arXiv:2301.01427v1 [math.NA] 4 Jan 2023

非线性退化抛物方程的熵耗散、高阶精度保正性时间隐式离散方法

Fengna Yan[1,2], J. J. W. Van der Vegt[2], Yinhua Xia[3], Yan Xu[3]

摘要

我们针对具有梯度流结构的非线性退化抛物方程，构造了熵耗散的高阶精度局部间断伽辽金（LDG）离散，并将其与对角隐式龙格-库塔（DIRK）方法相结合。利用简单的交替数值通量，我们构造了 DIRK-LDG 离散，兼具高阶精度、熵耗散和良好的长期行为等优点。隐式时间离散方法大大缓解了数值离散稳定性所需的时间步长限制。此外，较大的时间步长显著提高了计算效率。我们从理论上证明了隐式 Euler-LDG离散具有无条件熵耗散性。接下来，为确保数值解的正性，我们采用 Karush-Kuhn-Tucker（KKT）限制器，通过拉格朗日乘子将正性不等式约束与高阶精度 DIRK-LDG 离散相结合。此外，在 KKT 方程中施加质量守恒等式约束，以确保经正性限制器处理后的解满足质量守恒。我们证明了隐式时间一阶、空间高阶精度的 KKT-LDG

电子邮箱：fnyan@hfut.edu.cn（F. Yan）、j.j.w.vandervegt@utwente.nl（J. J. W. Van der Vegt）、yhxia@ustc.edu.cn（Y. Xia）、yxu@ustc.edu.cn（Y. Xu）。[1] 中国合肥工业大学数学学院，安徽合肥，邮编 230000，中国。[2] 特温特大学应用数学系计算科学数学研究组，荷兰恩斯赫德，邮编 7500 AE。[3] 中国科学技术大学数学学院，安徽合肥，邮编 230026，中国。

离散具有唯一可解性和无条件熵耗散性，从而首次对 KKT 限制器进行了理论分析。最后，数值结果表明，对于需要正性限制器的问题，KKT-DIRK-LDG 离散具有高阶精度和熵耗散性。

关键词：局部间断Galerkin离散、DIRK方法、非线性退化抛物方程、无条件熵耗散、KKT 限制器。

1 引言

考虑如下退化抛物方程 [5]

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (f(u)\nabla(\phi(\boldsymbol{x}) + H'(u))), & \text{in } \Omega \times (0,T], \\ u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}), & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其边界条件为零通量边界条件

$$\nabla(\phi(\boldsymbol{x}) + H'(u)) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega \times (0,T], \tag{1.2}$$

其中，Ω是 $\mathbb{R}^d, d = 1$中的有界开域，2，边界 $\partial\Omega$处的单位外法向量为 $\boldsymbol{\nu}$，$u(\boldsymbol{x},t) \geqslant 0$ 是非负密度，其时间导数记为 u_t，$\phi(\boldsymbol{x})$是给定的势函数，适用于 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$，$f$，$H$ 是满足以下条件的给定函数

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad H : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(u)H''(u) \geqslant 0, \tag{1.3}$$

其中，$\mathbb{R}^+$ 是非负实数空间。此处，当 u取某些值时，$f(u)H''(u)$可能为零，从而导致退化情形。与(1.1)对应的熵定义为

$$E(u) = \int_\Omega (u\phi(\boldsymbol{x}) + H(u))d\Omega. \tag{1.4}$$

将 (1.1) 乘以 $\phi(\boldsymbol{x}) + H'(u)$，并在 Ω 上积分，再结合零通量边界条件 (1.2) 和 (1.4)，可得熵的时间导数满足

$$\frac{d}{dt}E(u) = -\int_\Omega f(u)|\nabla(\phi(\boldsymbol{x}) + H'(u))|^2 d\Omega \leqslant 0. \tag{1.5}$$

系统 (1.1) 可表示不同的物理问题，例如多孔介质方程[31, 33], 具有双阱势的非线性非局部方程 [7], 以及描述费米子气体和玻色子气体的非线性福克-普朗克模型 [1, 9, 29]。

近年来，人们针对 (1.1) 提出了许多数值离散方法，例如混合有限元方法 [6], 有限体积方法 [5, 7], 间断伽辽金方法 [19, 20, 21]和局部间断伽辽金方法 [33]。关于保正性离散，Liu 和 Yu 在 [20, 21], 中分别为线性福克-普朗克方程开发了保最大值间断伽辽金格式和熵满足间断伽辽金格式，但这些离散方法无法直接应用于 (1.1) 给出的一般情形。随后，Liu 和 Wang 在 [19] 中针对一维 (1.1) 开发了一种显式龙格-库塔（RK）时间离散方法，并在满足一定库朗-弗里德里希斯-刘（CFL）约束的条件下，构造了保正高阶精度间断伽辽金格式。对于多孔介质方程，文献 [33], 研究了将局部间断伽辽金离散与显式龙格-库塔方法相结合的方案，该方案与文献 [19]中的间断伽辽金方法类似。不过，为确保数值解非负，该方案使用了一种特殊的数值通量。
Cheng 和 Shen 在 [10] 提出了一种拉格朗日乘子方法，用于构造一类抛物型方程的保正性格式。这类方程不同于 (1.1)，但包含多孔介质方程。

对于时间步长 τ 和网格尺寸 h，为了保证在 [19] 和 [33]中的稳定性，需要满足条件 $\tau = O(h^2)$。因此，这些显式时间离散受到严格的时间步长限制，但目前尚无适用于 (1.1) 的可行保正性隐式时间离散局部间断伽辽金格式。本文提出了高阶精度的对角隐式龙格-库塔（DIRK）局部间断伽辽金离散格式，无需显式方法所受的严格时间步长限制，即可确保数值解的正性和质量守恒。

Cockburn 和 Shu 在 [12] 中提出的局部间断伽辽金方法具有诸多优点，包括高度并行性、高阶精度、试探空间和检验空间的选择简单，以及易于处理复杂几何区域。关于局部间断伽辽金方法的应用实例，请参见 [11, 15, 28, 36] 。

对于许多物理问题，数值离散保持偏微分方程（PDE）的正性至关重要。这不仅是获得具有物理意义的解所必需的，负值还可能导致问题不适定，并使数值离散发散。许多数学家对保正性间断伽辽金方法进行了广泛研究。然而，大多数保正性间断伽辽金方法都与显式时间离散[19, 32, 34, 35], 相结合，而数值稳定性往往会对其施加严格的时间步长限制。这些严格的时间步长约束使显式方法不适用于抛物型

偏微分方程，例如（1.1）。

近期，Qin 和 Shu 在 [25] 中将 [34, 35]，提出的保正性格式构造一般框架从显式时间离散推广到了隐式时间离散。他们针对一维守恒律，开发了一种保正性 DG 方法，该方法具有高阶空间精度，并结合了一阶后向欧拉隐式时间离散。然而，这种方法需要对数值离散进行详细分析以确保正性，而且将其推广到更高阶精度的隐式时间方法并不直接。Huang 和 Shen 在 [17] 中为 Keller-Segel 方程和 Poisson-Nernst-Planck 方程构造了高阶线性保界隐式离散。Van der Vegt、Xia 和 Xu 在 [30] 中提出了 KKT 限制器的概念，用于构造保正性的隐式时间离散。[30] 中的 KKT 限制器通过拉格朗日乘子，将物理问题施加的不等式约束和等式约束与高阶精度 DIRK-DG 离散耦合而得到。随后，采用高效的主动集半光滑牛顿法求解所得的半光滑非线性方程。

本文考虑由 (1.1) 给出的一类一般非线性退化抛物方程，旨在构造高阶精度、熵耗散且保正性的隐式时间局部间断伽辽金离散。对于空间离散，我们采用具有简单交替数值通量的局部间断伽辽金方法，从而使半离散局部间断伽辽金离散具有熵耗散性。对于时间离散，我们考虑 DIRK方法，这显著增大了稳定性所允许的时间步长。本文从理论上证明，将局部间断伽辽金离散与隐式欧拉时间积分方法结合时，可实现无条件熵耗散。我们通过拉格朗日乘子对数值离散施加正性约束，并利用 KKT 限制器构造保正性离散。本文证明了所得保正性 KKT 系统的唯一可解性。我们还将证明，保正LDG离散与后向欧拉时间积分方法结合时具有无条件熵耗散性。数值结果表明，高阶精度保正 DIRK-LDG 离散具有良好的精度和熵耗散性。

本文结构安排如下。第 2 节介绍针对式 (1.1) 所述非线性退化抛物方程、采用简单交替数值通量的半离散局部间断伽辽金离散，并证明该数值近似具有熵耗散性质——

高阶精度 DIRK-LDG 离散可大幅增大稳定时间步长，将在第 3 节讨论。第 3.1 节证明隐式欧拉 LDG 离散具有无条件熵耗散性质。为确保数值解的正性以及保正性限制数值离散的质量守恒，我们在第 4.1 节引入 KKT 系统。第 4.2 节将满足正性和质量守恒约束的高阶 DIRK-LDG 离散表述为 KKT 混合互补问题。第 4.3 节证明所得代数系统的唯一可解性和无条件熵耗散性质。第 5 节给出数值结果，以展示保正 KKT-DIRK-LDG 离散的高阶精度、正性和熵耗散性质。第 6 节给出总结性评论。

2 半离散局部间断 Galerkin 格式

2.1 定义、符号

设 $\mathcal{T}_h$ 是 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$ 上的一个形状正则剖分，其单元 K为线段或凸四边形。给定参考单元 $\widehat{K} = [-1, 1]^d$。令 $\mathcal{Q}_k(\widehat{K})$ 表示由 $[-1, 1]$上次数至多为 $k \geqslant 0$ 的勒让德多项式 $\mathcal{P}_k(K)$ 的张量积构成的空间 $\widehat{}$。空间 $\mathcal{Q}_k(K)$ 通过从单元 K 到参考单元 K的等参 $\widehat{}$ 变换得到。有限元空间 V_h^k和 $\boldsymbol{W}_h^k$ 定义如下:

$$
\begin{aligned}
V_h^k &= \{v \in L^2(\Omega) : \ v|_K \in \mathcal{Q}_k(K), \ \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\
\boldsymbol{W}_h^k &= \{\boldsymbol{w} \in [L^2(\Omega)]^d : \ \boldsymbol{w}|_K \in [\mathcal{Q}_k(K)]^d, \ \forall K \in \mathcal{T}_h\},
\end{aligned}
$$

并允许在单元界面处不连续。设 e 为连接“左侧”和“右侧”单元的一条内部边，分别记为 K_L 和 K_R。若 u 是定义在 K_L 和 K_R上的函数，则记 $u^L := (u|_{K_L})|_e$ 和 $u^R := (u|_{K_R})|_e$ 分别为 u 在 e处的左迹和右迹。

注意， $L^1(\Omega)$、 $L^2(\Omega)$ 和 $L^\infty(\Omega)$ 是标准的索博列夫空间，$\|u\|_{L^2(\Omega)}$ 是$L^2(\Omega)$-范数，而 $(\cdot, \cdot)_\Omega$ 是 $L^2(\Omega)$ 内积。为简便起见，我们将内积记作 $(u, v) := (u, v)_\Omega$。

2.2 空间局部间断伽辽金离散

对于方程 (1.1) 的局部间断伽辽金离散，我们首先将该方程改写为一阶系统

$$\begin{aligned} u_t =& \nabla \cdot \boldsymbol{q}, \\ \boldsymbol{q} =& f(u)\boldsymbol{s}, \\ \boldsymbol{s} =& \nabla p, \\ p =& \phi(\boldsymbol{x}) + H'(u). \end{aligned}$$

然后，对上述方程乘以任意测试函数，在每个单元 $K \in \mathcal{T}_h$ 上分部积分，最后对单元贡献和面贡献求和，即可直接得到局部间断伽辽金离散。该离散格式可表述如下：求 $u_h, p_h \in V_h^k$, $\boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{s}_h \in \boldsymbol{W}_h^k$，使得对所有 $\rho, \varphi \in V_h^k$和 $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{W}_h^k$，均有

$$(u_{ht}, \rho) + L_h^1(\boldsymbol{q}_h; \rho) = 0, \tag{2.1a}$$

$$(\boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{\theta}) + L_h^2(u_h, \boldsymbol{s}_h; \boldsymbol{\theta}) = 0, \tag{2.1b}$$

$$(\boldsymbol{s}_h, \boldsymbol{\eta}) + L_h^3(p_h; \boldsymbol{\eta}) = 0, \tag{2.1c}$$

$$(p_h, \varphi) + L_h^4(u_h; \varphi) = 0, \tag{2.1d}$$

其中

$$L_h^1(\boldsymbol{q}_h; \rho) := (\boldsymbol{q}_h, \nabla\rho) - \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\widehat{\boldsymbol{q}}_h \cdot \boldsymbol{\nu}, \rho)_{\partial K}, \tag{2.2a}$$

$$L_h^2(u_h, \boldsymbol{s}_h; \boldsymbol{\theta}) := -(f(u_h)\boldsymbol{s}_h, \boldsymbol{\theta}), \tag{2.2b}$$

$$L_h^3(p_h; \boldsymbol{\eta}) := (p_h, \nabla \cdot \boldsymbol{\eta}) - \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\widehat{p}_h, \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\eta})_{\partial K}, \tag{2.2c}$$

$$L_h^4(u_h; \varphi) := -(\phi(\boldsymbol{x}) + H'(u_h), \varphi). \tag{2.2d}$$

注意，$\boldsymbol{\nu}$ 是单元 K 在其边界 ∂K处的单位外法向量。L_h^1 和 L_h^3 中的“帽子”项称为“数值通量”，其选取对确保稳定性起着重要作用。需要指出的是，数值通量的选取并不唯一。这里我们采用交替数值通量

$$\widehat{\boldsymbol{q}}_h = \boldsymbol{q}_h^R, \quad \widehat{p}_h = p_h^L, \tag{2.3}$$

or

$$\widehat{\boldsymbol{q}}_h = \boldsymbol{q}_h^L, \quad \widehat{p}_h = p_h^R. \tag{2.4}$$

考虑零通量边界条件 $\nabla(\phi(\boldsymbol{x}) + H'(u)) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$，我们取

$$\widehat{\boldsymbol{q}}_h \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad p_h = (p_h)^{in} \tag{2.5}$$

在 $\partial\Omega$处，其中“in”指从区域 Ω 内部取边界迹所得的值。

2.3 熵耗散

定理 2.1. 对于 $u_h \in V_h^k$, $\boldsymbol{s}_h \in \boldsymbol{W}_h^k$，满足 (1.3) 的 f 所对应的局部间断 Galerkin 格式 (2.1)-(2.5) 是熵耗散的，并且满足

$$\frac{d}{dt}E(u_h) = -(f(u_h)\boldsymbol{s}_h, \boldsymbol{s}_h) \leqslant 0,$$

这与偏微分方程 (1.1) 的熵耗散性质 (1.5) 一致。

证明。取

$$\rho = p_h, \quad \boldsymbol{\theta} = -\boldsymbol{s}_h, \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{q}_h, \quad \varphi = -u_{ht},$$

分别代入 (2.1a)-(2.1d)，并分部积分后，得到

$$\begin{aligned}
&(\phi(\boldsymbol{x}) + H'(u_h), u_{ht}) \\
=& -(f(u_h)\boldsymbol{s}_h, \boldsymbol{s}_h) - (\boldsymbol{q}_h, \nabla p_h) + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\widehat{\boldsymbol{q}}_h \cdot \boldsymbol{\nu}, p_h)_{\partial K} - (p_h, \nabla \cdot \boldsymbol{q}_h) + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\widehat{p}_h, \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{q}_h)_{\partial K} \\
=& -(f(u_h)\boldsymbol{s}_h, \boldsymbol{s}_h) - \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\boldsymbol{q}_h \cdot \boldsymbol{\nu}, p_h)_{\partial K} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\widehat{\boldsymbol{q}}_h \cdot \boldsymbol{\nu}, p_h)_{\partial K} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\widehat{p}_h, \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{q}_h)_{\partial K}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

假设 e 是单元 K_L 和 K_R 共享的内部边，则 $\boldsymbol{\nu}^R = -\boldsymbol{\nu}^L$，结合数值通量 (2.3)，可得

$$\begin{aligned}
&- \sum_{K_L \bigcup K_R} (\boldsymbol{q}_h \cdot \boldsymbol{\nu}, p_h)_e + \sum_{K_L \bigcup K_R} (\widehat{\boldsymbol{q}}_h \cdot \boldsymbol{\nu}, p_h)_e + \sum_{K_L \bigcup K_R} (\widehat{p}_h, \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{q}_h)_e \\
=& -(\boldsymbol{q}_h^L \cdot \boldsymbol{\nu}^L, p_h^L)_e + (\boldsymbol{q}_h^R \cdot \boldsymbol{\nu}^L, p_h^R)_e + (\boldsymbol{q}_h^R \cdot \boldsymbol{\nu}^L, p_h^L)_e - (\boldsymbol{q}_h^R \cdot \boldsymbol{\nu}^L, p_h^R)_e \\
&+ (\boldsymbol{q}_h^L \cdot \boldsymbol{\nu}^L, p_h^L)_e - (\boldsymbol{q}_h^R \cdot \boldsymbol{\nu}^L, p_h^L)_e = 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

结合 (2.6)-(2.7)，利用 (1.4)、边界条件 (2.5) 以及关于 f 的条件 (1.3)，可得

$$\frac{d}{dt}E(u_h) = (\phi(\boldsymbol{x}) + H'(u_h), u_{ht}) = -(f(u_h)\boldsymbol{s}_h, \boldsymbol{s}_h) \leqslant 0.$$

□

注 2.1. 为简洁起见，本文余下部分仅考虑数值通量 (2.3)，不讨论数值通量 (2.4)，但所有结果同样适用于数值通量 (2.4)。

注 2.2. 与 [19, 33], 中的空间离散相比，我们选择了更简单的交替数值通量 (2.3) 和 (2.4)，这大大简化了局部间断伽辽金离散熵耗散性质的理论分析。

3 时间隐式局部间断伽辽金格式

采用显式时间离散方法对非线性抛物方程 (1.1) 进行数值离散时，会受到相当严格的时间步长约束 $\tau = O(h^2)$。本节将讨论隐式时间离散，并在第 4 节中结合正性约束进行探讨。

我们将时间区间 $[0, T]$ 划分为 N 个部分 $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$，其中 $\tau^n = t_n - t_{n-1} (n = 1, 2, \ldots, N)$。对于 $n = 0, 1, \ldots, N$，分别用 $u_n = u(\cdot, t_n)$ 和 u_h^n 表示 u 在时间 t_n 的精确值和近似值。

3.1 后向欧拉 LDG 离散

使用隐式欧拉方法对 (2.1) 进行时间离散，得到以下离散系统

$$\left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\tau^{n+1}}, \rho\right) + L_h^1(\boldsymbol{q}_h^{n+1}; \rho) = 0, \tag{3.1a}$$

$$(\boldsymbol{q}_h^{n+1}, \boldsymbol{\theta}) + L_h^2(u_h^{n+1}, \boldsymbol{s}_h^{n+1}; \boldsymbol{\theta}) = 0, \tag{3.1b}$$

$$(\boldsymbol{s}_h^{n+1}, \boldsymbol{\eta}) + L_h^3(p_h^{n+1}; \boldsymbol{\eta}) = 0, \tag{3.1c}$$

$$(p_h^{n+1}, \varphi) + L_h^4(u_h^{n+1}; \varphi) = 0. \tag{3.1d}$$

定义离散熵如下

$$E_h(u_h^n) = \int_\Omega (u_h^n \phi(\boldsymbol{x}) + H(u_h^n)) dx. \tag{3.2}$$

我们有如下离散熵耗散关系。

定理 3.1. 对于所有时间层 n，满足边界条件 (2.5) 以及 (1.3) 中关于 f、H 所述条件的局部间断伽辽金离散 (3.1) 的数值解 u_h^n、$u_h^{n+1} \in V_h^k$，满足以下熵耗散关系

$$E_h(u_h^{n+1}) \leqslant E_h(u_h^n), \tag{3.3}$$

这意味着局部间断伽辽金离散是无条件熵耗散的。

*Pro*通过分别在 (3.1a)-(3.1d) 中选取如下测试函数

$$\rho = p_h^{n+1}, \quad \boldsymbol{\theta} = -\boldsymbol{s}_h^{n+1}, \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{q}_h^{n+1}, \quad \varphi = -\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\tau^{n+1}},$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&\left(\phi(\boldsymbol{x}), \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\tau^{n+1}}\right) + \left(H'(u_h^{n+1}), \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\tau^{n+1}}\right) \\
=& - \left(f(u_h^{n+1})\boldsymbol{s}_h^{n+1}, \boldsymbol{s}_h^{n+1}\right) - \left(\boldsymbol{q}_h^{n+1}, \nabla p_h^{n+1}\right) + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\widehat{\boldsymbol{q}}_h^{n+1} \cdot \boldsymbol{\nu}, p_h^{n+1})_{\partial K} \\
&- (p_h^{n+1}, \nabla \cdot \boldsymbol{q}_h^{n+1}) + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\widehat{p}_h^{n+1}, \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{q}_h^{n+1})_{\partial K} \\
=& - (f(u_h^{n+1})\boldsymbol{s}_h^{n+1}, \boldsymbol{s}_h^{n+1}) - \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\boldsymbol{q}_h^{n+1} \cdot \boldsymbol{\nu}, p_h^{n+1})_{\partial K} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\widehat{\boldsymbol{q}}_h^{n+1} \cdot \boldsymbol{\nu}, p_h^{n+1})_{\partial K} \\
&+ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\widehat{p}_h^{n+1}, \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{q}_h^{n+1})_{\partial K}.
\end{aligned}$$

结合 (2.7)、数值通量 (2.3) 以及边界条件 (2.5)，我们进而得到

$$\left(\phi(\boldsymbol{x}), \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\tau^{n+1}}\right) + \left(H'(u_h^{n+1}), \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\tau^{n+1}}\right) = - \left(f(u_h^{n+1})\boldsymbol{s}_h^{n+1}, \boldsymbol{s}_h^{n+1}\right).$$

由于以下泰勒展开

$$H(u_h^n) = H(u_h^{n+1}) + H'(u_h^{n+1})(u_h^n - u_h^{n+1}) + \frac{1}{2}H''(\xi^{n+1})(u_h^{n+1} - u_h^n)^2, \quad \xi^{n+1} \in (u_h^n, u_h^{n+1}),$$

我们有，u sing 式 (1.3) 中关于 f、H 的条件以及式 (3.2) 中 E_h 的定义，

$$\begin{aligned} E_h(u_h^{n+1}) - E_h(u_h^n) &= \left(\phi(\boldsymbol{x}), u_h^{n+1} - u_h^n\right) + \left(H(u_h^{n+1}) - H(u_h^n), 1\right) \\ &= -\tau^{n+1}\left(f(u_h^{n+1})\boldsymbol{s}_h^{n+1}, \boldsymbol{s}_h^{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(H''(\xi^{n+1}), \left(u_h^{n+1} - u_h^n\right)^2\right) \\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

□

3.2 高阶 DIRK-LDG 离散

对于系统 (2.1) 的高阶时间隐式离散，我们采用对角隐式龙格-库塔（DIRK）方法 [16]。假设已知时间层 n 的数值解，通过 DIRK 方法求解各个 DIRK 阶段 $i, i = 1, 2, \cdots, s$ 的以下方程，即可得到时间层 $n+1$ 的解。

$$\left(\frac{u_h^{n+1,i} - u_h^n}{\tau^{n+1}}, \rho\right) + \sum_{j=1}^{i} a_{ij} L_h^1(\boldsymbol{q}_h^{n+1,j}; \rho) = 0, \tag{3.4a}$$

$$(\boldsymbol{q}_h^{n+1,i}, \boldsymbol{\theta}) + L_h^2(u_h^{n+1,i}, \boldsymbol{s}_h^{n+1,i}; \boldsymbol{\theta}) = 0, \tag{3.4b}$$

$$(\boldsymbol{s}_h^{n+1,i}, \boldsymbol{\eta}) + L_h^3(p_h^{n+1,i}; \boldsymbol{\eta}) = 0, \tag{3.4c}$$

$$(p_h^{n+1,i}, \varphi) + L_h^4(u_h^{n+1,i}; \varphi) = 0. \tag{3.4d}$$

那么，时间 t_{n+1} 处的解为

$$(u_h^{n+1}, \rho) = (u_h^n, \rho) - \tau \sum_{i=1}^{s} b_i L_h^1(\boldsymbol{q}_h^{n+1,i}; \rho). \tag{3.5}$$

在（3.4a）中的系数矩阵（a_{ij}）和（3.5）中的系数矩阵（b_i）定义于 Butcher 表中。对于阶数为 $k = 1$ 和 $k = 2$、3 的多项式，我们分别选用 [3] 和 [26], 中介绍的 DIRK方法，它们满足 $a_{si} = b_i$、$i = 1$、2、$\cdots$、s，这意味着 $u_h^{n+1} = u^{n+1}{}_{,h}{}^{s}$。这些 DIRK方法的阶数为 $k+1$。上述时间离散方法易于实现，因为 DIRK方法中的矩阵（a_{ij}）具有下三角结构，这意味着我们可以依次计算 DIRK 阶段，从 $i = 1$ 开始，直到 $i = s$。有关 DIRK 时间积分方法的详细信息，请参阅 [16]。

4 高阶精度保正性 DIRK-LDG 离散

通过利用 Karush-Kuhn-Tucker（KKT）方程 [14]，将带正性约束的 DIRK-LDG 方程转化为混合互补问题，从而施加对 LDG 解的正性约束。在接下来的章节中，我们将首先定义保正性的 KKT-DIRK-LDG 离散。随后，我们将讨论离散 KKT 系统的唯一可解性和无条件熵耗散。

4.1 KKT系统

对于 KKT方程 [14], ，我们定义集合

$$\mathbb{K} := \{\widetilde{U} \in \mathbb{R}^{dof} |\ h(\widetilde{U}) = 0,\ g(\widetilde{U}) \leqslant 0\}, \tag{4.1}$$

其中等式约束 $h: \mathbb{R}^{dof} \to \mathbb{R}^{l}$ 和不等式约束 $g: \mathbb{R}^{dof} \to \mathbb{R}^{m}$ 均为向量值连续可微函数。不等式约束用于确保正性。等式约束确保经过限制的 DIRK-LDG 离散满足质量守恒。质量守恒是未限制 DIRK-LDG 离散的一项性质，但必须确保应用保正限制器后这一性质仍然成立。

令 L 为每个 DIRK 阶段 $i = 1$（2, $\cdots$, s）对应的局部间断伽辽金离散 (3.4)，且不使用保正限制器。我们假设 L 是从 $\mathbb{K}$ 到 $\mathbb{R}^{dof}$ 的连续可微函数。相应的 KKT 系统 [14] 为

$$L(\widetilde{U}) + \nabla_{\widetilde{U}} h(\widetilde{U})^T \mu + \nabla_{\widetilde{U}} g(\widetilde{U})^T \lambda = 0, \tag{4.2a}$$

$$-h(\widetilde{U}) = 0, \tag{4.2b}$$

$$0 \geqslant g(\widetilde{U}) \perp \lambda \geqslant 0, \tag{4.2c}$$

其中，$\mu \in \mathbb{R}^{l}$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}^{m}$ 是用于确保 $h(U) = 0$ 和 $g(U) \leqslant 0$的拉格朗日乘子，$U \in R^{dof}$ 是 KKT-DIRK-LDG 离散中的 LDG 系数，$\nabla_{\widetilde{U}}$ 表示相对于 U的梯度。相容条件 (4.2c) 等价于

$$g_j(\widetilde{U}) \leqslant 0, \quad \lambda_j \geqslant 0, \quad \text{and} \quad g_j(\widetilde{U})\lambda_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m,$$

它可以表示为

$$\min(-g_j(\widetilde{U}), \lambda_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m.$$

于是，KKT系统可表述为

$$0 = F(z) = \begin{pmatrix} L(\widetilde{U}) + \nabla_{\widetilde{U}} h(\widetilde{U})^T \mu + \nabla_{\widetilde{U}} g(\widetilde{U})^T \lambda \\ -h(\widetilde{U}) \\ \min(-g(\widetilde{U}), \lambda) \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

这里，$z = (\widetilde{U}, \mu, \lambda) \in \mathbb{R}^{dof+l+m}$，且 F: $\mathbb{R}^{dof+l+m} \to \mathbb{R}^{dof+l+m}$表示结合了正性和质量守恒约束的 DIRK-LDG 离散。注意，KKT 系统 (4.3) 是非线性的，且 $F(z)$ 并非连续可微（这是标准牛顿方法所必需的），而是半光滑的。因此，我们将采用 [30]中介绍的主动集半光滑牛顿法求解 (4.3)。

4.2 保正局部间断伽辽金离散

本节将详细介绍高阶精度的保正 DIRK-LDG 离散 (3.4)，并结合 (4.2) 中所述的拉格朗日乘子法施加正性和质量守恒约束。

设 N_k 为一个单元中的基函数数目。设 N_e 为区域 Ω 的剖分 $\mathcal{T}_h$ 中的单元数目，其中 K。我们引入以下记号来表示逐单元保正的 LDG 解

$$U_h|_K := \sum_{j=1}^{N_k} \widetilde{U}_j^K \phi_j^K, \quad \boldsymbol{Q}_h|_K := \sum_{j=1}^{N_k} \widetilde{\boldsymbol{Q}}_j^K \phi_j^K$$

其中，$K \in \mathcal{T}_h$, ϕ_j^K是 $\mathcal{Q}_k(K)$中的张量积勒让德基函数，$\widetilde{U}_j^K \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\boldsymbol{Q}}_j^K \in \mathbb{R}^d$是 LDG 系数。在每个单元 $K \in \mathcal{T}_h$ 中取测试函数$\rho = \phi_j^K$, $j = 1$，将 $2, \cdots, N_k$代入算子 $L_h^1(\boldsymbol{Q}_h; \rho)$（如 (2.2a) 所述），即可定义

$$\mathbb{L}_h^1(\widetilde{\boldsymbol{Q}}) := L_h^1(\boldsymbol{Q}_h; \rho) \in \mathbb{R}^{N_k N_e}, \tag{4.4}$$

类似地，对于 $L_h^k, k = 2$，可按 (2.2b)–(2.2d) 中的说明定义 $\mathbb{L}_h^k$，3，4。

分别将标量变量和向量变量的块对角质量矩阵表示为$M \in \mathbb{R}^{N_k N_e \times N_k N_e}$ 和 $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{dN_k N_e \times dN_k N_e}$，则 DIRK 阶段的算子 L

根据式 (3.4a)，i ($i = 1, 2, \cdots, s$)可表示为

$$L(\widetilde{U}^{n+1,i}) := M(\widetilde{U}^{n+1,i} - \widetilde{U}^{n}) + \tau^{n+1} \sum_{j=1}^{i} a_{ij} \mathbb{L}_h^1(\widetilde{\boldsymbol{Q}}^{n+1,j}), \tag{4.5}$$

~采用 LDG 系数 $U^{n+1,i} \in \mathbb{R}^{N_k N_e}$。类似地，利用 (3.4b)、(3.4c) 和 (3.4d)，可得

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}^{n+1,i} = -\boldsymbol{M}^{-1} \mathbb{L}_h^2(\widetilde{U}^{n+1,i}, \widetilde{\boldsymbol{S}}^{n+1,i}), \tag{4.6a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{S}}^{n+1,i} = -\boldsymbol{M}^{-1} \mathbb{L}_h^3(\widetilde{P}^{n+1,i}), \tag{4.6b}$$

$$\widetilde{P}^{n+1,i} = -M^{-1} \mathbb{L}_h^4(\widetilde{U}^{n+1,i}), \tag{4.6c}$$

采用 LDG 系数 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}^{n+1\,i}_{,} \in \mathbb{R}^{dN_k N_e}$, $\widetilde{\boldsymbol{S}}^{n+1\,i}_{,} \in \mathbb{R}^{dN_k N_e}$, $\widetilde{P}^{n+1,i}_{,} \in \mathbb{R}^{N_k N_e}$。

DIRK-LDG 离散的约束可通过 KKT 系统 (4.3) 中的等式约束和不等式约束，直接施加到每个 DIRK 阶段的 DG 系数上。对于每个 DIRK 阶段 i，其中 $i = 1$、2、$\cdots$、s，通过求解以下 KKT 系统可得到 LDG
~
~系数 $U^{n+1\,i}_{,}$，其中 $U^{n+1,i}_{,}$，

$$\begin{pmatrix} L(\widetilde{U}^{n+1,i}) + \nabla_{\widetilde{U}} h(\widetilde{U}^{n+1,i})^T \mu + \nabla_{\widetilde{U}} g(\widetilde{U}^{n+1,i})^T \lambda \\ -h(\widetilde{U}^{n+1,i}) \\ \min(-g(\widetilde{U}^{n+1,i}), \lambda) \end{pmatrix} = 0, \tag{4.7}$$

~其中，保正不等式约束 $g(U^{n+1,i})$ 和质量守恒等式约束 ~ $h(U^{n+1,i})$ 定义如下。

1. 保正不等式约束

在每个单元 $K \in \mathcal{T}_h$ 中，我们将式 (4.7) 中定义的函数 g 表示为

$$g_p^K(\widetilde{U}^{n+1,i}) = u_{\min} - \sum_{j=1}^{N_k} \widetilde{U}_j^{K,(n+1,i)} \phi_j^K(\boldsymbol{x}_p), \quad p = 1, \cdots, N_p, \tag{4.8}$$

其中 N_p 为 Gauss-Lobatto 求积点的数量， $\boldsymbol{x}_p$ 为施加不等式约束 $U_h(\boldsymbol{x}_p) \geqslant u_{\min}$ 的 Gauss-Lobatto 求积点。使用 Gauss-Lobatto 求积规则可确保在单元边缘计算数值通量时也施加正性约束，因为 Gauss-Lobatto 求积规则除了在单元本身上取点外，也会在单元边缘取点。注意，Gauss-Lobatto 求积点 $\boldsymbol{x}_p$ 是局部间断伽辽金离散中唯一使用的点，因此只需在这些点上施加正性约束 $u_{\min}$。

2. 质量守恒等式约束

为确保施加正性约束时局部间断伽辽金离散的质量守恒，我们施加以下等式约束。该约束通过在（3.4a）中令 $\rho = 1$，并使用数值通量（2.3）或（2.4）得到。

$$h(\widetilde{U}^{n+1,i}) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K U_h^n dK + \tau^{n+1}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} \sum_{\substack{K\in\mathcal{T}_h \\ \partial K\cap\partial\Omega\neq\emptyset}} (\widehat{\boldsymbol{Q}}_h^{n+1,j}\cdot\boldsymbol{\nu}, 1)_{\partial K}$$
$$- \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{j=1}^{N_k} \widetilde{U}_j^{K,(n+1,i)} \int_K \phi_j^K(\boldsymbol{x}) dK, \tag{4.9}$$

其中， U_h^n 为时间 t_n的 KKT-DIRK-LDG解。

对于每个 DIRK 阶段 i，现定义高阶精度保正LDG离散的 KKT系统（4.7）。求解 KKT 方程（ 4.7 ）得到 $i = 1$、 $\cdots$、 s 后，时间 t^{n+1} 的数值解可直接由最后一个 DIRK 阶段得到： $U_h^{n+1} = U^{n+1,\ s}_{,\ h}$，因为我们采用满足 $a_{si} = b_i$的 DIRK方法。

注 4.1. 为确保离散初始解 U_h^0的正性，我们采用 L^2-投影，并结合正性约束（4.8）。该约束通过将 $U^{n+1,\ i}$替换为 U^0得到$\widetilde{\qquad\qquad}$。该等式约束确保正性限制初始解的质量守恒

$$h(\widetilde{U}^0) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K u_0(\boldsymbol{x}) dK - \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{j=1}^{N_k} \widetilde{U}_j^{K,0} \int_K \phi_j^K(\boldsymbol{x}) dK.$$

对 L^2-投影的约束采用与 (4.3) 类似的 KKT方程施加。为避免病态情形，我们假设限制后的初始解满足

$$\frac{1}{|\Omega|}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K u_0(\boldsymbol{x}) dK \geqslant u_{\min}.$$

注 4.2。我们强调，必须选择严格为正的 $u_{\min}$，以确保误差不会因计算机算术的有限精度而破坏数值解的正性。

4.3 保正LDG离散的唯一可解性与稳定性

在第 4.2 节中，我们介绍了方程 (1.1) 的保正LDG离散。本节将讨论由

后向欧拉 KKT-LDG 离散得到的代数方程的唯一可解性。在理论分析中，我们还将讨论保正性后向欧拉 LDG 离散的熵耗散，并采用周期边界条件。

由 (4.5)-(4.9)，保正性的后向欧拉 LDG 离散格式得到如下 KKT 系统，

$$L(\widetilde{U}^{n+1}) + \nabla_{\widetilde{U}} h(\widetilde{U}^{n+1})^T \mu^{n+1} + \nabla_{\widetilde{U}} g(\widetilde{U}^{n+1})^T \lambda^{n+1} = 0, \tag{4.10a}$$

$$-h(\widetilde{U}^{n+1}) = 0, \tag{4.10b}$$

$$\min(-g(\widetilde{U}^{n+1}), \lambda^{n+1}) = 0. \tag{4.10c}$$

其中 $L\colon \mathbb{R}^{N_k N_e} \to \mathbb{R}^{N_k N_e}$ 和

$$L(\widetilde{U}^{n+1}) := M(\widetilde{U}^{n+1} - \widetilde{U}^{n}) + \tau^{n+1} B\widetilde{\boldsymbol{Q}}^{n+1}, \tag{4.11}$$

$$\boldsymbol{M}\widetilde{\boldsymbol{Q}}^{n+1} = C_d(\widetilde{U}^{n+1})\widetilde{\boldsymbol{S}}^{n+1}, \tag{4.12}$$

$$\boldsymbol{M}\widetilde{\boldsymbol{S}}^{n+1} = A\widetilde{P}^{n+1}, \tag{4.13}$$

$$M\widetilde{P}^{n+1} = D(\widetilde{U}^{n+1}). \tag{4.14}$$

由 (4.4)-(4.6)，可得

$$B\widetilde{\boldsymbol{Q}}^{n+1} = \mathbb{L}_h^1(\widetilde{\boldsymbol{Q}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^{N_k N_e}, \tag{4.15}$$

$$C_d(\widetilde{U}^{n+1})\widetilde{\boldsymbol{S}}^{n+1} = -\mathbb{L}_h^2(\widetilde{U}^{n+1}, \widetilde{\boldsymbol{S}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^{dN_k N_e}, \tag{4.16}$$

$$A\widetilde{P}^{n+1} = -\mathbb{L}_h^3(\widetilde{P}^{n+1}) \in \mathbb{R}^{dN_k N_e}, \tag{4.17}$$

$$D(\widetilde{U}^{n+1}) = -\mathbb{L}_h^4(\widetilde{U}^{n+1}) \in \mathbb{R}^{N_k N_e}, \tag{4.18}$$

其中

$$C_d(\widetilde{U}^{n+1}) = \begin{pmatrix} C(\widetilde{U}^{n+1}) & & \\ & \ddots & \\ & & C(\widetilde{U}^{n+1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{dN_k N_e \times dN_k N_e},\ C(\widetilde{U}^{n+1}) \in \mathbb{R}^{N_k N_e}. \tag{4.19}$$

约束 $h\colon \mathbb{R}^{N_k N_e} \to \mathbb{R}$、 $g\colon \mathbb{R}^{N_k N_e} \to \mathbb{R}^{N_p N_e}$ 定义为

$$h(\widetilde{U}^{n+1}) := \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K U_h^0 dK - \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{j=1}^{N_k} \widetilde{U}_j^{K,(n+1)} \int_K \phi_j^K(\boldsymbol{x}) dK, \tag{4.20}$$

$$g(\widetilde{U}^{n+1}) := (g_1^{K_1}(\widetilde{U}^{n+1}), \cdots, g_{N_p}^{K_1}(\widetilde{U}^{n+1}), \cdots, g_1^{K_{N_e}}(\widetilde{U}^{n+1}), \cdots, g_{N_p}^{K_{N_e}}(\widetilde{U}^{n+1})), \tag{4.21}$$

其中约束 $g_p^{K_j}$, $1 \leqslant p \leqslant N_p$, $1 \leqslant j \leqslant N_e$ 的定义见（4.8）。

4.3.1 A用于证明 KKT系统可解性的辅助结果

本节将介绍一些辅助结果，这些结果将在第 4.3.2 节中用于证明 KKT系统（4.10）的唯一可解性。

定义 4.3. [14, 第 1.1 节、第 3.2] 设 $\mathbb{K}$ 由式 (4.1) 给出，并给定映射 L: $\mathbb{K} \to \mathbb{R}^{dof}$。变分不等式 (VI($\mathbb{K}$, L)) 是求满足下列条件的 $\widetilde{U} \in \mathbb{K}$

$$(y - \widetilde{U})^T L(\widetilde{U}) \geqslant 0, \quad y \in \mathbb{K}. \tag{4.22}$$

变分不等式 VI($\mathbb{K}$, L) (4.22) 的解记为 SOL($\mathbb{K}$, L)。

利用节点基函数以及式 (4.21) 和 (4.8) 中 g 的定义，式 (4.1) 中的不等式约束集可写为

$$\mathbb{K}_b := \{\widetilde{U} \in \mathbb{R}^{dof} | \ \widetilde{U}_i^{\min} \leqslant \widetilde{U}_i \leqslant \widetilde{U}_i^{\max}, i \in \{1, \cdots, dof\}\}, \tag{4.23}$$

并将 $\mathbb{K}_b$ 写为

$$\mathbb{K}_b = \prod_{\vartheta=1}^{N} \mathbb{K}_{n_\vartheta}, \tag{4.24}$$

其中，$\mathbb{K}_{n_\vartheta}$ 是 $\mathbb{R}^{n_\vartheta}$ 的子集，且满足 $\sum_{\vartheta=1}^{N} n_\vartheta = dof$。因此，对于向量 $\widetilde{U} \in \mathbb{K}_b$，我们记作 $\widetilde{U} = (\widetilde{U}_\vartheta)$，其中每个 $\widetilde{U}_\vartheta$ 都属于 $\mathbb{K}^{n_\vartheta}$。

定义 4.4。 [14, 第 3.5 节。2] 设 $\mathbb{K}_b$ 由 (4.23) 给出，映射 $L: \mathbb{K}_b \to \mathbb{R}^{dof}$ 称为

a) 若对 $\mathbb{K}_b$ 中的任意一对不同向量 U 和 U'，均满足 $\mathbb{K}_b$，则称其为 P 函数

$$\max_{1 \leqslant \vartheta \leqslant N} (\widetilde{U}_\vartheta - \widetilde{U}'_\vartheta)^T (L_\vartheta(\widetilde{U}) - L_\vartheta(\widetilde{U}')) > 0,$$

b) 若存在常数 $\varpi > 0$，使得对 $\mathbb{K}_b$ 中的任意一对不同向量 U 和 U'，均满足 $\mathbb{K}_b$，则称其为一致P函数，

$$\max_{1 \leqslant \vartheta \leqslant N} (\widetilde{U}_\vartheta - \widetilde{U}'_\vartheta)^T (L_\vartheta(\widetilde{U}) - L_\vartheta(\widetilde{U}')) \geqslant \varpi \|\widetilde{U} - \widetilde{U}'\|^2.$$

引理 4.1。 *[14,* 命题 3.5。*10]*设 $\mathbb{K}_b$ 由 (4.23) 给出。

a) 若 L 是 $\mathbb{K}_b$上的 P 函数，则 VI($\mathbb{K}_b$, L) 至多有一个解。

b) 若每个 $\mathbb{K}_{n_\vartheta}$ 都是闭凸的，且 L 是定义在 $\mathbb{K}_b$上的连续一致 P 函数，则 VI($\mathbb{K}_b$, L) 有唯一解。

~引理 4.2。 *[14,* 命题 1.3。*4]* 设 $U \in \mathrm{SOL}(\mathbb{K}, L)$ 是 (4.22) 的解，其中 $\mathbb{K}$ 由~(4.1) 给出。若 Abadie 约束资格条件在 U处成立，则存在满足 KKT 系统 (4.10) 的向量 $\mu \in \mathbb{R}^l$和 $\lambda \in \mathbb{R}^m$ 。

反之，若每个函数 $h_j\,(1 \leqslant j \leqslant l)$ 都是仿射函数，且每个函数 $g_i\,(1 \leqslant i \leqslant m)$ ~ ~都是凸函数，并且 $(U, \mu\,\lambda)$ 满足 (4.10)，则 U 是由 (4.22) 给出的 VI($\mathbb{K}, L$) 的解，其中 $\mathbb{K}$ 由 (4.1) 给出。

4.3.2 具有正性和质量守恒约束的局部间断伽辽金离散的存在性与唯一性

本节将利用第 4.3.1 节讨论的唯一可解性条件，证明 KKT 系统 (4.10)- (4.21) 的存在性与唯一性。

引理 4.3. 对于周期边界条件，(4.15) 中的矩阵 B 和 (4.17) 中的矩阵 A 满足 $B^T = A$。

证明. 为了证明 (4.15) 中的 B 和 (4.17) 中的 A 的对称性，我们定义双线性函数 a: $(V_h^k \times \boldsymbol{W}_h^k) \times (V_h^k \times \boldsymbol{W}_h^k) \to \mathbb{R}$ 为

$$\begin{aligned} a(P_h^{n+1}, \boldsymbol{Q}_h^{n+1}; \rho, \boldsymbol{\theta}) =& (\boldsymbol{Q}_h^{n+1}, \nabla\rho) - \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\widehat{\boldsymbol{Q}}_h^{n+1} \cdot \boldsymbol{\nu}, \rho)_{\partial K} \\ & - (P_h^{n+1}, \nabla\cdot\boldsymbol{\theta}) + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\widehat{P}_h^{n+1}, \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\theta})_{\partial K}. \end{aligned}$$

根据利用 (2.2a) 得到的 (4.15) 中 B 的定义，以及利用 (2.2c) 得到的 (4.17) 中 A 的定义，我们将上述双线性函数 a 改写如下:

$$a(P_h^{n+1}, \boldsymbol{Q}_h^{n+1}; \rho, \boldsymbol{\theta}) = (\varrho, \Theta) \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} (\widetilde{P}^{n+1}, \widetilde{\boldsymbol{Q}}^{n+1})^T,$$

其中，ϱ、Θ 分别是 ρ、$\boldsymbol{\theta}$ 的 LDG 系数，而 $\widetilde{P}^{n+1}$、$\widetilde{\boldsymbol{Q}}^{n+1}$ 分别是 P_h^{n+1}、$\boldsymbol{Q}_h^{n+1}$ 的 LDG 系数。

交换 a的自变量，我们得到

$$\begin{aligned} a(\rho, \boldsymbol{\theta}; P_h^{n+1}, \boldsymbol{Q}_h^{n+1}) =& (\boldsymbol{\theta}, \nabla P_h^{n+1}) - \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\widehat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{\nu}, P_h^{n+1})_{\partial K} \\ & - (\rho, \nabla\cdot\boldsymbol{Q}_h^{n+1}) + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\widehat{\rho}, \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{Q}_h^{n+1})_{\partial K} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&-(P_h^{n+1},\nabla\cdot\boldsymbol{\theta})+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\nu},P_h^{n+1})_{\partial K}-\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{\nu},P_h^{n+1})_{\partial K}\\
&+(\boldsymbol{Q}_h^{n+1},\nabla\rho)-\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\rho,\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{Q}_h^{n+1})_{\partial K}+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\widehat{\rho},\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{Q}_h^{n+1})_{\partial K},
\end{aligned}
$$

^利用等式 (2.7)、(2.3) 或 (2.4) 中 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\widehat{\rho}$ 的交替数值通量，以及周期边界条件，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\nu},P_h^{n+1})_{\partial K}-\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{\nu},P_h^{n+1})_{\partial K}=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\widehat{P}_h^{n+1},\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\theta})_{\partial K},\\
-&\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\rho,\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{Q}_h^{n+1})_{\partial K}+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\widehat{\rho},\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{Q}_h^{n+1})_{\partial K}=-\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\widehat{\boldsymbol{Q}}_h^{n+1}\cdot\boldsymbol{\nu},\rho)_{\partial K}.
\end{aligned}
$$

因此，

$$
a(P_h^{n+1},\boldsymbol{Q}_h^{n+1};\rho,\boldsymbol{\theta})=a(\rho,\boldsymbol{\theta};P_h^{n+1},\boldsymbol{Q}_h^{n+1}),
$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
(\varrho,\Theta)\begin{pmatrix}0&B\\A&0\end{pmatrix}(\widetilde{P}^{n+1},\widetilde{\boldsymbol{Q}}^{n+1})^T=&(\widetilde{P}^{n+1},\widetilde{\boldsymbol{Q}}^{n+1})\begin{pmatrix}0&B\\A&0\end{pmatrix}(\varrho,\Theta)^T\\
=&(\varrho,\Theta)\begin{pmatrix}0&A^T\\B^T&0\end{pmatrix}(\widetilde{P}^{n+1},\widetilde{\boldsymbol{Q}}^{n+1})^T.
\end{aligned}\tag{4.25}
$$

由于 $(P_h^{n+1},\boldsymbol{Q}_h^{n+1})\in V_h^k\times\boldsymbol{W}_h^k$和 $(\rho,\boldsymbol{\theta})\in V_h^k\times\boldsymbol{W}_h^k$是任意函数，关系式 (4.25) 意味着 $A=B^T$。 □

~利用 (4.12)-(4.14) 和引理 4.3，(4.11) 中的算子 $L(U^{n+1})$ 可写为

$$
L(\widetilde{U}^{n+1})=M(\widetilde{U}^{n+1}-\widetilde{U}^n)+\tau^{n+1}B\boldsymbol{M}^{-1}C_d(\widetilde{U}^{n+1})\boldsymbol{M}^{-1}B^TM^{-1}D(\widetilde{U}^{n+1}).\tag{4.26}
$$

~引理 4.4。给定 U^n，(4.26) 中的算子 L 在 $\mathbb{K}_b$ 上是一致P函数。

证明。对 L 使用关系式 (4.26)，对于任意的 $\widetilde{U}_I^{n+1}$、$\widetilde{U}_{II}^{n+1}\in\mathbb{K}_b$，有

$$
\begin{aligned}
L(\widetilde{U}_I^{n+1})-L(\widetilde{U}_{II}^{n+1})=&M(\widetilde{U}_I^{n+1}-\widetilde{U}_{II}^{n+1})+\tau^{n+1}B\boldsymbol{M}^{-1}C_d(\widetilde{U}_I^{n+1})\boldsymbol{M}^{-1}B^TM^{-1}D(\widetilde{U}_I^{n+1})\\
&-\tau^{n+1}B\boldsymbol{M}^{-1}C_d(\widetilde{U}_{II}^{n+1})\boldsymbol{M}^{-1}B^TM^{-1}D(\widetilde{U}_{II}^{n+1}).
\end{aligned}\tag{4.27}
$$

在 (4.27) 中加上并减去 $\tau^{n+1}B\boldsymbol{M}^{-1}C_d(\widetilde{U}_I^{n+1})\boldsymbol{M}^{-1}B^TM^{-1}D(\widetilde{U}_{II}^{n+1})$ 后，我们得到

$$\begin{aligned}
&L(\widetilde{U}_I^{n+1}) - L(\widetilde{U}_{II}^{n+1}) \\
=&M(\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_{II}^{n+1}) + \tau^{n+1}B\boldsymbol{M}^{-1}C_d(\widetilde{U}_I^{n+1})\boldsymbol{M}^{-1}B^TM^{-1}(D(\widetilde{U}_I^{n+1}) - D(\widetilde{U}_{II}^{n+1})) \\
&+\tau^{n+1}B\boldsymbol{M}^{-1}(C_d(\widetilde{U}_I^{n+1}) - C_d(\widetilde{U}_{II}^{n+1}))\boldsymbol{M}^{-1}B^TM^{-1}D(\widetilde{U}_{II}^{n+1}).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

根据 (2.2d) 中 D 的定义 (4.18)，我们得到

$$\begin{aligned}
&(D(\widetilde{U}_I^{n+1}) - D(\widetilde{U}_{II}^{n+1}))_i = \int_\Omega \left(H'\left(\sum_{j=1}^{N_kN_e} \widetilde{U}_{I,j}^{n+1}\phi_j\right) - H'\left(\sum_{j=1}^{N_kN_e} \widetilde{U}_{II,j}^{n+1}\phi_j\right)\right)\phi_i d\Omega \\
=&\sum_{j=1}^{N_kN_e}(\widetilde{U}_{I,j}^{n+1} - \widetilde{U}_{II,j}^{n+1})\int_\Omega H''(\xi_1^{n+1})\phi_j\phi_i d\Omega,\ i\in\{1,\cdots,N_kN_e\}, \xi_1^{n+1}\in(U_{h,I}^{n+1}, U_{h,II}^{n+1}),
\end{aligned}$$

并记为

$$D(\widetilde{U}_I^{n+1}) - D(\widetilde{U}_{II}^{n+1}) := D_{\widetilde{U}}(\xi_1^{n+1})(\widetilde{U}_I^{n+1}) - \widetilde{U}_{II}^{n+1}). \tag{4.29}$$

类似地，根据 (2.2b) 中 C_d 的定义 (4.16)、(4.19)，我们得到

$$C_d(\widetilde{U}_I^{n+1}) - C_d(\widetilde{U}_{II}^{n+1}) = \begin{pmatrix} C(\widetilde{U}_I^{n+1}) - C(\widetilde{U}_{II}^{n+1}) & & \\ & \ddots & \\ & & C(\widetilde{U}_I^{n+1}) - C(\widetilde{U}_{II}^{n+1}) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
&(C(\widetilde{U}_I^{n+1}) - C(\widetilde{U}_{II}^{n+1}))_{ij} = \int_\Omega \left(f\left(\sum_{k=1}^{N_kN_e} \widetilde{U}_{I,k}^{n+1}\phi_k\right) - f\left(\sum_{k=1}^{N_kN_e} \widetilde{U}_{II,k}^{n+1}\phi_k\right)\right)\phi_j\phi_i d\Omega \\
=&\sum_{k=1}^{N_kN_e}(\widetilde{U}_{I,k}^{n+1} - \widetilde{U}_{II,k}^{n+1})\int_\Omega f'(\xi_2^{n+1})\phi_k\phi_j\phi_i d\Omega,\ i,j,k\in\{1,\cdots,N_kN_e\}, \xi_2^{n+1}\in(U_{h,I}^{n+1}, U_{h,II}^{n+1}),
\end{aligned}$$

并记为

$$C(\widetilde{U}_I^{n+1}) - C(\widetilde{U}_{II}^{n+1}) := \sum_{k=1}^{N_kN_e}[C_{d\widetilde{U}}(\xi_2^{n+1})]_k(\widetilde{U}_{I,k}^{n+1}) - \widetilde{U}_{II,k}^{n+1}). \tag{4.30}$$

~假设对于 (4.23) 中任意的 $U\in\mathbb{K}_b$，有

$$|C(\widetilde{U})_{ij}| \leqslant c, \quad |D(\widetilde{U})_i| \leqslant c,$$

$$|[C_{\widetilde{U}}(\widetilde{U})_{ij}]_k| \leqslant c, \quad |D_{\widetilde{U}}(\widetilde{U})_{ij}| \leqslant c,\ i,j,k \in \{1,\cdots,N_kN_e\}, \tag{4.31}$$

~其中 c 为正常数，且与 U无关。本节余下部分中， c 为正常数，但不一定与前者相同。

利用 (4.29)–(4.30) 和假设 (4.31)，我们得到以下两个估计

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_{II}^{n+1})^T B\boldsymbol{M}^{-1}C_d(\widetilde{U}_I^{n+1})\boldsymbol{M}^{-1}B^T M^{-1}(D(\widetilde{U}_I^{n+1}) - D(\widetilde{U}_{II}^{n+1})) \\
\leqslant &\|B\|\|\boldsymbol{M}^{-1}\|\|C_d(\widetilde{U}_I^{n+1})\|\|\boldsymbol{M}^{-1}\|\|B^T\|\|M^{-1}\|\|D_{\widetilde{U}}(\xi_1^{n+1})\|\|\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_{II}^{n+1}\|^2 \\
\leqslant &c\|\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_{II}^{n+1}\|^2,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_{II}^{n+1})^T B\boldsymbol{M}^{-1}(C_d(\widetilde{U}_I^{n+1}) - C_d(\widetilde{U}_{II}^{n+1}))\boldsymbol{M}^{-1}B^T M^{-1}D(\widetilde{U}_{II}^{n+1}) \\
\leqslant &\|B\|\|\boldsymbol{M}^{-1}\| \sum_{k=1}^{N_kN_e} \|[C_{d\widetilde{U}}(\xi_2^{n+1})]_k\|\|\boldsymbol{M}^{-1}\|\|B^T\|\|M^{-1}\|\|D(\widetilde{U}_{II}^{n+1})\|\|\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_{II}^{n+1}\|^2 \\
\leqslant &c\|\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_{II}^{n+1}\|^2.
\end{aligned}$$

然后将 (4.28) 乘以 $(\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_{II}^{n+1})^T$，得到

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_{II}^{n+1})^T(L(\widetilde{U}_I^{n+1}) - L(\widetilde{U}_{II}^{n+1})) = (\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_{II}^{n+1})^T M(\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_{II}^{n+1}) \\
&+ \tau^{n+1}(\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_{II}^{n+1})^T B\boldsymbol{M}^{-1}C_d(\widetilde{U}_I^{n+1})\boldsymbol{M}^{-1}B^T M^{-1}(D(\widetilde{U}_I^{n+1}) - D(\widetilde{U}_{II}^{n+1})) \\
&+ \tau^{n+1}(\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_{II}^{n+1})^T B\boldsymbol{M}^{-1}(C_d(\widetilde{U}_I^{n+1}) - C_d(\widetilde{U}_{II}^{n+1}))\boldsymbol{M}^{-1}B^T M^{-1}D(\widetilde{U}_{II}^{n+1}) \\
\geqslant &\sigma\|\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_{II}^{n+1}\|^2 - 2c\tau^{n+1}\|\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_{II}^{n+1}\|^2,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

其中 $\sigma > 0$ 是对称正质量矩阵 M 的最小特征值 .

选取 $0 < \tau^{n+1} \leqslant \dfrac{\sigma}{4c}$，我们得到

$$(\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_I^{n+1})^T(L(\widetilde{U}_I^{n+1}) - L(\widetilde{U}_{II}^{n+1})) \geqslant \frac{\sigma}{2}\|\widetilde{U}_I^{n+1} - \widetilde{U}_{II}^{n+1}\|^2,\ \forall \widetilde{U}_I^{n+1}, \widetilde{U}_{II}^{n+1} \in \mathbb{K}_b, \tag{4.33}$$

~这意味着，当 τ^{n+1} 足够小时， $L(U^{n+1})$ 是关于 $\mathbb{K}_b$ 的一致函数， □

由引理 4.1、引理 4.2 和引理 4.4，我们得到本节的主要结果。

~定理 4.5. 给定 DG系数 U^n 以及带有等式约束 $h \equiv 0$的保正性后向欧拉 KKT-LDG 离散 (4.10)-(4.21)。若假设 (4.31) 成立，则 KKT 系统 (4.10)-(4.21) 只有一个解。

~推论 4.6. 给定 DG系数 U^n。若假设 (4.31) 成立，则对于具有周期边界条件的退化抛物方程 (1.1)，满足带有等式约束 $h \equiv 0$的高时间精度、保正性 KKT-DIRK-LDG 离散 (4.7) 的解只有一个。

证明。由于第 3.2 节中引入的 DIRK 系数矩阵 (a_{ij}) 是下三角矩阵，DIRK-LDG 离散的结构与后向欧拉局部间断Galerkin离散所得形式相似。因此，其分析与定理 4.5 完全类似。

□

4.3.3 KKT-LDG 离散的稳定性

定理 4.7. 给定保正后向欧拉 KKT-LDG 离散 (4.10)-(4.21) 的数值解 $U_h^n \in V_h^k$。若假设 (4.31) 成立，则 (3.2) 中所述的离散熵 E_h 对于 $n = 0, 1, \cdots$ 满足

$$E_h(U_h^{n+1}) \leqslant E_h(U_h^n), \tag{4.34}$$

这意味着保正后向欧拉 KKT-LDG 离散是无条件熵耗散的。

~证明。由引理 4.2 可得，保正解 U_h^{n+1} 的 LDG 系数 U^{n+1} 满足

$$(y - \widetilde{U}^{n+1})^T L(\widetilde{U}^{n+1}) \geqslant 0, \quad \forall y \in \mathbb{K}, \tag{4.35}$$

其中 L 由 (4.26) 给出， $\mathbb{K}$ 由 (4.1) 给出。

由假设 (4.31)，可知存在正常数 $c \geqslant c_0 > 0$，使得

$$\widetilde{U}^{n+1} - cM^{-1}D(\widetilde{U}^{n+1}) \in \mathbb{K}. \tag{4.36}$$

~ ~接下来，我们在 (4.35) 中选择 $y = U^{n+1} - cM^{-1}D(U^{n+1})$，这意味着

$$-c(M^{-1}D(\widetilde{U}^{n+1}))^T L(\widetilde{U}^{n+1}) \geqslant 0. \tag{4.37}$$

利用 (4.26) 以及 $c > 0$ 这一事实，我们得出 (4.37) 蕴含如下不等式

$$D(\widetilde{U}^{n+1})^T(\widetilde{U}^{n+1} - \widetilde{U}^n)$$

$$+\tau^{n+1}D(\widetilde{U}^{n+1})^T M^{-1}B\boldsymbol{M}^{-1}C_d(\widetilde{U}^{n+1})\boldsymbol{M}^{-1}B^T M^{-1}D(\widetilde{U}^{n+1}) \leqslant 0. \tag{4.38}$$

根据利用 (2.2b) 和 (1.3) 中关于 f 的条件对 (4.16)、(4.19) 中 C_d 的定义，并结合$\widetilde{\ }$，我们得出 $C_d(U^{n+1})$ 是对称正定的。因此，利用 $\tau^{n+1}>0$，可得

$$\tau^{n+1}D(\widetilde{U}^{n+1})^T M^{-1}B\boldsymbol{M}^{-1}C_d(\widetilde{U}^{n+1})\boldsymbol{M}^{-1}B^T M^{-1}D(\widetilde{U}^{n+1}) \geqslant 0,$$

结合 (4.38)，可得

$$D(\widetilde{U}^{n+1})^T(\widetilde{U}^{n+1}-\widetilde{U}^{n}) \leqslant 0. \tag{4.39}$$

根据 D 在 (4.18) 中的定义，利用 (2.2d) 和 (4.39)，可得如下界

$$\left(\phi(\boldsymbol{x}), U_h^{n+1}-U_h^n\right)+\left(H'(U_h^{n+1}), U_h^{n+1}-U_h^n\right) \leqslant 0. \tag{4.40}$$

利用以下泰勒展开

$$\begin{aligned} H(U_h^n) =& H(U_h^{n+1})+H'(U_h^{n+1})(U_h^n-U_h^{n+1}) \\ &+\frac{1}{2}H''(\xi_3^{n+1})(U_h^{n+1}-U_h^n)^2,\ \xi_3^{n+1}\in(U_h^n,U_h^{n+1}), \end{aligned}$$

可得 (4.40) 给出

$$\left(\phi(\boldsymbol{x}), U_h^{n+1}-U_h^n\right)+\left(H(U_h^{n+1})-H(U_h^n),1\right)+\frac{1}{2}\left(H''(\xi_3^{n+1}),\left(U_h^{n+1}-U_h^n\right)^2\right) \leqslant 0,$$

根据 E_h 在 (3.2) 中的定义，这意味着

$$E_h(U_h^{n+1})-E_h(U_h^n)=\left(\phi(\boldsymbol{x}), U_h^{n+1}-U_h^n\right)+\left(H(U_h^{n+1})-H(U_h^n),1\right) \leqslant 0,$$

因为 (1.3) 给出 $H''(\xi_3^{n+1}) \geqslant 0$。这就证明了 (4.34)。 □

5 数值测试

本节将讨论若干数值实验，以展示 KKT-DIRK-LDG 保正算法求解退化抛物方程 (1.1) 的性能。在计算中，我们将考虑多孔介质方程、带双阱势的非线性扩散方程，以及描述费米子气体和玻色子气体的非线性福克-普朗克方程。首先，我们将在第

5.1节展示带有和不带保正限制器的 DIRK-LDG 离散的精度阶，以考察该限制器是否会对离散精度产生负面影响。接下来，我们将在第5.3—5.5节展示一些必须使用保正限制器的测试算例。若不施加正性约束，则无法获得数值解，除非采用极小的时间步长。

在计算中，我们取 $\tau = \alpha \cdot h$。如果牛顿法在强非线性阶段需要大量迭代，通常更有效的做法是将时间步长减小至 $\frac{1}{2}\tau$，然后重新开始牛顿迭代。牛顿法收敛良好时，每个时间步将 τ 增大至 1.2τ，直至达到预先设定的最大时间步长。

为避免舍入误差效应，数值模拟中采用正性界限 $u_{\min} = 10^{-10}$ ，第5.1节除外，其中 $u_{\min} = 10^{-14}$。除非另有说明，一维问题的数值结果是在包含 100 个单元的网格上，使用二阶勒让德多项式得到的。对于二维问题，使用由30×30个正方形单元组成的网格，以及二阶张量积勒让德多项式基函数。

5.1 精度测试

进行精度测试时，我们使用包含 M 个单元的均匀网格，并采用正性界限 $u_{\min} = 10^{-14}$。

例 5.1. 我们在区域 $\Omega = [-1, 1]$ 上考虑方程 (1.1)，采用基于精确解的狄利克雷边界条件，并选取以下参数

$$f(u) = u, \quad H'(u) = u^2, \quad \phi(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

于是，方程 (1.1) 在适当选取源项后具有如下非负解

$$u(x, t) = \exp(-t)(1 - x^4)^5, \quad x \in \Omega.$$

我们在时间步长的定义中取 α 为 $\alpha = 1$。表5.1—5.2显示，对于多项式阶数从 1 到 3 的基函数，采用和不采用保正限制器的 DIRK-LDG 离散均以 $O(h^{k+1})$ 的速率收敛。表5.1—5.2所列的误差和精度阶表明，保正限制器是必要的，且不会对精度产生负面影响。

表 5.1： 例 5.1 在时间 $T=1$ 、未使用保正限制器时， $L^\infty-$ 和 L^1- 范数下的误差。

$\mathcal{P}_k$	M	$\|u_n-u_h^n\|_{L^\infty(\Omega)}$	阶	$\|u_n-u_h^n\|_{L^1(\Omega)}$	阶	最小值 u_h^n
1	40	7.33E-003	–	1.03E-003	–	-8.87e-005
	80	1.24e-003	2.56	2.27e-004	2.18	-1.08e-005
	160	2.63e-004	2.24	5.44e-005	2.06	-4.41e-007
	320	6.05e-005	2.12	1.35e-005	2.01	-1.57e-008
2	40	1.70E-003	–	8.73E-005	–	-1.60e-005
	80	1.43e-004	3.57	8.07e-006	3.44	-1.79e-007
	160	1.36e-005	3.39	9.40e-007	3.10	-6.24e-009
	320	1.34e-006	3.34	1.16e-007	3.02	-2.07e-010
3	40	1.45e-004	–	6.00e-006	–	-2.14e-006
	80	9.87e-006	3.88	3.11e-007	4.27	-9.56e-008
	160	5.51e-007	4.16	1.76e-008	4.14	-3.51e-009
	320	3.50e-008	3.98	1.11e-009	3.99	-1.19e-010

表 5.2： 例 5.1 在时间 $T=1$ 使用保正限制器时， $L^\infty-$ 范数和 L^1- 范数中的误差。

$\mathcal{P}_k$	M	$\|u_n-U_h^n\|_{L^\infty(\Omega)}$	阶	$\|u_n-U_h^n\|_{L^1(\Omega)}$	阶	最小值 U_h^n
1	40	7.33E-003	–	1.05E-003	–	2.05e-005
	80	1.24e-003	2.56	2.27e-004	2.21	8.15e-007
	160	2.63e-004	2.24	5.44e-005	2.06	2.77e-008
	320	6.05e-005	2.12	1.35e-005	2.01	8.55e-010
2	40	1.70E-003	–	8.73E-005	–	6.15e-008
	80	1.43e-004	3.57	8.08e-006	3.43	3.03e-007
	160	1.36e-005	3.39	9.40e-007	3.10	1.08e-008
	320	1.34e-006	3.34	1.16e-007	3.02	4.55e-010
3	40	1.45e-004	–	6.02e-006	–	1.00e-014
	80	9.87e-006	3.88	3.13e-007	4.27	4.45e-008
	160	5.51e-007	4.16	1.77e-008	4.14	1.21e-009
	320	3.50e-008	3.98	1.11e-009	4.00	2.55e-011

5.2 多孔介质方程

对于多孔介质方程， $f(u)H''(u)$可能在局部消失，从而导致退化情形 [5]。我们检验数值解的渐近行为，并将说明 KKT 限制器是必要的。此外，我们还计算了式 (1.4) 中定义的熵，该熵应当是非增的。

例 5.2. 为检验退化情形，我们在区域 $\Omega = [0,1]$ 上选取式 (1.1) 中的以下参数，并采用零通量边界条件

$$f(u) = u, \quad H'(u) = \frac{4}{3}\left(u - \frac{1}{2}\right)^3 \max\left(u, \frac{1}{2}\right), \quad \phi(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

以及初始数据

$$u(x,0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\pi x), \quad x \in \Omega.$$

在计算过程中，为了使半光滑牛顿算法达到最佳收敛效果， α 的取值通常接近 0.1。图 5.1 展示了采用多项式阶数从 1 到 3 的基函数并施加 KKT 限制器时的数值解。图 5.1 还展示了大于 10^{-10} 的拉格朗日乘子值 λ，这表明正性约束效果良好，因为它仅在解接近最小值的位置处起作用。图 5.2 展示了采用 KKT 限制器和 3 阶多项式基函数时的熵衰减结果，该结果与稳定性分析一致。图 5.3 展示了未采用 KKT 限制器、且使用 3 阶多项式基函数时的数值解。由于出现非物理振荡，该计算无法继续。

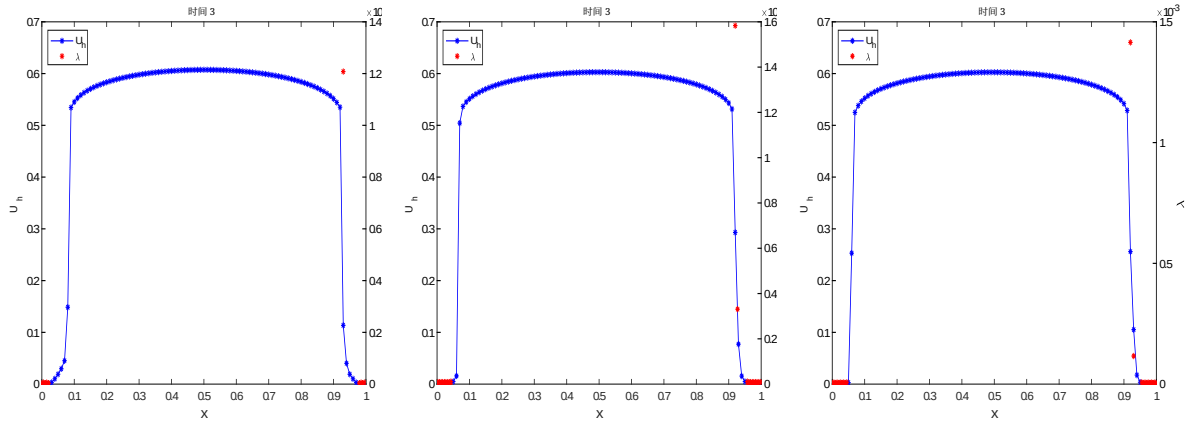
例5.3。我们考虑区域 $\Omega = [-6,6]^2$ 上的一个二维测试算例，采用零通量边界条件，并在 (1.1) 中选取以下参数

$$f(u) = u, \quad H'(u) = 2u, \quad \phi(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

以及初始数据

$$u(\boldsymbol{x},0) = \exp\left(-\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}|^2\right), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

在这种情况下，时间步长定义中的 α 取值范围为 0.1 到 1。图 5.4 展示了 KKT 限制器启用时的数值解，以及



（a） $\mathcal{P}_1$　　（b） $\mathcal{P}_2$　　（c） $\mathcal{P}_3$

图 5.1： (例 5.2) 强制使用 KKT 限制器时，不同阶多项式基函数的数值解 U_h $\mathcal{P}_1$-$\mathcal{P}_3$，拉格朗日乘子 λ（红点）。

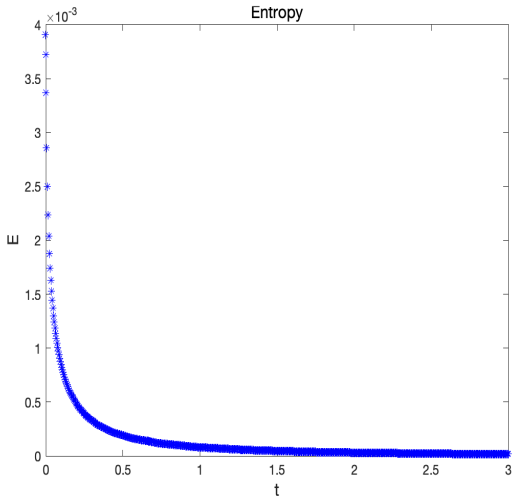


图 5.2：（ 例 5.2) 强制使用 KKT 限制器时，基函数的熵 E_h $\mathcal{P}_3$.

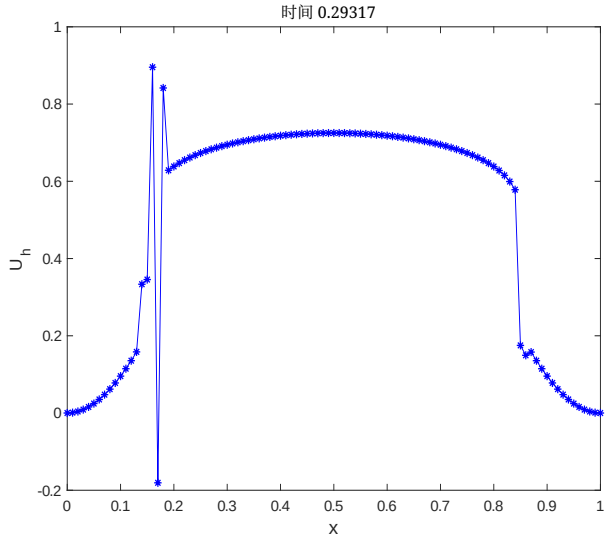


图 5.3：（例 5.2）在发生爆破前，未使用 KKT 限制器时， U_h $\mathcal{P}_3$ 个基函数的数值解。

拉格朗日乘子 λ。根据非零拉格朗日乘子的位置可以看出，该限制器在二维情形下也能很好地发挥作用，因为它只在必须保证正性的区域内起作用。图 5.5 绘出了熵衰减，这与数值解的稳定性结果一致。若不使用 KKT 限制器，就会出现非物理振荡，并且计算最终会在某个时刻崩溃。

5.3 具有双阱势的非线性扩散

考虑定义在区域 $\Omega = [-1.4, 1.4]$上的双阱势非线性扩散方程 [18]。该方程通过在（1.1）中选取零通量边界条件和以下参数得到

$$f(u) = u, \quad H'(u) = u, \quad \phi(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2, \quad x \in \Omega. \tag{5.1}$$

该模型取自 [7]。我们将检验使用和不使用 KKT 限制器时数值解的演化，以及熵（1.4）的衰减。用于计算时间步长的 α 取值范围为 0.01 到 0.1。

例 5.4。我们考虑满足 (5.1) 的 (1.1)，其初始数据为

$$u(x,0) = \frac{0.2}{\sqrt{0.4\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{0.4}\right), \quad x \in \Omega.$$

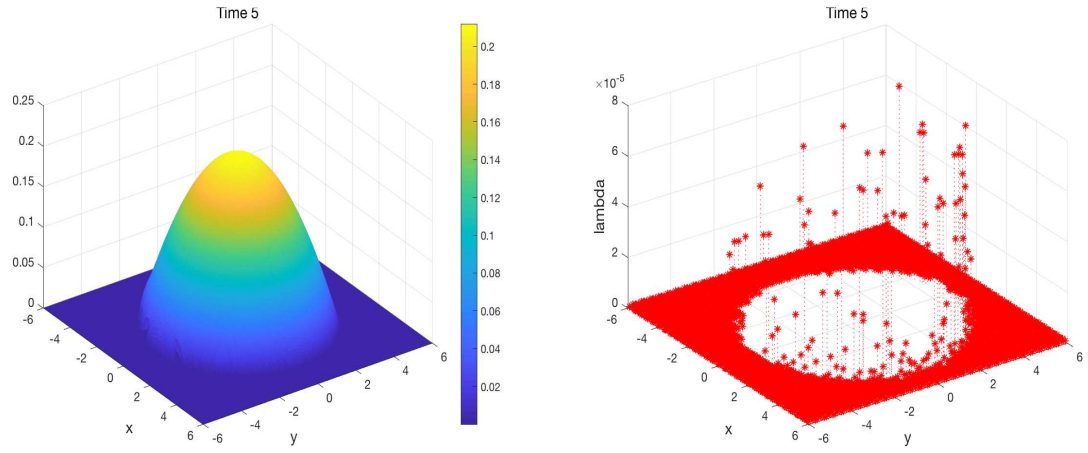


图 5.4： (例5.3) 对采用 KKT 限制器强制约束的 $\mathcal{P}_2$ 基函数，数值解为 U_h （左图）；拉格朗日乘子为 λ （右图）。

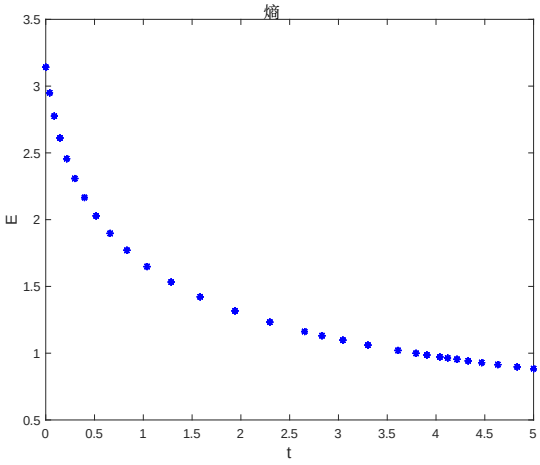


图 5.　5： (例5.3) 对采用 KKT 限制器强制约束的 $\mathcal{P}_2$ 基函数，熵为 E_h .

启用 KKT 限制器且拉格朗日乘子 λ 大于 10^{-10} 时的数值解如图5.6所示。结果表明，数值解趋于稳态，并且 KKT 限制器仅在需要施加正性约束的位置起作用。图5.7展示了熵耗散，其一致衰减与我们的理论分析相符。对于未启用 KKT 限制器的数值解，我们发现，违反正性约束会导致解出现不连续，并使计算崩溃，即使 CFL 数非常小也是如此。

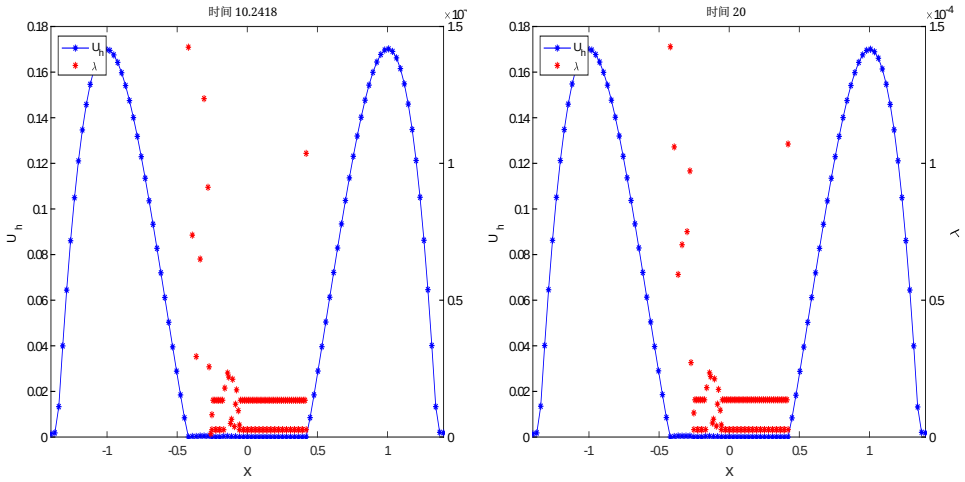


图 5.6: （例 5.4）采用 KKT 限制器并施加拉格朗日乘子 λ （红点）时， $\mathcal{P}_2$ 基函数的数值解 U_h 。

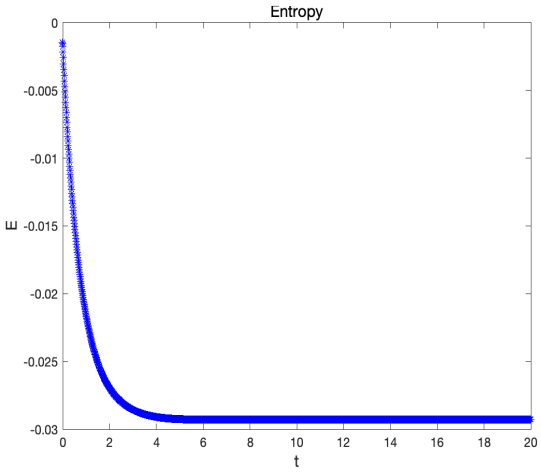


图 5.7 : （例 5.4）采用 KKT 限制器时， $\mathcal{P}_2$ 基函数的熵 E_h d.

5.4 费米子气体的非线性福克-普朗克方程

我们考虑区域 $\Omega = [-10, 10]^2$上的费米子气体非线性福克-普朗克方程 [5]，并在 (1.1) 中选取以下参数

$$f(u) = u(1-u), \quad H'(u) = \log\frac{u}{1-u}, \quad \phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{x}|^2, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{5.2}$$

以及零通量边界条件。

例 5.5。我们考虑带有 (5.2) 的方程 (1.1)，其初始数据为

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}, 0) =& \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}-(2,2)|^2\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}-(2,-2)|^2\right)\right. \\ &\left. + \exp\left(-\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}-(-2,2)|^2\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}-(-2,-2)|^2\right)\right), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

在计算过程中，时间步长定义中的 α 值介于 0.1 和 1 之间，但在大多数时间步中 $\alpha = 1$。在施加 KKT 限制器的情况下，若干时间层的数值解及其熵耗散分别见图 5.8 和图 5.9，结果显示数值解随时间渐近收敛至稳态。若不使用 KKT 限制器，即使 CFL 数非常小，计算也会崩溃。

5.5 玻色子气体的非线性福克-普朗克方程

例 5.6。我们考虑区域 $\Omega = [-10, 10]$ 上带有零通量边界条件的玻色子气体非线性福克-普朗克方程，这需要 (1.1) 中的以下参数

$$f(u) = u(1+u^3), \quad H'(u) = \log\frac{u}{(1+u^3)^{\frac{1}{3}}}, \quad \phi(x) = \frac{x^2}{2}, \quad x \in \Omega.$$

初始数据为 [5, 19]

$$u(x, 0) = \frac{M}{2\sqrt{2\pi}}\left(\exp\left(-\frac{(x-2)^2}{2}\right) + \exp\left(-\frac{(x+2)^2}{2}\right)\right), \quad x \in \Omega,$$

其中，$M \geqslant 0$ 是 $u(x, 0)$的质量。

对于大多数时间步，时间步长定义中的 α 取值为 1。对于情形$M = 1$，图 5.10 展示了不同时刻的数值解。此外，各位置

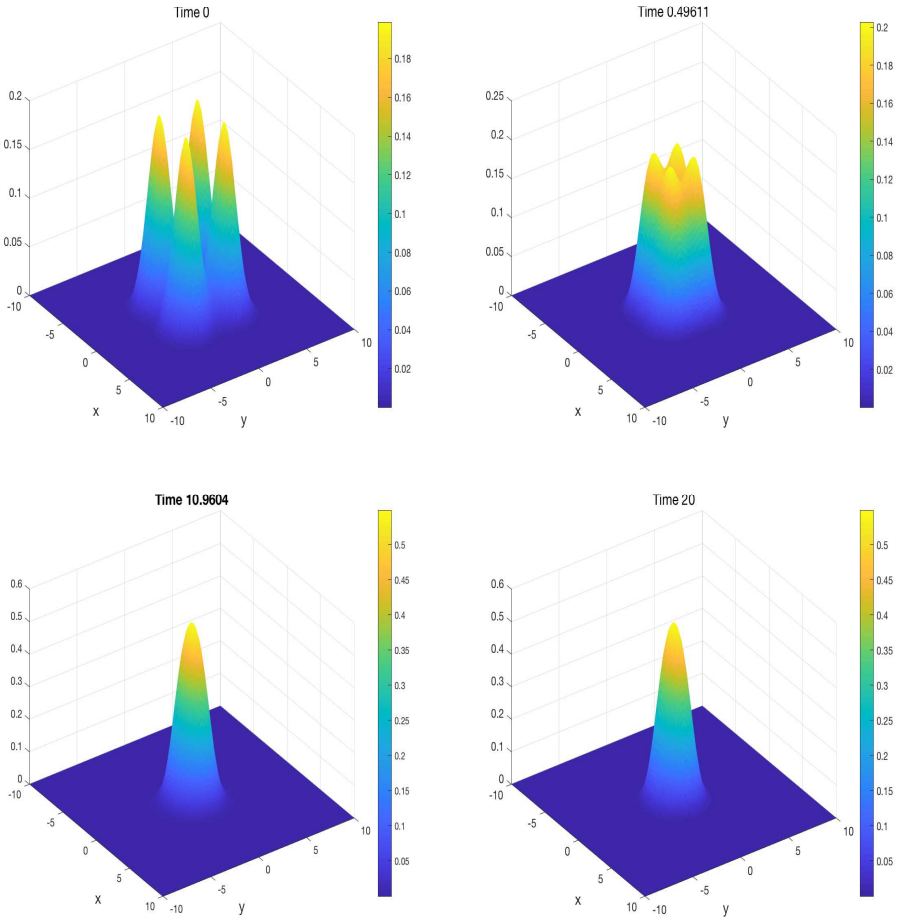


图 5.8: （例 5.5）采用 KKT 限制器的 U_h 个 $\mathcal{P}_2$ 基函数数值解。

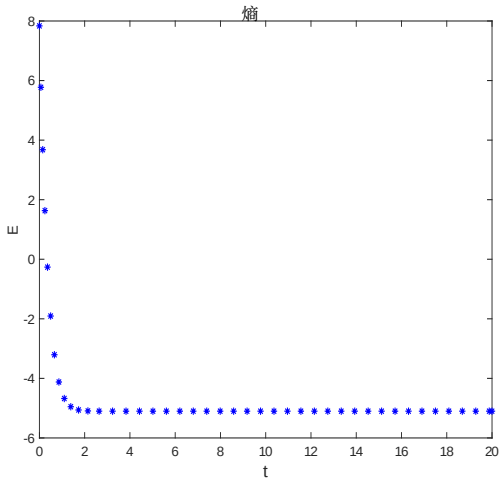


图 5. 9: (例 5.5) 使用 KKT 限制器的 E_h 基函数 $\mathcal{P}_2$ 的熵 .

并展示了拉格朗日乘子 λ 以及使用 KKT 限制器时的熵。图 5.10 和图 5.11 中的结果表明，数值解趋于稳态，并且需要拉格朗日乘子 λ 来确保满足正性约束。若不使用 KKT 限制器，即使 CFL 数非常小，计算也会崩溃。

对于这个模型方程，存在临界质量现象 [1], ：初始质量较大的解会在有限时间内爆破，而初始时刻质量较小的解则不会。图 5.12 和图 5.13 分别展示了亚临界质量 $M = 1$在时间 $t = 5$ 和 $t = 10$ 时，以及超临界质量 $M = 10$ 在时间 $t = 0.2$ 和 $t = 1$时的数值解；这些结果与 [1] 中展示的结果以及 [5, 19]中的数值观察一致。

6 结论

本文的主要研究内容是为非线性退化抛物方程 (1.1) 构造高阶精度的保正 DIRK-LDG 离散。所提出的数值离散使保正限制器能够与偏微分方程的隐式时间数值离散相结合，并缓解了现有保正 DG 离散的时间步长限制；这类离散通常需要采用显式时间积分方法。对于空间

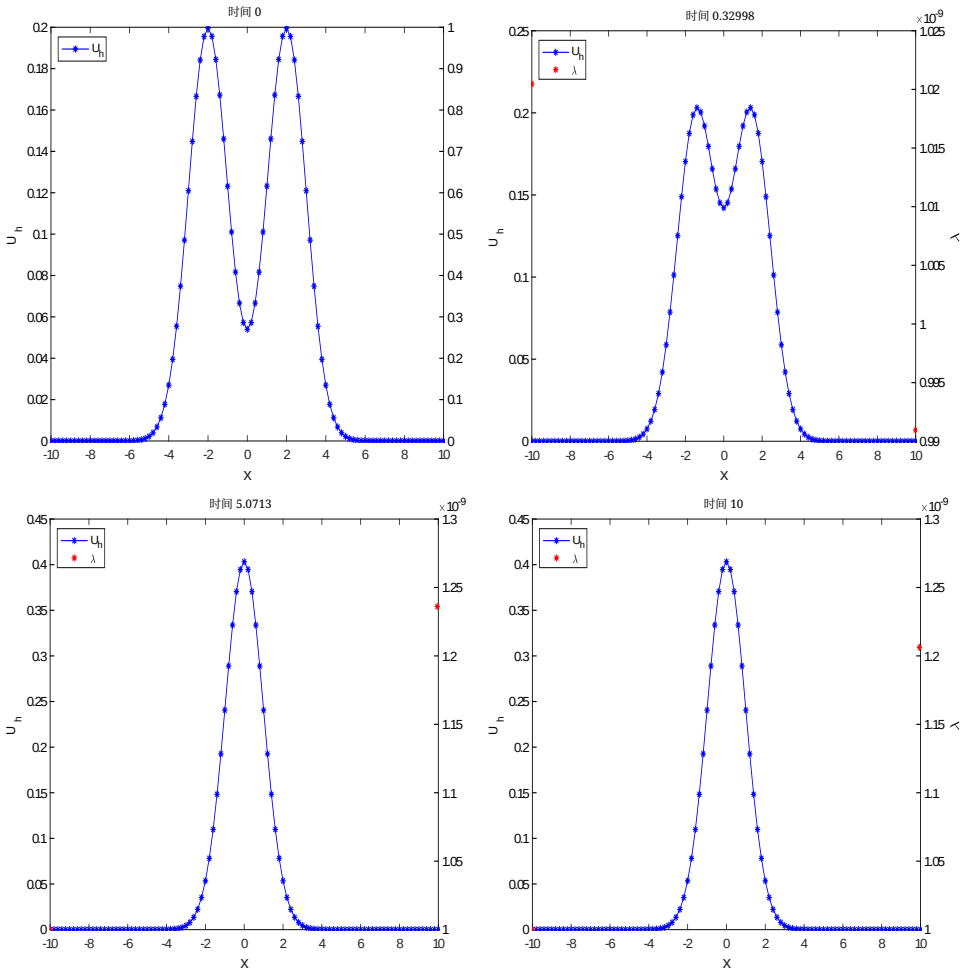


图5.10: （例 5.6）：采用 KKT 限制器的 U_h $\mathcal{P}_2$ 基函数数值解。

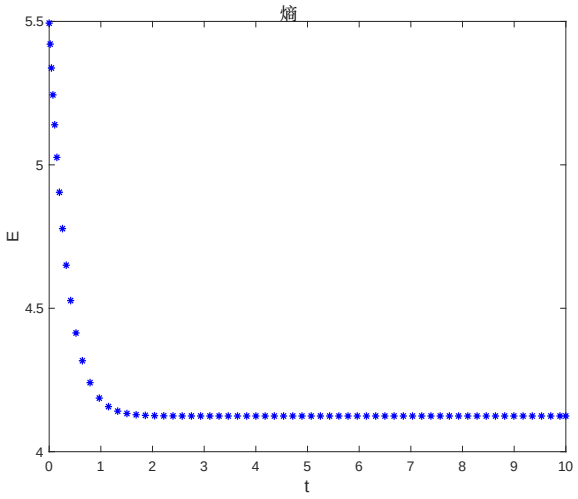


图 5.11： （例 5.6）：施加 KKT 限制器时， E_h 个 $\mathcal{P}_2$ 基函数的熵。

离散中采用了结合简单交替数值通量的局部间断伽辽金方法，这简化了熵耗散的理论分析。对于时间离散，隐式对角隐式龙格–库塔方法显著增大了数值离散保持稳定所需的时间步长。我们证明了结合隐式欧拉时间离散的保正高阶精度 KKT-LDG 离散的存在性、唯一性和无条件熵耗散性。数值结果表明，保正 KKT-DIRK-LDG 离散具有最优阶精度，且不受保正 KKT 限制器的影响。数值解满足熵衰减条件。

致谢

Fengna Yan 的研究得到了中国国家留学基金管理委员会奖学金（编号：201806340058）的资助。J.J.W. van der Vegt 的研究部分得到了中国安徽合肥的中国科学技术大学（USTC）的资助；作者当时在该校访问。Yinhua Xia 的研究部分得到了国家自然科学基金委员会项目（编号：12271498）的资助。Yan Xu 的研究部分得到了国家自然科学基金委员会项目（编号：12071455）的资助。

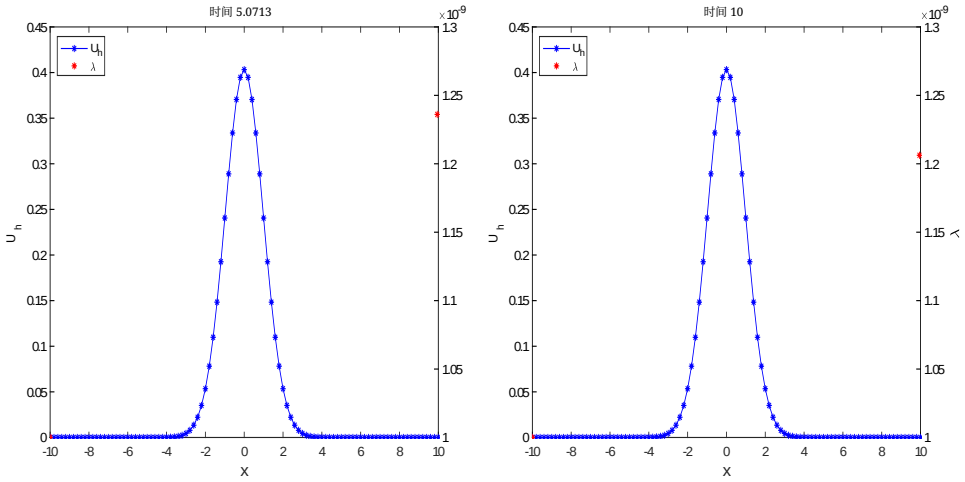


图 5.12: （例 5.6: $M = 1$）: 采用 KKT 限制器的 $\mathcal{P}_2$ 基函数数值解 U_h。

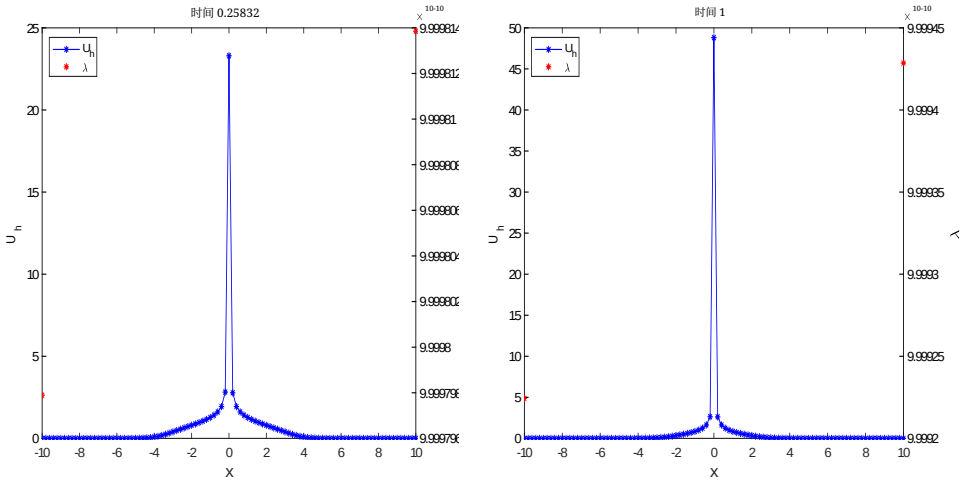


图 5.13: （例 5.6: $M = 10$）对 $\mathcal{P}_2$ 个基函数施加 KKT 限制器后的数值解 U_h。

参考文献

[1] N. B. Abdallah, I. M. Gamba, and G. Toscani, 次线性凸泛函的极小化问题, 《动理学与相关模型》, 4（2011）, 857–871。

[2] R. P. Agarwal and D. O'Regan, 常微分方程与偏微分方程, Springer Science & Business Media, 2009年。[3] R. Alexander, 刚性常微分方程的对角隐式 Runge-Kutta 方法, SIAM 数值分析杂志, 14（1977）, 1006–1021。

[4] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn and L. D. Marini, 椭圆型问题间断伽辽金方法的统一分析, SIAM 数值分析杂志, 39（2002）, 1749–1779。

[5] M. Bessemoulin-Chatard and F. Filbet, 非线性退化抛物方程的有限体积格式, SIAM 科学计算杂志, 34（2012）, B559–B583。[6] M. Burger, J. A. Carrillo and M.-T. Wolfram, 非线性扩散方程的混合有限元方法, 《动理学与相关模型》, 3（2010）, 59–83。[7] J. A. Carrillo, A. Chertock, and Y. Huang, 具有梯度流结构的非线性非局部方程的有限体积法, 《计算物理通讯》, 17（2015）, 233–258。[8] J. A. Carrillo, A. Jüngel, P. A. Markowich, G. Toscani, and A. Un-terreiter, 退化抛物型问题的熵耗散方法与广义 Sobolev 不等式, 《数学月刊》, 133（2001）, 1–82。

[9] J. A. Carrillo, P. Laurençot, and J. Rosado, 费米–狄拉克–福克–普朗克方程：适定性与长时间渐近行为, 《微分方程杂志》, 247（2009）, 2209–2234。

[10] Q. Cheng, and J. Shen, 一种用于构造保结构格式的新型拉格朗日乘子方法: I. 保正性, 《应用力学与工程中的计算方法》, 391（2022）, 114585。

[11] B. Cockburn, G. Kanschat, I. Perugia, and D. Schötzau, 笛卡尔网格上椭圆型问题的局部间断伽辽金方法的超收敛性，《SIAM 数值分析杂志》，39（2001），264–285。[12] B. Cockburn and C.-W. Shu, 时变对流扩散系统的局部间断伽辽金方法，《SIAM 数值分析杂志》，35（1998），2440–2463。
[13] B. Dong and C.-W. Shu, 线性时变四阶问题的局部间断伽辽金方法分析，《SIAM 数值分析杂志》，47（2009），3240–3268。
[14] F. Facchinei and J.-S. Pang, 有限维变分不等式与互补问题，第一卷，Springer-Verlag，纽约，2003年。[15] R. Guo and Y. Xu, 修正相场晶体方程的高阶自适应时间步进策略与局部间断伽辽金方法，《计算物理通讯》，24（2018），123–151。[16] E. Hairer and G. Wanner, 常微分方程求解 II：刚性问题与微分-代数问题，Springer Science & Business Media，2010年。
[17] F. Huang and J. Shen, 耗散系统的有界性/保正性与能量稳定标量辅助变量格式：在 Keller-Segel 方程和 Poisson-Nernst-Planck 方程中的应用，《SIAM 科学计算杂志》，43（2021），A1832–A1857。[18] Y. P. Kalmykov, W. Coffey, and S. Titov, 过阻尼极限下双阱势中的布朗运动，《Physica A：统计力学及其应用》，377（2007），412–420。[19] H. Liu and Z. Wang, 非线性福克-普朗克方程的熵满足型间断伽辽金方法，《科学计算杂志》，68（2016），1217–1240。
[20] H. Liu and H. Yu, 满足极大值原理的福克-普朗克方程三阶间断伽辽金格式，《SIAM 科学计算杂志》，36（2014），A2296–A2325。

[21] H. Liu and H. Yu, 福克-普朗克方程的熵满足型间断伽辽金方法，《科学计算杂志》，62（2015年），803–830。[22] J. Nachbar, 有限维优化第一部分：KKT定理，华盛顿大学，2018年。[23] J. Nachbar, 有限维优化第二部分：充分性，华盛顿大学，2020年。[24] J. Nocedal, S. J. Wright, 数值优化，Springer-Verlag，纽约，柏林，2006年。[25] T. Qin and C.-W. Shu, 守恒律的隐式保正高阶间断伽辽金方法，SIAM 科学计算杂志，40（2018年），A81–A107。[26] L. Skvortsov, 刚性问题的对角隐式 Runge-Kutta 方法，《计算数学与数学物理》，46（2006年），2110–2123。[27] J. Stoer, R. Bulirsch, 数值分析导论，Springer-Verlag，纽约，柏林，1991年。[28] L. Tian, Y. Xu, J. G. Kuerten, and J. J. W. van der Vegt, 纳维-斯托克斯-科特韦格方程的 h 自适应局部间断伽辽金方法，《计算物理杂志》，319（2016年），242–265。[29] G. Toscani, 玻色-爱因斯坦粒子 Kaniadakis-Quarati 模型中的有限时爆破，《偏微分方程通讯》，37（2012年），77–87。[30] J. J. W. van der Vegt, Y. Xia, and Y. Xu, 时间隐式高阶精度间断伽辽金离散的保正限制器，SIAM 科学计算杂志，41（2019年），A2037–A2063。[31] J. L. Vázquez, 多孔介质方程：数学理论，牛津大学出版社，2007年。[32] Y. Yang, D. Wei, and C.-W. Shu, Krause共识模型和无压欧拉方程的间断伽辽金方法，《计算物理杂志》，252（2013年），109–127。

[33] Q. Zhang and Z.-L. Wu, 用局部间断Galerkin有限元方法对多孔介质方程进行数值模拟, 《科学计算杂志》, 38（2009年）, 127–148。

[34] X. Zhang and C.-W. Shu, 关于满足最大值原理的高阶标量守恒律格式, 《计算物理杂志》, 229（2010年）, 3091–3120。

[35] X. Zhang and C.-W. Shu, 矩形网格上可压缩欧拉方程的保正高阶间断Galerkin格式, 《计算物理杂志》, 229（2010年）, 8918–8934。

[36] L. Zhou and Y. Xu, 线性对流扩散方程中半隐式谱延迟校正与局部间断伽辽金方法耦合的稳定性分析和误差估计, 科学计算杂志, 77（2018年）, 1001–1029。