arXiv:2301.01439v1 [math.NA] 4 Jan 2023

H（curl）椭圆问题的自适应混合内罚间断伽辽金方法的收敛性

K. Liu[1], M. Tang[2,*], X. Q. Xing[2] 和 L. Q. Zhong[2]

[1] 华东理工大学理学院，南昌，*330013*，中国[2] 华南师范大学数学科学学院，广州，*510631*，中国

摘要。 本文研究了 H($\boldsymbol{curl}$)-椭圆问题的自适应混合内罚间断伽辽金方法的收敛性。首先，通过引入一个新的中间变量，建立 H($\boldsymbol{curl}$)-椭圆问题的混合模型。随后，讨论基于内罚不连续伽辽金近似的连续变分问题和离散变分问题。接着，构造相应的后验误差指标，并证明能量误差与缩放误差指示子之和的收缩性。最后，通过数值实验验证并说明理论结果。

美国数学学会学科分类：65M15,65N12,65N30

关键词：自适应混合内罚不连续伽辽金方法，收敛性，$\boldsymbol{H}$($\boldsymbol{curl}$)-椭圆问题。

---

1. 引言

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为具有单个连通边界$\partial\Omega$的有界利普希茨多边形区域。我们考虑以下$\boldsymbol{H}$($\boldsymbol{curl}$)-椭圆问题

$$\nabla \times \mu \nabla \times \boldsymbol{u} + \kappa \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \tag{1.2}$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 是边界 $\partial\Omega$ 的单位法向量，$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$， μ 和 κ 是与初始剖分 $\mathcal{T}_0$ 相一致的分片常数，适用于 Ω ，并满足 $\mu_1 < \mu < \mu_2$ 和$\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$。这里， μ_i 和 $\kappa_i (i = 1、2)$ 是正常数。通过引入一个辅助

*通讯作者。电子邮箱：liukai@ecut.edu.cn (K. Liu), mingtang@m.scnu.edu.cn (M. Tang),xingxq@scnu.edu.cn(X. Q. Xing),zhong@m.scnu.edu.cn (L. Q. Zhong)

变量 $\boldsymbol{p} = \mu\nabla \times \boldsymbol{u}$，我们得到边值问题 (1.1)-(1.2) 的混合格式

$$\boldsymbol{p} = \mu\nabla \times \boldsymbol{u} \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{p} + \kappa \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \tag{1.5}$$

混合有限元方法非常适合处理高阶方程以及包含两个或更多未知函数的方程，因此受到广泛关注。对于混合有限元方法，关于麦克斯韦问题 [13] 和麦克斯韦特征值问题 [12, 14, 15]的研究成果却很少。

自适应有限元方法会根据解的奇异性自动细化和优化网格。这是一种可靠性高、效率高的数值计算方法。目前，椭圆方程自适应混合有限元方法的收敛性分析研究已相对完善。Chen、Holst 和 Xu [7] 证明了椭圆方程自适应混合有限元算法的收敛性。Du 和 Xie [10] 证明了对流扩散方程自适应混合有限元算法的收敛性。然而，关于自适应混合有限元方法对麦克斯韦方程组的后验误差估计子的研究成果却很少。例如，Carstensen 和 Ma [5] 证明了二阶线性非自伴不定椭圆问题自适应混合有限元方法的收敛性。Carstensen、Hoppe、Sharma 和 Warburton [4] 设计并分析了$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{curl})$-椭圆问题自适应混合协调有限元方法的后验误差估计。最近，Chung、Yuen 和 Zhong [8] 提出了交错间断伽辽金方法的后验误差分析。据我们所知，目前尚无关于边值问题(1.3)-(1.5)自适应混合有限元方法收敛性分析的已发表文献。本文的贡献是

- 构造一种新的误差估计子，其中传统 DG 方法的跳跃项不包含局部网格尺寸的负次幂；
- 采用 [2] 中使用的类似技术，证明自适应混合内罚间断伽辽金（AMIPDG）方法的收敛性。然而，[2] 中的这种技术不能直接用于混合形式。

我们在以下定理中给出主要结果。

定理 1.1. 设 $\{\mathcal{T}_k, \boldsymbol{U}_k, \boldsymbol{Q}_k, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k, \eta(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k; \mathcal{T}_k)\}_{k\geq 0}$ 为由***AMIPDG*** 算法生成的网格序列、有限元空间、混合离散解和后验误差估计指标。则存在常数 $\rho > 0$ 和 $\delta \in (0,1)$，它们取决于标记参数和初始网格的形状正则性 $\mathcal{T}_0$，使得

$$|||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{k+1}|||_{k+1}^2 + \rho\eta^2(\boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{p}_{k+1}; \mathcal{T}_{k+1}) \leq \delta\Big(|||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_k|||_k^2 + \rho\eta^2(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k; \mathcal{T}_k)\Big).$$

因此，对于给定的精度，***AMIPDG***方法将在有限次运算后终止。

为方便起见，我们用C 表示一个一般的正数常量，该常量在不同位置可能取不同值，并采用以下记号。带下标的常量C_i表示一个尤为重要的常量。$a \lesssim b$ 表示$a \leq Cb$，其中C是与网格尺寸无关的某个常量。

本文其余部分安排如下。第2节首先介绍连续变分问题、离散变分问题以及 AMIPDG 的步骤。第3节首先给出误差的上界估计，这是收敛性分析的关键；随后证明指示子约化以及 AMIPDG 算法的收敛性。第4节通过一些数值实验展示 AMIPDG 的有效性。

2. 自适应混合内罚间断伽辽金方法

本节介绍连续变分问题、混合内罚不连续有限元方法的离散变分问题，以及 AMIPDG 的步骤。

2.1. 连续变分问题

对于开连通有界区域$D \subset \mathbb{R}^3$，我们用$L^2(D)$（分别用$\boldsymbol{L}^2(D) := (L^2(D))^3$）表示$D$上平方可积函数（分别为向量场）构成的空间，其内积为 $(\cdot,\cdot)_{0,D}$。我们定义如下空间

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{curl};D) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(D) : \nabla \times \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(D)\},$$
$$\boldsymbol{H}(div;D) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(D) : \nabla \cdot \boldsymbol{u} \in L^2(D)\},$$

with

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{curl},D} := (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{0,D} + (\nabla \times \boldsymbol{u}, \nabla \times \boldsymbol{v})_{0,D}, \quad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{curl};D),$$
$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{div,D} := (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{0,D} + (\nabla \cdot \boldsymbol{u}, \nabla \cdot \boldsymbol{v})_{0,D}, \quad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}(div;D),$$

以及诱导范数:

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{curl},D} := \|\boldsymbol{u}\|^2_{0,D} + \|\nabla \times \boldsymbol{u}\|^2_{0,D}, \ \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{curl},D),$$
$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{div,D} := \|\boldsymbol{u}\|^2_{0,D} + \|\nabla \cdot \boldsymbol{u}\|^2_{0,D}, \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}(div,D),$$

分别地，其中 $\|\cdot\|_{L^2(D)} := (\cdot,\cdot)^{1/2}_D$ 表示空间 $L^2(D)$ 或 $\boldsymbol{L}^2(D)$的范数。我们还在迹意义下定义 $\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{curl};D) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{curl};D) : \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 0 \, on \ \partial D\}$。

接下来，我们首先定义两个空间$\boldsymbol{U} := \boldsymbol{H}_0(curl;\ \Omega)$, $\boldsymbol{Q} := \boldsymbol{L}^2(\Omega)$。然后，混合边值问题 (1.3)-(1.5) 的混合变分问题表述如下：求 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}) \in \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{Q}$，使得:

$$a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) - b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}) = \ell_1(\boldsymbol{q}), \qquad \forall \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{Q}, \tag{2.1}$$
$$d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}) + c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \ell_2(\boldsymbol{v}), \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}. \tag{2.2}$$

双线性型a、b、c以及泛函 $\ell_1(\cdot)$、 $\ell_2(\cdot)$定义如下:

$$a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) := (\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}), \tag{2.3}$$
$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}) := (\mu\nabla\times\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}), \tag{2.4}$$
$$c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := (\kappa\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \tag{2.5}$$
$$d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}) := (\nabla\times\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}) \tag{2.6}$$
$$\ell_1(\boldsymbol{q}) := 0, \tag{2.7}$$
$$\ell_2(\boldsymbol{v}) := (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}). \tag{2.8}$$

算子理论框架涉及算子 $\mathscr{A}$: $(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{Q})\to(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{Q})^*$，其定义如下

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}))(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}) := a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) - b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}) + d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}) + c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{U},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{Q}, \tag{2.9}$$

其中 $(\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{U})^*$是 $(\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{U})$的对偶空间。于是，我们可以将 (2.1)-(2.2) 重写为

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}))(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}) = \ell(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}), \tag{2.10}$$

其中 $\ell(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}) = \ell_1(\boldsymbol{q}) + \ell_2(\boldsymbol{v})$，且 ℓ_i由 (2.7)-(2.8) 给出。

接下来，我们在下面的引理中阐述变分问题 (2.1)-(2.2) 的适定性，该结果可见于 [3] 第3节。

引理 2.1。 在问题 (1.1)-(1.2) 的假设下， $\mathscr{A}$ 是连续且双射的线性算子。因此，对于任意 $\ell = (\ell_1,\ell_2)\in(\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{U})^*$，混合变分问题(2.1)-(2.2) 存在唯一解 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})\in(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{Q})$，其满足以下连续性条件

$$\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})\|_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{Q}} := (\|\boldsymbol{u}\|^2_{curl,\Omega} + \|\boldsymbol{p}\|_0^2)^{1/2} \lesssim \|\ell_1\|_{\boldsymbol{Q}^*} + \|\ell_2\|_{U^*}. \tag{2.11}$$

2.2. 离散变分问题

我们假设 $\mathscr{T}_h$ 是定义在 Ω 上的一族形状正则、拟一致且相容的四面体剖分。令$h_\tau = |\tau|^{1/3}$ 表示网格尺寸，其中 $|\tau|$ 为 $\tau\in\mathscr{T}_h$ 的体积。

定义间断有限元函数空间 $\mathbb{V}(\mathscr{T}_h)$ 如下:

$$\mathbb{V}(\mathscr{T}_h) = \{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}^2(\Omega) : \boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v}|_\tau \in (P_l(\tau))^3, \quad \forall\tau\in\mathscr{T}_h\},$$

其中$P_l(\tau)$ 表示定义在体积 τ 上的多项式集合，其次数不超过l，其中$l \geq 1$ 为整数。

令 $\mathscr{F}_h$、 $\mathscr{F}^0{}_h$和 $\mathscr{F}^\partial{}_h$分别表示其单元的所有面、内部面和边界面的集合。因此，$\mathscr{F}_h = \mathscr{F}^0{}_h \bigcup \mathscr{F}^\partial{}_h$。令 $H^1(\Omega;\ \mathscr{T}_h)$ 表示由分片索об列夫函数构成的空间，其定义为

$$H^1(\Omega;\mathscr{T}_h) = \left\{\boldsymbol{v}\in L^2(\Omega) : \boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v}|_\tau \in H^1(\tau), \quad \forall\ \tau\in\mathscr{T}_h\right\}.$$

以及 $\boldsymbol{H}^1(\Omega;\ \mathscr{T}_h)=(H^1(\Omega;\ \mathscr{T}_h))^3$。令 $\boldsymbol{L}^2(\mathscr{F}_h)$ 表示定义在 $\mathscr{F}_h$ 上的 $\boldsymbol{L}^2$ 函数集合。此外，我们定义以下内积

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\mathscr{T}_h'} &= \sum_{\tau\in\mathscr{T}_h'}\int_\tau \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},\quad \forall \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{L}^2(\Omega),\ \forall \mathscr{T}_h'\subset\mathscr{T}_h,\\
<\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}>_{\mathscr{F}_h'} &= \sum_{f\in\mathscr{F}_h'}\int_f \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s},\quad \forall \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{L}^2(\mathscr{F}_h),\ \forall \mathscr{F}_h'\subset\mathscr{F}_h.
\end{aligned}
$$

对于$f\in\mathscr{F}^0{}_h$，有 $\tau_i\in\mathscr{T}_h(i=1,2)$，使得$f=\partial\tau_1\cap\partial\tau_2$。然后将$\boldsymbol{v}$ 的跳跃和平均值记为：

$$
\begin{aligned}
[[\boldsymbol{v}]] &= \boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{n}_2,\quad \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^1(\Omega;\mathscr{T}_h),\\
\{\{\boldsymbol{v}\}\} &= \frac{\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2}{2},\quad \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^1(\Omega;\mathscr{T}_h),
\end{aligned}
$$

其中$\boldsymbol{v}_i$表示$\boldsymbol{v}$在$\boldsymbol{v}|_{\tau_i}(i=1,2)$上的取值，$\boldsymbol{n}_i$表示$f$外部$\boldsymbol{v}|_{\tau_i}$上的外法向单位法向量。

对于$f\in\mathscr{F}^\partial{}_h$，有 $\tau\in\mathscr{T}_h$，使得$f=\partial\tau\cap\partial\Omega$。然后将$\boldsymbol{v}$ 的跳跃和平均值记为：

$$
[[\boldsymbol{v}]]=\boldsymbol{v}_\tau\times\boldsymbol{n}_{\partial\Omega},\ \{\{\boldsymbol{v}\}\}=\boldsymbol{v}_\tau. \tag{2.12}
$$

接下来，给出式（2.1）–（2.2）对应的离散格式。首先，定义相应的离散空间如下

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{U}_h:=\{\boldsymbol{v}_h\in\mathbb{V}(\mathscr{T}_h)|\quad [[\boldsymbol{v}_h]]|_f=0,\forall f\in\mathscr{F}_h^\partial\},\\
&\boldsymbol{Q}_h:=\mathbb{V}(\mathscr{T}_h).
\end{aligned}
$$

于是，离散混合内罚间断伽辽金（MIPDG）方法的表述为：求 $(\boldsymbol{u}_h、\boldsymbol{p}_h)\in(\boldsymbol{U}_h,\boldsymbol{Q}_h)$，使得

$$
a_h(\boldsymbol{p}_h,\boldsymbol{q}_h)-b_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{q}_h)=\ell_{1,h}(\boldsymbol{q}_h)+d_{1,h}(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{q}_h),\qquad \forall\boldsymbol{q}_h\in\boldsymbol{Q}_h, \tag{2.13}
$$

$$
d_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{p}_h)+c_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)=\ell_{2,h}(\boldsymbol{v}_h)+d_{2,h}(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h),\qquad \forall\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{U}_h, \tag{2.14}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&a_h(\boldsymbol{p}_h,\boldsymbol{q}_h):=(\boldsymbol{p}_h,\boldsymbol{q}_h)_{\mathscr{T}_h},\\
&b_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{q}_h):=(\mu\nabla\times\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{q}_h)_{\mathscr{T}_h},\\
&c_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h):=(\kappa\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)_{\mathscr{T}_h},\\
&d_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{p}_h):=(\nabla\times\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{p}_h)_{\mathscr{T}_h},\\
&\ell_{1,h}(\boldsymbol{q}_h):=0,\\
&\ell_{2,h}(\boldsymbol{v}_h):=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_h)_{\mathscr{T}_h},\\
&d_{1,h}(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{q}_h):=-<\{\{\mu\boldsymbol{q}_h\}\},[[\boldsymbol{u}_h]]>_{\mathscr{F}_h},\\
&d_{2,h}(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h):=<(\{\{\mu\nabla\times\boldsymbol{u}_h\}\}-\alpha h_f^{-1}[[\boldsymbol{u}_h]]),[[\boldsymbol{v}_h]]>_{\mathscr{F}_h},
\end{aligned}
$$

此处，常数 $\alpha > 0$ 表示惩罚参数，h_f 表示f的外接圆直径。因此$h_\tau \approx h_f$。

注2.1。 双线性项中 $\nabla \times \boldsymbol{u}_h$ 的计算是分片推导。

边值问题 (1.1)-(1.2) 的标准对称内罚间断伽辽金（IPDG）方法是求解 $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{U}_h$，使得

$$\begin{aligned} & a_{IP}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) \\ & \quad := (\kappa \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + (\mu \nabla \times \boldsymbol{u}_h, \nabla \times \boldsymbol{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - < \{\{\mu \nabla \times \boldsymbol{v}_h\}\}, [[\boldsymbol{u}_h]] >_{\mathscr{F}_h} \\ & \qquad - < \{\{\mu \nabla \times \boldsymbol{u}_h\}\}, [[\boldsymbol{v}_h]] >_{\mathscr{F}_h} + \alpha h_f^{-1} < [[\boldsymbol{u}_h]], [[\boldsymbol{v}_h]] >_{\mathscr{F}_h} \\ & \quad = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h)_{\mathcal{T}_h}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

下面的引理表明，离散变分问题 (2.13)-(2.14) 和 (2.15) 是等价的。

引理 *2.2*。 *[[3], 定理 4.1]* 公式 *(2.13)-(2.14)* 和 *(2.15)* 在形式上等价，具体如下：若 $(u_h、p_h) \in (U_h、Q_h)$ 是离散变分问题 *(2.13)-(2.14)* 的解，则 $u_h \in U_h$ 是 *(2.15)* 的解。反之，若 $u_h \in U_h$ 是 *(2.15)* 的解，则存在某个 $p_h \in Q_h$，使得 $(u_h、p_h) \in (U_h、Q_h)$ 是 *(2.13)-(2.14)* 的解。

Ayuso de Dios、Hiptmair 和 Pagliantini 在 [1] 的第2节中证明了 (2.15) 的适定性。因此，结合引理 2.2，我们得到离散变分问题 (2.13)-(2.14) 的适定性。

2.3. 自适应混合内罚间断伽辽金方法（AMIPDG）

我们的自适应循环可通过以下算法实现：接下来，我们将详细讨论 AEFEM 中的每个步骤。

2.3.1. 求解过程

对于 $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$，以及形状正则网格 $\mathcal{T}_k$，设 $(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k)$ 为 (2.13)-(2.14) 的精确混合内罚间断伽辽金解。这里，我们假设可以准确求得解 $(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k)$。

2.3.2. 估计过程

后验误差指标是自适应算法的重要组成部分。它们是依赖于计算所得解和数据的可计算量，能够提供有关逼近质量的信息，因此可用于合理地修改网格。本文为方程 (2.13)- (2.14) 设计了一种新的后验误差估计指标，与 [20] 中的指标类似。对于 $\tau \in \mathcal{T}_h$，$f \in \mathscr{F}_h$和 $(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h) \in \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{Q}_h$，对称自适应混合内罚间断伽辽金方法的残量型后验误差估计量定义为

$$\begin{aligned} \eta^2(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h; \tau) : \; = \; & \|R_1(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h)\|^2_{L^2(\tau)} + h_\tau^2 \big(\|R_2(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h)\|^2_{L^2(\tau)} + \|R_3(\boldsymbol{v}_h)\|^2_{L^2(\tau)} \big) \\ & + \sum_{f \in \partial \tau} h_f \big(\|J_1(\boldsymbol{q}_h)\|^2_{L^2(f)} + \|J_2(\boldsymbol{v}_h)\|^2_{L^2(f)} \big). \end{aligned} \tag{2.16}$$

算法 2.1 自适应混合内罚间断伽辽金方法（AMIPDG）循环

输入 初始三角剖分 $\mathscr{T}_0$；数据$\boldsymbol{f}$；容差 tol；标记参数 $\theta \in (0,1)$。**输出** 三角剖分 $\mathscr{T}_J$；混合内罚间断伽辽金解 $(\boldsymbol{u}_J, \boldsymbol{p}_J)$。
$\eta = 1;\ k = 0;$
当 $\eta \geq tol$ **时**
求解 在 $\mathscr{T}_k$ 上求解离散变分问题 (2.13)-(2.14)，得到解 $(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k)$；**估计** 利用 (2.17) 计算后验误差估计子 $\eta = \eta(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k, \mathscr{T}_k)$；
标记 寻找最小基数 $\mathscr{M}_k \subset \mathscr{T}_k$，使得

$$\eta^2\left(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k, \mathscr{M}_k\right) \geq \theta \eta^2\left(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k, \mathscr{T}_k\right);$$

细化 $\mathscr{M}_k$ 中的单元以及相邻单元，将其二分以形成协调的 $\mathscr{T}_{k+1}$；$k = k+1$；**结束**$\boldsymbol{u}_J = \boldsymbol{u}_k$；$\boldsymbol{p}_J = \boldsymbol{p}_k$；$\mathscr{T}_J = \mathscr{T}_k$；

它们由单元残差和面跳跃残差组成，如下所示

$$\begin{aligned}
&R_1(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h)|_\tau := \boldsymbol{q}_h|_\tau - \mu \nabla \times \boldsymbol{v}_h|_\tau,\\
&R_2(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h)|_\tau := \boldsymbol{f}|_\tau - (\nabla \times \boldsymbol{q}_h + \kappa \boldsymbol{v}_h)|_\tau,\\
&R_3(\boldsymbol{v}_h)|_\tau := \nabla \cdot (\boldsymbol{f}|_\tau - \kappa \boldsymbol{v}_h|_\tau),\\
&J_1(\boldsymbol{q}_h)|_f := [[\boldsymbol{q}_h]],\\
&J_2(\boldsymbol{v}_h)|_f := [[(\boldsymbol{f} - \kappa \boldsymbol{v}_h)]].
\end{aligned}$$

其中，h_f 表示f 的外接圆直径，而$h_\tau \approx h_f$。
对于任意集合 $\mathscr{T}'_h \subseteq \mathscr{T}_h$，误差指示子定义为

$$\eta^2(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h; \mathscr{T}'_h) = \sum_{\tau \in \mathscr{T}'_h} \eta^2(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h; \tau). \tag{2.17}$$

2.3.3. 标记过程

我们采用 Dörfler 标记，该方法由 Dörfler [9]提出。设标记参数为 $\theta \in (0,1)$，模块 MARK 输出一个基数最小的已标记单元子集 $\mathscr{M}_k \subset \mathscr{T}_k$，使得

$$\eta^2(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{q}_k; \mathscr{M}_k) \geq \theta \eta^2(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{q}_k; \mathscr{T}_k). \tag{2.18}$$

2.3.4. 细化过程

我们的**细化** 实现采用最长边二分策略。关于最长边二分策略的详细介绍见 [6]。为避免混淆，我们将彼此嵌套的两个四面体网格 $\mathscr{T}_h$ 和 $\mathscr{T}_H$ 之间的关系定义如下：

$\mathscr{T}_h$ 表示 $\mathscr{T}_H$ 经过上述循环过程的一轮后得到的新网格划分，简称为 $\mathscr{T}_H \leq \mathscr{T}_h$。

3. AMIPDG 算法的收敛性

本节将建立误差的上界估计。随后，我们证明连续两次自适应循环之间的能量误差与误差估计子之和是收缩的。最后，我们证明 AMIPDG 是收敛的。

3.1. 误差的上界估计

在本小节中，在建立后验误差估计子的可靠性之前，我们需要定义相应的 DG 范数。对于任意 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in \boldsymbol{U}\times\boldsymbol{Q}$ 以及 $(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{q}_h)\in \boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{Q}_h$,

$$\begin{aligned}|||(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}) - (\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{q}_h)|||_{DG}^2 &:= \|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\kappa(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}\|\mu\nabla\times(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(\tau)}^2 + \sum_{f\in\mathscr{F}_h}\alpha h_f^{-1}<[[\boldsymbol{v}_h]],[[\boldsymbol{v}_h]]>_f . \end{aligned} \tag{3.1}$$

注 3.1. 对于任意 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{U}_h$，有

$$\|[[\boldsymbol{v}_h]]\|_{L^2(f)}^2 = \|[[(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)]]\|_{L^2(f)}^2, \quad \forall f\in\mathscr{F}_h.$$

事实上，$\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{U}$ 意味着 $[[\boldsymbol{v}]]|_f = 0$ （参见 *[16]* 第 *5* 章）。

本小节将主要结果总结如下。

定理 3.1. 设 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})\in\mathbf{U}\times\boldsymbol{Q}$ 和 $(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)\in\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{Q}_h$ 分别为(2.1)-(2.2)和(2.13)-(2.14)的解。设 $\eta(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h)$ 为(2.17)的残差误差指示子。则有以下估计

$$|||(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})-(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)|||_{DG}^2 \leq C_1\eta^2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h), \tag{3.2}$$

其中常数 C_1 取决于网格的形状正则性。

设 $(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)\in\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{Q}_h$ 为 (2.13)-(2.14) 的解。类似地， [4], 我们引入 MSIPDG 方法的非协调性，由此产生一些相容性误差:

$$\zeta := \min_{\tilde{\boldsymbol{v}}_h\in\boldsymbol{U}}\Big(\sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}(\|\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_{L^2(\tau)}^2 + \|\nabla\times(\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|_{L^2(\tau)}^2)\Big)^{1/2}. \tag{3.3}$$

我们记 $\tilde{\boldsymbol{u}}_h\in\boldsymbol{U}$ 为 (3.3) 的唯一极小化解，即

$$\tilde{\zeta} = \Big(\sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}(\|\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h\|_{L^2(\tau)}^2 + \|\nabla\times(\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h)\|_{L^2(\tau)}^2)\Big)^{1/2}. \tag{3.4}$$

引理3.1. 设 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})\in\mathbf{U}\times\boldsymbol{Q}$ 和 $(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)\in\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{Q}_h$ 分别为 (2.1)-(2.2) 和(2.13)-(2.14)的解，令 $\tilde{\boldsymbol{u}}_h$ 为(3.3)的唯一极小化解，则

$$\|(\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h)\|_{\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{Q}}=(\|\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{u}}_h\|_{curl,\Omega}^2+\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h\|_0^2)^{1/2}\lesssim\|\tilde{\ell}_1\|_{\boldsymbol{Q}^*}+\|\tilde{\ell}_2\|_{\boldsymbol{U}^*},$$

其中，残差 $\tilde{\ell}_1\in\boldsymbol{Q}^*$ 和 $\tilde{\ell}_2\in\boldsymbol{U}^*$ 定义如下

$$\tilde{\ell}_1(\boldsymbol{q})=\ell_1(\boldsymbol{q})-a(\boldsymbol{p}_h,\boldsymbol{q})+b(\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\boldsymbol{q}),\quad\forall q\in\boldsymbol{Q},\tag{3.5}$$

$$\tilde{\ell}_2(\boldsymbol{v})=\ell_2(\boldsymbol{v})-d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}_h)-c(\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\boldsymbol{v}),\quad\forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{U}.\tag{3.6}$$

证明。 对于任意 $\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{Q}$ 以及任意 $\boldsymbol{v}1$、$\boldsymbol{v}2$、$\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{U}$，由 (2.9) 可得以下性质

$$\begin{aligned}&(\mathscr{A}(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2))(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\\&\quad=a(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q})-b(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{q})+d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2)+c(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v})\\&\quad=a(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q})-b(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{q})+d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}_1)+c(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v})\\&\qquad+a(\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q})-b(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{q})+d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}_2)+c(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v})\\&\quad=(\mathscr{A}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{q}_1))(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})+(\mathscr{A}(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{q}_2))(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&(\mathscr{A}(\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h))(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\\&\quad=(\mathscr{A}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}))(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})-(\mathscr{A}(\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\boldsymbol{p}_h))(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\\&\quad=(\ell_1(\boldsymbol{q})+\ell_2(\boldsymbol{v}))-(a(\boldsymbol{p}_h,\boldsymbol{q})-b(\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\boldsymbol{q})+d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}_h)+c(\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\boldsymbol{v}))\\&\quad=\tilde{\ell}_1(\boldsymbol{q})+\tilde{\ell}_2(\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

事实上，$(\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h)\in\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{Q}$，结合引理 2.1 即可完成证明。

接下来，我们将在引理3.2和引理3.4中分别给出 $\|\ell_1\|_{\boldsymbol{Q}^*}$ 和 $\|\ell_2\|_{\boldsymbol{U}^*}$ 的上界。

引理3.2。 设 $(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)\in\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{Q}_h$ 是 (2.13)-(2.14)的解，且 $\tilde{\boldsymbol{u}}_h$ 是 (3.3)的唯一极小化子。则可得到(3.5) 中定义的线性泛函 ℓ_1 的估计，如下：

$$\|\tilde{\ell}_1\|_{\boldsymbol{Q}^*}\lesssim\Big(\sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}\|R_1(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)\|_{L^2(\tau)}^2\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}\|\nabla\times(\tilde{\boldsymbol{u}}_h-\boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(\tau)}^2\Big)^{1/2}.\tag{3.7}$$

证明。 对于任意$\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{Q}$，根据 ℓ_1的定义，我们有

$$\tilde{\ell}_1(\boldsymbol{q})=\sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}\int_\tau\big((\mu\nabla\times\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{p}_h)+\mu\nabla\times(\tilde{\boldsymbol{u}}_h-\boldsymbol{u}_h)\big)\cdot\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

然后应用赫尔德不等式和柯西-施瓦茨不等式,

$$
\begin{aligned}
|\tilde{\ell}_1(\boldsymbol{q})| &\leq \sum_{\tau\in\mathscr{T}_h} \|\mu\nabla\times\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{p}_h\|_{L^2(\tau)}\|\boldsymbol{q}\|_{L^2(\Omega)}+\sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}\|\mu\nabla\times(\tilde{\boldsymbol{u}}_h-\boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(\tau)}\|\boldsymbol{q}\|_{L^2(\Omega)}\\
&\lesssim \left(\Big(\sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}\|R_1(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)\|^2_{L^2(\tau)}\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}\|\nabla\times(\tilde{\boldsymbol{u}}_h-\boldsymbol{u}_h)\|^2_{L^2(\tau)}\Big)^{1/2}\right)\|\boldsymbol{q}\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

得出证明。

~在估计项 $\|\ell_2\|_{U^*}$之前，我们需要引入以下插值算子及其相应的逼近性质。

引理 3.3. *[[19], 定理 1]* 设 $N\,d_0^1(\Omega;\mathscr{T}_h)$ 为 *Nédélec* 第一类的最低阶边元。则存在算子 $\Pi_h:\boldsymbol{H}_0(curl;\Omega)\to N\,d_0^1(\Omega;\mathscr{T}_h)$ 具有以下性质：对于任意 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}_0(curl;\Omega)$，存在 $\varphi\in H_0^1(\Omega)$和 $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$，使得

$$
\boldsymbol{v}-\Pi_h\boldsymbol{v}=\nabla\varphi+\boldsymbol{z}.
$$

并且对于任意 $\tau\in\mathscr{T}_h$ 和 $f\in\mathscr{F}_h$，有

$$
\begin{aligned}
h_\tau^{-1}\|\varphi\|_{L^2(\tau)}+\|\nabla\varphi\|_{L^2(\tau)}&\lesssim h_\tau\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega_\tau)},\\
h_\tau^{-1}\|\boldsymbol{z}\|_{L^2(\tau)}+\|\nabla\boldsymbol{z}\|_{L^2(\tau)}&\lesssim h_\tau\|\nabla\times\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega_\tau)},
\end{aligned}
$$

其中 $\Omega_\tau=\bigcup\Omega_f$、$\Omega_f=\{\tau'\in\mathscr{T}_h, f\in\tau'\}$，且这些常数取决于网格的形状 $f\in\tau$正则性。

引理 3.4。设 $(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)\in\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{Q}_h$ 是 (2.13)-(2.14)的解，且 ~$\boldsymbol{u}_h$ 是 (3.3)的唯一~解。则 (3.6) 中定义的线性泛函 ℓ_2 满足以下估计

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{\ell}_2\|_{U^*}\lesssim\Bigg(&\sum_{\tau\in\mathscr{T}}h_\tau^2(\|R_2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)\|^2_{L^2(\tau)}+\|R_2(\boldsymbol{u}_h)\|^2_{L^2(\tau)})\\
&+\sum_{f\in\mathscr{F}}h_f(\|J_1(\boldsymbol{p}_h)\|^2_{L^2(f)}+\|J_2(\boldsymbol{u}_h)\|^2_{L^2(f)})+\sum_{\tau\in\mathscr{T}}\|\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h\|^2_{L^2(\tau)}\Bigg)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

证明。对于任意 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{U}$ 以及由引理 3.3 给出的 Π_h，有

$$
\boldsymbol{v}-\Pi_h\boldsymbol{v}=\nabla\varphi+\boldsymbol{z},
\tag{3.9}
$$

其中 $\varphi\in H_0^1(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$。根据算子 $\tilde{\ell}_2$ 的线性以及（3.9），有

$$
\tilde{\ell}_2(\boldsymbol{v})=\tilde{\ell}_2(\Pi_h\boldsymbol{v})+\tilde{\ell}_2(\boldsymbol{v}-\Pi_h\boldsymbol{v})=\tilde{\ell}_2(\Pi_h\boldsymbol{v})+\tilde{\ell}_2(\nabla\varphi)+\tilde{\ell}_2(\boldsymbol{z}).
\tag{3.10}
$$

接下来，我们将估计 (3.10) 右端的三项。

˜ ˜对于 (3.10) 的第一项 $\ell_2(\Pi_h\boldsymbol{v})$，根据 ℓ_2 的定义，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}_2(\Pi_h\boldsymbol{v}) &= \ell_2(\Pi_h\boldsymbol{v}) - d(\Pi_h\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}_h) - c(\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\Pi_h\boldsymbol{v})\\ &= \ell_2(\Pi_h\boldsymbol{v}) - d(\Pi_h\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}_h) - c(\boldsymbol{u}_h,\Pi_h\boldsymbol{v}) + c(\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\Pi_h\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

注意到 $\Pi_h\mathrm{v}\ \in\mathrm{N}\ \mathrm{d}_0^1(\Omega;\ \mathscr{T}_h)\subseteq\mathrm{U}_h$ 具有零跳跃，并结合 (2.14)，可得

$$\ell_2(\Pi_h\boldsymbol{v}) - d(\Pi_h\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}_h) - c(\boldsymbol{u}_h,\Pi_h\boldsymbol{v}) = \ell_{2,h}(\Pi_h\boldsymbol{v}) - d_h(\Pi_h\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}_h) - c_h(\boldsymbol{u}_h,\Pi_h\boldsymbol{v}) = 0.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}_2(\Pi_h\boldsymbol{v}) &= c(\boldsymbol{v}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\Pi_h\boldsymbol{v})\\ &= c(\boldsymbol{v}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\boldsymbol{v}) + c(\boldsymbol{v}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\Pi_h\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v})\\ &\le \|\kappa\|_{0,\infty}\|\boldsymbol{v}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h\|_{0,\mathscr{T}_h}(\|\boldsymbol{v}\|_{0,\mathscr{T}_h} + \|\Pi_h\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\|_{0,\mathscr{T}_h}).\end{aligned}$$

然后利用 (3.9)、三角不等式和引理 3.3，可得

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}_2(\Pi_h\boldsymbol{v}) &\le \|\kappa\|_{0,\infty}\|\boldsymbol{v}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h\|_{0,\mathscr{T}_h}(\|\boldsymbol{v}\|_{0,\mathscr{T}_h} + \|\nabla\varphi+\boldsymbol{z}\|_{0,\mathscr{T}_h})\\ &\le \|\kappa\|_{0,\infty}\|\boldsymbol{v}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h\|_{0,\mathscr{T}_h}(\|\boldsymbol{v}\|_{0,\mathscr{T}_h} + \|\nabla\varphi\|_{0,\mathscr{T}_h} + \|\boldsymbol{z}\|_{0,\mathscr{T}_h})\\ &\le \|\kappa\|_{0,\infty}\|\boldsymbol{v}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h\|_{0,\mathscr{T}_h}\|\boldsymbol{v}\|_{curl,\mathscr{T}_h}. \qquad (3.11)\end{aligned}$$

˜ ˜对于 (3.10) 的第二项 $\ell_2(\nabla\varphi)$，利用 ℓ_2 的定义、(2.8)、(2.4)、(2.6) 以及事实 $\nabla\times\nabla\varphi=0$，可得

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}_2(\nabla\varphi) &= \ell_2(\nabla\varphi) - d(\nabla\varphi,\boldsymbol{p}_h) - c(\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\nabla\varphi)\\ &= (\boldsymbol{f},\nabla\varphi) - (\nabla\times\nabla\varphi,\boldsymbol{p}_h) - (\kappa\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\nabla\varphi)\\ &= (\boldsymbol{f},\nabla\varphi) - (\kappa\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\nabla\varphi). \qquad (3.12)\end{aligned}$$

由 (3.12) 和格林公式，可得

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}_2(\nabla\varphi) &= (\boldsymbol{f},\nabla\varphi) - (\kappa\boldsymbol{u}_h,\nabla\varphi) + (\kappa(\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h),\nabla\varphi)\\ &\le \sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}(R_3(\boldsymbol{u}_h),\varphi)_{0,\tau} + \sum_{f\in\mathscr{F}_h} < J_2(\boldsymbol{u}_h),\varphi >_{0,f} + (\kappa(\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h),\nabla\varphi).\end{aligned}$$

应用柯西-施瓦茨不等式、引理 3.3 和迹不等式，我们有 ve

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}_2(\nabla\varphi) \le \Big(&\sum_{\tau\in\mathscr{T}_h} h_\tau^2\|R_3(\boldsymbol{u}_h)\|_{0,\tau}^2 + \sum_{f\in\mathscr{F}_h} h_f\|J_2(\boldsymbol{u}_h)\|_{0,f}^2\\ &+ \sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}\|\kappa\|_{0,\infty}\|\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h\|_{0,\tau}^2\Big)^{1/2}\|\boldsymbol{v}\|_{curl,\mathscr{T}_h}. \qquad (3.13)\end{aligned}$$

˜类似地，对于式 (3.10) 的第三项 $\ell_2(\boldsymbol{z})$，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}_2(\boldsymbol{z}) &= (\boldsymbol{f},\boldsymbol{z})-(\nabla\times\boldsymbol{z},\boldsymbol{p}_h)-(\kappa\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\boldsymbol{z})\\ &= (\boldsymbol{f},\boldsymbol{z})-(\nabla\times\boldsymbol{z},\boldsymbol{p}_h)-(\kappa\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{z})+(\kappa(\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h),\boldsymbol{z})\\ &\le \Bigg(\sum_{\tau\in\mathscr{T}_h} h_\tau^2\|R_2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)\|_{0,\tau}^2+\sum_{f\in\mathscr{F}_h} h_f\|J_1(\boldsymbol{p}_h)\|_{0,f}^2\\ &\quad+\sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}\|\kappa\|_{0,\infty}\|\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h\|_{0,\tau}^2\Bigg)^{1/2}\|\boldsymbol{v}\|_{curl,\mathscr{T}_h}. \end{aligned}\tag{3.14}$$

将 (3.11)、(3.13) 和 (3.14) 代入 (3.10)，证明完成。

注意到，(3.7) 和 (3.8) 都与项 $\sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}\|\nabla\times(\tilde{\boldsymbol{u}}_h-\boldsymbol{u}_h)\|^2{}_{L^2(\tau)}$ 和 $\sum_{\tau\in\mathscr{T}}\|\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h\|^2{}_{L^2(\tau)}$有关，它们是 $\tilde{\zeta}$ 的一部分。因此，我们在下面的引理中证明 $\tilde{\zeta}$ 的上界。

˜**引理 3.5.** 设 $(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)\in\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{Q}_h$ 是 (2.13)-(2.14) 的解，且 ζ 是 (3.4) 的相容性误差，则有

$$\tilde{\zeta}^2\lesssim\eta^2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h).\tag{3.15}$$

证明。 对于任意 $\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{U}_h$，存在一个插值算子 $\mathscr{I}_h:\boldsymbol{H}^1(\Omega;\ \mathscr{T}_h)\to\boldsymbol{U}_{ch}$，使得（参见 [11]的命题 4.5）

$$\|\boldsymbol{v}_h-\mathscr{I}_h\boldsymbol{v}_h\|_{L^2(\Omega)}^2\lesssim\sum_{f\in\mathscr{F}_h} h_f\|[[\boldsymbol{v}_h]]\|_{L^2(f)}^2,\tag{3.16}$$

$$\sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}\|\nabla\times(\boldsymbol{v}_h-\mathscr{I}_h\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(\tau)}^2\lesssim\sum_{f\in\mathscr{F}_h} h_f^{-1}\|[[\boldsymbol{v}_h]]\|_{L^2(f)}^2.\tag{3.17}$$

然后，结合 (3.3)、(3.4)、(3.16)、(3.17) 以及事实 $h_f<1$，可得

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}^2 &= \sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}(\|\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h\|_{L^2(\tau)}^2+\|\nabla\times(\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{u}}_h)\|_{L^2(\tau)}^2)\\ &\le \sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}(\|\boldsymbol{u}_h-\mathscr{I}_h\boldsymbol{u}_h\|_{L^2(\tau)}^2+\|\nabla\times(\boldsymbol{u}_h-\mathscr{I}_h\boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(\tau)}^2)\\ &\lesssim \sum_{f\in\mathscr{F}_h} h_f\|[[\boldsymbol{u}_h]]\|_{L^2(f)}^2+\sum_{f\in\mathscr{F}_h} h_f^{-1}\|[[\boldsymbol{u}_h]]\|_{L^2(f)}^2\\ &\lesssim \sum_{f\in\mathscr{F}_h} h_f^{-1}\|[[\boldsymbol{u}_h]]\|_{L^2(f)}^2. \end{aligned}\tag{3.18}$$

注意到 $(\boldsymbol{u}_h、\boldsymbol{p}_h)\in\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{Q}_h$ 是离散变分问题 (2.13)-(2.14) 的解。由引理 2.2 可知，$\boldsymbol{u}_h$ 是离散变分问题 (2.15) 的解。因此，我们有（见 [20]的引理 5）

$$\alpha\|h_f^{-1/2}[[\boldsymbol{u}_h]]\|_{L^2(\mathscr{F}_h)}\lesssim\eta(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h).\tag{3.19}$$

最后，结合 (3.18) 和 (3.19)，可得

$$\tilde{\zeta}^2 \lesssim \eta^2(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{p}_h; \mathscr{T}).$$

结合引理 3.1、3.2、3.4 和 3.5，我们将证明定理 3.1。

证明。 [**定理 3.1 的证明：**] 利用 (3.1)、三角不等式、(3.4)、引理 3.1、3.2、3.4、3.5 和 (3.19)，可得

$$\begin{aligned}
&\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})-(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)\|_{DG}^2 \\
\lesssim\ & \|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\kappa(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+\sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}\|\nabla\times\mu(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(\tau)}^2+\sum_{f\in\mathscr{F}_h}\alpha h_f^{-1}<[[\boldsymbol{u}_h]],[[\boldsymbol{u}_h]]>_f \\
\lesssim\ & \|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{u}}_h\|_{\boldsymbol{curl},\Omega}^2+\tilde{\zeta}^2+\sum_{f\in\mathscr{F}_h}\alpha h_f^{-1}<[[\boldsymbol{u}_h]],[[\boldsymbol{u}_h]]>_f \\
=\ & \|(\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{u}}_h,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h)\|_{U\times\mathbf{Q}}+\tilde{\zeta}^2+\sum_{f\in\mathscr{F}_h}\alpha h_f^{-1}<[[\boldsymbol{u}_h]],[[\boldsymbol{u}_h]]>_f \\
\lesssim\ & \|\tilde{\ell}_1\|_{\mathbf{Q}^*}^2+\|\tilde{\ell}_2\|_{U^*}^2+\tilde{\zeta}^2+\sum_{f\in\mathscr{F}_h}\alpha h_f^{-1}<[[\boldsymbol{u}_h]],[[\boldsymbol{u}_h]]>_f \\
\leq\ & C_1\eta^2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h).
\end{aligned}$$

3.2. 误差在两个连续网格上减小

为方便起见，对于任意$\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{U}_h$，记

$$\begin{aligned}
|||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h|||_h^2 =\ & \|\kappa(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{\tau\in\mathscr{T}_h}\|\nabla\times\mu(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(\tau)}^2 \\
&+\sum_{f\in\mathscr{F}_h}\alpha h_f^{-1}<[[\boldsymbol{v}_h]],[[\boldsymbol{v}_h]]>_f . \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

设$\boldsymbol{U}^c{}_h$为$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{curl})$的一致子空间$\boldsymbol{U}_h$，定义为

$$\boldsymbol{U}_h^c := \boldsymbol{U}_h\cap\mathbf{H}_0(curl;\Omega).$$

那么，存在一个子空间 $\boldsymbol{U}^{\perp}{}_h$，使得在 $\boldsymbol{L}^2$ 内积下，$\boldsymbol{U}^h$ 可正交分解为 $\boldsymbol{U}_h := \boldsymbol{U}^c{}_h\oplus\boldsymbol{U}^{\perp}{}_h$。特别地，若 $(\boldsymbol{u}_h、\boldsymbol{p}_h)\in\boldsymbol{U}_h\times\boldsymbol{Q}_h$ 是 (2.13)-(2.14) 的解，则有

$$|||\boldsymbol{u}_h^{\perp}|||_h^2\lesssim\alpha\sum_{f\in\partial\tau}\|h_f^{-1/2}[[\boldsymbol{u}_h]]\|_{L^2(f)}^2. \qquad (3.21)$$

事实上，根据引理 2.2，注意到 $\boldsymbol{u}_h$ 满足式（2.15）中的 IPDG 格式，并且根据 [20], 中的引理 2，我们可以得到（3.21）。

为了便于估计面 $\mathscr{F}_h$ 的跳跃项，我们需要引入提升算子及相应的稳定性估计，更多细节请参见 [18]中的命题 12。

Let $\mathscr{L}_h : \boldsymbol{H}^1(\Omega;\ \mathscr{T}_h) \to \boldsymbol{U}_h$ 为提升算子，满足以下等式

$$\int_\Omega \mathscr{L}_h(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x = < [[\boldsymbol{v}]], \{\{\boldsymbol{w}\}\} >_{\mathscr{F}_h}, \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{U}_h, \tag{3.22}$$

and

$$\|\mathscr{L}_h(\boldsymbol{v})\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\mathscr{L}} \|h^{-1/2}[[\boldsymbol{v}]]\|_{L^2(\mathscr{F}_h)}, \tag{3.23}$$

其中常数 $C_{\mathscr{L}}$ 取决于网格 $\mathscr{T}_h$ 的形状正则性以及多项式次数 l。

引理 3.6. 设 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}) \in \mathbf{U} \times \boldsymbol{Q}$ 和 $(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h) \in \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{Q}_h$ 分别为(2.1)-(2.2) 和(2.13)-(2.14)的解，则有

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_h\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim \|\nabla \times (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(\Omega)} + \eta(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{p}_h; \mathscr{T}_h), \qquad (3.24)\\ \|\boldsymbol{p}_h - \boldsymbol{p}_H\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim \|\nabla \times (\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_H)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \Big(\eta(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{p}_h; \mathscr{T}_h) + \eta(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \mathscr{T}_H) \Big). \qquad (3.25) \end{aligned}$$

证明。 注意到$\boldsymbol{Q}_h \subseteq \boldsymbol{Q}$，并利用 (2.1)、$R_1(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)$ 的定义以及 (2.16)，可得

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_h\|_{L^2(\mathscr{T}_h)} &\leq \sup_{\forall \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{Q}} \frac{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{q})_{\mathscr{T}_h}}{\|\boldsymbol{q}\|_{L^2(\mathscr{T}_h)}} \\ &= \sup_{\forall \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{Q}} \frac{(\mu\nabla \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{q})_{\mathscr{T}_h} - \big(R_1(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{p}_h) + \mu\nabla \times \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{q}\big)_{\mathscr{T}_h}}{\|\boldsymbol{q}\|_{L^2(\mathscr{T}_h)}} \\ &\leq \sup_{\forall \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{Q}} \frac{(\mu\nabla \times (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h), \boldsymbol{q})_{\mathscr{T}_h} - \big(R_1(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{p}_h), \boldsymbol{q}\big)_{\mathscr{T}_h}}{\|\boldsymbol{q}\|_{L^2(\mathscr{T}_h)}} \\ &\lesssim \|\nabla \times (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(\mathscr{T}_h)} + \eta(u_h, \boldsymbol{p}_h; \mathscr{T}_h). \end{aligned}$$

同样地，利用 $R_1(\boldsymbol{u}_h、\ \boldsymbol{p}_h)$ 的定义、(2.13)、(3.21)–(3.23) 以及事实 $[[\boldsymbol{u}_h]] =$

$[[\boldsymbol{u}^{c}{}_{h}+\boldsymbol{u}^{\perp}{}_{h}]]=[[\boldsymbol{u}^{\perp}{}_{h}]]$, 可得

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{p}_h-\boldsymbol{p}_H\|_{L^2(\mathscr{T}_h)} \leq & \sup_{\forall \boldsymbol{q}_h\in \boldsymbol{Q}_h} \frac{(\boldsymbol{p}_h-\boldsymbol{p}_H,\boldsymbol{q}_h)_{\mathscr{T}_h}}{\|\boldsymbol{q}_h\|_{L^2(\mathscr{T}_h)}} \\
\leq & \sup_{\forall \boldsymbol{q}_h\in \boldsymbol{Q}_h} \frac{(\boldsymbol{p}_h,\boldsymbol{q}_h)_{\mathscr{T}_h}-\left(R_1(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{p}_H)+\mu\nabla\times\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{q}_h\right)_{\mathscr{T}_h}}{\|\boldsymbol{q}_h\|_{L^2(\mathscr{T}_h)}} \\
\leq & \sup_{\forall \boldsymbol{q}_h\in \boldsymbol{Q}_h} \frac{(\mu\nabla\times\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{q}_h)_{\mathscr{T}_h}+<\{\{\boldsymbol{q}_h\}\},[[\mu\boldsymbol{u}_h]]>_{\mathscr{F}_h}-\left(R_1(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{p}_H)+\mu\nabla\times\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{q}_h\right)_{\mathscr{T}_h}}{\|\boldsymbol{q}_h\|_{L^2(\mathscr{T}_h)}} \\
= & \sup_{\forall \boldsymbol{q}_h\in \boldsymbol{Q}_h} \frac{(\mu\nabla\times(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H),\boldsymbol{q}_h)_{\mathscr{T}_h}+<\{\{\boldsymbol{q}_h\}\},[[\mu\boldsymbol{u}_h]]>_{\mathscr{F}_h}-\left(R_1(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{p}_H),\boldsymbol{q}_h\right)_{\mathscr{T}_h}}{\|\boldsymbol{q}_h\|_{L^2(\mathscr{T}_h)}} \\
\lesssim & \|\nabla\times(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H)\|_{L^2(\mathscr{T}_h)}+\|h_\tau^{-1/2}[[\boldsymbol{u}_h]]\|_{L^2(\mathscr{T}_h)}+\eta(u_H,\boldsymbol{p}_H;\mathscr{T}_H) \\
\lesssim & \|\nabla\times(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H)\|_{L^2(\mathscr{T}_h)}+C_{\mathscr{L}}\|h_\tau^{-1/2}[[\boldsymbol{u}_h^{\perp}]]\|_{L^2(\mathscr{T}_h)}+\eta(u_H,\boldsymbol{p}_H;\mathscr{T}_H) \\
\lesssim & \|\nabla\times(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H)\|_{L^2(\tau)}+\Big(\eta(u_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h)+\eta(u_H,\boldsymbol{p}_H;\mathscr{T}_H)\Big).
\end{aligned}
$$

注 3.2. 注意到 $\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})-(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)\|^2{}_{DG}+\eta^2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h)$ 以及 $|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|||^2{}_h+\eta^2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h)$是等价的。事实上，由 (3.24)，我们首先知道

$$
\begin{aligned}
&\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})-(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)\|^2_{DG}+\eta^2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h) \\
&\quad=|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|||^2_h+\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h\|^2_{L^2(\mathscr{T}_h)}+\eta^2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h) \\
&\quad\lesssim|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|||^2_h+\eta^2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h).
\end{aligned}
$$

其次，由 $\|\cdot\|_{DG}$ 的定义可知

$$
|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|||^2_h+\eta^2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h)\leq\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})-(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)\|^2_{DG}+\eta^2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h).
$$

因此，接下来我们只需考虑 $|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|||^2{}_h+\eta^2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h)$ 的收敛性。

我们首先证明，在连续两个网格上，误差加上某个量会按固定因子缩减。

引理 *3.7.* 给定 $f\in L^2(\Omega)$ 以及两个四面体网格 $\mathscr{T}_h$ 和 $\mathscr{T}_H$，其中 $\mathscr{T}_H\leq\mathscr{T}_h$。设 $(u,p)\in U\times Q$ 是 *(2.1)-(2.2)* 的解，而 $(u_h,p_h)\in U_h\times Q_h$, $(u_H,p_H)\in U_H\times Q_H$ 分别是 *(2.13)-(2.14)* 的解。那么存在两个常数 $\delta_1,\delta_2\in(0,1)$，使得

$$
\begin{aligned}
|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|||^2_h \leq & (1+\delta_1)|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H|||^2_H-\frac{1-\delta_2}{2}|||\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H|||^2_h \\
&+\frac{C_3}{\delta_1\delta_2\alpha}\Big(\eta^2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h)+\eta^2(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{p}_H;\mathscr{T}_H)\Big).
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

其中 C_3 取决于 $C_{\mathscr{L}}$。

证明。 取 $\boldsymbol{q} = \nabla \times \boldsymbol{v}$，并将 (2.1) 从 (2.2) 中相减，得到

$$(\kappa \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\mu \nabla \times \boldsymbol{u}, \nabla \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}). \tag{3.27}$$

将 (2.15) 从 (3.27) 中相减，并取 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{u}^c{}_h - \boldsymbol{u}^c{}_H$，再利用 $[[\boldsymbol{u}^c{}_h - \boldsymbol{u}^c{}_H]] = 0$，可得

$$\begin{aligned}(\kappa(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h), \boldsymbol{u}_h^c - \boldsymbol{u}_H^c)_{0,\mathscr{T}_h} + (\mu\nabla\times(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h), \nabla\times(\boldsymbol{u}_h^c - \boldsymbol{u}_H^c))_{0,\mathscr{T}_h} \\ + < [[\boldsymbol{u}_h]], \{\{\mu\nabla\times(\boldsymbol{u}_h^c - \boldsymbol{u}_H^c)\}\} >_{\mathscr{F}_h} = 0,\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}(\kappa(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h), \boldsymbol{u}_h^c - \boldsymbol{u}_H^c)_{0,\mathscr{T}_h} + (\mu\nabla\times(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h), \nabla\times(\boldsymbol{u}_h^c - \boldsymbol{u}_H^c))_{0,\mathscr{T}_h} \\ = - < [[\boldsymbol{u}_h]], \{\{\mu\boldsymbol{u}_h^c - \boldsymbol{u}_H^c\}\} >_{\mathscr{F}_h}.\end{aligned} \tag{3.28}$$

利用 (3.22) 和 (3.23)，可得

$$\begin{aligned}< [[\boldsymbol{u}_h]], \{\{\nabla\times(\boldsymbol{u}_h^c - \boldsymbol{u}_H^c)\}\} >_{\mathscr{F}_h} &= (\mathscr{L}_h(\boldsymbol{u}_h), \nabla\times(\boldsymbol{u}_h^c - \boldsymbol{u}_H^c))_{0,\mathscr{T}_h} \\ &\le C_{\mathscr{L}} \|h^{-1/2}[[\boldsymbol{u}_h]]\|_{0,\mathscr{T}_h} \|\nabla\times(\boldsymbol{u}_h^c - \boldsymbol{u}_H^c)\|_{0,\mathscr{T}_h}.\end{aligned} \tag{3.29}$$

设 $\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{u}^c{}_h + \boldsymbol{u}^\perp{}_h$ 和 $\boldsymbol{u}_H = \boldsymbol{u}^c{}_H + \boldsymbol{u}^\perp{}_H$，则有

$$\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_H^c - \boldsymbol{u}_h^c = \boldsymbol{u}_H - \boldsymbol{u}_H^\perp + \boldsymbol{u}_h^\perp, \tag{3.30}$$

其中 $\boldsymbol{u}^c{}_H \in \boldsymbol{U}_{cH}$、$\boldsymbol{u}^c{}_h \in \boldsymbol{U}^c{}_h$、$\boldsymbol{u}^\perp{}_H \in \boldsymbol{U}^\perp{}_H$、$\boldsymbol{u}^\perp{}_h \in \boldsymbol{U}^\perp{}_h$。由 (3.30)、(3.28)、(3.29) 和杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}&|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|||_h^2 \\ &= \|\kappa(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\times\mu(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \sum_{f\in\mathscr{F}_h} \alpha h_f^{-1} < [[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)]], [[\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h]] >_{\mathscr{F}_h} \\ &= |||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H^c+\boldsymbol{u}_h^c|||_h^2 - |||\boldsymbol{u}_h^c-\boldsymbol{u}_H^c|||_h^2 - 2(\kappa(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h), \boldsymbol{u}_h^c-\boldsymbol{u}_H^c)_{0,\mathscr{T}_h} \\ &\quad -2(\mu\nabla\times(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h), \nabla\times(\boldsymbol{u}_h^c-\boldsymbol{u}_H^c))_{0,\mathscr{T}_h} \\ &\quad -2\sum_{f\in\mathscr{F}_h} \alpha h_f^{-1} < [[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)]], [[\boldsymbol{u}_h^c-\boldsymbol{u}_H^c]] > \\ &\lesssim |||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H|||_H^2 + 2|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H|||_H |||\boldsymbol{u}_h^\perp-\boldsymbol{u}_H^\perp|||_h + |||\boldsymbol{u}_h^\perp-\boldsymbol{u}_H^\perp|||_h^2 - |||\boldsymbol{u}_h^c-\boldsymbol{u}_H^c|||_h^2 \\ &\quad +2\|h^{-1/2}[[\boldsymbol{u}_h]]\|_{0,\mathscr{T}_h} \|\nabla\times(\boldsymbol{u}_h^c-\boldsymbol{u}_H^c)\|_{0,\mathscr{T}_h} \\ &\le (1+\delta_1)|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H|||_H^2 + (1+\frac{1}{\delta_1})|||\boldsymbol{u}_h^\perp-\boldsymbol{u}_H^\perp|||_h^2 - (1-\hat{\delta}_2 C_{\mathscr{L}})|||\boldsymbol{u}_h^c-\boldsymbol{u}_H^c|||_h^2 \\ &\quad +\frac{C_{\mathscr{L}}}{\hat{\delta}_2}\|h^{-1/2}[[\boldsymbol{u}_h]]\|_{0,\mathscr{T}_h}^2 \\ &= (1+\delta_1)|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H|||_H^2 + (1+\frac{1}{\delta_1})|||\boldsymbol{u}_h^\perp-\boldsymbol{u}_H^\perp|||_h^2 - (1-\delta_2)|||\boldsymbol{u}_h^c-\boldsymbol{u}_H^c|||_h^2 \\ &\quad +\frac{C_{\mathscr{L}}^2}{\delta_2}\|h^{-1/2}[[\boldsymbol{u}_h]]\|_{0,\mathscr{T}_h}^2,\end{aligned}$$

其中 $\delta_2 = \hat{}\delta_2 C_{\mathscr{L}}$。利用 $\boldsymbol{u}^c{}_H = \boldsymbol{u}_H - \boldsymbol{u}^\perp{}_H$、$\boldsymbol{u}^c{}_h = \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}^\perp{}_h$、三角不等式和平均值不等式，可得

$$|||\boldsymbol{u}_h^c - \boldsymbol{u}_H^c|||_h^2 \geq \frac{1}{2}|||\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_H|||_h^2 - |||\boldsymbol{u}_h^\perp - \boldsymbol{u}_H^\perp|||_h^2.$$

由三角不等式和 (3.21)，可得

$$\begin{aligned} |||\boldsymbol{u}_h^\perp - \boldsymbol{u}_H^\perp|||_h^2 &\leq 2(|||\boldsymbol{u}_h^\perp|||_h^2 + |||\boldsymbol{u}_H^\perp|||_H^2) \\ &\leq 2\alpha\|h^{-1/2}[[\boldsymbol{u}_h^\perp]]\|_{0,\mathscr{T}_h}^2 + 2\alpha\|h^{-1/2}[[\boldsymbol{u}_H^\perp]]\|_{0,\mathscr{T}_h}^2. \end{aligned}$$

结合 $[[\boldsymbol{u}_H]] = [[\boldsymbol{u}^\perp{}_H + \boldsymbol{u}^c{}_H]] = [[\boldsymbol{u}^\perp{}_H]]$和 (3.19)，可得

$$\begin{aligned} |||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|||_h^2 &\leq (1+\delta_1)|||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_H|||_H^2 - \frac{1-\delta_2}{2}|||\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_H|||_h^2 \\ &\quad + \frac{C_3}{\delta_1\delta_2\alpha}\Big(\eta^2(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{p}_h; \mathscr{T}_h) + \eta^2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \mathscr{T}_H)\Big). \end{aligned}$$

3.3. 误差估计子的收缩

本小节证明误差指示子的缩减。首先考虑改变估计子中所用有限元函数的影响。

引理 3.8. 给定$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$和两个四面体网格 $\mathscr{T}_h, \mathscr{T}_H$，满足 $\mathscr{T}_H \leq \mathscr{T}_h$。设 $(\boldsymbol{v}h, \boldsymbol{q}_h) \in \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{Q}_h$和 $(\boldsymbol{v}H, \boldsymbol{q}H) \in \boldsymbol{U}_H \times \boldsymbol{Q}_H$。对于任意 $\epsilon > 0$，有

$$\eta^2(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h; \mathscr{T}_h) \leq (1+\epsilon)\eta^2(\boldsymbol{v}_H, \boldsymbol{q}_H; \mathscr{T}_h) + C_\epsilon\|(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h) - (\boldsymbol{v}_H, \boldsymbol{q}_H)\|_{DG}^2, \tag{3.31}$$

其中 C_ϵ 取决于 ϵ 和网格尺寸 $h < 1$。

证明。对于任意 $\tau_* \in \mathscr{T}_h$，我们将讨论标记$\eta^2(\boldsymbol{v}_h、\boldsymbol{q}_h$ 的五个组成部分；$\mathscr{T}_h)$。

首先，根据 $R_1(\boldsymbol{v}_h、\boldsymbol{q}_h)$ 的定义以及三角不等式，我们得到

$$\begin{aligned} &\|R_1(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h)\|_{L^2(\tau_*)} \\ &\quad = \|\boldsymbol{q}_h - \mu\nabla\times\boldsymbol{v}_h\|_{L^2(\tau_*)} \\ &\quad = \|\boldsymbol{q}_h - \boldsymbol{q}_H + \mu\nabla\times(\boldsymbol{v}_H - \boldsymbol{v}_h) + \boldsymbol{q}_H - \mu\nabla\times\boldsymbol{v}_H\|_{L^2(\tau_*)} \\ &\quad \lesssim \|\boldsymbol{q}_H - \nabla\times\boldsymbol{v}_H\|_{L^2(\tau_*)} + \|\boldsymbol{q}_h - \boldsymbol{q}_H\|_{L^2(\tau_*)} + \|\nabla\times(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_H)\|_{L^2(\tau_*)}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

其次，根据 $R_2(\boldsymbol{v}_h、\boldsymbol{q}_h)$ 的定义、三角不等式和逆不等式，可得

$$\begin{aligned} &h_{\tau_*}\|R_2(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h)\|_{L^2(\tau_*)} \\ &\quad = h_{\tau_*}(\|\boldsymbol{f} - \nabla\times\boldsymbol{q}_h - \kappa\boldsymbol{v}_h\|_{L^2(\tau_*)}) \\ &\quad = h_{\tau_*}(\|\boldsymbol{f} - \nabla\times(\boldsymbol{q}_h - \boldsymbol{q}_H) - \kappa(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_H) - \nabla\times\boldsymbol{q}_H - \kappa\boldsymbol{v}_H\|_{L^2(\tau_*)}) \\ &\quad \leq h_{\tau_*}(\|\boldsymbol{f} - \nabla\times\boldsymbol{q}_H - \kappa\boldsymbol{v}_H\|_{L^2(\tau_*)} + \|\nabla\times(\boldsymbol{q}_h - \boldsymbol{q}_H)\|_{L^2(\tau_*)} + \|\kappa(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_H)\|_{L^2(\tau_*)}) \\ &\quad \lesssim h_{\tau_*}(\|R_2(\boldsymbol{v}_H, \boldsymbol{q}_H)\|_{L^2(\tau_*)} + h_{\tau_*}^{-1}\|(\boldsymbol{q}_h - \boldsymbol{q}_H)\|_{L^2(\tau_*)} + \|\kappa(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_H)\|_{L^2(\tau_*)}) \\ &\quad \lesssim h_{\tau_*}\|R_2(\boldsymbol{v}_H, \boldsymbol{q}_H)\|_{L^2(\tau_*)} + \|(\boldsymbol{q}_h - \boldsymbol{q}_H)\|_{L^2(\tau_*)} + h_{\tau_*}\|\kappa(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_H)\|_{L^2(\tau_*)}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

类似地，根据 $R_3(\boldsymbol{v}_h)$ 的定义、三角不等式和逆不等式，可得

$$
\begin{aligned}
&h_{\tau_*}\|R_3(\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(\tau_*)} \\
&\quad = h_{\tau_*}\|\nabla\cdot(\boldsymbol{f}-\kappa\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(\tau_*)} \\
&\quad = h_{\tau_*}\|\nabla\cdot(\boldsymbol{f}-\kappa\boldsymbol{v}_H+\kappa\boldsymbol{v}_H-\kappa\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(\tau_*)} \\
&\quad \le h_{\tau_*}(\|\nabla\cdot(\boldsymbol{f}-\kappa\boldsymbol{v}_H)\|_{L^2(\tau_*)}+\|\nabla\cdot\kappa(\boldsymbol{v}_H-\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(\tau_*)}) \\
&\quad \lesssim h_{\tau_*}(\|R_3(\boldsymbol{v}_H)\|_{L^2(\tau_*)}+h_{\tau_*}^{-1}\|\kappa(\boldsymbol{v}_H-\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(\tau_*)}) \\
&\quad \lesssim h_{\tau_*}\|R_3(\boldsymbol{v}_H)\|_{L^2(\tau_*)}+\|\kappa(\boldsymbol{v}_H-\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(\tau_*)}.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

接下来，我们讨论跳跃$J_1(\boldsymbol{q}_h)$和$J_2(\boldsymbol{v}_h)$。对于任意$f\in\mathscr{F}(\mathscr{T}_h)$，令$f=\tau_*^1\bigcap\tau_*^2$，其中$\tau_*^1$、$\tau_*^2\in\mathscr{T}_h$。此外，利用$J_1(\boldsymbol{q}_h)$的定义、三角不等式和迹不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
&h_f^{1/2}\|J_1(\boldsymbol{q}_h)\|_{L^2(f)} \\
&\quad = h_f^{1/2}\|[[\boldsymbol{q}_h]]\|_{L^2(f)} \\
&\quad = h_f^{1/2}\|[[\boldsymbol{q}_H+\boldsymbol{q}_h-\boldsymbol{q}_H]]\|_{L^2(f)} \\
&\quad \le h_f^{1/2}(\|[[\boldsymbol{q}_H]]\|_{L^2(f)}+\|[[\boldsymbol{q}_h-\boldsymbol{q}_H]]\|_{L^2(f)}) \\
&\quad \le h_f^{1/2}\|[[\boldsymbol{q}_H]]\|_{L^2(f)}+h_f^{1/2}\|(\boldsymbol{q}_h-\boldsymbol{q}_H)|_{\tau_*^1}\|_{L^2(f)}+h_f^{1/2}\|(\boldsymbol{q}_h-\boldsymbol{q}_H)|_{\tau_*^2}\|_{L^2(f)} \\
&\quad \lesssim h_f^{1/2}\|J_1(\boldsymbol{q}_H)\|_{L^2(f)}+\|(\boldsymbol{q}_h-\boldsymbol{q}_H)\|_{L^2(\tau_*^1\cup\tau_*^2)}.
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

类似地，利用$J_2(\boldsymbol{v}_h)$的定义、三角不等式和迹不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
&h_f^{1/2}\|J_2(\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(f)} \\
&\quad = h_f^{1/2}\|[[(\boldsymbol{f}-\kappa\boldsymbol{v}_h)]]\|_{L^2(f)} \\
&\quad = h_f^{1/2}\|[[(\boldsymbol{f}-\kappa\boldsymbol{v}_H+\kappa\boldsymbol{v}_H-\kappa\boldsymbol{v}_h)]]\|_{L^2(f)} \\
&\quad \le h_f^{1/2}(\|[[(\boldsymbol{f}-\kappa\boldsymbol{v}_H)]]\|_{L^2(f)}+\|[[\kappa(\boldsymbol{v}_H-\boldsymbol{v}_h)]]\|_{L^2(f)}) \\
&\quad \le h_f^{1/2}\|J_2(\boldsymbol{v}_H)\|_{L^2(f)}+h_f^{1/2}(\|\kappa(\boldsymbol{v}_H-\boldsymbol{v}_h)|_{\tau_*^1}\|_{L^2(f)}+\|\kappa(\boldsymbol{v}_H-\boldsymbol{v}_h)|_{\tau_*^2}\|_{L^2(f)}) \\
&\quad \lesssim h_f^{1/2}\|J_2(\boldsymbol{v}_H)\|_{L^2(f)}+\|\kappa\boldsymbol{v}_H-\kappa\boldsymbol{v}_h\|_{L^2(\tau_*^1\cup\tau_*^2)}.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

最后，结合(3.32)-(3.36)、Young不等式以及网格 $\mathscr{T}_h$的形状正则性，即可得到所需结果(3.31)。

接下来，我们将在问题(2.13)-(2.14)的假设下证明误差估计子的收缩性。

引理 3.9. 给定常数 $\theta\in(0,1)$ 以及两个四面体网格 $\mathscr{T}_h$, $\mathscr{T}_H(\mathscr{T}_H\le\mathscr{T}_h)$。设$(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{p}_H)\in\boldsymbol{U}_H\times\boldsymbol{Q}_H$为(2.13)-(2.14)的解，且 $\mathscr{R}_{\mathscr{T}_H\longrightarrow\mathscr{T}_h}=\mathscr{T}_H|_{(\mathscr{T}_h\cap\mathscr{T}_H)}$为

在 $\mathscr{T}_H$上细化为 $\mathscr{T}_h$ 的所有单元的集合。那么，存在一个与网格尺寸无关的常数 $\lambda \in (0,1)$，使得

$$\eta^2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \mathscr{T}_h) \leq \eta^2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \mathscr{T}_H) - \lambda \eta^2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \mathscr{R}_{\mathscr{T}_H \to \mathscr{T}_h}). \tag{3.37}$$

证明。假设四面体网格 $\tau \in \mathscr{T}_H$ 被划分为两个新的四面体网格 τ_*^1 和 τ_*^2，且二者等体积，其中 τ_*^1、$\tau_*^2 \in \mathscr{T}_h$。因此，根据网格的形状正则性，$h_{\tau_*^1}^3 = |\tau_*^1| = |\tau_*^2| = h_{\tau_*^2}^3 = 2^{-1} h_\tau^3$，这意味着 $h^{\tau_*^1} = h_{\tau_*^2} = 2^{-1/3} h_\tau$。于是，我们有

$$\|R_1(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H)\|_{L^2(\tau_*^1)}^2 + \|R_1(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H)\|_{L^2(\tau_*^2)}^2 \leq \|R_1(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H)\|_{L^2(\tau)}^2, \tag{3.38}$$

and

$$\begin{aligned} & h_{\tau_*^1}^2 (\|R_2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H)\|_{L^2(\tau_*^1)}^2 + \|R_3(\boldsymbol{u}_H)\|_{L^2(\tau_*^1)}^2) \\ & + h_{\tau_*^2}^2 (\|R_2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H)\|_{L^2(\tau_*^2)}^2 + \|R_3(\boldsymbol{u}_H)\|_{L^2(\tau_*^2)}^2) \\ & \leq 2^{-2/3} h_\tau^2 (\|R_2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H)\|_{L^2(\tau)}^2 + \|R_3(\boldsymbol{u}_H)\|_{L^2(\tau)}^2). \end{aligned} \tag{3.39}$$

对于任意 $f \in \partial(\tau_*^1 \cup \tau_*^2)$，可将其分为三部分；

(1) 对于第一部分，其中有两个面为常数且属于 τ。

(2) 对于第二部分，有两个重叠的新面用于划分网格 τ。由于 $(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_h) \in \boldsymbol{U}_H \times \boldsymbol{Q}_H$ 在区域 τ内是连续多项式，因此，$\boldsymbol{p}_h]]$和 $[[(\boldsymbol{f} - \kappa \boldsymbol{u}_H)]]$在该曲面上的值均为零。

（3）对于第三部分，将 τ 中的两个面各分为两个面后，可得到四个面。

此外，我们得到

$$\eta^2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \tau_*^1) + \eta^2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \tau_*^2) \leq \overline{\gamma} \eta^2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \tau). \tag{3.40}$$

其中常数 $\gamma \in (0, 1)$ 与网格 τ 无关。

接下来，由于 $\mathscr{R}_{\mathscr{T}_H \to \mathscr{T}_h}$ 表示四面体集合 $\mathscr{T}_H$ 中将被细化的那部分集合，因此有 $\mathscr{R}_{\mathscr{T}_H \to \mathscr{T}_h} \subset \mathscr{T}_H$。令 $\mathscr{R}_{\mathscr{T}_H \to \mathscr{T}_h}$ 表示四面体集合 $\mathscr{T}_H$ 中已被细化的单元集合部分，则有 $\mathscr{R}_{\mathscr{T}_h \to \mathscr{T}_H} \in \mathscr{T}_h$。显然，$\mathscr{T}_H \setminus \mathscr{R}_{\mathscr{T}_H \to \mathscr{T}_h} = \mathscr{T}_h \setminus \mathscr{R}_{\mathscr{T}_H \to \mathscr{T}_h}$。结合（3.40）和标记策略（2.18），可得

$$\begin{aligned} \eta^2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \mathscr{T}_h) &= \eta^2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \mathscr{T}_h \setminus \overline{\mathscr{R}_{\mathscr{T}_H \to \mathscr{T}_h}}) + \eta^2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \overline{\mathscr{R}_{\mathscr{T}_H \to \mathscr{T}_h}}) \\ &\leq \eta^2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \mathscr{T}_H \setminus \mathscr{R}_{\mathscr{T}_H \to \mathscr{T}_h}) + \gamma \eta^2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \mathscr{R}_{\mathscr{T}_H \to \mathscr{T}_h}) \\ &\leq \eta^2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \mathscr{T}_H) + (\overline{\gamma} - 1) \eta^2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \mathscr{R}_{\mathscr{T}_H \to \mathscr{T}_h}) \\ &\leq \eta^2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \mathscr{T}_H) - \lambda \eta^2(\boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{p}_H; \mathscr{R}_{\mathscr{T}_H \to \mathscr{T}_h}), \end{aligned}$$

其中 $\lambda = 1 - \overline{\gamma} \in (0, 1)$ 与网格尺寸无关。

现在，我们结合引理 3.6、3.8 和 3.9 来证明误差指示子的约化。

引理 3.10。 给定常数 $\theta \in (0,1)$ 以及两个四面体网格 $\mathscr{T}_h$, $\mathscr{T}_H(\mathscr{T}_H \leq \mathscr{T}_h)$。设$(\boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{p}_h) \in \boldsymbol{U}_h \times \boldsymbol{Q}_h$和 $(\boldsymbol{u}_H,\ \boldsymbol{p}_H) \in \boldsymbol{U}_H \times \boldsymbol{Q}_H$分别为（2.13）-（2.14）的解。对于任意 $\epsilon > 0$ 和 $\lambda \in (0,1)$，有

$$\begin{aligned}(1-\frac{C_\epsilon}{\alpha})\eta^2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h) \ \leq\ & (1+\epsilon+\frac{C_\epsilon}{\alpha})\eta^2(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{p}_H;\mathscr{T}_H)\\ & -(1+\epsilon)\lambda\eta^2(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{p}_H;\mathscr{R}_{\mathscr{T}_H\to\mathscr{T}_h})+C_\epsilon|||\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H|||_h^2, \end{aligned} \tag{3.41}$$

其中常数 C_ϵ 取决于 ϵ和网格尺寸。

证明。 利用引理 3.6、3.8 和 3.9，我们得到

$$\begin{aligned}\eta^2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h) \ \leq\ & (1+\epsilon)\Big(\eta^2(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{p}_H;\mathscr{T}_H)-\lambda\eta^2(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{p}_H;\mathscr{R}_{\mathscr{T}_H\to\mathscr{T}_h})\Big)\\ & +C_\epsilon\|(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h)-(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{p}_H)\|_{DG}^2\\ \leq\ & (1+\epsilon)\Big(\eta^2(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{p}_H;\mathscr{T}_H)-\lambda\eta^2(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{p}_H;\mathscr{R}_{\mathscr{T}_H\to\mathscr{T}_h})\Big)\\ & +C_\epsilon|||\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H|||_h^2+\|\boldsymbol{p}_h-\boldsymbol{p}_H\|_{L^2(\Omega)}^2\\ \leq\ & (1+\epsilon)\Big(\eta^2(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{p}_H;\mathscr{T}_H)-\lambda\eta^2(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{p}_H;\mathscr{R}_{\mathscr{T}_H\to\mathscr{T}_h})\Big)\\ & +C_\epsilon|||\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_H|||_h^2+\frac{C_\epsilon}{\alpha}\Big(\eta^2(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{p}_h;\mathscr{T}_h)+\eta^2(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{p}_H;\mathscr{T}_H)\Big),\end{aligned}$$

由此完成证明。

3.4. 收敛结果

现在，我们证明了误差范数与缩放误差指标之和会衰减。

定理 3.2. 给定 $\theta \in (0,1)$，令 $\{\mathscr{T}_k,\ \boldsymbol{U}_k,\ \boldsymbol{Q}_k,\ \boldsymbol{u}_k,\ \boldsymbol{p}_k,\ \eta(\boldsymbol{u}_k,\ \boldsymbol{p}_k;\ \mathscr{T}_k)\}_{k\geq 0}$ 为由 ***AMIPDG*** 算法生成的网格序列、混合离散解（由 (2.13)-(2.14)定义）及估计指标。则存在常数 $\rho > 0$、 $\delta \in (0,1)$，它们取决于标记参数 θ 和初始网格 $\mathscr{T}_0$的形状正则性，使得

$$|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{k+1}|||_{k+1}^2+\rho\eta^2(\boldsymbol{u}_{k+1},\boldsymbol{p}_{k+1};\mathscr{T}_{k+1})\leq\delta\Big(|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_k|||_k^2+\rho\eta^2(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{p}_k;\mathscr{T}_k)\Big).$$

证明。 令 $\widetilde{\rho}=\frac{1-\delta_2}{2}\frac{}{C_\epsilon}$，然后将不等式（3.41）的两边乘以 $\widetilde{\rho}$，得到

$$\begin{aligned}&\widetilde{\rho}(1-\frac{C_\epsilon}{\alpha})\eta^2(\boldsymbol{u}_{k+1},\boldsymbol{p}_{k+1};\mathscr{T}_{k+1})\\ &\quad\leq\widetilde{\rho}(1+\epsilon+\frac{C_\epsilon}{\alpha})\eta^2(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{p}_k;\mathscr{T}_k)-\widetilde{\rho}(1+\epsilon)\lambda\eta^2(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{p}_k;\mathscr{R}_{\mathscr{T}_k\to\mathscr{T}_{k+1}})\\ &\qquad+\frac{1-\delta_2}{2}|||\boldsymbol{u}_{k+1}-\boldsymbol{u}_k|||_h^2.\end{aligned} \tag{3.42}$$

接下来，由（3.26）和（3.42）可得

$$\begin{aligned}
&|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{k+1}|||_{k+1}^2+\widetilde{\rho}(1-\frac{C_\epsilon}{\alpha})\eta^2(\boldsymbol{u}_{k+1},\boldsymbol{p}_{k+1};\mathscr{T}_{k+1})\\
&\quad\le(1+\delta_1)|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_k|||_k^2+\frac{C_3}{\delta_1\delta_2\alpha}\Big(\eta^2(\boldsymbol{v}_{k+1},\boldsymbol{q}_{k+1};\mathscr{T}_{k+1})+\eta^2(\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{q}_k;\mathscr{T}_k)\Big)\\
&\quad+\widetilde{\rho}(1+\epsilon+\frac{C_\epsilon}{\alpha})\eta^2(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{p}_k;\mathscr{T}_k)-\widetilde{\rho}(1+\epsilon)\lambda\eta^2(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{p}_k;\mathscr{R}_{\mathscr{T}_k\to\mathscr{T}_{k+1}}).
\end{aligned}\tag{3.43}$$

首先移项，然后根据 Dörfler 标记策略 (2.18)、定理 3.1 以及 $|||\cdot|||_h\le\|\cdot\|_{DG}$，可知 $-\eta^2(\boldsymbol{v}_k、\boldsymbol{q}_k;\ \mathscr{R}_{\mathscr{T}_k\to\mathscr{T}_{k+1}})\le-\theta\eta^2(\boldsymbol{v}_k、\boldsymbol{q}_k;\ \mathscr{T}_k)$，于是

$$\begin{aligned}
|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{k+1}|||_{k+1}^2 &+ \widetilde{\rho}(1-\frac{C_\epsilon}{\alpha}-\frac{C_3}{\widetilde{\rho}\delta_1\delta_2\alpha})\eta^2(\boldsymbol{u}_{k+1},\boldsymbol{p}_{k+1};\mathscr{T}_{k+1})\\
&\le (1+\delta_1)|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_k|||_k^2-\frac{\widetilde{\rho}(1+\epsilon)\lambda\theta}{2}\eta^2(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{p}_k;\mathscr{T}_k)\\
&\quad+\widetilde{\rho}\Big(1+\epsilon+\frac{C_\epsilon}{\alpha}+\frac{C_3}{\widetilde{\rho}\delta_1\delta_2\alpha}-\frac{(1+\epsilon)\lambda\theta}{2}\Big)\eta^2(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{p}_k;\mathscr{T}_k)\\
&\le (1+\delta_1-\frac{\widetilde{\rho}(1+\epsilon)\lambda\theta C_1^{-1}}{2})|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_k|||_k^2\\
&\quad+\widetilde{\rho}\Big(1+\epsilon+\frac{C_\epsilon}{\alpha}+\frac{C_3}{\widetilde{\rho}\delta_1\delta_2\alpha}-\frac{(1+\epsilon)\lambda\theta}{2}\Big)\eta^2(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{p}_k;\mathscr{T}_k).
\end{aligned}$$

为方便起见，记

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 1-\frac{C_\epsilon}{\alpha}-\frac{C_3}{\widetilde{\rho}\delta_1\delta_2\alpha},\\
\beta_2 &= 1+\delta_1-\frac{\widetilde{\rho}(1+\epsilon)\lambda\theta C_1^{-1}}{2},\\
\beta_3 &= (1+\epsilon)(1-\frac{\lambda\theta}{2})+\frac{C_\epsilon}{\alpha}+\frac{C_3}{\widetilde{\rho}\delta_1\delta_2\alpha}.
\end{aligned}$$

Thus

$$|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{k+1}|||_{k+1}^2+\widetilde{\rho}\beta_1\eta^2(\boldsymbol{u}_{k+1},\boldsymbol{p}_{k+1};\mathscr{T}_{k+1})\le\beta_2|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_k|||_k^2+\widetilde{\rho}\beta_3\eta^2(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{p}_k;\mathscr{T}_k).$$

接下来，我们首先选取 $\delta_1=\frac{\widetilde{\rho}(1+\epsilon)\lambda\theta}{C_4}^{-1}$，然后选择适当的 δ_2，使 $\widetilde{\rho}=2^{\frac{1-\delta_2}{C_\epsilon}}$ 更小，以确保 $0<\delta_1<1$。其次，令 $\epsilon>0$ 和 $(1+\epsilon)(1-\frac{\lambda\theta}{2})=1-\frac{\lambda\theta}{4}(\lambda\theta\in(0,1))$，因此

$$\beta_2=1-\delta_1\in(0,1),\ (1+\epsilon)(1-\frac{\lambda\theta}{2})<1.$$

此外，我们选择一个足够大的惩罚参数 α，使得

$$\beta_1>\beta_3.$$

最后，存在一个常数 $\delta = \max\{\beta_2, \frac{\beta_1}{\beta_3}\}$。然后，我们令 $\rho = \widetilde{\rho}\beta_1$，得到

$$|||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{k+1}|||_{k+1}^2 + \rho\eta^2(\boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{p}_{k+1}; \mathscr{T}_{k+1}) \leq \delta\Big(|||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_k|||_k^2 + \rho\eta^2(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k; \mathscr{T}_k)\Big).$$

推论 3.1. 在定理 *3.2* 的条件下，我们有

$$\|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k)\|_{DG}^2 + \rho\eta^2(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k; \mathscr{T}_k) \leq \delta^k \widetilde{C}_\delta.$$

其中 $\widetilde{C}_\delta = C\Big(\|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{p}_0)\|^2 DG + \rho\eta^2(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{p}_0; \mathscr{T}_0)\Big)$。因此，对于给定的精度，***AMIPDG*** 方法将在有限次运算后终止。

证明. 根据注 3.2 和定理 3.2，我们有

$$\begin{aligned} \|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k)\|_{DG}^2 + \rho\eta^2(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k; \mathscr{T}_k) &\leq C\Big(|||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_k|||_k^2 + \rho\eta^2(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k; \mathscr{T}_k)\Big) \\ &\leq \delta^k \widetilde{C}_\delta. \end{aligned}$$

4. 数值实验

本节通过一些数值实验，检验 AMIPDG 的效率和鲁棒性。我们使用 MATLAB 软件包 iFEM [6] 进行这些数值实验。在实验 4.1 和 4.2 中，我们取 $\boldsymbol{p} = \nabla \times \boldsymbol{u}$。

在例 4.1 中，我们讨论惩罚参数 α 对 $\|\cdot\|_{DG}$ 范数中误差的影响，并观察刚度矩阵条件数对α的依赖性。

例 4.1。令 $\Omega := [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$，我们构造模型 (1.1)-(1.2) 的如下解析解：

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x(x-1)y(y-1)z(z-1) \\ \sin(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z) \\ (1-e^x)(1-e^{x-1})(1-e^y)(1-e^{y-1})(1-e^z)(1-e^{z-1}) \end{pmatrix}.$$

容易看出，解 $\boldsymbol{u}$ 满足边界条件 $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上。

在这个例子中，我们将$x-$、$y-$ 和$z-$轴等分为$M(M \geq 2)$ 个子区间，从而得到一个均匀网格，然后将一个立方体划分为六个四面体。设$h = 1/M$ 为不同四面体网格的网格尺寸。我们固定网格$h = 1/4$，并在表 1 中报告不同惩罚参数 $\alpha = 1$、10、100、500 和 1000 下的 $\|\cdot\|_{DG}$ 范数误差估计以及刚度矩阵的条件数。我们注意到，$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_0$ 先随惩罚参数 α 的增大而增大，随后减小。

表 1： $\|\cdot\|_{DG}$ 范数中的误差，以及当$h = 1/4$时刚度矩阵的条件数。

$\|(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h, \alpha(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h))\|_{\mathrm{DG}}$	1	10	100	500	1000
	3.949e+00	1.133e-00	8.614e-01	8.649e-01	8.659e-01
Cond	3.235e+04	7.021e+04	5.959e+05	2.995e+06	6.150e+06

刚度矩阵的条件数随着罚参数 α的增大而增大。

为实现平衡，在以下数值测试中，我们始终选择 $\alpha = 10$ 0.

请注意，我们仅在例 4.1 中考虑均匀网格。接下来，我们测试自适应网格。

例 4.2. 令 $\Omega := [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$，我们构造模型 (1.1)-(1.2)的如下解析解

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{x(x-1)y(y-1)z(z-1)}{x^2+y^2+z^2+0.001} \\ \frac{x(x-1)y(y-1)z(z-1)}{x^2+y^2+z^2+0.001} \\ -\frac{x(x-1)y(y-1)z(z-1)}{x^2+y^2+z^2+0.001} \end{pmatrix}.$$

注意，解 $\boldsymbol{u}$ 满足条件 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n} = 0$ 于 $\partial\Omega$ 上。

图 1 右侧显示了一个自适应细化网格，其标记参数为 θ =0.7，经过$k = 18$后得到。网格在原点附近进行了局部细化。



图 1：左：包含 1152 个自由度的初始网格。右：经过 18 次细化后包含 181104 个自由度的自适应网格($\theta = 0.7$)。

图 2 展示了 $\log N$—$\log\ \eta\left(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k\right.$ 的曲线； $\left.\mathcal{T}_k\right)$参数为 $\theta = 0.3$、0.5、0.7。曲线表明，自适应算法 AMIPDG 对 $\eta\left(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k; \mathcal{T}_k\right)$具有收敛性和准最优性。

致谢

第一作者获得东华理工大学（DHBK2019209）和江西省教育厅（GJJ200755）的资助。第二、第三和第四作者获得国家自然科学基金（项目编号：12071160）的资助。第三作者还获得国家自然科学基金（项目编号：11901212）的资助。

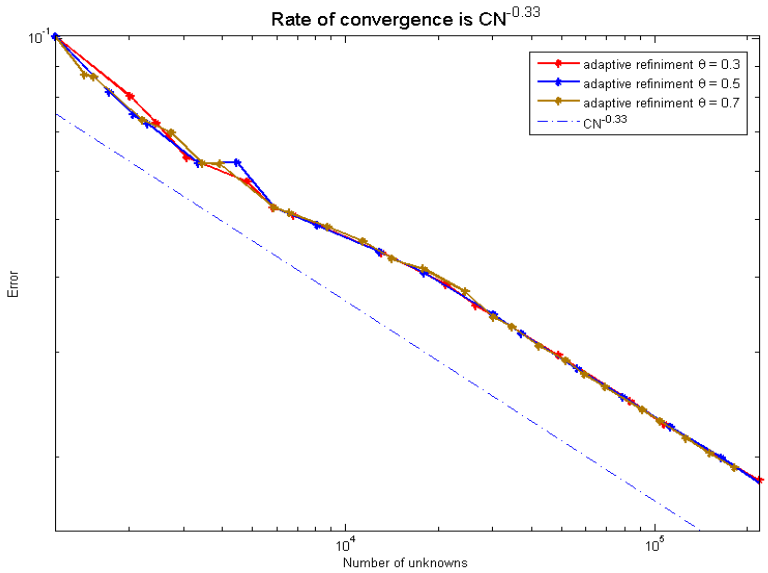

图 2：不同标记参数 θ 下，AMIPDG 对误差 $\eta\left(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}_k; \mathscr{T}_k\right)$ 的准最优性。

参考文献

[1] B. AYUSO DE DIOS、R. HIPTMAIR 和 C.L. PAGLIANTINI，针对具有不连续系数的 H(curl) 椭圆问题的 SIP-DG 离散的辅助空间预条件子。*IMA J.* 数值分析**37**（2017），第 646–686 页。[2] A. BONITO 和 R.H. NOCHETTO，自适应间断伽辽金方法的准最优收敛率。*SIAM J.* 数值分析 **48**（2010），第 734–771 页。[3] C. CARSTENSEN 和 R.H. HOPPE，$H(\boldsymbol{curl})$-椭圆问题的非标准有限元近似后验误差分析的统一框架。*J.* 数值数学**17**（2009），第 27–44 页。[4] C. CARSTENSEN、R.H. HOPPR、N. SHARMA 和 T. WARBURTON，针对$H(\boldsymbol{curl})$–椭圆问题的自适应混合化内罚间断伽辽金方法。*Numer. Math.Theor. Meth. Appl.***4**（2011），第 13–37 页。[5] C. CARSTENSEN 和 R. MA，针对非自伴不定二阶椭圆偏微分方程的具有最优收敛率的自适应混合有限元方法。*SIAM J.* 数值分析 **59**（2021），第 955–982 页。[6] L. CHEN，iFEM：一款创新的 MATLAB 有限元方法软件包。技术报告，加利福尼亚大学欧文分校（2009）。[7] L. CHEN、M. HOLST 和 J.C. XU，自适应混合有限元方法的收敛性与最优性。数学计算 **78**（2009），第 35–53 页。[8] E.T. CHUNG、M.C. YUEN 和 L.Q. ZHONG，时谐麦克斯韦方程组交错间断伽辽金离散的后验误差分析。*Appl. Math.Comput.***237**（2014），第 613–631 页。[9] L. DÖRFLER，泊松方程的收敛自适应算法。*SIAM J.* 数值分析**33**（1996），第 1106–1124 页。[10] S.H. DU 和 X.P. XIE，一种自适应混合有限元方法的收敛性，适用于

对流-扩散-反应方程。中国科学：数学 **58**(2015), 第 1327–1348 页。[11] P. HOUSTON、I. PERUGIA、A. SCHNEEBELI 和 D. SCHÖTZAU，针对不定时谐麦克斯韦方程的内罚方法。数值数学**100**(2005), 第 485–518 页。[12] W. JIANG、N. LIU、Y. TANG 和 Q.H. LIU，各向异性介质中二维矢量麦克斯韦特征值问题的混合有限元方法。电磁学研究进展**148**(2014), 第 159–170 页。[13] C. JOG 和 A. NANDY，电磁学混合有限元。应用计算数学**68**(2014), 第 887–902 页。[14] F. KIKUCHI，电磁学特征值问题有限元分析的混合与罚形式。计算方法与应用力学和工程 **64**(1987), 第 509–521 页。[15] N. LIU、L. TOBÓN、Y. TANG 和 Q.H. LIU，二维麦克斯韦特征值问题的混合谱元方法。计算物理通讯**17**(2015), 第 458–486 页。[16] P. MONK，麦克斯韦方程有限元方法。数值数学与科学计算。牛津大学出版社，牛津（2003）。[17] J.C. NÉDÉLEC，$\mathbb{R}^3$ 中的混合有限元。数值数学**35**(1980), 第 315–341 页。[18] I. PERUGIA、D. SCHÖTZAU 和 P. MONK，时谐麦克斯韦方程的稳定化内罚方法。计算方法与应用力学和工程 **191**(2002), 第 4675–4697 页。[19] J. SCHÖBERL，麦克斯韦方程的后验误差估计。数学计算 **77**(2008), 第 633–649 页。[20] X.Q. XING 和 L.Q. ZHONG，H(curl) 椭圆问题间断伽辽金方法的后验误差估计（中文）。华南师范大学学报（自然科学版）。**44**(2012), 第 18–21 页。