arXiv:2301.01433v1 [math.DG] 4 Jan 2023

Gauduchon 流形上的半稳定扭曲全纯向量丛

沈正翰

Abstract. 本文研究紧致 Gauduchon 流形上的半稳定扭曲全纯向量丛。通过使用乌伦贝克–姚连续性方法，我们证明，在紧致 Gauduchon 流形上，近似 Hermitian–Einstein 结构的存在性与扭曲全纯向量丛的半稳定性等价。作为应用，我们证明 Bogomolov 型不等式对半稳定扭曲全纯向量丛同样成立。

1. Introduction

设 M 为一个维数为 n 的复流形， g 为其上的一个厄米度量，其对应的 K¨ahler 形式为 ω。若厄米度量 g 满足

$$\partial\bar{\partial}\omega^{n-1}=0.$$

Gauduchon（[18]）已证明，每个厄米度量都与某个 Gauduchon 度量共形（当 $n\geq 2$ 时，除相差一个比例因子外唯一）。若 $\partial\bar{\partial}\omega^{n-2}=0$，则称厄米度量 ω 为 Astheno-K¨ahler 度量。Jost 和 Yau 在 [23]中引入了 Astheno-K¨ahler 的概念。在这种情况下，可以良好定义扭曲向量丛的第二陈数。本文中，若无特别说明，我们均假设 ω 是 Gauduchon 度量。

Giraud 在 [19], 引入了扭曲层，它们可以用几种等价的方式定义。它可以看作是定义在 M 的一个开覆盖上的一族层，并配有扭曲粘合；也可以看作是 M （[10]）上阿祖马亚代数的模层、 M 上 gerb 的层（[14, 19, 42]）等。这些对象在物理学中有诸多应用，可用于描述所谓的 B-场和 K-理论。值得一提的是，扭曲 K-理论更早已出现在数学物理文献中，用于研究量子霍尔效应（[11, 12]）。

近年来，厄米–爱因斯坦结构的存在性得到了广泛研究。经典的唐纳森–乌伦贝克–姚定理指出，紧致 K¨ahler 流形上的全纯向量丛若稳定，则存在 Hermitian–Einstein度量。Narasimhan 和 Seshadri（[34]）最初利用代数几何方法证明了这一结果，针对的是紧致黎曼曲面。随后，Donaldson（[15, 16, 17]）给出了 Narasimhan-Seshadri 定理的新证明，并将其推广到代数曲面和

2020年数学主题分类. 53C07, 57N16. 关键词和短语. 近似 Hermitian-Einstein 度量，扭曲向量丛，半稳定性，Gauduchon 流形.

代数流形上，所用方法是 Hermitian–Yang–Mills流。Uhlenbeck 和 Yau（[40, 41]）利用连续性方法证明了这一结果对一般紧致 K¨ahler 流形也成立。

反过来，若全纯丛带有厄米–爱因斯坦度量，则它必定是多重稳定；这一命题的逆命题也成立。Kobayashi（[29]）和 L¨ubke（[31]）分别独立证明了这一点。因此，稳定性的代数概念与全纯向量丛上厄米–爱因斯坦度量的存在性之间存在一一对应关系。这通常称为 Hitchin–Kobayashi对应（参见 [1, 4, 21, 32, 38] 及其中的参考文献）。这一对应关系有若干有趣的推广。例如，Li–Yau（[26]）研究了具有 Gauduchon 度量的 Hermitian流形上的对应关系；Hitchin（[20]）和 Simpson（[39]）研究了Higgs丛的情形，该理论在非阿贝尔霍奇理论中发挥着重要作用；Mochizuki（[33]）研究了非紧致 K¨ahler 流形上的此类对应关系；Biswas–Loftin–Stemmler（[7]）研究了仿射流形上的情形；Biswas–Kasuya（[5, 6]）研究了Sasakian流形上的情形；Zhang–Zhang– Zhang（[43]）研究了一些非紧致非 K¨ahler 流形上的情形。

若考虑较弱的稳定性条件，则半稳定性与近似Hermitian–Einstein度量之间也存在类似的对应关系。Kobayashi（[29]）提出了全纯向量丛的近似Hermitian–Einstein度量的概念。他证明，在紧致 K¨ahler 流形上，若全纯向量丛存在近似 Hermitian–Einstein 度量，则该向量丛必为半稳定。在 [8], Bruzzo 和 Gra˜na Otero 将上述结果推广到了 Higgs丛的情形。当基底流形为射影流形时，Kobayashi 证明了逆命题，并猜想该结论对一般的 K¨ahler 流形也成立。Li–Zhang（[25]）和 Jacob（[22]）分别独立地解决了一般 K¨ahler 流形情形下的问题。对于主丛情形，Biswas–Jacob–Stemmler（[2, 3]）对其进行了研究。最近，Nie–Zhang（[35]）证明，在紧 Gauduchon 流形上，Higgs 丛存在近似 Hermitian–Einstein 结构等价于其半稳定性。随后，Zhang–Zhang–Zhang（[43]）也研究了某些非紧 Gauducon 流形上的半稳定 Higgs 丛。

本文主要研究紧致 Gauduchon 流形上的扭曲向量丛。扭曲向量丛是在开覆盖上通过扭曲粘合得到的局部向量丛，这正是 C˘alda˘araru ([10, 13]) 的观点。设 $\mathscr{U}:=\{U_i\}_{i\in I}$ 是 M的一个固定开覆盖。相对于 $\mathscr{U}$， M 上的一个 B-场是一个族 $B=\{B_i\}_{i\in I}$，其中每个 B_i 都是 U_i 上的一个 2-形式，使得

$$B_i - B_j = d\beta_{ij}, \tag{1.1}$$

对某些 U_{ij} 上的 1-形式 $\beta_{ij}:=U_i\cap U_j$。注意到 $d(\beta_{ij}+\beta_{jk}+\beta_{ki})=0$，我们可以找到 U_{ijk} 上的 $U(1)$-值函数 α_{ijk}，使得 $=U_i\cap U_j\cap U_k$

$$\beta_{ij}+\beta_{jk}+\beta_{ki} = -\alpha_{ijk}^{-1}d\alpha_{ijk}, \tag{1.2}$$

当开覆盖 $\mathscr{U}$ 足够细时。于是 $\alpha_B:=\{\alpha_{ijk}\}$ 是一个 2-余循环，其上同调类属于 $H^2(M,\mathscr{O}_M^*)$，称为由 B诱导的扭曲。当不存在歧义时，我们将省略下标 B。一个 α-扭曲的全纯向量丛是一个二元组 $E:=(\{E_i\}_{i\in I},\{\varphi_{ij}\}_{i,\ j\in I})$，其中 E_i是 U_i上的全纯向量丛，并且

$$\varphi_{ij}: E_j|_{U_{ij}} \to E_i|_{U_{ij}}$$

是 U_{ij}上的全纯向量丛同构，满足对于每个 $i,j,k\in I$，都有 $\varphi_{ii}=\mathrm{Id}_{E_i},\varphi_{ij}^{-1}=\varphi_{ji}$以及 $\varphi_{ki}\circ\varphi_{jk}\circ\varphi_{ij}=\alpha_{ijk}\cdot\mathrm{Id}^{E|_{U_{ijk}}}$。这里，当不存在歧义时，我们通常省略 $^-$上的全纯 ∂_{E_i} 结构。容易看出，1-扭曲的全纯向量丛就是通常的全纯向量丛。

在 [42], S. Wang 证明了紧致 K¨ahler 流形上 gerbe 上扭曲全纯向量丛的 Hitchin–Kobayashi 对应。[42] 中的所有定义都属于扭曲全纯向量丛范畴，即将其视为 gerb 上的全纯向量丛。最近，A. Perego（[37]）将 Wang 的结果推广到了具有 Gauduchon 度量的复流形上。他还证明了紧致 K¨ahler 流形上近似 Hitchin–Kobayashi 对应的扭曲版本。受 Perego 工作的启发，我们研究紧致 Gauduchon 流形上扭曲全纯向量丛的近似 Hermitian–Einstein 度量情形。事实上，我们证明了以下定理。

定理 1.1. 令 $E=\{E_i,\varphi_{ij}\}_{i,j\in I}$ 为紧致 Gauduchon 流形（M,ω）上的一个秩为r 的 α-扭曲全纯向量丛。那么，当且仅当 E 是 ω-半稳定的，它才存在近似 Hermitian–Einstein 结构。

需要指出的是，Perego ([37]) 仅在底流形为 K¨ahler 流形时证明了上述定理。他主要采用 Jacob ([22]) 和 Kobayashi ([29]) 的方法，利用 Donaldson热流。证明依赖于 Donaldson拉格朗日量的性质。然而，当底流形仅为 Gauduchon 流形时，Donaldson拉格朗日量并没有良好定义。因此，他的论证无法直接推广到 Gauduchon 情形。本文将调整 Nie–Zhang 的论证 ([35]) 以适用于我们的情形，但在某些细节的处理上存在一些差异。

作为应用，我们得到以下 Bogomolov 型不等式。

定理 1.2. 设 $(M,\tilde{\omega})$ 是一个维数为 n 的紧致 Astheno-K¨ahler 流形，且ω 是一个与 $\tilde{\omega}$ 共形的 Gauduchon 度量。设 $E=\{E_i,\varphi_{ij}\}_{i,j\in I}$ 是 M 上秩为 r 的 α-扭曲全纯向量丛。若 E 是 ω-半稳定的，则有以下 Bogomolov 型不等式

$$\int_M\left(2c_2(E)-\frac{r-1}{r}c_1(E)\wedge c_1(E)\right)\wedge\frac{\tilde{\omega}^{n-2}}{(n-2)!}\geq 0. \tag{1.3}$$

Bogomolov 型不等式最初由 Bogomolov（[9]）针对复代数曲面上的半稳定全纯向量丛证明。随后，Lübke（[30]）将其推广到紧致 Kähler 流形上的 Hermitian–Einstein 向量丛。最近，Li–Nie–Zhang（[24]）在 Gauduchon Astheno-Kähler 流形上证明了 Bogomolov 型不等式。在扭曲情形下，Perego（[37]）针对紧致 Kähler 流形上的半稳定 α-扭曲全纯向量丛证明了 Bogomolov 型不等式。本文将沿用 Li–Nie–Zhang 的论证，证明 Bogomolov 型不等式。

本文结构如下。第 2 节简要介绍 α-扭曲全纯向量丛的一些记号，例如联络、曲率和半稳定性。第 3 节给出定理 1.1 的详细证明。第 4 节证明 Gauduchon Astheno-K¨ahler 流形上半稳定 α-扭曲全纯向量丛的 Bogomolov 型不等式。

2. 预备知识

本节将介绍本文中所使用的 α-扭曲向量丛的基本记号。我们沿用 [37] 的记号。

2.1. 厄米度量、联络与曲率。设 $E = \{E_i, \varphi_{ij}\}_{i,j\in I}$ 是紧致 Gauduchon 流形 (M, ω) 上的一个 α-扭曲全纯向量丛。E 上的一个厄米度量是一个联络 $H = \{H_i\}_{i\in I}$，其中 H_i 是 E_i 上的厄米度量，并且对于每个 i，$H_i = \varphi_{ij}^T H_j \bar{\varphi}_{ij}$，即对于任意 ξ，$\eta \in \Gamma(E_i)$，

$$H_i(\xi, \eta) = H_j(\varphi_{ij}(\xi), \varphi_{ij}(\eta)).$$

由于 α_{ijk} 是 $U(1)$ 值的，因此很容易看出该定义是良定义的。并且在一个 α-扭曲向量丛上总是存在厄米度量 $H = \{H_i\}_{i\in I}$（详情见 [37]）。

需要说明的是，在没有歧义时，H_i 也表示相对于给定局部标架的光滑函数矩阵，而 φ_{ij} 表示相对于 E_i 和 E_j 的所选局部标架的光滑函数矩阵。

α-扭曲向量丛上的一个联络是一族 $D = \{D_i\}_{i\in I}$，其中 D_i 是 E_i 上的一个联络，并且局部的联络 1-形式 A_i 满足

$$A_i = \varphi_{ij}^{-1} A_j \varphi_{ij} + \varphi_{ij}^{-1} d\varphi_{ij} + \beta_{ij} \cdot \mathrm{Id}_E.$$

关于扭曲丛上的联络的概念可参见 [28]。如果联络 $D = \{D_i\}_{i\in I}$ 与厄米度量 $H = \{H_i\}_{i\in I}$ 相容，则称其为与该度量相容；也就是说，对于任意 ξ、$\eta \in \Gamma(E_i)$，每个 D_i 都与 H_i 相容，

$$d(H_i(\xi, \eta)) = H_i(D_i(\xi), \eta) + H_i(\xi, D_i(\eta)).$$

在 E_i 的一个局部给定标架下，它通常表示为

$$dH_i = A_i^T H_i + H_i \bar{A}_i.$$

设 $F_D \in \Omega^2(\mathrm{End}(E))$ 为联络 $D = \{D_i\}_{i\in I}$ 的曲率形式。根据 [37], ，我们有

$$F_D|_{U_i} = F_{D_i} - B_i \cdot \mathrm{Id}_{E_i},$$

其中，对每个 $i \in I$，F_{D_i} 是 D_i 的曲率。全文中，我们假设 B-域 B 的每个 B_i 都是 U_i 上的 $(1, 1)$-形式，且 β_{ij} 是 U_{ij} 上的 $(1, 0)$-形式。于是，给定 α-扭曲全纯向量丛 E 上的厄米度量 H，存在唯一的 Chern 联络 D_H，它与厄米度量 H 以及 E 的全纯结构相容。事实上，我们有以下引理。

引理 2.1（ [37]中的引理 2.25）。设 E 是一个 α-扭曲全纯向量丛，且H 是 E上的厄米度量。

（1）存在唯一的联络 D_H，它同时兼容于 E 的全纯结构和厄米度量 H。（2）若 B-场的每个 B_i 对任意 $i \in I$都是一个（1, 1）-形式，则 $F_D \in \Omega^{1,1}(E$的端同态丛$)$。

令 $F_H \in \Omega^{1,1}(\mathrm{End}(E))$ 为 Chern 联络 D_H 的曲率形式，则有

$$F_H|_{U_i} = F_{H_i} - B_i \cdot \mathrm{Id}_{E_i},$$

其中 F_{H_i} 是 E_i 上 Chern 联络 D_{H_i} 的曲率形式。若 $E=\{E_i,\varphi_{ij}\}_{i,\ j\in I}$ 上的厄米度量$H=\{H_i\}_{i\in I}$ 满足 Chern 联络 D_H 的曲率F_H 满足以下条件，则称其为 Hermitian–Einstein度量

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H=\lambda\cdot \mathrm{Id}_E, \tag{2.1}$$

其中 Λ_ω d 表示由 ω对微分形式进行缩并，且 λ 是一个实常数。

若对每个 $\varepsilon>0$，都存在一个厄米度量$H_\varepsilon=\{H_{i,\varepsilon}\}_{i\in I}$，使得 α-扭曲全纯向量丛 $E=\{E_i,\varphi_{ij}\}_{i,j\in I}$具有近似 Hermitian–Einstein 结构，则称其

$$\max_X|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_\varepsilon}-\lambda\cdot \mathrm{Id}_E|_{H_\varepsilon}<\varepsilon. \tag{2.2}$$

2.2. 稳定性。设$E=\{E_i,\varphi_{ij}\}_{i,j\in I}$是一个秩为$r$ 的 α-扭曲全纯向量丛，且 $H=\{H_i\}_{i\in I}$是 E 上的一个厄米度量。那么(E,H)的第一 Chern 形式为

$$c_1(E,H)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{tr}(F_H)\in\Omega^{1,1}(M). \tag{2.3}$$

(E,H)的第二 Chern 形式为

$$c_2(E,H)=-\frac{1}{8\pi^2}\Big((\mathrm{tr}F_H)^2-\mathrm{tr}(F_H\wedge F_H)\Big). \tag{2.4}$$

度　　关于 ω Gauduchon 度量的 (E,H) 在 M 上的度定义为

$$\deg_\omega(E):=\int_M c_1(E,H)\wedge\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{2.5}$$

由于 ω 是 Gauduchon 度量，因此度的定义是良定义的，且独立于厄米度量 H 的选择。

设 $\mathscr{F}=\{\mathscr{F}_i,\varphi_{ij}\}_{i,j\in I}$ 是 M 上秩为 s 的 α-扭曲凝聚层。扭曲凝聚层稳定性的定义最初由 Lieblich（[27]）提出，而 A. Perego（[36, 37]）则以凝聚层扭曲粘合的语言研究了扭曲凝聚层的稳定性。给定一个秩为 s α 的扭曲凝聚层，其行列式 $\mathscr{F}=\{$ $\det(\mathscr{F}_i),\det(\varphi_{ij})\}_{i,j\in I}$ 是一个秩为 1 的局部自由 α^s-扭曲层。$\mathscr{F}$ 的 ω-度定义为

$$\deg_\omega(\mathscr{F}):=\deg_\omega(\det(\mathscr{F})). \tag{2.6}$$

若 $\mathscr{F}$ 非平凡，则 $\mathscr{F}$ 关于 ω 的斜率定义为

$$\mu_\omega(\mathscr{F})=\frac{\deg_\omega(\mathscr{F})}{\mathrm{rank}(\mathscr{F})}. \tag{2.7}$$

设 $E=\{E_i,\varphi_{ij}\}_{i,j\in I}$ 是 M 上的 α-扭曲全纯向量丛。若对 E 的每个真 α-扭曲凝聚子层 $\mathscr{F}$，均有以下关系，则称 E 是 ω-稳定（分别称为 ω-半稳定）的 α-扭曲全纯向量丛：

$$\mu_\omega(\mathscr{F})<\mu_\omega(E)\quad(\text{resp.}\quad\mu_\omega(\mathscr{F})\le\mu_\omega(E)). \tag{2.8}$$

2.3. 扭曲向量丛的自同态。本节接下来将介绍扭曲向量丛的自同态。设 $E = \{E_i, \varphi_{ij}\}_{i,j\in I}$ 是 M 上的一个 α-扭曲向量丛。自同态 $f\colon E \to E$ 是一个族 $f = \{f_i\}_{i\in I}$，其中 $f_i\colon E_i \to E_i$ 是 U_i 上 E_i 的一个自同态，并且对每个 i，$j \in I$，

$$\varphi_{ij} \circ f_i = f_j \circ \varphi_{ij}. \tag{2.9}$$

容易验证，f 的特征值在整个 M上都是光滑函数。事实上，若 λ_i 是 U_i 上的光滑函数，且 $\xi \in \Gamma(E_i)$是处处不为零的光滑截面，满足 $f_i(\xi) = \lambda_i\xi$，则

$$f_j(\varphi_{ij}(\xi)) = \varphi_{ij}(f_j(\xi)) = \varphi_{ij}(\lambda_i\xi) = \lambda_i\varphi_{ij}(\xi).$$

因此，λ_i 是 f_j 的一个特征值，且对应于处处不为零的光滑截面 $\varphi_{ij}(\xi)$。于是，f_i 的特征值拼接起来，构成 M上的全局函数。

给定$E = \{E_i, \varphi_{ij}\}_{i上的厄米度量j\in I}$，若自同态 f 相对于 H是自伴的，是指对任意 $i \in I$ 和 ξ，$\eta \in \Gamma(E_i)$，均有

$$H_i(f_i(\xi), \eta) = H_i(\xi, f_i(\eta)). \tag{2.10}$$

记为

$$\mathrm{Herm}(E, H) = \{f \in \mathrm{End}(E) | f^{*H} = f\},$$

and

$$\mathrm{Herm}^+(E, H) = \{f \in \mathrm{Herm}(E, H) | f > 0\},$$

其中，$f > 0$ 表示 f 的所有特征值均为正。若 $H = \{H_i\}_{i\in I}$ 和$K = \{K_i\}_{i\in I}$ 是 α-扭曲向量丛上的两个厄米度量，则对任意 $i \in I$和 ξ，$\eta \in \Gamma(E_i)$，自同态 $h = \{h_i\}_{i\in I}$ 定义为

$$H_i(\xi, \eta) = K_i(h_i\xi, \eta).$$

容易看出，$h = K^{-1}H$ 关于 H 和 K是自伴的。

对于任意 $h \in \mathbf{Herm}^+(E, K)$，我们可以选取一个开稠密子集 $W \subset M$，使得对于其中每个 $x_0 \in W$，都存在 x_0的一个开邻域 U_i、关于 K_i的局部酉基$\{e_j\}_{j=1}^r$ 以及函数 $\{\lambda_j \in C^\infty(U_i, \mathbb{R})\}_{i=1}^r$，满足

$$h(x) = \sum_{j=1}^{r} e^{\lambda_j(x)} e_j(x) \otimes e^j(x)$$

对所有 $x \in U_i$均成立，其中 $\{e^j\}_{j=1}^r$ 是与 $\{e_j\}_{j=1}^r$对应的对偶基。根据 [37, 引理 2.56]，我们有

$$\log h(x) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(x) e_j(x) \otimes e^j(x).$$

设 $\Psi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，$A = \sum_{i,\,j=1}^{r} A_{ij} e^i \otimes e_j \in$ 端同态丛(E)，且 $s \in \mathbf{Herm}(E, K)$。于是我们将 $\Psi(s)(A)$ 定义为

$$\Psi(s)(A) = \sum_{i,j=1}^{n} \Psi(\lambda_i, \lambda_j) A_{ij} e_i \otimes e^j.$$

3. Proof of Theorem 1.1

设 $E=\{E_i,\varphi_{ij}\}_{i,\ j\in I}$ 是紧致 Gauduchon 流形(M,ω)上的一个 α-扭曲全纯向量丛，其秩为 r 。假设 $H=\{H_i\}_{i\in I}$ 和 $K=\{K_i\}_{i\in I}$ 是 E 上的两个厄米度量。令 $D_H=\{D_{H_i}\}_{i\in I}$（分别为 $D_K=\{D_{K_i}\}_{i\in I}$）表示 (E,H)（分别为 (E,K)）的 Chern 联络。则对于任意 $i\in I$，有

$$\partial_{H_i}=\partial_{K_i}+h_i^{-1}\partial_{K_i}h_i, \tag{3.1}$$

其中 ∂_{K_i} 表示由 D_{K_i} 在端同态丛 $\mathrm{End}(E_i)$上诱导的联络的 (1,0) 部分。 F_{H_i} 与 F_{K_i} 之间的关系为

$$F_{H_i}=F_{K_i}+\bar\partial_i(h_i^{-1}\partial_{K_i}h_i). \tag{3.2}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}F_H|_{U_i}=&F_{H_i}-B_i\cdot\mathrm{Id}_{E_i}=F_{K_i}+\bar\partial_i(h_i^{-1}\partial_{K_i}h_i)-B_i\cdot\mathrm{Id}_{E_i}\\=&F_K|_{U_i}+\bar\partial_i(h_i^{-1}\partial_{K_i}h_i).\end{aligned} \tag{3.3}$$

因此，将它们粘合起来可得

$$F_H=F_K+\bar\partial(h^{-1}\partial_K h). \tag{3.4}$$

因此， H 在 α-扭曲全纯丛 E上满足厄米–爱因斯坦方程，当且仅当存在厄米度量 K 和 $h\in\mathrm{Herm}^+(E,K)$，使得

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_K-\lambda\cdot\mathrm{Id}_E+\sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar\partial(h^{-1}\partial_K h)=0. \tag{3.5}$$

现在，固定 $K=\{K_i\}_{i\in I}$ on α 扭曲全纯向量丛 $E=\{E_i,\varphi_{ij}\}_{i,\ j\in I}$ 上的一个适当的背景厄米度量，我们考虑以下扰动方程

$$\begin{aligned}L_\varepsilon(h_\varepsilon):=&\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_\varepsilon}-\lambda\cdot\mathrm{Id}_E+\varepsilon\log(h_\varepsilon)\\=&\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_K-\lambda\cdot\mathrm{Id}_E+\sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar\partial(h_\varepsilon^{-1}\partial_K h_\varepsilon)+\varepsilon\log(h_\varepsilon),\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中 $h_\varepsilon=K^{-1}H_\varepsilon\in\mathrm{Herm}^+(E,K)$ 且 $\varepsilon\in(0,1]$。显然， h_ε 和 $\log\ h_\varepsilon$ 关于 K 和 H_ε 在式 (2.10) 的意义下是自伴的。在 [37], ，Perego 通过连续性方法证明，对所有 $\varepsilon\in(0,1]$ ，方程 (3.6) 都有解。若 α 扭曲全纯向量丛 E 是半稳定的，我们可以证明

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\max_M|\log h_\varepsilon|_K=0. \tag{3.7}$$

这意味着当 $\varepsilon\to0$ 时，$\max_M|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_\varepsilon}-\lambda\cdot\mathrm{Id}_E|\to0$ 。因此，我们得到 E 上近似 Hermitian–Einstein 结构的存在性。

B在给出 (3.7) 的详细证明之前，我们需要以下两个引理 .

引理 3.1（ [37]中的引理 5.7）。设 M 上有一个 α-扭曲全纯向量丛 $E=\{E_i,\varphi_{ij}\}_{i,j\in I}$ ，且 E 上有一个厄米度量 K。若 $h\in\mathrm{Herm}^+(E,K)$ 满足$L_\varepsilon(h)=0$ ，其中 $\varepsilon>0$。

(1) 我们有

$$\frac{1}{2}\sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar\partial\partial(|\log(h)|^2)+\varepsilon|\log(h)|_K^2\le|\Phi(K)|_K\cdot|\log(h)|_K, \tag{3.8}$$

where $\Phi(K):=\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_K-\lambda\cdot\mathrm{Id}_E$.

(2) 如果 $m := \max_M |\log(h)|_K(x)$，那么我们有

$$m \leq \frac{1}{\varepsilon} \max_{x\in M} |\Phi(K)|_K(x). \tag{3.9}$$

(3) 存在一个实数 C （仅取决于 ω 和 K），使得

$$m \leq C(||\log h||_{L^2} + \max_M |\Phi(K)|_K). \tag{3.10}$$

引理 3.2. 设 $E = \{E_i, \varphi_{ij}\}_{i,j\in I}$ 是定义在 M 上的 α-扭全纯向量丛，且 $K = \{K_i\}_{i\in I}$ 是 E 上的厄米度量。若 $h_\varepsilon = \{h_{i,\varepsilon}\}_{i\in I} \in \mathrm{Herm}^+(E, K)$ 是方程 (3.6) 的解，其中 ε 为某个参数，则有

$$\int_M \mathrm{tr}(\Phi(K)s_\varepsilon)\frac{\omega^n}{n!} + \int_M \langle \Psi(s_\varepsilon(\bar\partial s_\varepsilon), \bar\partial s_\varepsilon)\rangle_K \frac{\omega^n}{n!} = -\varepsilon||s_\varepsilon||^2_{L^2}, \tag{3.11}$$

其中 $s_\varepsilon = \{s_{i,\varepsilon}\}_{i\in I} = \log h_\varepsilon$, $\Phi(K) = \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_K - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E$，并且

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{y-x}-1}{y-x}, & x \neq y; \\ 1, & x = y. \end{cases}$$

证明. 由于 h_ε 是方程 (3.6) 的解，因此有

$$\langle \Phi(K), s_\varepsilon\rangle_K + \langle \sqrt{-1}\Lambda_\omega \bar\partial(h_\varepsilon^{-1}\partial_K h_\varepsilon), s_\varepsilon\rangle_K = -\langle s_\varepsilon, s_\varepsilon\rangle. \tag{3.12}$$

在 M 上积分可得

$$\int_M \mathrm{tr}(\Phi(K)s_\varepsilon)\frac{\omega^n}{n!} + \int_M \langle \sqrt{-1}\Lambda_\omega \bar\partial(h_\varepsilon^{-1}\partial_K h_\varepsilon), s_\varepsilon\rangle_K \frac{\omega^n}{n!} = -||s_\varepsilon||_{L^2}. \tag{3.13}$$

因此，将 (3.13) 与 (3.11) 比较，只需证明

$$\int_M \langle \sqrt{-1}\Lambda_\omega \bar\partial(h_\varepsilon^{-1}\partial_K h_\varepsilon), s_\varepsilon\rangle_K \frac{\omega^n}{n!} = \int_M \langle \Psi(s_\varepsilon(\bar\partial s_\varepsilon), \bar\partial s_\varepsilon)\rangle_K \frac{\omega^n}{n!}. \tag{3.14}$$

简单计算可得（详见 [35] 中的命题 3.1）

$$\int_M \langle \sqrt{-1}\Lambda_\omega \bar\partial(h_\varepsilon^{-1}\partial_K h_\varepsilon), s_\varepsilon\rangle_K \frac{\omega^n}{n!} = \int_M \sqrt{-1}\mathrm{tr}(h_\varepsilon^{-1}\partial_K h_\varepsilon \wedge \bar\partial s_\varepsilon)\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{3.15}$$

另一方面，按照 [32], 中的方法，我们可以选取一个开稠密子集 $W \subset M$，使得对于每个 $x \in W$，都存在 x 的一个开邻域 $U_i \in \mathscr{U}$、关于 K_i 的 E_i 的一个局部酉基 $\{e_j\}_{j=1}^r$ 以及特征值 $\{\lambda_j \in C^\infty(U_i, \mathbb{R})\}_{j=1}^r$，满足

$$s_{i,\varepsilon}(y) = \sum_{j=1}^r \lambda_j(y) e_j(y) \otimes e^j(y),$$

对所有 $y \in U_i$均成立，其中 $\{e^j\}_{j=1}^r$是 E_i^*的对偶基。这里， λ_1、 $\cdots$、 λ_r是 s_ε的特征值（因而也是$s_{i,\varepsilon}$的特征值）。因此，我们有

$$\partial_{K_i} h_{i,\varepsilon}(x) = e^{\lambda_j}\partial\lambda_j e_j \otimes e^j + (e^{\lambda_k} - e^{\lambda_j})A_k^j e_j \otimes e^k,$$

and

$$\bar\partial s_{i,\varepsilon}(x) = \bar\partial\lambda_j e_j \otimes e^j + (\lambda_k - \lambda_j)(-\overline{A_j^k})e_j \otimes e^k,$$

其中 $\{A_j^k\}_{j、\,k=1}^r$ 是由 $\partial_{K_i} e_j = A_j^k e_k$ 定义的 (1, 0)-形式。于是，在每个 U_i 上，都有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\sqrt{-1}\Lambda_\omega(h_{i,\varepsilon}^{-1}\partial_{K_i}h_{i,\varepsilon}\wedge\bar\partial s_{i,\varepsilon})\\
&=\sum_{j=1}^r|\bar\partial\lambda_j|^2+\sum_{j\neq k}(e^{\lambda_k}-e^{\lambda_j})(\lambda_j-\lambda_k)\sqrt{-1}\Lambda_\omega A_k^j\wedge(-\overline{A_j^k})\\
&=\sum_{j=1}^r|\bar\partial\lambda_j|^2+\sum_{j\neq k}\frac{e^{\lambda_k-\lambda_j}-1}{\lambda_k-\lambda_j}(\lambda_k-\lambda_j)^2|-\overline{A_k^j}|^2\\
&=\sum_{j,k=1}^r\Psi(\lambda_j,\lambda_k)|(\bar\partial s_{i,\varepsilon})_j^k|^2.
\end{aligned}$$

由于两侧拼接在一起，我们得到

$$\mathrm{tr}\sqrt{-1}\Lambda_\omega(h_\varepsilon^{-1}\partial_K h_\varepsilon\wedge\bar\partial s_\varepsilon)=\sum_{j,k=1}^r\Psi(\lambda_j,\lambda_k)|(\bar\partial s)_j^k|^2.$$

用类似的论证，我们也可以证明

$$\langle\Psi(s)(\bar\partial s),\bar\partial s\rangle_K=\sum_{j,k=1}^r\Psi(\lambda_j,\lambda_k)|(\bar\partial s)_j^k|^2.$$

因此，我们得到

$$\langle\Psi(s)(\bar\partial s),\bar\partial s\rangle_K=\mathrm{tr}\sqrt{-1}\Lambda_\omega(h_\varepsilon^{-1}\partial_K h_\varepsilon\wedge\bar\partial s_\varepsilon). \tag{3.16}$$

结合 (3.15) 和 (3.16)，证明完毕。 □

下面我们准备证明定理 1.1。首先，我们证明半稳定性意味着存在于 α-扭曲全纯向量丛上的近似 Hermitian–Einstein 结构。事实上，我们有以下定理。

定理 3.3. 设 $E=\{E_i,\varphi_{ij}\}_{i,j\in I}$ 是 (M,ω) 上的 α-扭曲全纯向量丛。若 E 是 ω-半稳定的，则 E 上存在近似 Hermitian–Einstein 结构。即，

$$\max_M|\Phi(H_\varepsilon)|_{H_\varepsilon}\to 0,\quad as\quad \varepsilon\to 0. \tag{3.17}$$

证明. 设 K 是 E 上的一个背景厄米度量。不失一般性，我们可以假设厄米度量 K 满足

$$\mathrm{tr}(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_K-\lambda\cdot\mathrm{Id}_E)=0.$$

事实上，经过一次近似共形变换 $K=e^\phi\tilde K$，我们有

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega\bar\partial\partial\phi=-\frac{1}{r}\mathrm{tr}(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{\tilde K}-\lambda\cdot\mathrm{Id}_E), \tag{3.18}$$

其中，$\tilde K$ 是 E上的任意厄米度量。由于 $\int_M$迹$(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{\tilde K}-\lambda\cdot\mathrm{Id}_E)\frac{\omega^n}{n!}=0$，因此存在一个满足 (3.18) 的光滑函数 ϕ 。

令 $\{h_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ 为背景厄米度量 K下扰动方程 (3.6) 的解。于是我们有

$$||\log h_\varepsilon||_{L^2}^2 = -\frac{1}{\varepsilon}\int_M \langle \Phi(H_\varepsilon), \log h_\varepsilon\rangle_{H_\varepsilon}\frac{\omega^n}{n!},$$

其中 $\Phi(H_\varepsilon) = \sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_\varepsilon} - \lambda\cdot \mathrm{Id}_E$。根据 [37, 引理 5.2], ，我们还可以得到

$$\det(h_\varepsilon) = 1. \tag{3.19}$$

我们将分两种情形考察 $||\log h_\varepsilon||_{L^2}$ 的极限行为。

情形 1： $||\log h_\varepsilon||_{L^2}$ 有界。也就是说，存在一个常数 C_1，使得

$$||\log h_\varepsilon||_{L^2} < C_1 < +\infty.$$

在这种情形下，由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}\max_M |\Phi(H_\varepsilon)|_{H_\varepsilon} &= \varepsilon\cdot\max_M |\log h_\varepsilon|_{H_\varepsilon} < \varepsilon C\cdot(||\log h_\varepsilon||_{L^2} + \max_M |\Phi(K)|_K)\\ &\leq \varepsilon C(C_1 + \max_M |\Phi(K)|_K) \to 0\end{aligned}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时。

情形 2：$\limsup_{\varepsilon\to 0}||\log\ h_\varepsilon||_{L^2} = +\infty$。在这种情形下，若$E = \{E_i, \varphi_{ij}\}_{i,\ j\in I}$是 ω-半稳定的，则我们也有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\max_M |\Phi(H_\varepsilon)|_{H_\varepsilon} = 0. \tag{3.20}$$

我们将沿用 Simpson 的论证（[39]），证明若 (3.19) 不成立，则存在一个相干的 α-扭曲子层，进而与 E的 ω-半稳定性矛盾。

我们将用反证法证明 (3.20)。若 (3.20) 不成立，则存在 $\delta > 0$及一个子列 $\varepsilon_i\to 0$，当 $i\to+\infty$时，使得

$$||\log h_{\varepsilon_i}||_{L^2}\to+\infty$$

and

$$\max_M |\Phi(H_{\varepsilon_i})|_{H_{\varepsilon_i}} = \varepsilon_i\max_M |\log h_{\varepsilon_i}|_{H_{\varepsilon_i}} \geq \delta. \tag{3.21}$$

Set

$$s_{\varepsilon_i} = \log h_{\varepsilon_i}, l_i = ||s_{\varepsilon_i}||_{L^2}, u_{\varepsilon_i} = \frac{s_{\varepsilon_i}}{l_i}.$$

于是有 $||u_{\varepsilon_i}||_{L^2} = 1$。由 (3.19) 可得 $\mathrm{tr}(u_{\varepsilon_i}) = 0$。结合 (3.21) 与引理 3.1，可得

$$l_i \geq \frac{\delta}{C\varepsilon_i} - \max_M |\Phi(K)|_K \tag{3.22}$$

and

$$\max_M |u_{\varepsilon_i}| < \frac{C}{l_i}\left(l_i + \max_M |\Phi(K)|_K\right) < C_2 < +\infty. \tag{3.23}$$

下面我们将证明分为两个步骤。

步骤 1 我们将证明，当 $i\to+\infty$ 时， u_{ε_i} 弱收敛到 u_∞。我们需要证明 $||u_{\varepsilon_i}||_{L_1^2}$ 一致有界。由于 $||u_{\varepsilon_i}||_{L^2} = 1$，只需证明 $||\partial u_{\varepsilon_i}||_{L^2}$ 一致有界。

根据引理 3.11，对每个 h_{ε_i}，有

$$\int_M \mathrm{tr}(\Phi(K)u_{\varepsilon_i})\frac{\omega^n}{n!} + l_i\int_M \langle \Psi(l_i u_{\varepsilon_i})(\bar\partial u_{\varepsilon_i}, \bar\partial u_{\varepsilon_i})\rangle_K \frac{\omega^n}{n!} = -\varepsilon_i l_i. \tag{3.24}$$

结合 (3.22) 和 (3.24)，我们得到

$$\frac{\delta}{C} + \int_M \mathrm{tr}(\Phi(K)u_{\varepsilon_i})\frac{\omega^n}{n!} + l_i\int_M \langle \Psi(l_i u_{\varepsilon_i})(\bar\partial u_{\varepsilon_i}, \bar\partial u_{\varepsilon_i})\rangle_K \frac{\omega^n}{n!} \le \varepsilon_i \max_M |\Phi(K)|_K. \tag{3.25}$$

接下来，我们考虑函数

$$l\Psi(lx, ly) = \begin{cases} l, & x = y; \\ \frac{e^{l(y-x)}-1}{y-x}, & x \neq y. \end{cases} \tag{3.26}$$

由 (3.23)，我们可以假设 $(x, y) \in [-C_2, C_2] \times [-C_2, C_2]$。容易验证

$$l\Psi(lx, ly) \to \begin{cases} (x-y)^{-1}, & x > y; \\ +\infty, & x \le y, \end{cases} \tag{3.27}$$

随着 $l \to +\infty$ 单调递增。令 $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ 满足 $\zeta(x, y) < (x-y)^{-1}$当 $x > y$ 时。由 (3.25)、(3.27) 以及 [39, Lemma 5.4], 中相同的论证，当 i 足够大时，我们有

$$\frac{\delta}{C} + \int_M \mathrm{tr}(\Phi(K)u_{\varepsilon_i})\frac{\omega^n}{n!} + \int_M \langle \zeta(u_{\varepsilon_i})(\bar\partial u_{\varepsilon_i}, \bar\partial u_{\varepsilon_i})\rangle_K \frac{\omega^n}{n!} \le \varepsilon_i \max_M |\Phi(K)|_K. \tag{3.28}$$

特别地，我们取 $\zeta = \frac{1}{3C_2}$。容易验证，当 $(x, y) \in [-C_2, C_2] \times [-C_2, C_2]$ 且 $x > y$ 时，$\frac{1}{3C_2} < \frac{1}{x-y}$。这意味着

$$\frac{\delta}{C} + \int_M \mathrm{tr}(\Phi(K)u_{\varepsilon_i})\frac{\omega^n}{n!} + \int_M \frac{1}{3C_2}|\bar\partial u_{\varepsilon_i}|_K^2\frac{\omega^n}{n!} \le \varepsilon_i \max_M |\Phi(K)|_K,$$

对于 $i >> 0$。于是我们得到

$$\int_M |\bar\partial u_{\varepsilon_i}|_K^2 \le 3C_2^2 \max_M |\Phi(K)|_K \mathrm{Vol}(M).$$

因此，u_{ε_i} 在 L_1^2中有界。于是我们可以选取一个子序列 $\{u_{\varepsilon_{i_j}}\}$（为简便起见，仍记为 u_{ε_i}），使得 $u_{\varepsilon_i} \rightharpoonup u_\infty$ 在 L_1^2中弱收敛。由于 $L_1^2 \hookrightarrow L^2$，可得

$$1 = \int_M |u_{\varepsilon_i}|_{H_0}^2 \to \int_M |u_\infty|_K^2.$$

这表明 $||u_\infty||_{L^2} = 1$ 和 u_∞ 是非平凡的。然后利用（3.28），并按照 [39, 引理 5.4], 中的类似论证，我们有

$$\frac{\delta}{C} + \int_M \mathrm{tr}(\Phi(K)u_\infty)\frac{\omega^n}{n!} + \int_M \langle \zeta(u_\infty)(\bar\partial u_\infty, \bar\partial u_\infty)\rangle_K \frac{\omega^n}{n!} \le 0. \tag{3.29}$$

步骤 2 我们将使用 [40] 中的 Uhlenbeck 和 Yau 的技巧来构造一个 α-扭曲的凝聚子层，从而与 E的 ω-半稳定性相矛盾。在继续之前，我们需要以下引理。

引理 3.4（ [37]中的引理 5.12）。设 $E=\{E_i,\varphi_{ij}\}$ 是 M 上的一个 α-扭曲的全纯向量丛，其对应的局部自由 α-扭曲层为 $\mathscr{E}$。如果 $\pi\in L_1^2(\mathrm{End}(E))$是 E的一个弱收敛全纯 α-扭曲子丛，则存在$\mathscr{E}$ 的一个凝聚 α-扭曲子层 $\mathscr{F}$ 以及 M 的一个解析子集 S ，使得:

(1) S 在 M中的余维至少为 2；(2) $\pi_{|M\setminus S}\in A^0(E_{|_{M\setminus S}})$，并且具有 $\pi^*_{|M\setminus S}=\pi_{|M\setminus S}=\pi^2_{|M\setminus S}$ 和 $(\mathrm{Id}^{E|M\setminus S}-\pi_{|M\setminus S})\circ\partial(\pi_{|_{M\setminus S}})$；(3) $\mathscr{F}_{|_{M\setminus S}}$ 是$\pi_{|M\setminus S}$ 的像，并且是 E的一个 α-扭曲全纯子丛。

由 (3.29) 以及 [39, 引理 5.5], 中的方法可知，u_∞ 的特征值几乎处处为常数。设 u_∞ 的不同特征值为 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_l$。由于 $\mathrm{tr}(u_\infty)=\mathrm{tr}(u_{\varepsilon_i})=0$ 且 $||u_\infty||_{L^2}=1$，可知 u_∞的不同特征值为 $2\le l\le r$。于是，对于每个特征值 $\lambda_j\,(1\le l-1)$（它是 M上的全局函数），我们可以构造一个函数

$$P_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

使得

$$P_j=\begin{cases}1, & x\le\lambda_j,\\ 0, & x\ge\lambda_j.\end{cases}$$

我们记为 $\pi_j=\{\pi_{i,j}\}_{i\in I}=P_j(u_\infty)$。按照 [39], 中相同的论证，我们有

(i) $\pi_j\in L_1^2$(端同态丛(E)); (ii) $\pi_j^2=\pi_j=\pi_j^{*K}$;

(iii) $(Id_E-\pi_j)\circ\partial\pi_j=0$.

由引理 3.4 可知，弱收敛全纯 α-扭曲向量丛 $\{\pi_j\}_{j=1}^{l-1}$ 确定了 $l-1$ 个相干 α-扭曲子层，它们是 E 的子层。记为 $E_j=\{E_{i,j}\}_{i\in I}=\pi_j(E)$。由于 $\mathrm{tr}(u_\infty)=0$ 且 $u_\infty=\lambda_l\cdot\mathrm{Id}_E-\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\pi_j$，因此有

$$\lambda_l\mathrm{rank}(E)=\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\mathrm{rank}(E_j). \tag{3.30}$$

Set

$$\nu=\lambda_l\deg(E)-\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\deg(E_j). \tag{3.31}$$

一方面，将 (3.30) 直接代入 (3.31)，可得

$$\nu=\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\mathrm{rank}(E_j)\left(\frac{\deg(E)}{\mathrm{rank}(E)}-\frac{\deg(E_j)}{\mathrm{rank}(E_j)}\right). \tag{3.32}$$

另一方面，由扭曲高斯–科达齐方程（[37]），我们得到

$$\deg(E_j)=\int_M\mathrm{tr}(\pi_j\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_K)-|\bar\partial\pi_j|^2_K\frac{\omega^n}{n!} \tag{3.33}$$

然后将（3.33）代入（3.31），得到

$$\begin{aligned}2\pi\nu &= \lambda_l \int_M \mathrm{tr}(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_K)\frac{\omega^n}{n!} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\int_M \mathrm{tr}(\pi_j\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_K) - |\bar\partial\pi_j|_K^2\frac{\omega^n}{n!} \\ &= \int_M \mathrm{tr}\left(\left(\lambda_l\cdot \mathrm{Id}_E - \sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\pi_j\right)\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_K\right)\frac{\omega^n}{n!} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\int_M |\bar\partial\pi_j|_K^2\frac{\omega^n}{n!} \\ &= \int_M \mathrm{tr}(u_\infty\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_K)\frac{\omega^n}{n!} + \int_M \left\langle \sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)(dP_\alpha)^2(u_\infty)(\bar\partial u_\infty), \bar\partial u_\infty\right\rangle_K \frac{\omega^n}{n!},\end{aligned}$$

其中，函数 $dP_j\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 由下式定义

$$dP_j(x,y) = \begin{cases} \frac{P_j(x)-P_j(y)}{x-y}, & x\neq y; \\ P_j'(x), & x=y.\end{cases}$$

通过简单计算，若 $\lambda_a\neq\lambda_b$，我们有

$$\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)(dP_j)^2(\lambda_a,\lambda_b) = |\lambda_a-\lambda_b|^{-1}.$$

由于 $\mathrm{tr}(u_\infty)=0$，根据 (3.29) 以及 [25], 中的相同论证，可得

(3.34)

$$\begin{aligned}2\pi v &= \int_M \mathrm{tr}(u_\infty\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_K)\frac{\omega^n}{n!} + \int_M \left\langle \sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)(dP_\alpha)^2(u_\infty)(\bar\partial u_\infty), \bar\partial u_\infty\right\rangle_K \frac{\omega^n}{n!} \\ &< -\frac{\delta}{C}.\end{aligned}$$

结合 (3.32) 和 (3.34)，我们得到

$$\sum_{j=1}^{l-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\mathrm{rank}(E_j)\left(\frac{\deg(E)}{\mathrm{rank}(E)} - \frac{\deg(E_j)}{\mathrm{rank}(E_j)}\right) < 0.$$

这表明必定存在一项 $\mu(E)-\mu(E_{j_0})<0$，这与 E的ω-半稳定性矛盾。□

最后，我们证明定理 1.1 的另一个方向。事实上，我们得到如下定理。以下定理的证明是标准的，为方便读者起见，我们给出证明。

定理 3.5. 设 (M,ω) 是一个紧致 Gauduchon 流形，且 $E=\{E_i,\varphi_{ij}\}_{i,j\in I}$ 是其上的一个 α-扭曲全纯向量丛，其秩为 r。如果 E 具有近似 Hermitian–Einstein 结构，那么 E 是 ω-半稳定的。

B在给出详细证明之前，我们需要以下消灭定理 .

命题 3.6（[37] 中的命题 3.31）。设 E_1 和 E_2 是定义在 M 上的两个 α-扭曲全纯向量丛，其秩分别为 r_1 和 r_2，并假设

$$\frac{\deg_\omega(E_1)}{r_1}>\frac{\deg_\omega(E_2)}{r_2}.$$

若 E_1 和 E_2 具有近似 Hermitian–Einstein 结构，则每个态射 $f\in\mathrm{Hom}(E_1,E_2)$ 都为零。

定理 3.5 的证明。设 $\mathscr{E}$ 是与 E 相关联的局部自由 α-扭曲凝聚层，且 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{E}$ 的任意一个秩为 $0<p<r$ 的 α-扭曲凝聚子层。设 L 是对应于 $\det(\mathscr{F})$ 的 α^p-扭曲全纯线丛。我们考虑以下非扭曲全纯向量丛

$$G=\wedge^pE\otimes L^{-1},$$

其中 L^{-1} 是 L 的对偶 α^{-p}-扭曲线丛。按照 [37], 中相同的论证，我们知道 G 具有近似 Hermitian–Einstein 结构。由于 G 有一个非平凡的全纯截面，因此由命题 3.6 可得

$$\deg_\omega(G)\geq 0.$$

Then

$$\begin{aligned}0\leq\deg_\omega(G)&=\deg_\omega(\wedge^pE)-\mathrm{rank}(\wedge^pE)\deg_\omega(L)\\&=\deg_\omega(\wedge^pE)-\mathrm{rank}(\wedge^pE)\deg_\omega(\mathscr{F}).\end{aligned}$$

因此我们有

$$0\leq\mu_\omega(G)=\mu_\omega(\wedge^pE)-p\mu_\omega(\mathscr{F})=p(\mu_\omega(E)-\mu_\omega(\mathscr{F})).$$

这意味着 $\mu_\omega(\mathscr{F})\leq\mu_\omega(E)$，即 E 是 ω-半稳定的。 □

4. Bogomolov type inequality for semi-stable α-twisted holomorphic vector bundles

本节将证明紧 Gauduchon Astheno-K¨ahler 流形上半稳定的 α-扭曲全纯向量丛所满足的 Bogomolov 型不等式。在给出定理 1.2 的详细证明之前，我们需要以下引理。

引理 4.1. 设 $(M,\tilde{\omega})$ 是一个维数为 n 的紧Hermitian流形，且 ω 是与 $\tilde{\omega}$共形的 Gauduchon 度量。设 $E=\{E_i,\varphi_{ij}\}_{i,\ j\in I}$ 是 α-扭曲全纯向量丛，在 M 上的秩为 r。若 E 是 ω-半稳定的，则对于任意 $\varepsilon>0$，存在 E 上的厄米度量 $H_\varepsilon=\{H_{i,\varepsilon}\}_{i\in I}$，使得

$$\sup_M|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F^\perp_{H_\varepsilon}|_{H_\varepsilon}<\varepsilon, \tag{4.1}$$

其中 $F^\perp_{H_\varepsilon}=F_{H_\varepsilon}-\frac{1}{r}\mathrm{tr}F_{H_\varepsilon}\otimes\mathrm{Id}_E$ 是 F_{H_ε} 的无迹部分。

证明。由于 ω 与 $\tilde{\omega}$ 共形，因此存在一个光滑函数 ϕ，使得 t

$$\omega = e^{\phi}\tilde{\omega}.$$

于是，通过直接计算，对于任意厄米度量 H，我们有

$$\begin{aligned}\sup_M |\sqrt{-1}\Lambda_{\tilde{\omega}} F_H^{\perp}|_H &= \sup_M \left|\sqrt{-1}\Lambda_{\tilde{\omega}} F_H - \left(\frac{1}{r}\sqrt{-1}\Lambda_{\tilde{\omega}}\mathrm{tr}F_H\right)\otimes \mathrm{Id}_E\right| \\ &= \sup_M e^{\phi}\left|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega} F_H - \left(\frac{1}{r}\sqrt{-1}\Lambda_{\omega}\mathrm{tr}F_H\right)\otimes \mathrm{Id}_E\right|\end{aligned} \tag{4.2}$$

由于 $\sqrt{-1}\Lambda_{\omega}F_H$ 关于 H 自伴，我们知道 $\sqrt{-1}\Lambda_{\omega}F_H$ 的特征值均为实数。于是，对于任意 λ_1、$\cdots$、$\lambda_r \in \mathbb{R}$、$C \in \mathbb{R}$，我们有如下不等式

$$\sum_{j=1}^{r}(\lambda_j - \bar{\lambda}) \leq \sum_{j=1}^{r}(\lambda_j - C)^2,$$

其中 $\bar{\lambda} = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_j$。因此我们有

$$\left|\sqrt{-1}\Lambda_{\omega} F_H - \left(\frac{1}{r}\sqrt{-1}\Lambda_{\omega}\mathrm{tr}F_H\right)\otimes \mathrm{Id}_E\right| \leq |\sqrt{-1}\Lambda_{\omega}F_H - \lambda\cdot \mathrm{Id}_E|_H, \tag{4.3}$$

其中 $\lambda = \frac{2\pi}{\text{~~度~~}(E)\ r\text{体积}(M,\ \omega)}$。结合 (4.2) 和 (4.3) 可得

$$\sup_M |\sqrt{-1}\Lambda_{\tilde{\omega}} F_H^{\perp}|_H \leq e^{\sup_M \phi}\sup_M |\sqrt{-1}\Lambda_{\omega}F_H - \lambda\cdot \mathrm{Id}_E|_H. \tag{4.4}$$

由于 E 是 ω-半稳定的，根据定理 1.1，它在 E上存在一个近似 Hermitian–Einstein 结构。因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个厄米度量 H_{ε} 使得

$$\sup_M |\sqrt{-1}\Lambda_{\omega}F_{H_{\varepsilon}} - \lambda\cdot \mathrm{Id}_E|_{H_{\varepsilon}} < \varepsilon e^{-\sup_M \phi}. \tag{4.5}$$

将 (4.5) 与 (4.4) 结合，得到 (4.1)。 □

定理 1.2 的证明。设 $(M,\tilde{\omega})$ 是一个维数为 n 的紧致 Astheno-K¨ahler 流形，ω 是一个与 $\tilde{\omega}$共形的 Gauduchon 度量。设 $E = \{E_i, \varphi_{ij}\}_{i,\ j\in I}$ 是 M上的一个秩为 r 的 α-扭曲全纯向量丛。给定任意厄米度量 $H = \{H_i\}_{i\in I}$，回顾

$$c_1(E,H) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{tr}F_H, c_2(E,H) = -\frac{1}{8\pi^2}\Big((\mathrm{tr}F_H)^2 - \mathrm{tr}(F_H^2)\Big).$$

由于 $F_H^{\perp} = F_H - \frac{1}{r}\mathbf{tr}F_H\otimes \mathbf{Id}_E$，容易得到

$$\mathrm{tr}(F_H^2) = \frac{1}{r}(\mathrm{tr}F_H)^2 + \mathrm{tr}(F_H^{\perp}\wedge F_H^{\perp}).$$

于是我们有

$$\begin{aligned}&4\pi^2\left(2c_2(E,H) - \frac{r-1}{r}c_1(E,H)\wedge c_1(E,H)\right) \\ &= -\Big((\mathrm{tr}F_H)^2 - \mathrm{tr}(F_H^2)\Big) + \frac{r-1}{r}(\mathrm{tr}F_H)^2 = \mathrm{tr}(F_H^2) - \frac{1}{r}(\mathrm{tr}F_H)^2 \\ &= \mathrm{tr}(F_H^{\perp}\wedge F_H^{\perp}).\end{aligned}$$

根据黎曼双线性关系，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_M \left(2c_2(E) - \frac{r-1}{r}c_1(E)\wedge c_1(E)\right)\wedge\frac{\tilde{\omega}^{n-2}}{(n-2)!}\\
&= \int_M \left(2c_2(E,H) - \frac{r-1}{r}c_1(E,H)\wedge c_1(E,H)\right)\wedge\frac{\tilde{\omega}^{n-2}}{(n-2)!}\\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_M \mathrm{tr}(F_H^{\perp}\wedge F_H^{\perp})\wedge\frac{\tilde{\omega}^{n-2}}{(n-2)!}\\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_M |F_H^{\perp}|_{H,\tilde{\omega}} - |\sqrt{-1}\Lambda_{\tilde{\omega}}F_H^{\perp}|_H^2\frac{\tilde{\omega}^n}{n!}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

由于 E 是 ω-半稳定的，根据引理 4.1，对于每个 $\varepsilon>0$，存在一个厄米度量H_ε，使得

$$\sup_M |\sqrt{-1}\Lambda_{\tilde{\omega}}F_H^{\perp}|_{H_\varepsilon} \leq \varepsilon. \tag{4.7}$$

结合 (4.6) 和 (4.7)，并令 $\varepsilon\to 0$，我们得到

$$\int_M \left(2c_2(E) - \frac{r-1}{r}c_1(E)\wedge c_1(E)\right)\wedge\frac{\tilde{\omega}^{n-2}}{(n-2)!} \geq 0.$$

□

数据可用性声明：不适用。

致谢：作者谨向 Xi Zhang 教授和 Pan Zhang 博士致以谢意，感谢他们进行的有益讨论和提出的宝贵意见。本研究得到国家重点研发计划（2020YFA0713100）资助。作者还部分受到中国国家自然科学基金（编号：12141104 和 11721101）资助。

利益冲突：作者声明不存在利益冲突。

References

[1] L. ´Alvarez-C´onsul 和 O. Garc´ıa-Prada，Hitchin–Kobayashi 对应、箭图与涡旋，《数学物理通讯》238（2003），1-33。[2] I. Biswas、S. Bradlow、A. Jacob、M. Stemmler，紧黎曼曲面上主丛的近似厄米-爱因斯坦联络，《全球分析与几何年刊》44（2013），第3期，257-268。[3] I. Biswas、A. Jacob 和 M. Stemmler，半稳定主丛上近似厄米-爱因斯坦结构的存在性，《数学科学通报》136（2012），第7期，745-751。[4] I. Biswas、A. Jacob 和 M. Stemmler，仿射流形上的涡旋方程，《美国数学会会刊》366（2014），第7期，3925-3941。[5] I. Biswas 和 H. Kasuya，紧 Sasakian 流形上的Higgs丛与平坦联络，《数学物理通讯》385（2021），第1期，267-290。[6] I. Biswas 和 H. Kasuya，紧 Sasakian 流形上的Higgs丛与平坦联络，II：准正则丛，arXiv:2110.10644v1，2021。[7] I. Biswas、J. Loftin 和 M. Stemmler，仿射流形上的平坦丛，《阿拉伯数学杂志》2（2013），第2期，159-175。[8] U. Bruzzo 和 B. Gra˜na Otero，半稳定和数值有效Higgs丛上的度量，《纯粹与应用数学杂志》612（2007），59-79。

[9]F.A. Bogomolov，射影簇上的全纯张量与向量丛，《苏联数学消息》13（1979），第3期，499-555。[10] A. C˘ald˘araru，Calabi–Yau流形上扭曲层的导出范畴，博士论文，康奈尔大学，2000。[11] A.L. Carey、K.C. Hannabuss、V. Mathai、P. McCann，双曲平面上的量子霍尔效应，《数学物理通讯》190（1998），第3期，629-673。[12] A. Carey、K. Hannabuss、V. Mathai，无序存在时双曲平面上的量子霍尔效应，《数学物理快报》47（1999），第3期，215-236。[13] A. C˘ald˘araru、S. Katz 和 E. Sharpe，D-膜、B 场与Ext群，《理论与数学物理进展》7（2003），第3期，381-404。[14] D. Chatterjee，阿贝尔gerb的构造，博士论文，剑桥（1998）。[15] S.K. Donaldson，Narasimhan 和 Seshadri 定理的新证明，《微分几何杂志》18（1983），第2期，269-277。[16] S.K. Donaldson，复代数曲面上的反自对偶Yang–Mills联络与稳定向量丛，《伦敦数学会会刊》50（1985），第1期，1-26。[17] S.K. Donaldson，无穷行列式、稳定丛与曲率，《杜克数学杂志》54（1987），第1期，231-247。[18] P. Gauduchon，紧Hermitian流形的挠率1-形式，《数学年刊》267（1984），第4期，495-518。[19] J. Giraud，非阿贝尔上同调，《数学科学基础丛书》第179卷，施普林格出版社，柏林—纽约，1971。[20] N.J. Hitchin，黎曼曲面上的自对偶方程，《伦敦数学会会刊》55（1987），第1期，59-126。[21] I.M. i Riera，K ¨ahler纤维化的Hitchin–Kobayashi对应，《纯粹与应用数学杂志》528（2000），41-80。[22] A. Jacob，半稳定丛上近似厄米–爱因斯坦结构的存在性，《亚洲数学杂志》18（2014），第5期，859-883。[23] J. Jost 和 S.-T. Yau，从Hermitian流形到黎曼流形的映射的非线性椭圆系统及Hermitian几何中的刚性定理，《数学学报》170（1993），第2期，221-254。[24] C. Li、Y.C. Nie 和 X. Zhang，非K ¨ahler流形上的数值平坦全纯丛，《纯粹与应用数学杂志》790（2022），267-285。[25] J.Y. Li 和 X. Zhang，半稳定Higgs丛上近似厄米–爱因斯坦结构的存在性，《变分法与偏微分方程》52（2015），第3-4期，783-795。[26] J. Li 和 S.-T. Yau，非K ¨ahler流形上的Hermitian–Yang–Mills联络，《弦理论的数学方面》，第560-573页，《数学物理高级丛书》，世界科学出版社，新加坡，1987。[27] M. Lieblich，扭曲层模空间，《杜克数学杂志》138（2007），第1期，23-118。[28] M. Karoubi，扭曲丛与扭曲 K-理论，《Clay数学论文集》16（2012），223-257。[29] S. Kobayashi，复向量丛微分几何，《日本数学会出版物》第15卷，Kanˆo纪念讲座第5讲，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1987。[30] M. L ¨ubke，Hermite–Einstein向量丛的陈类，《数学年刊》260（1982），第1期，133-141。[31] M. L ¨ubke，Einstein–Hermitian向量丛的稳定性，《数学手稿》42（1983），第2-3期，245-257。[32] M. L ¨ubke 和 A. Teleman，Hermitian流形上的普适Kobayashi–Hitchin对应，《美国数学会回忆录》183（2006），第863号。[33] T. Mochizuki，解析稳定丛的Kobayashi–Hitchin对应，《美国数学会会刊》373（2020），第1期，551-596。[34] M.S. Narasimhan 和 C.S. Seshadri，紧黎曼曲面上的稳定向量丛与酉向量丛，《数学年刊》82（1965），540-567。

[35] Y.C. Nie 和 X. Zhang, 《紧致 Gauduchon 流形上的半稳定 Higgs 丛》, J. Geom. Anal., 28 (2018), no. 1, 627-642.[36] A. Perego, 《非射影 K3 曲面上稳定层模空间的 Kähler 性》, Algebr. Geom. 6 (2019), no. 4, 427-453.[37]A. Perego, 《扭曲向量丛的 Kobayashi–Hitchin 对应》, Complex manifolds, 8 (2021), no. 1, 1-95.[38] Z.H. Shen、C.J. Zhang 和 X. Zhang, 《非紧致仿射 Gauduchon 流形上的平坦 Higgs 丛》, J. Geom. Phys. 175 (2022), 104475.[39] C.T. Simpson, 《利用 Yang–Mills 理论构造 Hodge 结构变分及其在一致化中的应用》, J. Amer. Math. Soc., 1 (1988), no. 4, 867-918.[40] K. Uhlenbeck 和 S.-T. Yau, 《关于稳定向量丛上 Hermitian-Yang-Mills 联络的存在性》, Comm. Pure Appl. Math., 39 (1986), no. S, S257-S293.[41] K. Uhlenbeck 和 S.-T. Yau, 《关于我们先前论文"稳定向量丛上 Hermitian–Yang–Mills 联络的存在性"的补记》, Comm. Pure Appl. Math. 42 (1989), no. 5, 703-707.[42] S. Wang, 《Objective B-场与 Hitchin–Kobayashi 对应》, Trans. Amer. Math. Soc., 364 (2012), no. 4, 2087-2107.[43] C.J. Zhang、P. Zhang 和 X. Zhang, 《非紧致 Gauduchon 流形上的 Higgs 丛》, Trans. Amer. Math. Soc., 374 (2021), no. 5, 3735-3759.

Zhenghan Shen, School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, 210094,P.R. China, 电子邮件地址：mathszh@njust.edu.cn