tilde{b}_i(y)m(y)\right) = 0$ 在 $[0,+\infty)\times\mathbb{T}^{d-1}$ 中，且 $\mathrm{supp}(\psi_+(b_i - q_+b_{+,i})) \subset [0,1]\times\mathbb{T}^{d-1}$。根据 (1.8) 中定义的不变测度的唯一性，我们构造的 m 是 $\mathcal{L}$ 的不变测度，满足$m - q_+m_+ \equiv 0$在 $[1,\infty)\times\mathbb{T}^{d-1}$ 中，且 $\mathrm{supp}(\psi_+(b_i - q_+b_{+,i})) \subset [0,1]\times\mathbb{T}^{d-1}$（实际上，在一维情形下， $m - q_+m_+ \equiv 0$在 $[1,\infty)\times\mathbb{T}^{d-1}$ 中）。因此，我们可以将项 $\psi_+(b_i - q_+b_{+,i})$ ˜纳入对 G_1的讨论。

继续进行。由 (3.26)，我们首先注意到，积分 $\int_{[1,\infty)\times\mathbb{T}^{d-1}} |b_i - q_+b_{+,i}|$ 存在且等于某个常数，并且 $b_i - q_+b_{+,i} \neq 0$ 在积分 $[0,1]\times\mathbb{T}^{d-1}$上光滑，因此我们可以选取一个光滑函数 $\psi_+(x_1)$，使其满足

$$\begin{aligned} &\psi_+(x_1) = 1, \text{ if } x_1 \geq 1, \ \psi_+(x_1) = 0, \text{ if } x_1 \leq 0; \\ &\int_{(0,\infty)\times\mathbb{T}^{d-1}} \psi_+(x_1)(b_i - q_+b_{+,i})(x) = 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

注意，我们并不假设 $\psi_+ \geq 0$。类似地，我们可以假设 $b_i - q_-b_{-,i} \neq 0$ 在$[-1,0]\times\mathbb{T}^{d-1}$上，并选取一个光滑函数 $\psi_-(x_1)$，使其满足

$$\begin{aligned} &\psi_-(x_1) = 1, \text{ if } x_1 \leq -1, \ \psi_-(x_1) = 0, \text{ if } x_1 \geq 0; \\ &\int_{(-\infty,0)\times\mathbb{T}^{d-1}} \psi_-(x_1)(b_i - q_-b_{-,i})(x) = 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

˜ ˜由于 $G_1 \in L^\infty(\mathbb{D})$ 且 $\mathrm{supp}(G_1) \subset \mathbb{D}_1$，因此引理 3.2 和 Lipschitz 正则性˜估计保证存在泊松方程 $\Delta u_1 = G_1$ 在 $\mathbb{D}$中的一个解 u_1，其具有如下性质： ∇u_1 在 y_1 中指数快速衰减。

此外，根据引理 3.1，存在一个解 u_2，满足泊松方程˜ ˜$\Delta u_2 = G_2 + G_3$ 在 $\mathbb{D}$ 中，且 ∇u_2 在 y_1中指数快速衰减。

因此，存在一个解 $N_{b,\ i}$，满足泊松方程 $\Delta N_{b,\ i} = b_i$ 在 $\mathbb{D}$中，使得 $\nabla(N_{b,\ i} - q_+\psi_+N_{+,\ i} - q_-\psi_-N_{-,\ i})$ 在 y_1中指数快速衰减。

由于 $\Delta_y\partial_{y_i}N_{b,\ i} = \partial_{y_i}b_i = 0$ 在 $\mathbb{D}$中， $N_{b,\ i}$ 在 y'中是周期的，且 $||\nabla_y N_{b,\ i}||_{L^\infty(\mathbb{D})} \leq C$，我们知道 $\partial_{y_i}N_{b,\ i}$在 $\mathbb{R}^d$中是有界调和函数，因此 $\partial_{y_i}N_{b,\ i}$是一个常数。

Let

$$\phi_{b,ki} =: \partial_{y_k}N_{b,i} - \partial_{y_i}N_{b,k}.$$

then

$$\partial_{y_k}\phi_{b,ki} = \Delta_y N_{b,i} - \partial_{y_i}\partial_{y_k}N_{b,k} = b_i \quad \text{in } \mathbb{D},$$

and

$$\begin{aligned} &\phi_{b,\ ki} \text{ 在 } y_1 > 1\text{中指数快速衰减至 } q_+\phi_{+,\ ki}\ ; \\ &\phi_{b,ki} \text{ decays exponentially fast to } q_-\phi_{-,ki} \text{ in } y_1 < -1. \end{aligned}$$

因此，我们完成了这一证明。 □

得到上述结果后，我们便可以将非散度形式 (1.1)（或 (1.10)）转化为散度形式 (2.1)。事实上，由 (1.10) 和引理 3.3 可得

$$\partial_i \left(a_{ij}^\varepsilon \partial_j u_\varepsilon\right) + \frac{1}{\varepsilon} b_i^\varepsilon \partial_i u_\varepsilon = \partial_i \left((a_{ij}^\varepsilon + \phi_{b,ij}^\varepsilon)\partial_j u_\varepsilon\right) = f m^\varepsilon \quad \text{in } \mathbb{R}^d, \tag{3.29}$$

其中，系数矩阵 $A+\phi_b$ 和源项 m 满足以下条件：

$$\begin{aligned}
&A, \phi_b, m \text{ 在 } \mathbb{D} \text{ 中光滑，并且在 } y' \text{中为 1-周期；} \phi_{b,\ ij} = -\phi_{b,\ ji},\ i,j = 1,\cdots,d \quad ; \\
&\exists \text{ 个常数 } 0 < \lambda \le \Lambda, \text{ 使得 } \Lambda|\xi|^2 \ge (A+\phi_b)\xi\cdot\xi = A\xi\cdot\xi + \phi_b\xi\cdot\xi \ge \lambda|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^d; \\
&A, \phi_b, m \text{ 分别在 } y_1 \to +\infty \text{时以指数速度衰减至 } q_+(A_+ + \phi_+)\ q_+ m_+; \ A+\phi_b, m \text{ 分别在 } y_1 \to -\infty \text{时以指数速度衰减至 } q_-(A_- + \phi_-)\ q_- m_-, \\
&\exists \text{ 正数常量 } q_\pm; \quad A_\pm, \phi_\pm, m_\pm \text{ 在 } y \text{中为 1-周期且光滑；} \quad \phi_\pm = -\phi_\pm^* \quad , \\
&\Lambda|\xi|^2 \ge (A_\pm + \phi_\pm)\xi\cdot\xi = A_\pm\xi\cdot\xi \ge \lambda|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^d; \ \fint_{\mathbb{Y}} m_\pm = 1.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

因此，我们实现了本节的目标。在下一节中，我们将研究散度形式的椭圆方程 (3.29)，其系数矩阵和源项在界面两侧以指数速度衰减至某些不同的周期结构。

4 散度型方程的定量结果

从现在起，我们研究椭圆均匀化中的下列散度型问题。具体而言，对于 $0 < \varepsilon < 1$，考虑

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon = \partial_i \left(a_{ij}^\varepsilon \partial_j u_\varepsilon\right) = f m^\varepsilon & \text{in} \quad \mathbb{R}^d, \\ u_\varepsilon \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d), \end{cases} \tag{4.1}$$

其中系数矩阵 A 和源项 m 满足以下条件：

$$\begin{aligned}
&A, m \text{ are 1-periodic in } y',\ A, A_\pm \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d),\ ||m||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le \Lambda; \\
&\Lambda|\xi|^2 \ge A\xi\cdot\xi \ge \lambda|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \exists \text{ constants } 0 < \lambda \le \Lambda; \\
&\text{当 } y_1 \to +\infty \text{ 时，} A\text{、} m \text{ 分别以指数速度衰减至 } q_+A_+\text{、} q_+m_+; \\
&A, m \text{ decays exponentially fast to } q_-A_-, q_-m_-, \text{ respectively, if } y_1 \to -\infty, \\
&\text{其中 } q_\pm \le \Lambda \text{ 为某些正数常量；} \quad A_\pm\text{、} m_\pm \text{关于 } y \text{ 是 1-周期的；} \quad \fint_{\mathbb{Y}} m_\pm = 1, \\
&||m_\pm||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le \Lambda;\ \Lambda|\xi|^2 \ge A_\pm\xi\cdot\xi \ge \lambda|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

具体而言，衰减性质意味着

$$A(y) = \begin{cases} A_>(y) \xrightarrow[\text{decays exponentially fast to}]{} q_+A_+, & \text{if} \quad y_1 > 1, \\ A_<(y) \xrightarrow[\text{decays exponentially fast to}]{} q_-A_-, & \text{if} \quad y_1 < -1, \end{cases}$$

实际上， $A_>(y)$似乎仅定义在 $[1,\infty) \times \mathbb{T}^{d-1}$上。不过，经过适当延拓，我们可以找到一个 $C^{0,\alpha}$ 椭圆 $\tilde{A_>}$，使得当 $y_1 > 1$时， $\tilde{A_>}(y) = A_>(y)$; 而当 $y_1 \le 0$ 时， $A_>(y) = q_+A_+$。于是， $A_>$ 满足第2节中的假设，并以指数速度衰减至 q_+A_+，其中 $|y_1| \to +\infty$。从现在起，我们将 $A_>(y)$与 $A_>(y)$视为相同。类似的延拓也适用于 $A_<$。

鉴于第2节中的结果，我们可以预期， $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的均匀化算子 $\sim\mathcal{L}_0 = \mathrm{div}(A\nabla\cdot)$ 具有如下形式：

$$\widehat{A}(x) = \begin{cases} q_+\widehat{A_+} = q_+\widehat{A_>}, & \text{if} \quad x_1 > 0, \\ q_-\widehat{A_-} = q_-\widehat{A_<}, & \text{if} \quad x_1 < 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

其中， $\widehat{A_\pm}$ 是与周期矩阵 $A_\pm$相关联的均匀化矩阵。一般而言，矩阵 A 在界面 $\mathcal{I} =$ 处是不连续的： $\{x : x_1 = 0\}$。

4.1 A-调和函数

受文献 [6, 16], 中工作的启发，我们引入 A-调和函数，它由常数函数和以下分段线性函数张成：

$$P_j(x) = P(x)\cdot e_j =: \begin{cases} x_j, & \text{if } x_1 < 0, \\ x_j + \vartheta_j x_1, & \text{if } x_1 > 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

对于 $j = 1, \cdots, d$，其中 $\vartheta = (\vartheta_1, \cdots, \vartheta_j)$ 与穿过界面的透射矩阵有关，定义如下：

$$\vartheta_j = \frac{(\widehat{a_-})_{1j} - (\widehat{a_+})_{1j}}{(\widehat{a_+})_{11}}. \tag{4.5}$$

若 $\vartheta = 0$，则 A 为常数，函数 P_j 为线性函数。

不难验证，函数 P_j 是以下方程的解

$$\mathrm{div}(\widehat{A}\nabla P_j) = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d. \tag{4.6}$$

事实上，根据定义，函数 P_j 连续，且其梯度为

$$\nabla P_j(x) = \begin{cases} e_j, & \text{if } x_1 < 0, \\ e_j + \vartheta_j e_1, & \text{if } x_1 > 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

因此，函数 P_j 在 $\mathbb{R}^*_- \times \mathbb{R}^{d-1}$ 和 $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$ 中是 $\widehat{A}$-调和的，并满足跨界面的传输条件：

$$\begin{gathered} \lim_{h\to 0^+} \left[\left(\widehat{A}\cdot\nabla P_j\right)(x + he_1)\right]\cdot e_1 = \lim_{h\to 0^+} \left[\left(\widehat{A}\cdot\nabla P_j\right)(x - he_1)\right]\cdot e_1, \\ \lim_{h\to 0^+} \partial_k P_j\,(x + he_1) = \lim_{h\to 0^+} \partial_k P_j\,(x - he_1)\,, \end{gathered} \tag{4.8}$$

对所有 $x \in \mathcal{I}$、 $k = 2$、 $\cdots$、 d。

4.2 校正子的基本估计

$\widehat{}$由于校正函数旨在将 A-调和函数 P_j 转化为 A-调和的次线性函数，因此校正函数 χ_k 应满足以下方程:

$$\partial_{y_i}\left(a_{ij}(y)\partial_{y_j}(P_k(y)+\chi_k(y))\right)=0 \text{ in } \mathbb{D},\ \chi_k \text{ is 1-periodic in } y'. \tag{4.9}$$

此外，第2节中已知，矩阵 $A_>$（或 $A_<$）对应的校正函数 $\chi_{>,\,k}$（或 $\chi_{<,\,k}$）、$k=1$、$\cdots$、d定义如下:

$$\partial_{y_i}\left(a_{>,ij}(y)\partial_{y_j}\chi_{>,k}(y)\right)=-\partial_{y_i}a_{>,ik} \quad \text{in } \mathbb{D}. \tag{4.10}$$

关于 $\chi_{>,\,k}$ 和 $\chi_{<,\,k}$ 的精确定义及性质，请参见第2节。

引理 4.1. 假设矩阵 A 满足条件（4.2），则方程（4.9）存在唯一的 $\mathbb{D}$-周期解 χ_j，使得

$$\begin{cases}\nabla(\chi_j-\chi_{<,j})\in L^2((0,+\infty)\times\mathbb{T}^{d-1}),\ |\chi_j-\chi_{<,j}|\to 0\ as\ y_1\to-\infty;\\ \nabla(\chi_j-\chi_{>,j}-\vartheta_j\chi_{>,1})\in L^2((-\infty,0)\times\mathbb{T}^{d-1}),\ |\chi_j-\chi_{>,j}-\vartheta_j\chi_{>,1}|\to 0\ as\ y_1\to+\infty.\end{cases} \tag{4.11}$$

此外，存在常数 $C>0$ 和 $\theta>0$，使得

$$\begin{cases}|\nabla\chi_j(y)-\nabla\chi_{<,j}(y)|\le C\exp(-\theta|y_1|), & if\ y_1<-1,\\ |\nabla\chi_j(y)-\nabla\chi_{>,j}(y)-\vartheta_j\nabla\chi_{>,1}(y)|\le C\exp(-\theta|y_1|), & if\ y_1>1.\end{cases} \tag{4.12}$$

证明. 实际上，该证明与 [16, 命题 5.4] 和 [6, 定理 5.1]，几乎完全相同，这里为完整起见给出证明。选取截断函数 $\psi_\pm$（x_1），使得

$$\begin{aligned}&\psi_+(x_1)=1,\ \text{if } x_1\ge 1,\ \psi_+(x_1)=0,\ \text{if } x_1\le 0;\\ &\psi_-(x_1)=1,\ \text{if } x_1\le -1,\ \psi_-(x_1)=0,\ \text{if } x_1\ge 0.\end{aligned} \tag{4.13}$$

接下来，我们定义

$$v(y)=\chi_k(y)-\psi_+(y_1)\left(\chi_{>,k}(y)+\vartheta_k\chi_{>,1}(y)\right)-\psi_-(y_1)\chi_{<,k}(y). \tag{4.14}$$

因此，根据（4.9），

$$\begin{aligned}-\operatorname{div}(A\nabla v)&=\operatorname{div}(A\nabla P_k)+\operatorname{div}\left(A\cdot\nabla\left\{\psi_+\left(\chi_{>,k}+\vartheta_k\chi_{>,1}\right)+\psi_-\chi_{<,k}\right\}\right)\\ &=:\operatorname{div}(f)+\operatorname{div}(g),\end{aligned} \tag{4.15}$$

$\widehat{}$注意到（4.6）后，加上常数项 $A\cdot\nabla P_k$，

$$f=:(1-\psi_+-\psi_-)(A-\widehat{A})\cdot\nabla P_k+A\cdot\nabla\psi_+\left(\chi_{>,k}+\vartheta_k\chi_{>,1}\right)+A\cdot\nabla\psi_-\chi_{<,k},$$

并使用

$$\begin{aligned}g=:&\ \psi_+\left(A(\nabla P_k+\nabla\chi_{>,k}+\vartheta_k\nabla\chi_{>,1})-\widehat{A_>}\nabla P_k\right)\\ &+\psi_-\left(A(\nabla P_k+\nabla\chi_{<,k})-\widehat{A_<}\nabla P_k\right)\\ =:&\ g_++g_-.\end{aligned} \tag{4.16}$$

为继续推导，我们需要将 g 改写为更合适的形式。为简便起见，我们仅计算 g_+。直接计算可得

$$\begin{aligned}\operatorname{div} g_+ &= \partial_i \left(\psi_+ \left(a_{ik}(\delta_{kl} + \partial_k \chi_{>,\ell}) - \widehat{a_{>}}_{i\ell}\right) \partial_\ell P_j\right) \\ &= -\partial_i \left(\psi_+ \partial_k \phi_{>,ki\ell} \partial_\ell P_j\right) \\ &= -\partial_i \psi_+ \partial_k \phi_{>,ki\ell} \partial_\ell P_j - \psi_+ \partial_i \partial_k \phi_{>,ki\ell} \partial_\ell P_j \\ &= -\partial_k \left(\partial_i \psi_+ \phi_{>,ki\ell} \partial_\ell P_j\right) + \partial_k \partial_i \psi_+ \phi_{>,ki\ell} \partial_\ell P_j \\ &= -\partial_k \left(\partial_i \psi_+ \phi_{>,ki\ell} \partial_\ell P_j\right),\end{aligned}$$

因为 ∇P_j 除界面上 $\psi_\pm$ 消失处外处处为常数， $\phi_>$ 具有反对称性，且 $\partial_i \partial_k \phi_{>,\ ki\ell} = \partial_i B_{>,\ ij} = 0$ 由引理 2.7 给出。

因此有：

$$\operatorname{div}(g) = \operatorname{div}(\tilde{g})$$

for

$$\tilde{g}_k = -\partial_i \psi_+ \phi_{>,ki\ell} \partial_\ell P_j - \partial_i \psi_- \phi_{<,ki\ell} \partial_\ell P_j.$$

此外，容易看出

$$f, \tilde{g} \in L^\infty(\mathbb{D}),\ \operatorname{supp}(f, g) \subset [-1, 1] \times \mathbb{T}^{d-1}.$$

因此，根据经典的 Lax-Milgram 定理，存在唯一的 $\mathbb{D}$-周期解 v 满足方程 (4.15)，且 $\nabla v \in L^2(\mathbb{D})$，当 $|y_1| \to +\infty$时 $v \to 0$。等价地，存在唯一的 $\mathbb{D}$-周期解 χ_j 满足方程 (4.9)，并满足 (4.11)。此外，完全类似于 (3.15) 的证明（更多细节见 [16, 命题 5.4]），我们有

$$\int_{(R_1, +\infty) \times \mathbb{T}^{d-1}} |\nabla v|^2 dy \leq C \exp\{-\theta R_1\}, \tag{4.17}$$

利用 L^∞-估计，最终得到所需的估计 (4.12)。 □

引理 4.2。在引理 4.1 的条件下， $\chi \in L^\infty(\mathbb{D})$。

*Pro*的。证明与引理 2.8 完全相同，只需注意 (4.11)、(4.12) 和 (4.15) . □

4.3 有效方程

为确定有效方程，我们首先确定 (4.1) 中源项的 H^{-1}强收敛，具体表述如下两个引理。

引理 4.3. 假设 m 满足 (4.2) 中的假设，则存在一个 $\mathbb{D}$-周期解 φ_m，使其满足泊松方程 $\Delta_y \varphi_m = m - q_+ I_{y_1>0} - q_- I_{y_1<0}$ 于 $\mathbb{D}$中，并且 $\nabla \varphi_m \in C^{0,\beta'}(\mathbb{D})$，对任意 $\beta' \in (0, 1)$，其中 $I_{y_1>0}$和 $I_{y_1<0}$为特征函数。

证明. 已知存在 1-周期函数 $\varphi_{m_\pm} \in W^{2,p}(\mathbb{Y})$，对任意 $1 < p < \infty$，满足 $\Delta_y \varphi_{m_\pm} = m_\pm - 1$ 于 $\mathbb{Y}$ 中且 $\fint_{\mathbb{Y}} \varphi_{m_\pm} = 0$，这是由于 $\fint_{\mathbb{Y}} m_\pm = 1$。选取截断函数 $\psi_\pm(x_1)$，使得

$$\begin{aligned} &\psi_+(x_1) = 1, \text{ if } x_1 \geq 1, \ \psi_+(x_1) = 0, \text{ if } x_1 \leq 0; \\ &\psi_-(x_1) = 1, \text{ if } x_1 \leq -1, \ \psi_-(x_1) = 0, \text{ if } x_1 \geq 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

那么，泊松方程 $\Delta_y \varphi_m = m - q_+ I_{y_1>0} - q_- I_{y_1<0}$ 在 $\mathbb{D}$ 中的可解性等价于

$$\begin{aligned} &\Delta(\varphi_m - q_+\psi_+\varphi_{m_+} - q_-\psi_-\varphi_{m_-}) \\ =&m - q_+ I_{y_1>0} - q_- I_{y_1<0} - q_+\psi_+(m_+ - 1) - q_-\psi_-(m_- - 1) \\ &- q_+\Delta\psi_+ m_+ - 2q_+\nabla\psi_+\nabla m_+ - q_-\Delta\psi_- m_- - 2q_-\nabla\psi_-\nabla m_- \\ =&(1 - \psi_+ - \psi_-)m + \psi_+(m - q_+ m_+) + \psi_-(m - q_- m_-) - q_+(I_{y_1>0} - \psi_+) \\ &- q_-(I_{y_1<0} - \psi_-) - q_+\Delta\psi_+ m_+ - 2q_+\nabla\psi_+\nabla m_+ - q_-\Delta\psi_- m_- - 2q_-\nabla\psi_-\nabla m_- \\ =&: \tilde{F}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

由 (4.2) 和 (4.18)，容易看出 $\tilde{F} \in L^1(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$，因此根据引理 2.6，存在一个 $\mathbb{D}$-周期解 φ_m，满足泊松方程 $\Delta_y \varphi_m = m - q_+ I_{y_1>0} - q_- I_{y_1<0}$ 在 $\mathbb{D}$中，且 $\nabla(\varphi_m - q_+\psi_+\varphi_{m_+} - q_-\psi_-\varphi_{m_-}) \in C^{0,\beta'}(\mathbb{D})$，这意味着对于任意 $\beta' \in (0,1)$，都有 $\nabla\varphi_m \in C^{0,\beta'}(\mathbb{D})$。

□

接下来，借助引理 4.3，我们可以得到 H^{-1} 中的如下强收敛。

引理 4.4. 假设 m 满足 (4.2) 中的条件，且 $f \in L^2(\Omega)$，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中关于 $d \geq 2$ 的有界利普希茨区域，则 $f(x)m^\varepsilon(x) \to f(x)(q_+ I_{x_1>0} + q_- I_{x_1<0})(x)$ 在 $H^{-1}(\Omega)$ 中强收敛，当 $\varepsilon \to 0$。

证明. 我们首先引入 ε-平滑算子 S_ε 的概念。取一个非负函数 $\rho \in C_0^\infty(B(0, 1/2))$，使得 $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$。对于 $\varepsilon > 0$，定义

$$S_\varepsilon(f)(x) = (\rho_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\rho_\varepsilon(y)dy, \tag{4.20}$$

其中 $\rho_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-d}\rho(y/\varepsilon)$。此外，我们有以下估计（证明例如参见[18, 命题 3.1.6] 和 [10, 引理 3.1] ）。

$$\begin{aligned} &||S_{\varepsilon^{1/2}}(g)||_{L^2(\Omega)} \leq C||g||_{L^2(\Omega)}, \\ &||S_{\varepsilon^{1/2}}(g) - g||_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0, \text{ if } ||g||_{L^2(\Omega)} \leq C, \\ &\varepsilon^{1/2}||\nabla S_{\varepsilon^{1/2}}(g)||_{L^2(\Omega)} \leq C||g||_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

那么，根据引理 4.3，很容易看出

$$\begin{aligned} &fm^\varepsilon - f(q_+ I_{x_1>0} + q_- I_{x_1<0}) \\ =&\left(f - S_{\varepsilon^{1/2}}(f)\right)\left(m(x/\varepsilon) - (q_+ I_{x_1>0} + q_- I_{x_1<0})\right) + \varepsilon^2 S_{\varepsilon^{1/2}}(f)\Delta_x\varphi_m^\varepsilon \\ =&\left(f - S_{\varepsilon^{1/2}}(f)\right)\left(m(x/\varepsilon) - (q_+ I_{x_1>0} + q_- I_{x_1<0})\right) + \varepsilon \operatorname{div}\left(S_{\varepsilon^{1/2}}(f)\nabla_y\varphi_m^\varepsilon\right) \\ &- \varepsilon\nabla S_{\varepsilon^{1/2}}(f)\nabla_y\varphi_m^\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.22}$$

因此，

$$\begin{aligned}&||fm^{\varepsilon}-f(q_{+}I_{x_1>0}+q_{-}I_{x_1<0})||_{H^{-1}(\Omega)}\\ \leq& C||f-S_{\varepsilon^{1/2}}(f)||_{L^2(\Omega)}+C\varepsilon||S_{\varepsilon^{1/2}}(f)||_{L^2(\Omega)}+C\varepsilon||\nabla S_{\varepsilon^{1/2}}(f)||_{L^2(\Omega)}\\ \to& 0 \quad \text{as } \varepsilon\to 0,\end{aligned}$$

注意到 (4.21) 后，我们便完成了该证明。 □

有了引理 4.1 中得到的校正函数，我们现在可以陈述以下一致的 H-收敛结果，其证明与引理 2.3 的证明类似。

引理 4.5. 假设矩阵 A 满足 (4.2) 中的条件。设序列$x_\ell \in \mathbb{R}^d$ 和 $\varepsilon_\ell \in \mathbb{R}_+$ 满足 $x_\ell \cdot e_1 \to x_{0,1} \in \mathbb{R}$ 和 $\varepsilon_\ell \to 0$。那么，序列$A_\ell((\cdot - x_\ell)/\varepsilon_\ell)$ H-收敛于 $\widehat{A}(\cdot - x_{0,1}e_1)$，且该结论在 $\mathbb{R}^d$的每个有界利普希茨区域上成立。

证明. 证明是经典的，并依赖于散度-旋度引理 [18, 定理 2.3.1]。因此，我们仅强调其主要内容：矩阵 A 存在校正子 χ_k，使得

$$\nabla\chi_k \in L^2_{\text{unif}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d), \tag{4.23}$$

并且对于任意有界利普希茨区域 Ω，满足以下在L^2(Ω $\mathbb{R}^d$)中的弱收敛，

$$\nabla_y\chi_k((\cdot - x_\ell)/\varepsilon_\ell) \rightharpoonup 0 \text{ weakly in } L^2(\Omega,\mathbb{R}^d), \tag{4.24}$$

$$(A\cdot(\nabla P_k+\nabla\chi_k))((\cdot - x_\ell)/\varepsilon_\ell) \rightharpoonup \widehat{A}\nabla P_k \text{ weakly in } L^2(\Omega,\mathbb{R}^d). \tag{4.25}$$

上述事实可由（4.12）推出，这里用到了 $\mathbb{D}$-周期校正函数 $\chi_<$ 和 $\chi_>$ 的性质（2.24）和（2.25）。此外，关于（4.24）和（4.25）的类似证明，请分别参见（2.24）和（2.25）。 □

注 4.6。事实上，很容易看出，定理 1.1 可由引理 4.4 和引理 4.5 直接推出。

4.4 收敛速率

为了得到收敛速率，我们首先引入在 [16] 中得到的一些有用估计。

记

$$U_0(x) =: (\nabla P(x))^{-1}\cdot\nabla u_0. \tag{4.26}$$

由穿过界面的传输条件（4.8），函数$U_{0,\ j}$在界面 $\mathcal{I}$两侧连续；若 f足够光滑，则 $\widehat{A}\nabla u_0 = A\nabla P\cdot(\nabla P(x))^{-1}\cdot\nabla u_0$是正则的，这意味着$U_{0,\ j} = (\nabla P(x))^{-1}\cdot\nabla u_0$ 在界面 $\mathcal{I}$两侧连续。

回想一下，在周期情形中，我们需要 $||u_0||_{H^2}$ 支配 $u_\varepsilon - u_0$的 L^2 收敛速率。但在我们的设定中，由于 $u_0 \notin H^2$，我们需要找到 u_0的一个合适改写，使这一合适改写能够支配 $u_\varepsilon - u_0$的 L^2 收敛速率。以下结果表明， U_0 是一个合适的选择。

引理 4.7. 设 $d \geq 3$、 $x_0 \in \mathbb{R}^d$和 $\widehat{A}$ 为 (1.13)（或 (4.3)）中定义的矩阵。假设对某个 $p \in (d, \infty)$, 有 $f \in L^{2d/(d+4)}(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$。设 $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ 是 $\mathcal{L}_0 u_0 = f$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中的一个弱解，并由 (4.26) 定义 U_0。则存在一个常数 $C > 0$，其取值仅依赖于 $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$、 d、 $A_>$ 和 $A_<$ ，使得

$$||U_0||_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C||f||_{L^{2d/(d+4)}(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.27}$$

此外,

$$||U_0||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C||f||_{L^{2d/(d+4)}(\mathbb{R}^d)\cap L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.28}$$

证明。此证明与 [16, 引理 5.2], 几乎完全相同，为完整起见，我们给出证明。首先，我们证明 L^2 关于 u_0的估计。根据定义，有:

$$u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{G}_0(x, y) f(y) dy,$$

其中， $\mathcal{G}_0$ 是与算子 div($A\cdot\nabla$)相关的格林函数，满足 $|\mathcal{G}_0(x, y)| \leq C|x - y|^{2-d}$。然后应用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式可得

$$||u_0||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C||f||_{L^{2d/(d+4)}(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.29}$$

为继续推进，函数 $\tilde{u}_0(x) =: u_0(P^{-1}(x))$满足以下椭圆方程:

$$-\operatorname{div}\left(|J(x)|^{-1}\tilde{A}(x)\cdot\nabla\tilde{u}(x)\right) = |J(x)|^{-1} f\left(P^{-1}(x)\right) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d, \tag{4.30}$$

其中， $\tilde{A}(x)$定义为

$$\tilde{A}(x) := \left(\nabla P\left(P^{-1}(x)\right)\right)^T \cdot \widehat{A}\left(P^{-1}(x)\right) \cdot \nabla P\left(P^{-1}(x)\right),$$

且 $J(x)$是 P在 $P^{-1}(x)$处取值的雅可比行列式。根据构造， $\tilde{A}(x)$在半空间 $\mathbb{R}^*_{\pm} \times \mathbb{R}^{d-1}$上是椭圆的常数，并且由于(4.6)，乘积 $|J(x)|^{-1}\tilde{A}(x)$在 $\mathbb{R}^d$ 中无散。因此，我们可以将(4.30)重写为

$$\tilde{A}_{ij}\partial_{ij}\tilde{u}(x) = f(P^{-1}(x)).$$

此外，由 [17,引理 2.4], 可知，存在一个常数 C ，使得

$$||\tilde{u}||_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leq C||\tilde{u}||_{L^2(\mathbb{R}^d)} + C||f||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C||f||_{L^{2d/(d+4)}(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.31}$$

因此，注意到$\partial_{x_j}\tilde{u}(x) = U_{0,\ j}(P^{-1}(x))$，经过简单的变量替换即可得到所需的估计 (4.27)。

同样，应用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式也可得到

$$||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C||f||_{L^{pd/(d+2p)}(\mathbb{R}^d)}, \tag{4.32}$$

并再次应用 [17, 引理 2.4] ，我们得到

$$\begin{aligned} ||\tilde{u}||_{W^{2,p}(\mathbb{R}^d)} \leq & C||\tilde{u}||_{L^p(\mathbb{R}^d)} + C||f||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ \leq & C||f||_{L^{pd/(d+2p)}(\mathbb{R}^d)\cap L^p(\mathbb{R}^d)} \\ \leq & C||f||_{L^{2d/(d+4)}(\mathbb{R}^d)\cap L^p(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned} \tag{4.33}$$

其中我们利用了 $p > pd/(d+2p) > 2d/(d+4)$，这是因为 $p > d \geq 3$。因此，注意到 $\partial_{x_j}\tilde{u}(x) = U_{0,j}(P^{-1}(x))$ 后，经过简单的变量替换即可得到所需的估计 (4.28)。 □

在下面的引理中，我们可以定义与 $\mathcal{L}$ 相关的所谓通量校正子 ϕ。

引理 4.8（通量校正子）。在条件 (4.2) 下，记 $\mathbb{D}$-周期函数为

$$B_{ij} =: \widehat{A}_{ik}\partial_k P_j - A_{ik}(\partial_k P_j + \partial_k \chi_j), \tag{4.34}$$

对于 $i, j = 1, \cdots, d$，存在所谓的通量校正子 ϕ，使得

$$B_{ij} = \partial_{y_k}\phi_{kij} \text{ in } \mathbb{D},\ \phi_{kij} = -\phi_{ikj},\ \phi_{kij} \in L^\infty(\mathbb{D}),$$

对于 $k, i, j = 1, \cdots, d$。

证明。我们考虑 $\mathbb{D}$ 中的泊松方程 $\Delta N_{ij} = B_{ij}$。由引理 2.7 可知，

$$\begin{aligned} \Delta N_{>,ij} &= \widehat{A}_{>,ij} - A_{>,ij} + A_{>,ik}\partial_k \chi_{>,j}, \\ \Delta N_{<,ij} &= \widehat{A}_{<,ij} - A_{<,ij} + A_{<,ik}\partial_k \chi_{<,j}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

然后，我们采用与引理 4.3 的证明相同的方法，并使用 [6] 中的技巧。我们分解

$$N = \psi_+ N_> \cdot \nabla P + \psi_- N_< \cdot \nabla P + \tilde{N},$$

其中 $\psi_\pm$ 与 (4.18) 中定义的相同。回忆一下，∇P 是分段常数，仅可能在界面处不连续，而 $\psi_\pm$ 在该处为零。因此，根据定义

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{N} =& \Delta N - \psi_+ \Delta N_> \cdot \nabla P - \psi_- \Delta N_< \cdot \nabla P \\ & - 2\left(\nabla\psi_+ \cdot \nabla N_> \cdot \nabla P + \nabla\psi_- \cdot \nabla N_< \cdot \nabla P\right) \\ & - \Delta\psi_+ N_> \cdot \nabla P - \Delta\psi_- N_< \cdot \nabla P. \end{aligned} \tag{4.36}$$

由 (4.34) 和 (4.35) 可得

$$\begin{aligned} & \Delta N_{ij} - \psi_+ \Delta\left((N_>)_{ik}\right)\partial_k P_j - \psi_- \Delta\left((N_<)_{ik}\right)\partial_k P_j \\ =& (1 - \psi_+ - \psi_-)\left(\widehat{A}_{ik}\partial_k P_j - A_{ik}\left(\partial_k P_j + \partial_k \chi_j\right)\right) \\ & + \psi_+ A_{ik}\left(\partial_k \chi_{>,\ell}\partial_\ell P_j - \partial_k \chi_j\right) + \psi_- A_{ik}\left(\partial_k \chi_{<,\ell}\partial_\ell P_j - \partial_k \chi_j\right). \end{aligned} \tag{4.37}$$

根据 (4.12)，(4.37) 右端项是 $\mathbb{D}$-周期的，且属于 $L^1(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$，因此 (4.36) 的右端项是 $\mathbb{D}$-周期的，且属于 $L^1(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$。于是，由引理 2.6 可知，存在泊松方程 $\Delta N_{ij} = B_{ij} =: A_{ik}\partial_k P_j - A_{ik}(\partial_k P_j + \partial_k \chi_j)$ 在 $\mathbb{D}$ 中的一个解 N_{ij}，使得 $\nabla N \in L^\infty(\mathbb{D})$；这是根据引理 2.7 得出的。

此外，由于 (4.6) 和 (4.9)，$\Delta_y \partial_{y_i} N_{ij} = 0$ 属于 $\mathbb{D}$。由于 N_{ij} 是 $\mathbb{D}$-周期的，因此$\partial_{y_i} N_{ij}$在 $\mathbb{R}^d$ 中是有界调和函数，故 $\partial_{y_i} N_{ij}$是一个常数。令

$$\phi_{kij} =: \partial_{y_k} N_{ij} - \partial_{y_i} N_{kj}.$$

then

$$\partial_{y_k}\phi_{kij} = \Delta_y N_{ij} - \partial_{y_i}\partial_{y_k} N_{kj} = B_{ij} \text{ in } \mathbb{D},$$

and

$$\phi_{kij} \in L^\infty(\mathbb{D}).$$

因此，我们完成了这个证明。 □

得到通量校正子 ϕ 后，我们可以陈述以下收敛速率。

定理 4.9（收敛速率 I）。在条件 (4.2) 下，设 $f \in L^{2d/(d+2)}(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$，且 $\nabla f \in L^{2d/(d+2)}(\mathbb{R}^d)$ 满足 $d \geq 3$，并记

$$w_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon \chi_j^\varepsilon S_\varepsilon(U_{0,j}), \tag{4.38}$$

其中 S_ε 由 (4.20) 定义，u_ε 由 (4.1) 定义，u_0 定义为

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 u_0 = f(x)(q_+ I_{x_1>0} + q_- I_{x_1<0})(x) & in\ \mathbb{R}^d, \\ u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d), \end{cases} \tag{4.39}$$

且 U_0 由 (4.26) 定义。于是有以下收敛速率:

$$||w_\varepsilon||_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon \left(||f||_{L^{2d/(d+4)}(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)} + ||\nabla f||_{L^{2d/(d+2)}(\mathbb{R}^d)} \right), \tag{4.40}$$

其中 C 仅依赖于 d、λ 和 Λ。

证明。根据 (4.1)、(4.12)、(4.27)、(4.39) 和引理 4.2，容易看出 $w_\varepsilon \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$。此外，直接计算可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla w_\varepsilon) =& f m^\varepsilon - f(q_+ I_{x_1>0} + q_- I_{x_1<0}) + \operatorname{div}\left((\widehat{A} - A^\varepsilon)\nabla u_0 \right) \\
& - \varepsilon \operatorname{div}(A^\varepsilon \chi_j^\varepsilon S_\varepsilon(\nabla U_{0,j})) - \operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla_y \chi_j^\varepsilon S_\varepsilon(U_{0,j})) \\
=& f(m^\varepsilon - q_+ I_{x_1>0} + q_- I_{x_1<0}) + \operatorname{div}\left((\widehat{A} - A^\varepsilon)\cdot \nabla P \cdot (U_0 - S_\varepsilon(U_0)) \right) \\
& + \operatorname{div}\left(\left[(\widehat{A} - A^\varepsilon)\cdot \nabla P - A^\varepsilon \nabla_y \chi_j^\varepsilon \right] S_\varepsilon(U_0) \right) - \varepsilon \operatorname{div}(A^\varepsilon \chi_j^\varepsilon S_\varepsilon(\nabla U_{0,j})) \\
=& \varepsilon^2 \Delta \varphi_m^\varepsilon \cdot f + \varepsilon \partial_k(\phi_{kij}^\varepsilon S_\varepsilon(\partial_i U_{0,j})) - \varepsilon \operatorname{div}(A^\varepsilon \chi_j^\varepsilon S_\varepsilon(\nabla U_{0,j})) \\
& + \operatorname{div}\left((\widehat{A} - A^\varepsilon)\cdot \nabla P (U_0 - S_\varepsilon(U_0)) \right) \\
=& \varepsilon \operatorname{div}_x(\nabla_y \varphi_m^\varepsilon \cdot f) - \varepsilon \nabla_y \varphi_m^\varepsilon \cdot \nabla f + \operatorname{div}\left((\widehat{A} - A^\varepsilon)\cdot \nabla P \cdot (U_0 - S_\varepsilon(U_0)) \right) \\
& + \varepsilon \partial_k(\phi_{kij}^\varepsilon S_\varepsilon(\partial_i U_{0,j})) - \varepsilon \operatorname{div}(A^\varepsilon \chi_j^\varepsilon S_\varepsilon(\nabla U_{0,j})),
\end{aligned} \tag{4.41}$$

其中我们在 (4.41) 中用到了引理 4.3 和引理 4.8。然后，用 w_ε 对 (4.41) 进行测试可得

$$\begin{aligned}
||\nabla w_\varepsilon||_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq& C\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} |f| \cdot |\nabla w_\varepsilon| + C \int_{\mathbb{R}^d} |U_0 - S_\varepsilon(U_0)| \cdot |\nabla w_\varepsilon| \\
& + C\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f| \cdot |w_\varepsilon| + C\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} |S_\varepsilon(\nabla U_0)| \cdot |\nabla w_\varepsilon| \\
\leq& C\varepsilon \left(||f||_{L^2(\mathbb{R}^d)} + ||\nabla U_0||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right) ||\nabla w_\varepsilon||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
& + C\varepsilon ||\nabla f||_{L^{2d/(d+2)}(\mathbb{R}^d)} ||w_\varepsilon||_{L^{2d/(d-2)}(\mathbb{R}^d)},
\end{aligned}$$

其中我们用到了以下估计

$$||U_0 - S_\varepsilon(U_0)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon||\nabla U_0||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \text{ and } ||S_\varepsilon(\nabla U_0)||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C||\nabla U_0||_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (4.42)$$

关于 (4.42) 的证明，请参见 [18, 命题 3.1。6]

因此，利用 (4.27) 和 $||w_\varepsilon||_{L^{2d/(d-2)}(\mathbb{R}^d)} \leq C(d)||\nabla w_\varepsilon||_{L^2(\mathbb{R}^d)}$，即可得到所需的估计 (4.40)。

□

以下结果是周期情形下内部 Lipschitz 估计 [18, 定理 4.1.2]的推广。

定理 4.10（内部 Lipschitz 估计）。设 $d \geq 2$ 且矩阵 A 满足 (4.2) 中的条件。令 $\varepsilon > 0$、$x_0 \in \mathbb{R}^d$、$R > 0$ 和 $B = B(x_0, 2R)$。假设 $u_\varepsilon \in H^1(B)$ 是以下方程的弱解

$$\operatorname{div}(A(x/\varepsilon)\nabla u_\varepsilon) = 0 \quad in \quad B.$$

那么，存在一个常数 C，仅依赖于 A 和 d，使得

$$||\nabla u_\varepsilon||_{L^\infty(B(x_0,R))} \leq CR^{-1}\left(\fint_{B(x_0,2R)} |u_\varepsilon|^2\right)^{1/2}.$$

证明。证明与 [16, 定理 4.1], 的证明几乎完全相同，因为在 [16], 情形下，H-紧性意义下的有效方程与界面 $\mathcal{I}$ 两侧局部光滑性之外的情形相同。

定理 4.10 的证明基于紧性论证方法，分为以下三个步骤:

步骤 1. [一步改进。] 我们利用多尺度问题 $\mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon = 0$ 在 B 中一致 H-收敛到齐次有效问题 $\mathcal{L}_0 u_0 = 0$ 在 B 中这一性质，该性质表明多尺度解 u_ε 继承了解 u_0 的中尺度正则性。在此步骤中，我们使用引理 4.5、针对 u_ε 的内部 Caccioppoli 不等式，以及针对 u_0 的一般 $C^{1,1}$ 正则性估计（关于这一一般 $C^{1,1}$界，请参见 [16, 引理 5.3]）。

步骤 2. [迭代。] 前述估计可以通过迭代得到 u_ε 直至尺度 ε 的 Lipschitz 正则性。在此步骤中，我们需要注意 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的缩放性质以及针对 u_ε 的内部 Caccioppoli 不等式。

步骤 3. [放大论证] 我们利用 $\mathcal{L}_1$ 的正则性结果，得到尺度小于 ε 时的 Lipschitz 正则性，因为 $A \in C^{0,\alpha}$。

由于上述所有操作与 [18, 定理 4.1.1]和 [16, 定理 4.1], 的证明完全相似，为简洁起见，我们略去证明，详细内容请参见 [18, 定理 4.1.1]和 [16, 定理 4.1]。

□

作为上述内部 Lipschitz 估计的直接推论，我们得到格林函数的梯度和混合梯度的以下估计：

推论 4.11. 设 $d \geq 3$。假设矩阵 A 满足 (4.2) 中的条件。设 $\mathcal{G}_\varepsilon$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上、与算子 div$(A(x/\varepsilon)\nabla)$ 相关的格林函数。那么，存在一个仅依赖于 d 和 A 的常数 C，使得对于任意 $x \neq y \in \mathbb{R}^d$，都有

$$\begin{aligned} |\nabla_x \mathcal{G}_\varepsilon(x,y)| + |\nabla_y \mathcal{G}_\varepsilon(x,y)| &\leq C|x-y|^{-d+1}, \\ |\nabla_x \nabla_y \mathcal{G}_\varepsilon(x,y)| &\leq C|x-y|^{-d}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

证明. 与定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的算子 div$(A(x/\varepsilon)\nabla)$ 相关的格林函数 $\mathcal{G}_\varepsilon(x,y)$ 是以下弱形式方程的一个解（精确定义见 [7]）

$$\operatorname{div}(A(x/\varepsilon)\nabla_x \mathcal{G}_\varepsilon(x,y)) = \delta_y(x) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d.$$

若 $d \geq 3$，由于 A 一致有界且强制，由 [7, 定理 1] 可知，存在唯一的格林函数，并满足以下估计：

$$|\mathcal{G}_\varepsilon(x,y)| \leq C|x-y|^{2-d}. \tag{4.44}$$

接下来，我们只需估计 $\nabla_x \mathcal{G}_\varepsilon(x,y)$，因为 $\nabla_y \mathcal{G}_\varepsilon(x,y)$ 的估计可由 $\mathcal{G}_\varepsilon(x,y) = \mathcal{G}^*_\varepsilon(y,x)$ [11, 定理 1.3], 推出，其中 $\mathcal{G}^*$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上、与转置算子 div$(A^*(x/\varepsilon)\nabla)$ 相关的格林函数。

因此，估计 (4.43) 由定理 4.10、(4.44) 以及 $\mathcal{G}_\varepsilon(\ y)$ 和 $\nabla_y \mathcal{G}_\varepsilon(\ y)$ 在 $B(x, |x-y|/2)$ 中为 A-调和函数这一事实得到。 □

在获得 $\mathcal{G}_\varepsilon$ 及其梯度的大小估计后，我们即可完成定理 1.3 的证明，该定理陈述如下。

定理 4.12（收敛速率 II）。在条件 (4.2) 下，设 $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \cap L^{2d/(d+4)}(\mathbb{R}^d)$ 对某个 $p \in (d, \infty)$ 成立，则对于任意 $2 < q < \infty$，有

$$||w_\varepsilon||_{L^{2d/d-2}(\mathbb{R}^d)} + ||\nabla w_\varepsilon||_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon ||f||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)\cap L^{2d/(d+4)}(\mathbb{R}^d)}, \tag{4.45}$$

其中 w_ε 由 (4.38) 定义，常数 C 仅依赖于 d、A、m 和 p。

证明。根据 (4.41)，我们将 w_ε 分解为 $w_\varepsilon =: w_{\varepsilon,1} + w_{\varepsilon,2}$，其中

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla w_{\varepsilon,1}) =& -\varepsilon \nabla_y \varphi^\varepsilon_m \cdot \nabla f; \\ \operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla w_{\varepsilon,2}) =& \varepsilon \operatorname{div}_x(\nabla_y \varphi^\varepsilon_m \cdot f) + \operatorname{div}\left((\widehat{A} - A^\varepsilon)\cdot \nabla P \cdot (U_0 - S_\varepsilon(U_0))\right) \\ &+ \varepsilon \partial_k(\phi^\varepsilon_{kij} S_\varepsilon(\partial_i U_{0,j})) - \varepsilon \operatorname{div}(A^\varepsilon \chi^\varepsilon_j S_\varepsilon(\nabla U_{0,j})). \end{aligned} \tag{4.46}$$

接下来，类似于（4.29）的证明，由（4.43）中的 Green 函数 $\mathcal{G}_\varepsilon$ 估计以及 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式可得：

$$||\nabla w_{\varepsilon,1}||_{L^2(\mathbb{R}^d)} + ||\nabla w_{\varepsilon,1}||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon ||\nabla f||_{L^p(\mathbb{R}^d)\cap L^{2d/(d+2)}(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.47}$$

此外，对于 $2 \leq q < \infty$，由定理 4.10 的一致内部 Lipschitz 估计以及所谓的实变量方法 [18, 第 4 章2]可得，一致的$W^{1,\, q}$估计成立：

$$\begin{aligned} ||\nabla w_{\varepsilon,2}||_{L^q(\mathbb{R}^d)} &\leq C\varepsilon||f||_{L^q(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon||\nabla U_0||_{L^q(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C\varepsilon||f||_{L^q(\mathbb{R}^d)\cap L^{2d/(d+4)}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C\varepsilon||f||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)\cap L^{2d/(d+4)}(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned} \tag{4.48}$$

其中，我们在上述不等式中用到了 [18, 命题 3.1。6]关于（4.48）的详细证明，可参见 [18,第 4 章。3]

因此，对于任意 $2 \leq q < \infty$，有

$$||w_\varepsilon||_{L^{2d/d-2}(\mathbb{R}^d)} + ||\nabla w_\varepsilon||_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon||f||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)\cap L^{2d/(d+4)}(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.49}$$

因此，我们完成了证明，其中常数 C 仅依赖于 d、 A和 m 。 p

□

为完成定理 1.3 的证明，取某个 $p > d$，注意到

$$\begin{aligned} ||\varepsilon\chi_j^\varepsilon S_\varepsilon(U_{0,j})||_{L^{2d/d-2}(\mathbb{R}^d)\cap L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\leq C\varepsilon||S_\varepsilon(U_0)||_{L^{2d/d-2}(\mathbb{R}^d)\cap L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C\varepsilon||S_\varepsilon(U_0)||_{L^{2d/d-2}(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon||S_\varepsilon(\nabla U_0)||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C\varepsilon||U_0||_{L^2(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon||\nabla U_0||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C\varepsilon||f||_{L^p(\mathbb{R}^d)\cap L^{2d/(d+4)}(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

其中，我们在上述不等式中用到了 $\chi \in L^\infty$、引理 4.7、Sobolev 嵌入以及 [18, 命题 3.1。6]

至此，我们完成了定理 1.3 的证明。

致谢

作者谨向 Wenjia Jing 教授致以诚挚谢意，感谢他向我提出这一课题并进行有益的讨论。

参考文献

[1] S. Armstrong、T. Kuusi 和 J. Mourrat。《定量随机均匀化与大尺度正则性》，《数学科学基本原理》第352卷。Springer，Cham，2019年。[2] S. Armstrong 和 J. Lin。非散度形式椭圆方程随机均匀化的最优定量估计。《Arch. Ration. Mech. Anal.》，225(2):937–991，2017年。[3] S. Armstrong 和 C. Smart。非散度形式椭圆方程的定量随机均匀化。《Arch. Ration. Mech. Anal.》，214(3):867–911，2014年。

[4] M. Avellaneda 和 F. Lin。均匀化理论中的紧致性方法。II. 非散度形式方程。《纯粹与应用数学通讯》，42(2):139–172，1989年。[5] A. Bensoussan、J. L. Lions 和 G. Papanicolaou。《周期结构的渐近分析》，第374卷。美国数学会，2011年。[6] X. Blanc、Le B. C. 和 P.-L. Lions。不同尺度下椭圆问题的局部剖面：周期结构中的缺陷及周期结构之间的界面。《Comm. Partial Differential Equations》，40(12):2173–2236，2015年。[7] X. Blanc、F. Legoll 和 A. Anantharaman。具有周期系数的散度型算子格林函数的渐近行为。《Appl. Math. Res. Express. AMRX》，(1):79–101，2013年。[8] M. Freidlin 和 A. Wentzell。图上的扩散过程及平均原理。《概率年刊》，21(4):2215–2245，1993年。[9] Xiaoqin G.、Timo S. 和 Hung V. T.。非散度形式椭圆方程均匀化中扩散矩阵的刻画，2022年。[10] J. Geng 和 Z. Shen。具有时间依赖周期系数的抛物型均匀化收敛速率。《J. Funct. Anal.》，272(5):2092–2113，2017年。[11] M. Gr¨uter 和 K.-O. Widman。一致椭圆方程的格林函数。《Manuscripta Math.》，37(3):303–342，1982年。[12] X. Guo 和 H. Tran。关于二维非散度形式线性椭圆偏微分方程周期均匀化最优收敛速率的猜想，2020年。[13] M. Hairer 和 C. Manson。带界面的周期均匀化：多维情形。《概率年刊》，39(2):648–682，2011年。[14] V. V. Jikov、S. M. Kozlov 和 O. A. Ole˘ınik。《微分算子与积分泛函的均匀化》。施普林格出版社，柏林，1994年。[15] Wenjia Jing 和 Yiping Zhang。带无界漂移的非散度形式椭圆均匀化中的定量估计。预印本。[16] M. Josien。界面简单情形下的一些定量均匀化结果。《Comm. Partial Differential Equations》，44(10):907–939，2019年。[17] D. Kim。$\mathbb{R}^d$ 中具有分段连续系数的二阶椭圆方程。《势分析》，26(2):189–212，2007年。[18] Z. Shen。《椭圆系统的周期均匀化》，《算子理论：进展与应用》第269卷。Birkh¨auser/Springer，Cham，2018年。《偏微分方程进展》（巴塞尔）。[19] T. Sprekeler 和 H. Tran。非散度形式椭圆均匀化问题的最优收敛速率：分析与数值示例。《Multiscale Model. Simul.》，19(3):1453–1473，2021年。[20] L. Tartar。《均匀化一般理论》，《意大利数学联合会讲义》第7卷。施普林格出版社，柏林；意大利数学联合会，博洛尼亚，2009年。