arXiv:2301.01428v1 [math.DG] 4 Jan 2023

关于非厄米杨-米尔斯丛上调和度量的存在性

潘昌鹏、沈正涵、张熹

Abstract. 本文研究紧致 K¨ahler 流形上的非 Hermitian Yang-Mills（简称 NHYM）丛。我们证明，调和度量的存在性等价于 NHYM 丛的半单性，从而验证了 [18]中的猜想 8.7。

1. Introduction

设 (X,ω) 是一个维数为 n 的 K¨ahler 流形，(E,D) 是其上的一个复平坦向量丛。给定其上的一个厄米度量 H，存在唯一的分解

$$D = D_H + \psi_H, \tag{1.1}$$

其中 D_H 是一个 H-酉联络，且 $\psi_H \in \Omega^1(\mathrm{End}(E))$ 关于 H是自伴的。根据黎曼-希尔伯特对应，我们知道平坦丛 (E,D) 与基本群表示ρ_D： $\pi_1(X) \to \mathrm{Gl}(r,\mathbb{C})$ 之间存在一一对应关系。因此， E 上的任意厄米度量 H 都会诱导一个 ρ_D-等变映射

$$f_H : \tilde{X} \to \mathrm{Gl}(r,\mathbb{C})/\mathrm{U}(r), \tag{1.2}$$

˜其中 X 是 X的万有覆盖空间。若 f_H是调和映射，则称厄米度量 H 为调和度量。另一方面，我们知道 $\psi_H = -\frac{1}{2} f_H^{-1} df_H$([13])。因此， H是调和度量，当且仅当它是以下能量泛函的临界点

$$E(D,H) = \frac{1}{2}\int_X |\psi_H|^2_{H,\omega}\frac{\omega^n}{n!}. \tag{1.3}$$

也就是说，它满足欧拉-拉格朗日方程

$$D_H^*\psi_H = 0. \tag{1.4}$$

调和映射的概念由 Eells和Sampson（[10]）于20世纪60年代提出，并由 Corlette（[6]）推广为平坦丛上的调和度量。Donaldson（[9]）和 Corlette（[6]）证明，(E,D) 存在调和度量当且仅当它是半单的。Jost-Zuo（[16, 17]）、Simpson（[25]）、Mochizuki（[21]）、Collins-Jacob-Yau（[5]）、Pan-Zhang- Zhang（[23]）和 Wu-Zhang（[28]）还将这一结果推广到某些非紧或非 K¨ahler 流形上。

2020年数学主题分类：53C07，57N16。关键词与短语：非厄米杨-米尔斯联络、调和度量、热流。

另一方面，Hitchin-Kobayashi 对应指出，全纯向量丛的稳定性等价于不可约 Hermitian-Einstein 度量的存在。Narasimhan-Seshadri（[22]）针对黎曼曲面证明了这一点，Donaldson（[7, 8]）针对代数流形证明了这一点，而 Uhlenback-Yau（[27]）则针对高维 K¨ahler 流形证明了这一点。Hitchin（[15]）和 Simpson（[24]）证明了 Higgs 丛的 Hitchin-Kobayashi 对应。基于 Corlette（[6]）、Donaldson（[9]）、Hitchin（[15]）和 Simpson（[24, 25]）的结果，可以得到著名的非阿贝尔 Hodge 对应：陈数为零的多重稳定 Higgs 丛的模空间与半单平坦丛的模空间之间存在对应。非阿贝尔 Hodge 对应有许多重要且有趣的推广，例如：Jost 和 Zuo（[17]）、Biquard 和 Boalch（[1]）、Mochizuki（[20, 21]）针对拟射影簇的情形；Bradlow、Garc´ía-Prada 和 Mundet i Riera（[4]）、Garc´ía-Prada 和 Mundet i Riera（[11]）、Garc´ía-Prada、Gothen 和 I.Mundet i Riera（[12]）针对主 G-Higgs 丛的情形；Biswas 和 Kasuya（[2, 3]）针对 Sasakian 流形的情形。

若联络 D in E 的曲率 F_D 满足

$$F_D = D^2 \in \Omega_X^{1,1}(\mathrm{End}(E)) \quad \text{and} \quad \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_D = \lambda I d_E, \tag{1.5}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 为常数。若 D 是 NHYM 联络，则称 (E, D) 为 NHYM 丛。这一概念最早由 Kaledin 和 Verbitsky 在 [18] 中提出。他们最初的动机是将 Corlette-Donaldson-Hitchin-Simpson 对应推广到具有任意陈类的向量丛。在他们的论文中，他们研究了 NHYM 联络的模空间 $\mathscr{M}$，并证明 $\mathscr{M}$ 自然具有复解析结构，其维数是 Hermitian Yang-Mills 联络子空间 $\mathscr{M}_0$维数的两倍。他们还在 $\mathscr{M}_0$附近构造了一个复辛 2-形式，并猜想该形式在整个 $\mathscr{M}$上诱导出一个超 K¨ahler 结构。在论文末尾，作者列出了一些开放问题和猜想，将有关平坦丛的已知事实推广到非厄米杨-米尔斯丛。

类比平坦丛的情形，我们如下定义 NHYM 丛上的调和度量。

定义 1.1. 设 (E, D) 是一个 NHYM 丛，厄米度量 H 称为调和度量，若它是能量泛函 (1.3) 的临界点，即 $D_H^* \psi_H = 0$。

本文的主要工作是证明以下定理，它给出了 [18] 中猜想 8.7 的答案。

定理 1.2. 设 (X, ω) 是一个紧致 K¨ahler 流形，(E, D) 是其上的 NHYM 丛。则 (E, D) 存在调和度量，当且仅当它是半单的。

本文采用热流方法证明调和度量的存在性。我们研究 NHYM 丛 (E, D) 上的以下方程，

$$\begin{cases} H^{-1}(t)\dfrac{\partial H(t)}{\partial t} = 2D^*_{H(t)}\psi_{H(t)}, \\ H(0) = H_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

NHYM 条件确保热流是抛物型流，因此存在短时间解。该流的长时间存在性也可以通过经典方法证明。我们还在 NHYM 丛上引入 Donaldson 泛函 $\mathcal{M}(K,H)$ 的概念，并证明它沿流递减。这些概念广泛用于 Hitchin-Kobayashi 对应的证明中。需要注意的是，NHYM 条件在所有相关计算中都至关重要。

本文结构安排如下。第 2 节介绍一些基本概念，并证明调和度量的存在性蕴含半单性。第 3 节介绍 NHYM 丛上的 Donaldson 型泛函。第 4 节引入一种热流，并证明该热流的长期存在性。第 5 节完成定理 1.2 的其余证明。

2. 预备知识

设 (X,ω) 是一个维数为 n 的 K¨ahler 流形，E 是其上的秩为 r 的复向量丛。若 D 是 E 上的 NHYM 联络，则称 (E,D) 为一个 NHYM 丛。根据定义，D 的 $(0,1)$ 部分确定了 E 上的一个全纯结构。设 $\mathcal{E}$ 为全纯截面层。类比平坦丛的情形，我们可以定义 (E,D) 的单纯性。

定义 2.1. 若子丛 $S\subset E$ 是 (E,D) 的 D-不变子丛，则称其为 D-子丛。

定义 2.2. 若 NHYM 丛 (E,D) 不存在真 D-子丛，则称其为简单的。若 (E,D) 是若干简单 NHYM 丛的直和，则称其为半单的。

引理 2.3. 设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个相干子层，S 是 $X\setminus\Sigma$ 上与 $\mathcal{S}$ 对应的全纯丛，其中 Σ 是 $\mathcal{S}$ 的奇异集。若 S 是 $E|_{X\setminus\Sigma}$ 的一个 D-子丛，则存在 E 在 X 上的一个 D-子丛 S，使得 $S|_{X\setminus\Sigma}=S$。

证明. 设 H 是 E 上的一个厄米度量，π 是与 H 对应的从 $E|_{X\setminus\Sigma}$ 到 S 的投影映射。那么

$$\pi^2=\pi^{*H}=\pi,\quad (Id-\pi)D\pi=0\quad on\ X\setminus\Sigma. \tag{2.1}$$

此外，我们有 $\pi\in L^2_1(X,\mathrm{End}(E))\cap C^\infty(X\setminus\Sigma,\mathrm{End}(E))$，并且

$$\pi^2=\pi^{*H}=\pi,\quad (Id-\pi)D\pi=0\quad a.e.\ on\ X, \tag{2.2}$$

其中，$D\pi\in L^2(X,\mathrm{End}(E))$ 是 π 的弱导数。对等式 $\pi^2=\pi$ 应用算子 D，并结合 $(Id-\pi)D\pi=0$，我们得到

$$D\pi\pi=0\quad a.e.\ on\ X. \tag{2.3}$$

设 $D=D_H+\psi_H$，其中 D_H是酉联络，且 $\psi_H\in\Omega^1(\mathrm{End}(E))$ 关于 H 是自伴的¯。令 $D=D_H-\psi_H$，则

$$\bar{D}\pi(Id-\pi)=0\quad a.e.\ on\ X. \tag{2.4}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} D\pi =&\bar{D}\pi\pi + 2[\psi_H, \pi] \\ =&D\pi\pi - 2[\psi_H, \pi]\pi + [\psi_H, \pi] \quad a.e.\ on\ X. \\ =&2\pi\psi_H(Id - \pi). \end{aligned} \tag{2.5}$$

由于在 X 上几乎处处有 $|\pi|_H^2 = \mathrm{rank}(S)$，因此对于 $0 < p \leq +\infty$， $\pi \in L^p(X, \mathrm{End}(E))$。由此，根据 (2.5)，对于 $0 < p \leq +\infty$ ，有 $D\pi \in L^p(X, \mathrm{End}(E))$。应用 Sobolev 嵌入定理和方程 (2.5)，我们得到 $\pi \in C^\infty(X, \mathrm{End}(E))$。令 $S = \pi(E)$，则证明完成。□

注 2.4。上述引理意味着，一个 D-不变子层总可以延拓为一个 D-不变子丛。因此，我们对 NHYM 丛的 D-单纯性的定义与 Kaledin-Verbitsky 在 [18] 中的 D-稳定性相一致。

命题 2.5。设 $\mathrm{End}(E, D)$ 是 (E, D) 的自同态空间。假设 (E, D) 是简单的，则 $\mathrm{End}(E, D) \simeq \mathbb{C}$。

证明。设 $f \in \mathrm{End}(E, D)$。若 $f \neq 0$，则 f是同构。否则，由引理 2.3，$\mathrm{Ker}(f)$ 或 $\mathrm{Im}(f)$ 确定了 (E, D) 的一个真 D-子丛。由于 f 相对于 $D^{0,1}$是全纯的，因此 f 的特征值是常数。设 λ 是 f的一个特征值，则$\tilde{f} = f - \lambda Id_E$ 不是同构。因此 $f = \lambda Id_E$。□

设 (X, ω) 是一个维数为 n 的 Kähler 流形， E 是 X上的一个秩为 r 的复向量丛。给定 E上的任意联络 D 和厄米度量 H ，存在唯一分解

$$D = D_H + \psi_H, \tag{2.6}$$

其中 D_H 是保持 H 的酉联络，且 $\psi_H \in \Omega^1(\mathrm{End}(E))$ 关于 H是自伴的。若 D 是一个 NHYM 联络，则

$$\lambda Id_E = \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_D = \sqrt{-1}\Lambda_\omega(D_H^2 + \psi_H \wedge \psi_H + D_H \circ \psi_H + \psi_H \circ D_H). \tag{2.7}$$

考虑上述恒等式的反自伴部分和自伴部分，我们得到

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega D_H \psi_H = 0, \tag{2.8}$$

and

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega(D_H^2 + \psi_H \wedge \psi_H) = \lambda Id_E. \tag{2.9}$$

此外，若考虑将 D_H （分别为 ψ_H）分解为 (1, 0)部分 ∂_H（分别为 $\psi^{1,0}_H$ ）和 (0,1)部分 $\bar{\partial}_H$ （分别为 $\psi^{0,1}_H$ ），则有

$$D_H = \partial_H + \bar{\partial}_H, \quad \psi_H = \psi_H^{1,0} + \psi_H^{0,1}. \tag{2.10}$$

Let

$$D_H'' = \bar{\partial}_H + \psi_H^{1,0}, \quad D_H' = \partial_H + \psi_H^{0,1}, \tag{2.11}$$

那么，相对于联络 D 和厄米度量H 的伪曲率 G_H 定义如下:

$$G_H = (D_H'')^2 = (\bar{\partial}_H + \psi_H^{1,0})^2. \tag{2.12}$$

根据 K¨ahler 恒等式，我们得到

$$D_H^*\psi_H = 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H. \tag{2.13}$$

因此， H 是调和度量，当且仅当它满足方程 $\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H = 0$。

此外，若将公式 (2.8) 和 (2.9) 分解为 (1,0) 部分和 (0,1) 部分，我们得到以下方程:

$$\begin{cases} \partial_H^2 + \psi_H^{1,0}\wedge\psi_H^{1,0} = \bar\partial_H^2 + \psi_H^{0,1}\wedge\psi_H^{0,1} = 0, \\ \partial_H\psi_H^{1,0} = \bar\partial_H\psi_H^{0,1} = 0, \\ \sqrt{-1}\Lambda_\omega(\partial_H\psi_H^{0,1} + \bar\partial_H\psi_H^{1,0}) = 0, \\ \sqrt{-1}\Lambda_\omega([\partial_H,\bar\partial_H] + [\psi_H^{1,0},\psi_H^{0,1}]) = \lambda Id_E, \end{cases} \tag{2.14}$$

其中我们用到了 NHYM 条件。

对于 E上的任意两个厄米度量 K 和 H，我们有

$$\begin{aligned} D_H &= h^{-1}\circ D_K\circ h + \frac{1}{2}(D - h^{-1}\circ D\circ h), \\ \psi_H &= h^{-1}\circ\psi_K\circ h + \frac{1}{2}(D - h^{-1}\circ D\circ h), \end{aligned} \tag{2.15}$$

其中， $h = K^{-1}H$是一个正端同态，由 $H(\cdot,\cdot) = K(h(\cdot)\ \cdot)$ 定义。令 $D_K^c = D_K'' - D_K'$，则经直接计算可得

$$\begin{aligned} D_H'' - D_K'' &= \frac{1}{2}h^{-1}D_K^c h, \\ \sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H - \sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K &= \frac{\sqrt{-1}}{4}\Lambda_\omega D(h^{-1}D_K^c h), \end{aligned} \tag{2.16}$$

这里用到了方程 (2.14)。

2.1. NHYM 丛上的调和度量。在下文中，我们将证明，调和度量的存在意味着 E 的半单性。设 $S\subset E$ 是一个 D-不变子丛， Q 是商丛。那么， E 上的任意厄米度量 H 都会诱导一个光滑同构 $f_H\colon S\oplus Q\to E$。令

$$f_H^*(D) = \begin{pmatrix} D_S & 2\beta \\ 0 & D_Q \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

其中 $\beta\in\Omega^1(X, Q^*\otimes S)$。于是

$$f_H^*(D_H) = \begin{pmatrix} D_{S,H_S} & \beta \\ -\beta^* & D_{Q,H_Q} \end{pmatrix}, \quad f_H^*(\psi_H) = \begin{pmatrix} \psi_{S,H_S} & \beta \\ \beta^* & \psi_{Q,H_Q} \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

and

$$f_H^*(G_H) = \begin{pmatrix} G_{S,H_S} + \beta\wedge(\beta^c)^* & D''\beta \\ D''(\beta^c)^* & G_{Q,H_Q} + (\beta^c)^*\wedge\beta^c \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

其中 $\beta^c = \beta^{0,\ 1} - \beta^{1,\ 0}$。对等式两边取迹并积分，可得

$$\int_X(\sqrt{-1}\Lambda_\omega\mathrm{tr}(G_{S,H_S}) - |\beta|^2)\frac{\omega^n}{n!} = 0. \tag{2.20}$$

另一方面，根据斯托克斯公式，我们有

$$\int_X \sqrt{-1}\Lambda_\omega \mathrm{tr}(G_{S,H_S})\frac{\omega^n}{n!} = 0. \tag{2.21}$$

因此，我们有

$$\beta = 0, \tag{2.22}$$

这意味着 $(E, D) \simeq (S, D_S) \oplus (Q, D_Q)$。因此，通过对秩作归纳，我们得到 (E, D) 是半单的。

3. Donaldson's functional on NHYM bundles

本节中，我们将遵循 Donaldson ([7]) 和 Simpson ([24]) 的做法，在我们的情形下引入 Donaldson 泛函。对于任意两个厄米度量 K, L，我们现在定义 NHYM 丛上的 Donaldson 泛函如下

$$\mathcal{M}(K, L) = \int_0^1 \int_X \mathrm{tr}\bigg(- 4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_{H(s)} \cdot H^{-1}(s)\frac{\partial H(s)}{\partial s}\bigg)\frac{\omega^n}{n!}ds, \tag{3.1}$$

其中 $H(s)$ 是连接厄米度量 K 和 L 的路径，位于 E 上所有度量构成的空间中。

P命题 3.1。Donaldson 泛函 $\mathcal{M}$ 与路径无关 $h.$

证明。设 $H(\tau, s)$ $s \in [0, 1]$ 是一族路径，满足 $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，且 $H(\tau, 0) = K$， $H(\tau, 1) = L$。若记 $h(\tau, s) = K^{-1}H(\tau, s)$，则 $h(\tau, 0) = \mathrm{Id}$ $h(\tau, 1) = K^{-1}L$。为书写方便，下文省略这些参数。直接计算可得

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\bigg(\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H\bigg) = \frac{\sqrt{-1}}{4}\Lambda_\omega D D_H^c\bigg(h^{-1}\frac{\partial h}{\partial\tau}\bigg). \tag{3.2}$$

由于 D 是 NHYM 联络，我们还可以得到

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H = \frac{\sqrt{-1}}{4}\Lambda_\omega [D, D_H^c]. \tag{3.3}$$

利用 (3.2) 和 (3.3)，我们可以轻松得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\tau}\mathrm{tr}\bigg(\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H\cdot h^{-1}\frac{\partial h}{\partial s}\bigg)-\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{tr}\bigg(\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H\cdot h^{-1}\frac{\partial h}{\partial\tau}\bigg)\\
&=\mathrm{tr}\bigg(\frac{\sqrt{-1}}{4}\Lambda_\omega DD_H^c\big(h^{-1}\frac{\partial h}{\partial\tau}\big)h^{-1}\frac{\partial h}{\partial s}-\frac{\sqrt{-1}}{4}\Lambda_\omega DD_H^c\big(h^{-1}\frac{\partial h}{\partial s}\big)h^{-1}\frac{\partial h}{\partial\tau}\bigg)\\
&\quad+\mathrm{tr}\bigg(-\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H\cdot h^{-1}\frac{\partial h}{\partial\tau}h^{-1}\frac{\partial h}{\partial s}+\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H\cdot h^{-1}\frac{\partial h}{\partial s}h^{-1}\frac{\partial h}{\partial\tau}\bigg)\\
&=\mathrm{tr}\bigg(\frac{\sqrt{-1}}{4}\Lambda_\omega DD_H^c\big(h^{-1}\frac{\partial h}{\partial\tau}\big)h^{-1}\frac{\partial h}{\partial s}-\frac{\sqrt{-1}}{4}\Lambda_\omega DD_H^c\big(h^{-1}\frac{\partial h}{\partial s}\big)h^{-1}\frac{\partial h}{\partial\tau}\bigg)\\
&\quad+\mathrm{tr}\bigg(\frac{\sqrt{-1}}{4}\Lambda_\omega[D,D_H^c]\big(h^{-1}\frac{\partial h}{\partial s}\big)h^{-1}\frac{\partial h}{\partial\tau}\bigg)\\
&=\frac{\sqrt{-1}}{4}\Lambda_\omega\mathrm{tr}\bigg(DD_H^c\big(h^{-1}\frac{\partial h}{\partial\tau}\big)h^{-1}\frac{\partial h}{\partial s}+D_H^cD\big(h^{-1}\frac{\partial h}{\partial s}\big)h^{-1}\frac{\partial h}{\partial\tau}\bigg)\\
&=\frac{\sqrt{-1}}{4}\Lambda_\omega d\mathrm{tr}\bigg(D_H^c\big(h^{-1}\frac{\partial h}{\partial\tau}\big)h^{-1}\frac{\partial h}{\partial s}\bigg)+\frac{\sqrt{-1}}{4}\Lambda_\omega d^c\mathrm{tr}\bigg(D\big(h^{-1}\frac{\partial h}{\partial s}\big)h^{-1}\frac{\partial h}{\partial\tau}\bigg).
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

结合（3.4）使用斯托克斯公式可得

$$
\int_X\frac{\partial}{\partial\tau}\mathrm{tr}\bigg(\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H\cdot h^{-1}\frac{\partial h}{\partial s}\bigg)-\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{tr}\bigg(\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H\cdot h^{-1}\frac{\partial h}{\partial\tau}\bigg)\frac{\omega^n}{n!}=0.
\tag{3.5}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau}\int_0^1\int_X\mathrm{tr}\bigg(-4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_{H(\tau,s)}\cdot H^{-1}(\tau,s)\frac{\partial H(\tau,s)}{\partial s}\bigg)\frac{\omega^n}{n!}ds\\
&=\int_0^1\int_X\frac{\partial}{\partial\tau}\mathrm{tr}\bigg(-4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_{H(\tau,s)}\cdot H^{-1}(\tau,s)\frac{\partial H(\tau,s)}{\partial s}\bigg)\frac{\omega^n}{n!}ds\\
&=\int_0^1\int_X\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{tr}\bigg(-4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_{H(\tau,s)}\cdot H^{-1}(\tau,s)\frac{\partial H(\tau,s)}{\partial\tau}\bigg)\frac{\omega^n}{n!}ds\\
&=\int_X\mathrm{tr}\bigg(-4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_{H(\tau,s)}\cdot H^{-1}(\tau,s)\frac{\partial H(\tau,s)}{\partial\tau}\bigg)\frac{\omega^n}{n!}\bigg|_{s=0}^1\\
&=0.
\end{aligned}
$$

这意味着 Donaldson 泛函与路径无关。 □

令 s 为由条件 $L=Ke^s$ 确定的 E 的端omorphism。选取一条连接 K 与 L 的特殊路径 $H(t)=Ke^{ts}$，则 Donaldson 泛函可写为如下形式

$$
\mathcal{M}(K,L)=\int_0^1\int_X\mathrm{tr}\bigg(\big(-4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_{H(t)}\big)s\bigg)\frac{\omega^n}{n!}dt.
\tag{3.6}
$$

Set

$$
\Psi(x,y):=\frac{e^{y-x}-(y-x)-1}{(y-x)^2}.
$$

于是我们有如下命题。

命题 3.2. 设 $L = Ke^s$，则有

$$\mathcal{M}(K,L) = \int_X \mathrm{tr}\Big(\big(-4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K\big)s\Big)\frac{\omega^n}{n!} + \int_X \langle \Psi(s)(Ds), Ds\rangle_K \frac{\omega^n}{n!}. \tag{3.7}$$

证明。通过直接计算，我们推得

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{M}(K,H(t)) = \int_X \mathrm{tr}\Big(\big(-4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_{H(t)}\big)s\Big)\frac{\omega^n}{n!} \tag{3.8}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{M}(K,H(t)) &= \int_X \mathrm{tr}\Big(\big(-\sqrt{-1}\Lambda_\omega D D^c_{H(t)}s\big)s\Big)\frac{\omega^n}{n!}\\ &= \int_X -\sqrt{-1}\Lambda_\omega d\mathrm{tr}(D^c_{H(t)}s\cdot s)\frac{\omega^n}{n!} - \int_X \sqrt{-1}\Lambda_\omega \mathrm{tr}\big(D^c_{H(t)}s\wedge Ds\big)\frac{\omega^n}{n!} \qquad (3.9)\\ &= \int_X |Ds|^2_{H(t),\omega}\frac{\omega^n}{n!},\end{aligned}$$

其中我们用到了 $\sqrt{-1}\Lambda_\omega \mathrm{tr}(D^c_H s\wedge Ds) = |Ds|^2_{H,\ \omega}$。选取关于度量 K 的标准正交基 $\{e_1,\cdots,e_r\}$，使得 $s = \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i\otimes e_i^*$。令 $Ds = \sum_{i,\ j=1}^r (Ds)_i^j e_j\otimes e_i^*$，则有

$$|Ds|^2_{H(t),\omega} = \sum_{i,j=1}^r |(Ds)_i^j|^2_\omega e^{t(\lambda_j-\lambda_i)}. \tag{3.10}$$

利用 (3.10) 并将 (3.9) 从 0 积分到 t，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{M}(K,H(t)) = \sum_{i,j=1}^r \int_X |(Ds)_i^j|^2_\omega \frac{e^{t(\lambda_j-\lambda_i)}-1}{(\lambda_j-\lambda_i)}\frac{\omega^n}{n!} + \int_X \mathrm{tr}\Big(\big(-4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K\big)s\Big)\frac{\omega^n}{n!}. \tag{3.11}$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(K,L) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{M}(K,H(t))dt\\ &= \int_X \mathrm{tr}\Big(\big(-4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K\big)s\Big)\frac{\omega^n}{n!} + \sum_{i,j=1}^r \int_X |(Ds)_i^j|^2_\omega \Psi(\lambda_i,\lambda_j)\frac{\omega^n}{n!}\\ &= \int_X \mathrm{tr}\Big(\big(-4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K\big)s\Big)\frac{\omega^n}{n!} + \int_X \langle \Psi(s)(Ds), Ds\rangle_K \frac{\omega^n}{n!}.\end{aligned}$$

□

根据 Donaldson 泛函的定义，很容易推导出以下性质。

Pro命题 3.3. 设 K、 J 和 L 是 (E,D) 上的三个厄米度量， n

$$\mathcal{M}(K,J) + \mathcal{M}(J,L) = \mathcal{M}(K,L). \tag{3.12}$$

4. The heat flow on NHYM bundle

本节我们考虑紧致 K¨ahler 流形上 NHYM 丛 (E, D) 的以下热流：

$$H^{-1}(t)\frac{\partial H(t)}{\partial t} = 4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_{H(t)}. \tag{4.1}$$

为方便起见，我们令 $\Phi(H) = 4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H$。容易看出，相对于 H， $\Phi(H)$ 是自伴的。下面我们将给出关于该流的一些基本性质。

命题 4.1. 设 $H(t)$ 是具有初始度量 H_0 的热流 (4.1) 的解，则

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\mathrm{tr}\big(\Phi(H(t))\big) = 0, \tag{4.2}$$

and

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)|\Phi(H(t))|^2_{H(t)} = -2|D\Phi(H(t))|^2_{H(t),\omega}. \tag{4.3}$$

证明。令 $h(t) = H_0^{-1}H(t)$。在不致混淆的情况下，我们在计算中省略参数 t。利用恒等式 (2.16)，可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Phi(H) &= \frac{\sqrt{-1}}{4}\Lambda_\omega D\bigg(- h^{-1}\frac{\partial h}{\partial t}h^{-1}D^c_{H_0}h + h^{-1}D^c_{H_0}\frac{\partial h}{\partial t}\bigg)\\
&= \frac{\sqrt{-1}}{4}\Lambda_\omega D\bigg(- h^{-1}\frac{\partial h}{\partial t}h^{-1}D^c_{H_0}h + h^{-1}D^c_{H_0}hh^{-1}\frac{\partial h}{\partial t} + D^c_{H_0}\big(h^{-1}\frac{\partial h}{\partial t}\big)\bigg)\\
&= \frac{\sqrt{-1}}{4}\Lambda_\omega D\bigg([h^{-1}D^c_{H_0}h, h^{-1}\frac{\partial h}{\partial t}] + D^c_{H_0}\big(h^{-1}\frac{\partial h}{\partial t}\big)\bigg)\\
&= \sqrt{-1}\Lambda_\omega DD^c_H\Phi(H).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

公式 (4.2) 可以很容易地由 (4.4) 推导得出。另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
\Delta|\Phi(H)|^2_H &= \sqrt{-1}\Lambda_\omega dd^c|\Phi(H)|^2_H = \sqrt{-1}\Lambda_\omega dd^c\mathrm{tr}(\Phi(H)\Phi(H))\\
&= \sqrt{-1}\Lambda_\omega d\{\mathrm{tr}(D^c_H\Phi(H)\cdot\Phi(H) + \Phi(H)\cdot D^c_H\Phi(H))\}\\
&= \sqrt{-1}\Lambda_\omega \mathrm{tr}\,\{DD^c_H\Phi(H)\cdot\Phi(H) - D^c_H\Phi(H)\wedge D\Phi(H)\\
&\quad + D\Phi(H)\wedge D^c_H\Phi(H) + \Phi(H)DD^c_H\Phi(H)\}\\
&= 2\sqrt{-1}\Lambda_\omega\mathrm{tr}(\Phi(H)DD^c_H\Phi(H)) + 2|D\Phi(H)|^2_H
\end{aligned} \tag{4.5}$$

结合 (4.4) 和 (4.5) 可得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)|\Phi(H)|^2_H &= 2\mathrm{tr}(\frac{\partial}{\partial t}\Phi(H)\Phi(H)) - \Delta|\Phi(H)|^2_H\\
&= -2|D\Phi(H)|^2_H.
\end{aligned}$$

□

由命题 4.1 和最大值原理，我们可以很容易地推导出 t

$$\sup_X |\Phi(H(t))|_{H(t)} \leq \sup_X |\Phi(H_0)|_{H_0}. \tag{4.6}$$

若取初始度量 H_0，使得 $\mathrm{tr}(\Phi(H_0)) = 0$，则 $\mathrm{tr}(\Phi(H(t))) = 0$。结合方程 (4.1)，可推得

$$\log\det(H_0^{-1}H(t)) = \mathrm{tr}(\log(H_0^{-1}H(t))) = 0. \tag{4.7}$$

沿用 Donaldson 的论证 ([7])，我们在厄米度量空间上引入 Donaldson 距离如下。

定义 4.2. 给定向量丛 E 上的任意两个厄米度量 K 和 H，Donaldson 距离定义为

$$\sigma(K,H) = \mathrm{tr}(K^{-1}H) + \mathrm{tr}(H^{-1}K) - 2\mathrm{rank}E. \tag{4.8}$$

显然，$\sigma(K,H) \geq 0$，且当且仅当 $K = H$ 时等号成立。厄米度量序列 H_i 在通常的 C^0-拓扑下收敛到某个 H，当且仅当

$$\lim_{i\to\infty}\sup_X \sigma(H_i,H) = 0.$$

命题 4.3. 设 H 和 K 是 NHYM 丛 (E,D) 上的两个调和度量，则有

$$\Delta\sigma(H,K) = |h^{-\frac{1}{2}}\cdot Dh|_K^2 + |h^{\frac{1}{2}}\cdot Dh^{-1}|_H^2 \geq 0. \tag{4.9}$$

其中 $h = K^{-1}H$。

证明。利用 (2.16)，我们得到

$$\mathrm{tr}\Big(4h(\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H - \sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K)\Big) = \Delta\mathrm{tr}h - \sqrt{-1}\Lambda_\omega\mathrm{tr}(Dh\wedge h^{-1}D_K^c h), \tag{4.10}$$

and

$$\mathrm{tr}\Big(4h^{-1}(\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K - \sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H)\Big) = \Delta\mathrm{tr}h^{-1} - \sqrt{-1}\Lambda_\omega\mathrm{tr}(Dh^{-1}\wedge hD_K^c h^{-1}). \tag{4.11}$$

因此，由以下恒等式即可完成证明

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega\mathrm{tr}(Dh\wedge h^{-1}D_K^c h) = |h^{-\frac{1}{2}}\cdot Dh|_K^2, \tag{4.12}$$

and

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega\mathrm{tr}(Dh^{-1}\wedge hD_H^c h^{-1}) = |h^{\frac{1}{2}}\cdot Dh^{-1}|_H^2. \tag{4.13}$$

□

由命题 4.3 和 2.5，我们得到以下推论。

推论 4.4。设 H_1、H_2 是两个调和度量，则 $H_1 = e^c H_2$，其中 $c\in\mathbb{R}$。

若 $H(t)$、$K(t)$ 是热流 (4.1) 的两个解，则使用与命题 4.3 相同的方法，我们可以轻易推出以下命题。

命题 4.5. 设 $H(t)$、 $K(t)$ 是热流 (4.1) 的两个解，则有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\sigma(H(t),K(t))=-|h^{-\frac{1}{2}}(t)\cdot Dh(t)|^2_{K(t)}-|h^{\frac{1}{2}}(t)\cdot Dh^{-1}(t)|^2_{H(t)}, \tag{4.14}$$

其中 $h(t)=K^{-1}(t)H(t)$。

命题 4.6. 设 H 和 K 是 NHYM 丛 (E,D) 上的两个厄米度量，则

$$\Delta\log(\mathrm{tr}h+\mathrm{tr}h^{-1})\geq -4|\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H|_H-4|\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K|_K, \tag{4.15}$$

其中 $h=K^{-1}H$。此外

$$\sup_X|\log(h)|_K\leq C_1\|\log(h)\|_{L^1(X,K)}+C_2, \tag{4.16}$$

其中 C_1和 C_2是正常数，仅依赖于 $\sup_X|\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H|_H$、$\sup_X|\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K|_K$以及 (X,ω) 的几何。

证明。利用（2.16），我们得到

$$\Delta\mathrm{tr}h\geq|h^{-\frac{1}{2}}\cdot Dh|^2_K-4\mathrm{tr}h\cdot(|\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H|_H+|\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K|_K), \tag{4.17}$$

and

$$\Delta\mathrm{tr}h^{-1}\geq|h^{\frac{1}{2}}\cdot Dh^{-1}|^2_H-4\mathrm{tr}h^{-1}\cdot(|\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H|_H+|\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K|_K). \tag{4.18}$$

结合（4.17）和（4.18），可得

$$\begin{aligned}\Delta(\mathrm{tr}h+\mathrm{tr}h^{-1})\geq{}&|h^{-\frac{1}{2}}\cdot Dh|^2_K+|h^{\frac{1}{2}}\cdot Dh^{-1}|^2_H\\&-4(\mathrm{tr}h+\mathrm{tr}h^{-1})\big(|\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_H|_H+|\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K|_K\big).\end{aligned} \tag{4.19}$$

另一方面，注意到

$$\Delta\log(\mathrm{tr}h+\mathrm{tr}h^{-1})=-\frac{|\mathrm{tr}(Dh)+\mathrm{tr}(Dh^{-1})|^2}{(\mathrm{tr}h+\mathrm{tr}h^{-1})^2}+\frac{\Delta(\mathrm{tr}h+\mathrm{tr}h^{-1})}{\mathrm{tr}h+\mathrm{tr}h^{-1}}. \tag{4.20}$$

结合（4.19）和（4.20），只需证明

$$\frac{|\mathrm{tr}(Dh)+\mathrm{tr}(Dh^{-1})|^2}{\mathrm{tr}h+\mathrm{tr}h^{-1}}\leq|h^{-\frac{1}{2}}\cdot Dh|^2_K+|h^{\frac{1}{2}}\cdot Dh^{-1}|^2_H,$$

由杨氏不等式可立即得到该结论。因此我们得到（4.15）。注意到

$$\log\big(\frac{1}{2r}(\mathrm{tr}(h)+\mathrm{tr}(h^{-1}))\big)\leq|\log(h)|_K\leq r^{1/2}\log(\mathrm{tr}(h)+\mathrm{tr}(h^{-1})). \tag{4.21}$$

应用莫泽迭代，我们完成了证明。 □

4.1. 热流的长时间存在性。本小节讨论热流 (4.1) 的解的长时间存在性。设 $H(t)$ 是具有初始度量 H_0 的 (4.1) 的一个解。令 $h(t) = H_0^{-1}H(t)$，则 (4.1) 可写为:

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = h(t)(\sqrt{-1}\Lambda_\omega D(h^{-1}(t)D^c_{H_0}h(t)) + 4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_{H_0}), \tag{4.22}$$

由上述公式可知，热流 (4.22) 是严格抛物型的，因此我们可以根据标准偏微分方程理论得到短时间存在性。

定理 4.7. 对于充分小的 $T > 0$，方程 (4.1) 存在一个光滑解 $H(t)$，其定义于 $0 \le t < T$。

下面我们将遵循 [7] 中的标准论证，证明 (4.1) 的长时间存在性。

引理 4.8. 设 $H(t)$ 是方程 (4.1) 的一个光滑解，定义于 $0 \le t < T < \infty$。则当 $t \to T$ 时，$H(t)$ 在 C^0-拓扑下收敛到某个连续非退化厄米度量 H_T。

*Pr*证明。给定 $\varepsilon > 0$，由 $t = 0$ 处的连续性可知，我们可以找到 $\delta > 0$，使得

$$\sup_X \sigma(H(t), H(t')) < \varepsilon, \quad \text{for } 0 < t, t' < \delta.$$

结合命题 4.5 和最大值原理可得

$$\sup_X \sigma(H(t), H(t')) < \varepsilon, \quad \text{for } T - \delta < t, t' < T.$$

这意味着 that $H(t)$ 是一个柯西序列，并收敛到连续度量 H_T .

因此，剩下需要证明 H_T 是非退化度量。通过直接计算可得

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\log \mathrm{tr} h(t)\right| \le |\Phi(H(t))|_{H(t)}, \tag{4.23}$$

and

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\log \mathrm{tr} h^{-1}(t)\right| \le |\Phi(H(t))|_{H(t)}. \tag{4.24}$$

因此，(4.23) 和 (4.24) 结合命题 4.1 表明，$\sigma(H(t)\ H_0)$ 在 $X \times [0, T)$ 上一致有界。因此，H_T 是非退化度量。□

采用与 [7], 相同的方法，可得以下引理。

引理 4.9. 设 $H(t)\ 0 \le t < T$ 是非厄米杨–米尔斯丛 E 上的一族厄米度量，其中 X。假设 $H(t)$ 在 C^0 拓扑下收敛到某个连续度量 H_T，当 $t \to T$ 时，且 $\sup_X |\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_{H(t)}|_{H(t)}$ 在 t 中一致有界，则 $H(t)$ 在 C^1 中有界，并且对任意 $1 < p < \infty$，在 L^p_2 中也有界。

定理 4.10. 方程 (4.1) 对于 $0 \le t < +\infty$ 存在唯一的长时间解 $H(t)$。

证明。由定理 4.7 可知，方程 (4.1) 的解 $H(t)$ 在短时间内存在，即定义于 $0 \leq t < T$。一方面，由引理 4.8 可推出，当 $t \to T$ 时， $H(t)$ 在 C^0-拓扑下收敛到非退化的连续度量 $H(T)$。另一方面，利用命题 (4.1) 和最大值原理可知，$\sup_X |\Lambda_\omega G_{H(t)}|_{H_0}$ 在 t 上一致有界。因此，由引理 4.9 可知， $H(t)$ 在 C^1 中有界，并且对于 $1 < p < \infty$，在 L_2^p 中也有界。最后，我们可以使用 Hamilton 方法（[14]）推出， $H(t)$ 在 C^∞-拓扑下收敛到 $H(T)$，且该解可以延拓至 T 之后。因此，方程 (4.1) 存在一个对所有时间均存在的解 $H(t)$。

由命题 4.5 和最大值原理，容易得到解的唯一性。□

接下来，我们将利用最大值原理推导解的 C^1-估计。设 $H(t)$ 是以初始度量 H_0 为初值的方程 (4.1) 的解。直接计算可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma(H_0, H(t)) + 2r) \leq 2|\Phi(H(t))|_{H(t)}(\sigma(H_0, H(t)) + 2r). \tag{4.25}$$

于是我们得到 $H(t)$ 的如下 C^0-估计。

命题 4.11. 设 $C = \sup_X \Phi(H_0)$，则

$$\sup_X \sigma(H_0, H(t)) \leq 2r(e^{Ct} - 1). \tag{4.26}$$

若将 F_D 的反自伴部分（分别地，自伴部分）记为 F_D^+（分别地，F_D^-），即 $F_D^+ = D_H^2 + \psi_H \wedge \psi_H$、 $F_D^- = D_H\psi_H$，则有

$$F_D = F_D^+ + F_D^-, \quad |F_D|_{H,\omega}^2 = |F_D^+|_{H,\omega}^2 + |F_D^-|_{H,\omega}^2. \tag{4.27}$$

通过直接计算，我们得到以下 Bochner 型公式

$$\begin{aligned} -\Delta|\psi_H|_{H,\omega}^2 =& -2\langle \Box^+\psi_H, \psi_H\rangle_{H,\omega} - 2|\nabla\psi_H|_{H,\omega}^2 - 2\langle \psi_H \circ Ric, \psi_H\rangle_{H,\omega} \\ & - 2|\psi_H \wedge \psi_H|_{H,\omega}^2 + 4\langle F_D^+, \psi_H \wedge \psi_H\rangle, \end{aligned} \tag{4.28}$$

其中 $\Box^+ = -D_H D_H^* - D_H^* D_H$ 且 $\psi_H \circ Ric = g^{jk} Ric_{ij} \psi_k dx^i$。因此我们可以轻易推出

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)|\psi_H|_{H,\omega}^2 =& -2|\nabla\psi_H|_{H,\omega}^2 - 2\langle \psi_H \circ Ric, \psi_H\rangle_{H,\omega} \\ & - 2|\psi_H \wedge \psi_H|_{H,\omega}^2 + 4\langle F_D^+, \psi_H \wedge \psi_H\rangle_{H,\omega} + 2\langle D_H^* D_H\psi_H, \psi_H\rangle_{H,\omega}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

由于 $\sqrt{-1}\Lambda_\omega D_H\psi_H = 0$，根据 K¨ahler 恒等式，有

$$D_H^* D_H\psi_H = \sqrt{-1}\Lambda_\omega D_H^c D_H\psi_H. \tag{4.30}$$

为简洁起见，我们将 ψ_H 的 (1, 0)部分记作 θ，则

$$\begin{aligned} D_H^c D_H\psi_H =& -[\theta^* \wedge \theta^*, \theta] + [\theta \wedge \theta, \theta^*] + [F_D^+, \theta^*] \\ & - [[\theta, \theta^*], \theta^*] - [F_D^+, \theta] + [[\theta, \theta^*], \theta]. \end{aligned} \tag{4.31}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\langle\sqrt{-1}\Lambda_\omega D_H^c D_H\psi_H,\psi_H\rangle_H =&|[\theta,\theta]|^2_{H,\omega}+|[\theta,\theta]|^2_{H,\omega}+\langle F_D^+,[\theta,\theta^*]\rangle_{H,\omega}\\ &-|[\theta,\theta]|^2_{H,\omega}+\langle F_D^+,[\theta,\theta^*]\rangle_{H,\omega}-|[\theta,\theta]|^2_{H,\omega}\\ =&2\langle F_D^+,\psi_H\wedge\psi_H\rangle_{H,\omega}.\end{aligned}\tag{4.32}$$

结合以上不等式，我们得到以下命题。

命题 4.12. 设 (E,D) 是紧致 K¨ahler 流形 (X,ω) 上的 NHYM 丛。给定任意 Hermitian 度量 H，我们有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)|\psi_H|^2_{H,\omega}=&-2|\nabla\psi_H|^2_{H,\omega}-2\langle\psi_H\circ Ric,\psi_H\rangle_{H,\omega}\\ &-2|\psi_{H,D}\wedge\psi_{H,D}|^2_{H,\omega}+8\langle F_D^+,\psi_H\wedge\psi_H\rangle_{H,\omega}.\end{aligned}\tag{4.33}$$

命题 4.13. 设 $T\in(0,+\infty]$。假设存在一个常数 $C_1>0$，使得

$$\sup_{X\times[0,T)}|\log(h)|_K<C_1,\tag{4.34}$$

那么存在一个仅依赖于 C_1 和 (X,ω) 的几何的常数 $C_2>0$，使得

$$\sup_{X\times[0,T)}|\psi_H|_{H,\omega}<C_2.\tag{4.35}$$

证明。直接计算可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\mathrm{tr}(h)=-|Dh\cdot h^{-1/2}|^2_{H,\omega}+\mathrm{tr}(h\cdot\Phi(H_0)).\tag{4.36}$$

由于 $|Dh\cdot h^{-1/2}|^2_{H,\omega}\geq\tilde{C}_1|\psi_H|^2_{H,\omega}-\tilde{C}_2$，我们有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\mathrm{tr}(h)\leq-\tilde{C}_1|\psi_H|^2_{H,\omega}+\tilde{C}_3.\tag{4.37}$$

根据命题 4.12，我们有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)|\psi_H|^2_{H,\omega}\leq\tilde{C}_4|\psi_H|^2_{H,\omega}.\tag{4.38}$$

考虑以下测试函数

$$f=A\cdot\mathrm{tr}(h)+|\psi_H|^2_{H,\omega},\tag{4.39}$$

其中常数 A 取足够大，使得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)f\leq-\tilde{C}_5|\psi_H|^2_{H,\omega}+\tilde{C}_6.\tag{4.40}$$

˜所有常数 C_i 仅依赖于 C_1、H_0 以及（X，ω）的几何。然后利用最大值原理，我们得到

$$\sup_{X\times[0,T)}|\psi_H|_{H,\omega}<C_2.\tag{4.41}$$

□

5. Proof of theorem 1.2

设 H（t）是方程（4.1）在初始度量 K下的一个解。不失一般性，我们可以假设初始度量 K 满足 tr（Φ（K））$=0$。与之前一样，我们令 h（t）$=K^{-1}H$（t），并令 s（t）=log（h（t））。

首先，我们证明以下引理，它将在定理 1.2 的证明中用到。

引理 5.1. 设 $\pi \in L_1^2(X, \mathrm{End}(E))$ 是一个投影映射，并且满足

$$\pi^2 = \pi^{*H} = \pi, \quad (Id - \pi)D\pi = 0 \tag{5.1}$$

在 X 上几乎处处成立。那么 $\pi \in C^\infty(X, \mathrm{End}(E))$，且 $\pi(E)$ 定义了 E 的一个 D-子丛。

证明。由上述条件，我们在分布意义下有 $d|\pi|_H^2 = d\mathrm{tr}(\pi^2) = 0$。因此，$|\pi|_H^2 := r_1 \le r$ 几乎处处成立，且对于 $0 < p \le +\infty$，有 $\pi \in L^p(X, \mathrm{End}(E))$。证明的其余部分与引理 2.3 完全相同。□

命题 5.2。假设 NHYM 丛 (E, D) 是简单的，则存在一个与 t 无关的常数 $C > 0$，使得

$$\|s(t)\|_{L^\infty} < C. \tag{5.2}$$

证明。沿用 Simpson 在 [24, 命题 5.3], 中的论证，我们将证明：若等式 (5.2) 不成立，则存在一个 D-不变子丛使单纯性不稳定。由命题 4.6 和命题 4.1，得

$$||s(t)||_{L^\infty} \le C_1||s(t)||_{L^1} + C_2,$$

其中 C_1, C_2 是与 t 无关的常数。因此，只需证明 $\|s(t)\|_{L^1} < C$。若不然，则存在一个子列 $t_i \to +\infty$，使得

$$\lim_{t_i \to +\infty} \|s(t_i)\|_{L^1} = +\infty. \tag{5.3}$$

令 $u_i = l_i^{-1}s(t_i)$，其中 $l_i = ||s(t_i)||_{L^1}$，则有 $||u_i||_{L^1} = 1$。此外，

$$\mathrm{tr}u_i = 0, \quad ||u_i||_{L^\infty} \le C. \tag{5.4}$$

根据 Donaldson 泛函的定义，我们有

$$\frac{d}{dt}M(K, H(t)) = -16\int_X |\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_{H(t)}|_{H(t)}^2 \frac{\omega^n}{n!}, \tag{5.5}$$

因此，对于 $t > 0$，有 $M(K, H(t)) < 0$。于是

$$\int_X \mathrm{tr}\Big(\big(-4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K\big)u_i\Big)\frac{\omega^n}{n!} + l_i\int_X \langle \Psi(l_iu_i)(Du_i), Du_i\rangle_K \frac{\omega^n}{n!} < 0. \tag{5.6}$$

考虑以下函数

$$l\Psi(lx, ly) = \begin{cases} \frac{e^{l(y-x)} - l(y-x) - 1}{l(y-x)^2}, & x \ne y, \\ l/2, & x = y. \end{cases} \tag{5.7}$$

根据 $||u_i||_{L^\infty} \leq C$，我们可以假设 $(x,y) \in [-C,C]\times[-C,C]$。于是我们很容易验证

$$l\Psi(lx,ly) \to \begin{cases} \frac{1}{x-y}, & x>y, \\ +\infty, & x \leq y, \end{cases} \tag{5.8}$$

随着 $l \to \infty$ 单调递增。令 $\zeta:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个正的光滑函数，满足 $\zeta(x,y) \leq \frac{1}{x-y}$，只要 $x>y$。于是，由 (5.6)、(5.8) 以及引理 5.4], [24, 中的论证可得

$$\int_X \mathrm{tr}\Big(\big(-4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K\big)u_i\Big)\frac{\omega^n}{n!} + \int_X \langle\zeta(u_i)(Du_i), Du_i\rangle_K \frac{\omega^n}{n!} \leq 0, \tag{5.9}$$

对于 $i \gg 0$。特别地，若取 $\zeta = \frac{1}{3C}$。显然可验证 $\frac{1}{3C} < \frac{1}{x-y}$，因为 $-C \leq x$、$y \leq C$ 和 $x>y$。这意味着

$$\int_X \mathrm{tr}\Big(\big(-4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K\big)u_i\Big)\frac{\omega^n}{n!} + \frac{1}{3C}\int_X |Du_i|_K^2 \frac{\omega^n}{n!} \leq 0,$$

对于 $i \gg 0$。于是我们有

$$\int_X |Du_i|_K^2 \frac{\omega^n}{n!} < +\infty.$$

因此，u_i 在 L_1^2 中有界。选取子列 $\{u_{ij}\}$，使得 $u_{ij} \rightharpoonup u_\infty$ 在 L_1^2 中弱收敛，为单纯性起见仍记为 u_i。注意到 $L_1^2 \hookrightarrow L^1$ 是紧的，故得

$$1 = ||u_i||_{L^1} \to ||u_\infty||_{L^1}.$$

这意味着 $||u_\infty||_{L^1} = 1$，且 u_∞ 是非平凡的。利用 (5.9)，并按照引理 5.4], [24, 中相同的讨论，我们得到

$$\int_X \mathrm{tr}\Big(\big(-4\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K\big)u_\infty\Big)\frac{\omega^n}{n!} + \int_X \langle\zeta(u_\infty)(Du_\infty), Du_\infty\rangle_K \frac{\omega^n}{n!} \leq 0. \tag{5.10}$$

通过与 [24], 中相同的论证，我们可以得到以下引理。

引理 5.3. u_∞ 的特征值几乎处处为常数。

证明。只需证明，对于任意 $\varphi:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$\mathrm{tr}(\varphi(u_\infty))$ 几乎处处为常数。首先，我们有

$$d\mathrm{tr}(\varphi(u_\infty)) = \mathrm{tr}(D\varphi(u_\infty)) = \mathrm{tr}(d\varphi(u_\infty)(Du_\infty)). \tag{5.11}$$

设 $N>0$ 是一个充分大的常数。选取 $\Upsilon:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得

$$\Upsilon(x,x) = d\varphi(x,x) \tag{5.12}$$

and

$$N\Upsilon^2(x,y) < \frac{1}{x-y} \tag{5.13}$$

对于 $x>y$。然后

$$\mathrm{tr}(d\varphi(u_\infty)(Du_\infty)) = \mathrm{tr}(\Upsilon(u_\infty)(Du_\infty)). \tag{5.14}$$

设 $\zeta = N\Upsilon^2$。由 (5.10)，可得

$$\int_X |\Upsilon(u_\infty)(Du_\infty)|_K^2 \frac{\omega^n}{n!} \leq \frac{4}{N}\int_X \mathrm{tr}(\sqrt{-1}\Lambda_\omega G_K u_\infty)\frac{\omega^n}{n!}. \tag{5.15}$$

综合以上结果，我们得到

$$\|d\mathrm{tr}(\varphi(u_\infty))\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{N}. \tag{5.16}$$

令 $N \to +\infty$，则得到 $d\mathrm{tr}(\varphi(u_\infty)) = 0$。 □

接下来，我们利用引理 5.1 关于 L_1^2 丛的结果，构造一个 D-不变子丛，从而与 (E, D) 的单纯性矛盾。令 $\lambda_1 < \cdots < \lambda_l$ 为 u_∞ 的互异特征值。由于 $\mathrm{tr}u_\infty = 0$ 且 $||u||_{L^1} = 1$，我们必有 $l \geq 2$。对于每个 $1 \leq \alpha \leq l-1$，定义函数 P_α，使得

$$P_\alpha = \begin{cases} 1, & x \leq \lambda_\alpha, \\ 0, & x \geq \lambda_{\alpha+1}. \end{cases}$$

设 $\pi_\alpha = P_\alpha(u_\infty)$。由 $[27, \mathrm{p}.887]$,，我们得到

(1) $\pi_\alpha \in L_1^2$; (2)

$\pi_\alpha^2 = \pi_\alpha = \pi_\alpha^{*K}$; (3) (I

d $- \pi_\alpha)D\pi_\alpha = 0$。

根据引理 5.1，$\{\pi_\alpha\}_{\alpha=1}^{l-1}$ 确定了 E 的 $l-1$ D-子丛，记为 E_α。由此得到矛盾。□

定理 1.2 的证明。我们已经证明，调和度量的存在性蕴含半单性。因此，我们只需证明反向结论也成立。这可由命题 5.2、命题 4.13 以及椭圆方程的正则性理论推出。□

致谢：本研究得到中国国家重点研发计划项目 2020YFA0713100 的资助。作者还部分得到国家自然科学基金项目 No.12141104、11801535 和 11721101 的资助。

References

[1] O.Biquard 和 P.Boalch，《曲线上的野非阿贝尔霍奇理论》，Compos. Math. 140 (2004), 179-204。[2] I.Biswas 和 H.Kasuya，《紧Sasakian流形上的Higgs 丛与平坦联络》，Comm. Math. Phys. 385 (2021), no. 1, 267-290。[3] I.Biswas 和 H.Kasuya，《紧Sasakian流形上的Higgs 丛与平坦联络 II：拟正则丛》，arXiv:2110.10644。[4] S.B.Bradlow、O.Garc´ıa-Prada 和 I. Mundet i Riera，《主对的相对Hitchin–Kobayashi对应》，Q. J. Math.54 (2003), 171-208。[5] T.C.Collins、A.Jacob 和 S.T.Yau，《非紧曲线上的平坦向量丛的Poisson度量》，Comm. Anal. Geom. 27 (2019), no. 3, 529-597。[6] K.Corlette，《带典范度量的平坦 G-丛》，J. Differential Geom., 28 (1988), no. 3, 361-382。[7] S.K.Donaldson，《复代数曲面上的反自对偶Yang–Mills联络与稳定向量丛》，伦敦数学会会刊 (3), 50 (1985), no. 1, 1-26。[8] S.K.Donaldson，《无穷行列式、稳定丛与曲率》，Duke Math. J. 54 (1987), no. 1, 231-247。

[9] S.K.Donaldson, 《扭曲调和映射与自对偶方程》, 伦敦数学会会刊 (3), 55 (1987), no. 1, 127-131。[10] J. Eells 和 J.H. Sampson, 《黎曼流形的调和映射》, Amer. J. Math. 86 (1964), 109-160。[11] O.Garc´ıa-Prada 和 I.Mundet i Riera, 《闭定向曲面的基本群在 $Sp(4, R)$中的表示》, Topology 43 (2004), no. 4, 831-855。[12] O.Garc´ıa-Prada、P. B.Gothen 和 I.Mundet i Riera, 《Higgs 丛与实辛群中的曲面群表示》, J. Topol. 6 (2013), no. 1, 64-118。[13] O.Guichard, 《平坦丛与 Higgs 丛微分几何导论》, 载于《Higgs 丛模空间的几何、拓扑与物理》, 1-63, Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap., 36, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018。[14] Richard S. Hamilton, 《带边界流形的调和映射》, 数学讲义, 第471卷, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975。[15] N.J.Hitchin, 《黎曼曲面上的自对偶方程》, 伦敦数学会会刊 (3), 55 (1987), no. 1, 59-126。[16] J.Jost 和 K.Zuo, 《拟射影流形基本群的调和映射与 Sl($r, \mathbb{C}$)-表示》, J. Algebraic Geom. 5 (1996), no. 1, 77-106。[17] J.Jost 和 K.Zuo, 《无限能量调和映射与拟射影簇基本群表示的刚性结果》, J. Differential Geom. 47 (1997), 469-503。[18] D.Kaledin 和 M.Verbitsky, 《非厄米杨–米尔斯联络》, Selecta Math. (N.S.) 4 (1998), no. 2, 279-320。[19] J.Y.Li 和 X.Zhang, 《Higgs 对的梯度流》, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 13 (2011), no. 5, 1373-1422。[20]T.Mochizuki, 《温和调和丛的Kobayashi-Hitchin对应及其应用》, Ast´erisque, 309. Soc. Math. France, Paris (2006), viii+117 页。[21] T.Mochizuki, 《温和调和丛的Kobayashi-Hitchin对应 II》, Geom. Topol. 13 (2009), 359-455[22] M.S.Narasimhan 和 C.S. Seshadri, 《紧黎曼曲面上的稳定向量丛与酉向量丛》, Ann. of Math. (2), 82 (1965), 540-567。[23]C.P.Pan、C.J.Zhang 和 X.Zhang, 《射影平坦丛与半稳定 Higgs 丛》, arXiv:1911.03593。[24] C.Simpson, 《利用杨–米尔斯理论构造霍奇结构变分及其在一致化中的应用》, J. Amer. Math. Soc., 1 (1988), no. 4, 867-918。[25] C.Simpson, 《非紧曲线上的调和丛》, J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), no. 3, 713–770。[26] C.Simpson, 《Higgs 丛与局部系统》, Inst. Hautes tudes Sci. Publ. Math., 75 (1992), 5-95。[27] K.K. Uhlenbeck 和 S.T.Yau, 《关于稳定向量丛上Hermitian Yang-Mills 联络的存在性》, Comm. Pure Appl. Math., 39 (1986), no. S, suppl., S257-S293。[28]D.Wu 和 X.Zhang, 《非紧K ¨ahler流形上的Poisson度量与Higgs 丛》, arXiv:2109.01776。

Changpeng Pan, School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, 210094,P.R. China,
电子邮箱：mathpcp@njust.edu.cn

Zhenghan Shen, School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, 210094,P.R. China, 电子邮箱：mathszh@njust.edu.cn

Xi Zhang, School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, 210094,P.R. China, 电子邮箱：mathzx@ustc.edu.cn