arXiv:2301.01464v1 [physics.plasm-ph] 4 Jan 2023

DIII-D上的低频剪切阿尔芬波：对实验观测的理论解释

Ruirui Ma，[1, 2, *] W.W. Heidbrink，[3] Liu Chen，[4,3,2] Fulvio Zonca，[2,4] 和 Zhiyong Qiu[4,2]
[1]西南物理研究院，中国成都 610041，邮政信箱 432
[2]非线性等离子体科学中心和 C.R. ENEA Frascati，C.P. 65，00044 弗拉斯卡蒂，意大利
[3]加州大学欧文分校物理与天文学系，美国加利福尼亚州欧文市，邮编 92697-4574
[4]浙江大学聚变理论与模拟研究所和物理系，中国杭州 310027
（日期：2023年1月5日）

摘要

基于广义鱼骨状色散关系（GFLDR）的理论框架，对低频剪切阿尔芬波的线性性质进行了理论研究和阐释，其中包括与β引致阿尔芬本征模（BAE 模式）相关的波，以及在反磁剪切 DIII-D 放电中观测到的低频模（W. Heidbrink，等2021 《核聚变》61 066031）。采用具有代表性的实验平衡剖面后发现，低频模和 BAE 模式分别属于反应型和耗散型不稳定模，且均以阿尔芬极化为主，因此前者更准确地称为低频阿尔芬模（LFAM）。具体而言，由于不稳定机制不同，与低频阿尔芬模相比，当安全因子最小值（q_{min}）偏离有理数时，BAE 模式的驱动最强。同时，BAE本征函数在高能粒子压力梯度最大处达到峰值，因此与 q_{min} 面存在较大偏差。此外，通过改变 q_{min}，理论上可以再现实验观测到的 BAE 模式和低频阿尔芬模频谱随频率升高的模式变化，并可基于 GFLDR 对其作出良好解释。本研究表明，GFLDR 具有可靠的预测能力，在提升实验和数值模拟结果的解释能力方面也具有实际价值。

* 通讯作者。电子邮箱：rrma@swip.ac.cn

I. 引言与研究动机

低频阿尔芬波在动理学热离子（KTI）间隙频率范围内的频谱 [1] 自首次观测到β引致阿尔芬本征模（BAE 模式） [2, 3]以来一直受到研究者关注。这些模的频率与热离子渡越频率和／或反弹频率相当，并能与热粒子和快粒子相互作用 [4–9], 有限的涨落水平和纬向场结构可能对相应的输运过程产生正面或负面影响 [1, 9, 10]。高能粒子（EPs）对低频剪切阿尔芬波（SAW）的影响，涵盖从动理学气球模（KBM） [11–13] 到 BAE 模式，是磁约束聚变文献中广泛研究的领域之一。近期相关论文涉及利用当前开发的创新诊断对实验测量进行解释和建模 [14–18], ，也涉及将数值研究和／或模拟结果与观测现象进行比较的最新进展 [19–24]。

近期，研究人员在 DIII-D 上开展了一系列专门实验，以研究低频剪切阿尔芬波的稳定性 [16–18]。实验表明，观测到的低频模[1], 此前被误认为是“β诱导阿尔芬声学本征模（BAAE）” [25, 26], ，实际上是一种频率更低的反应性不稳定动理学气球模，它在较高热电子温度下更易出现，且几乎不与高能离子耦合[16]；而阿尔芬本征模则由高能离子共振激发，其稳定性对束流功率和注入几何十分敏感， [17], 这与早期基于 GFLDR理论框架 [27] 的理论预测一致 [28, 29]。研究还发现，当安全因子最小值（q_{min}）接近有理数值时，这些不稳定性也会出现；按频率升序排列的高频 BAE 和低频阿尔芬模之间的频率间隔约为环向旋转频率（f_{rot}）。不过，两者之间存在一些细微差异：对于低频阿尔芬模，频率最大值出现在 q_{min} 的有理数值处，检测到的模式则在径向上局域于 q_{min}附近；而阿尔芬本征模有时出现在接近有理数值的位置，但其不稳定模出现的时刻不如低频阿尔芬模那样精确。此外，与低频阿尔芬模相比，阿尔芬本征模的本征函数在空间上偏离 q_{min} 径向位置更多。尽管已针对线性性质开展了专门数值模拟[1]下文将仅使用“低频阿尔芬模”（LFAM）这一称谓。该模式属于低频剪切阿尔芬波，主要呈现阿尔芬极化；请注意，这一术语与近期 DIII-D 实验中观测到的低频模同义 [16]。

对阿尔芬本征模和低频阿尔芬模 [24, 30] 的研究 [28, 29, 31–35], 虽然已经开展，但上述实验现象仍未得到充分解释。因此，本研究旨在深入理解低频剪切阿尔芬波的线性性质，尤其关注高能离子对其稳定性的影响。分析基于广义鱼骨型色散关系（GFLDR）理论框架开展， [28, 29, 31–35], 并对数值模拟结果和实验观测背后的主要不稳定机制作出定性和定量解释。因此，我们的分析进一步证明了GFLDR理论框架具有预测能力，并增强了其“解释实验结果和数值模拟结果的能力” [28, 29]。

在本研究中，与上一篇未考虑高能粒子（EPs）影响的论文不同 [36], ，我们关注由中性束注入加热产生的穿行快离子通过穿越共振引发的 BAE 激发 [17]。在这种情况下，不同组分的动力学会进入低频剪切阿尔芬波的色散关系，并在不同压力梯度标度长度下线性影响其行为。对于 DIII-D 放电 #178631，图 1 展示了热粒子和高能粒子压力的不同尺度长度（$L_{P_{th}}$ 和 L_{P_E}）的径向依赖性，以及弱磁剪切和/或零磁剪切区域内估算的径向模宽度（Δ_m），即$|s| = |(r/q)\, dq/dr| \lesssim 0.05$。具体而言，高能粒子压力剖面有以下两种极限情况。一种是 EFIT 重构提供的弛豫高能粒子剖面[37], ，其中快离子压力等于平衡压力与热压力之差。另一种是在不考虑不稳定性引起的快离子输运时，通过 TRANSP/NUBEAM 得到的“经典”高能粒子剖面[38] 。这两种情况下的高能粒子压力尺度长度分别记为 $L_{P_{E;rel}}$ 和 $L_{P_{E;cl}}$。模式失稳时的真实高能粒子剖面可能介于这两个极限之间。实际压力最接近基于 EFIT 的结果，但这是在不稳定模（推测已）使梯度变平之后测得的。同时，对于弱磁剪切和/或零磁剪切区域，在给定环向和极向模数（n, m）的情况下，归一化平行波矢为 $\Omega_{A,\ m} = k_{\|n0} q_{min} R_0 = n q_{min} - m$，因此可将模式的径向宽度估算为 $\Delta_m \simeq 1/|nq''|^{1/2}$ [39, 40]。这里， $k_{\|n0}$ 表示在 r_0处的平行波矢，此处 q 具有最小值 q_{min}; q'' 表示 q 沿径向方向的二阶导数； R_0 为环形大半径。可以发现，在该区域内，$L_{P_{th}} \gg \Delta_m$，由此得到模色散关系的通常局域极限。这就是

在无高能粒子情况下已于参考文献 [36]研究过的反应性不稳定低频阿尔芬模的情形。然而，对于能量离子驱动的弹跳阿尔芬本征模，则存在两种不同情况：中等高能粒子压强梯度情形，满足 $L_{P_{E;rel}} > \Delta_m$，该情形也近似得到通常的局域全局快速离子色散关系 [4, 28, 29, 32, 33, 35, 39, 40]；以及强高能粒子压强梯度情形，满足$L_{P_{E;rel}} \simeq \Delta_m$，此时需要采用低频剪切阿尔芬波的全局色散关系，相关讨论见第 II节。对这两种情况进行详细的数值研究

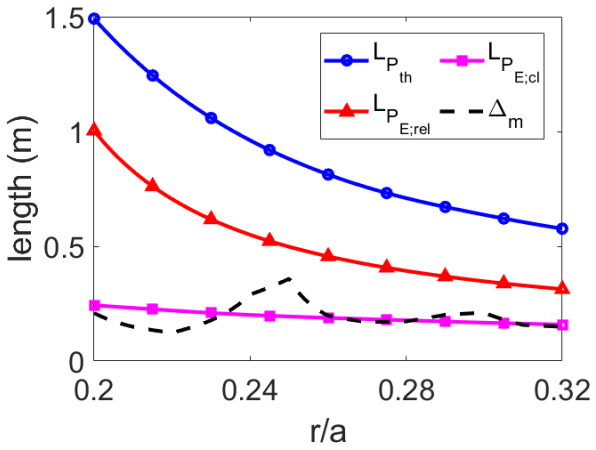


图 1. 热粒子压力和高能粒子压力的典型尺度长度（$L_{P_{th}}$ 和 L_{P_E}）的径向依赖性，以及估算的径向模宽度（Δ_m）。

在这些情况下，发现低频阿尔芬模和 BAE 模式均可被驱动至不稳定；然而，由于不稳定机制不同，这些模式产生了不同的实验观测。基于 GFLDR，所有这些特征都可以从定量和定性角度得到理论解释。此外，研究还证实，弹跳阿尔芬声学本征模的稳定性不受高能粒子影响，尽管它与气球模耦合后会变为弱阻尼；这一结果与 Chen 和 Zonca 的理论预测 [27] 以及文献[20, 23, 24]报道的数值模拟结果一致。

本文的结构如下。第II 节介绍并讨论了弱磁剪切和/或磁剪切趋于零附近低频剪切阿尔芬波的局域和全局色散关系，具体取决于 L_{P_E} 与Δ_m的相对大小，并分别讨论不同参数范围下的情形。在第III节中，讨论了存在高能粒子时低频剪切阿尔芬波的详细数值研究和理论分析，同时还对理论结果与实验结果进行了比较。最后，在第IV节给出结论和进一步讨论。

II. 低频剪切阿尔芬波的广义鱼骨状色散关系

本节将给出弱反剪切DIII-D放电中低频剪切阿尔芬波激发的解析色散关系。如上一节所述，将根据 L_{P_E} 与 Δ_m 的相对大小分为两种情形，以研究低频剪切阿尔芬波的稳定性：情形I，对应于$L_{P_E} > \Delta_m$的局域GFLDR模型；情形II，对应于 $L_{P_E} \simeq \Delta_m$的全局GFLDR。

首先考虑情形I。对于 $L_{P_{E;rel}} > \Delta_m$， L_{P_E} 和 Δ_m 的尺度可以分离，而 [4, 9, 28, 29, 32, 33]支配剪切阿尔芬波的涡量方程 ˊ可在通常的局域极限下给出低频电磁涨落色散关系，正如参考文献 [9, 28, 29, 32, 33, 35]中所详细推导和讨论的那样。我们只需指出，对于所关注的 DIII-D 情形，必须适当考虑反向磁剪切构型和热等离子体压缩效应 [36]。因此，对于 $s = 0$ 在 r_0 处但具有有限的 $S \equiv (r/q)[q'']^{1/2}$，低频剪切阿尔芬波的局域全局快速离子色散关系可写为[27–29, 35, 40]

$$iS(\Lambda_n^2 - k_{\|n0}^2 q_{min}^2 R_0^2)^{1/2}(1/n)^{1/2}\left[k_{\|n0} q_{min} R_0 - i(\Lambda_n^2 - k_{\|n0}^2 q_{min}^2 R_0^2)^{1/2}\right]^{1/2} = \delta\hat{W}_{nf} + \delta\hat{W}_{nk}(\omega), \tag{1}$$

其中，广义惯性项 $\Lambda_n(\omega)$ 已在文献 [7] 中明确推导，包含抗磁效应以及自由粒子和俘获粒子动力学的动力学效应，主要结果总结于附录 A。方程 ˆ ˆ(1) 右端包含“常规”理想区中势能的“流体” (δW_{nf}) 和“动力学” (δW_{nk}) 两种贡献。在低频极限 ($|\Lambda_n^2| \ll 1$) 下， δ ˆW_{nf} 与频率无关，其针对具有圆形磁通面的 (s, α) 模型平衡态的具体表达式为： [41]

$$\delta\hat{W}_{nf} \simeq \frac{\pi}{4}\left(\frac{S^2 k_{\|0} q_{min} R_0}{n} - \frac{3}{2}\alpha^2 S\left|\frac{k_{\|0} q_{min} R_0}{n}\right|^{1/2} + \frac{9}{32}\alpha^4\right) \tag{2}$$

其中 $\alpha = \alpha_c + \alpha_E$, $\alpha_c = -R_0 q_{min}^2 d\beta/dr$ 以及 $\alpha_E = -\frac{1}{2} R_0 q_{min}^2 d(\beta_{E\|} + \beta_{E\perp})/dr$。注意，方程 (2)还包含高能粒子的绝热响应和对流响应的贡献 [31]。

ˆ项 δW_{nk} 始终是模频率 ω的函数，因为它反映了共振和非共振波粒相互作用。为简化起见，同时又与

DIII-D 情形相关，我们将 F_{0E} 取为单一俯仰角 ($\lambda = \mu/\varepsilon$) 的减速束离子平衡分布函数；即 $F_{0E} = \frac{B_0\beta_E(r)}{2^{5}\sqrt{2\pi^2 m_E^3}}(1-\lambda_0 B_0)\varepsilon^{-3/2}\delta(\lambda-\lambda_0)$。其中，$\beta_E(r) \equiv 8\pi P_E(r)/B_0^2$ 是高能离子的动能与磁压之比，B_0 是轴上平衡磁场，$\delta(x)$是狄拉克函数，μ 是磁矩，且 $\varepsilon = v^2/2 \le \varepsilon_b$，其中 ε_b 为单位质量的高能离子初生能量。于是，穿越型高能离子的非绝热贡献 δW_{nku} 的显式表达式为 [32, 33]

$$\delta\hat{W}_{nku} \simeq \frac{\pi\alpha_E}{2^{5/2}}(1-\lambda_0 B_0/2)\bar{\omega}\left[2-\bar{\omega}\ln\left(\frac{\bar{\omega}+1}{\bar{\omega}-1}\right)\right], \tag{3}$$

其中，$\bar{\omega} = \omega/\omega_{tEm}$ 和 $\omega_{tEm} \equiv \sqrt{2\varepsilon_b}/qR_0$ 是粒子能量达到最大值时的快离子穿越频率。

值得强调的是，式 $k_{\parallel n0}q_{min}R_0$ 中的有限 (1) 起着重要的稳定作用，因为它表示 $r = r_0$ [28, 29, 35]处有限的线弯曲效应。此外，Λ_n 的表达式取决于模极化，通过 $S_f \equiv (i\delta E_\parallel/k_\parallel)_{a.c.}/\delta\phi_{d.c.}$给出，其中 $a.c.$ 和 $d.c.$ 分别表示平行电场、波矢和标量势扰动的正弦分量与近似恒定（笛卡尔型）分量 [21, 27]。再次说明，S_f的详细表达式见附录 A。这里仅指出，对于剪切阿尔芬波，$|S_f|$ 远小于 1；而对于离子声波，它为 1 的量级 [7, 21, 27]。

这里需要指出，在中等压强梯度情形下，低频剪切阿尔芬波的局域全局快速离子色散关系足以阐明实验和模拟结果背后的物理机制。然而，当存在强快离子压强梯度（即情形II）时，由方程 （1） 给出的低频剪切阿尔芬波局域全局快速离子色散关系将不再适用。在这种情况下，两个典型尺度长度 $L_{P_{E,\ cl}}$ 和 Δ_m 无法再彼此分离，因此需要一个全局色散关系，该关系可由涡量方程推导得到，即参考文献 [40] 的方程（1）。注意到模结构由单一的环向模数和极向模数主导，即（n，m），控制方程为

$$(\mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_r\xi)\cdot\left[\Lambda^2 - \Omega_{A,m}^2\left(1+\frac{x^2}{\Omega_{A,m}}+\frac{x^4}{4\Omega_{A,m}^2}\right)\right](\mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_r\xi)\delta\phi_m - (F+K)\delta\phi_m = 0, \tag{4}$$

其中，$\mathbf{k}_\perp/k_\theta = -(\mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_r\xi)$ 中的 $\mathbf{e}_r$ 和 $\mathbf{e}_\theta$ 分别为径向单位矢量和极向单位矢量，$x^2 = nq''_{min}(r-r_0)^2$, $\xi \equiv (i/n^{1/2})S(\partial/\partial x)$，而 $\delta\phi_m$ 是标量场扰动的第 m 个极向谐波。值得注意的是，反磁剪切区内各极向谐波之间的环向耦合通常并不重要，这与该模由单一的 m 和 n主导相一致。项 F 和 K

在方程 (4) 中分别表示类流体粒子和高能离子的贡献，其显式形式为

$$
\begin{aligned}
F &\simeq D_S^2 - 4\alpha^2 D_S + 2\alpha D_S^2 - (\alpha+1)\alpha + 2\alpha^3, \\
K &\simeq \frac{2\pi q_E^2 q^2 R_0^2 \omega}{m_E c^2} \left\langle \frac{\Omega_{dE}^2 Q F_{0E}}{\omega_{tE}^2 - \omega^2} \right\rangle_v = \frac{2}{\pi} \delta \hat{W}_{nku},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中 $D_S = S\sqrt{\Omega_{A,\ m}/n}$、 q_E 和 m_E 分别为高能离子的电荷和质量， $\Omega_{dE} = (\upsilon_{E\perp}^2/2 + \upsilon_{E\|}^2)/\omega_{cE} R_0$、 $\omega_{tE} = \upsilon_{E\|}/qR_0$、 $QF_{0E} = (\omega\partial_\varepsilon + \hat{}\omega_{*E}) F_{0E}$、 $\hat{}\omega_{*E} F_{0E} = \omega_{cE}^{-1} (\mathbf{k}\times\mathbf{b})\cdot\nabla F_{0E}$、 $\omega_{cE} = q_E B/m_E c$、 $\langle(...)\rangle_v = \int d^3v(...)$， 下标 $\|$ 和 $\perp$ 分别表示相对于平衡磁场 $\mathbf{b}$的平行分量和垂直分量。

方程(4) 是一个常微分方程，通常需要通过数值方法求解。然而，对于 DIII-D 的情形，高能离子归一化压强梯度的径向依赖性采用经典剖面表示，如图2中的黑色曲线所示，可以很好地用解析公式拟合： $\alpha_E(\rho) = c_1(1 - (\rho - c_2)^2/c_3^2)$，其中 $c_1 = 0.7099$, $c_2 = 0.3018$ 和 $c_3 = 0.2944$。这使我们能够得到低频剪切阿尔芬波激发的简单解析色散关系。需要指出的是，高能离子的最大驱动位于 $\rho = c_2 = 0.3018$附近，这与 q_{min}的径向位置不同。于是$\alpha_E(r)$ 可将式(3) 改写为

$$
\alpha_E(r) = \delta_a \alpha_{E0} \left(1 - \frac{(r - r_0 + \delta_b)^2}{\delta_c^2 L_{PE;cl}^2} \right),
\tag{6}
$$

其中 $\delta_a = c_1/\alpha_{E0}$， $\delta_b = r_0 - c_2 a$和 $\delta_c = c_3 a/L_{PE;\ cl}$， a是小半径， α_{E0}而 $L_{PE;cl}$是在 $r = r_0$处求值的。引入记号 $x = r - r_0 = \sigma z - \delta_b$，方程 (4) 可直接写成如下形式

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial z^2}\delta\phi_m - \frac{n\sigma^2}{S^2}\left(1 - \frac{F + \frac{2\delta_a}{\pi}\delta\hat{W}_{nku0}}{\epsilon_{A0}}\right)\delta\phi_m - \frac{1}{4}z^2\delta\phi_m = 0, \\
&\frac{2n\sigma^4\delta_a\delta\hat{W}_{nku0}}{\epsilon_{A0}\pi S^2\delta_c^2 L_{PE;cl}^2} = \frac{1}{4},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

其中 $\epsilon_{A0} = \Lambda^2 - \Omega_{A,\ m}^2$， $\delta\hat{}W_{nku0} = \frac{\pi\alpha_{E0}}{4\sqrt{2}}\left[2 - \bar{\omega}\ln\left(\frac{\bar{\omega}+1}{\bar{\omega}-1}\right)\right]$。则，方程 (7) 给出低频剪切阿尔芬波的以下全局色散关系，

$$
\frac{-n^{1/2}\pi^{1/2}\delta_c L_{PE;cl}\epsilon_{A0}^{1/2}}{2\sqrt{2}S\delta_a^{1/2}\delta\hat{W}_{nku0}^{1/2}}\left(1 - \frac{F + \frac{2\delta_a}{\pi}\delta\hat{W}_{nku0}}{\epsilon_{A0}}\right) = 2L + 1, \quad L = 0, 1, 2, 3\ ...
\tag{8}
$$

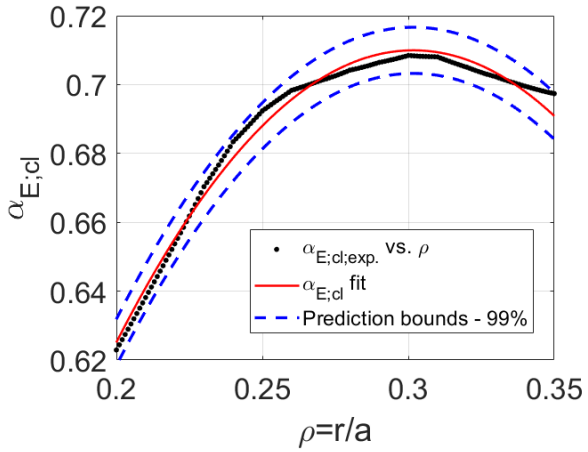


图 2. 具有经典剖面的高能粒子归一化压强梯度的径向依赖性。这里， q_{min} 的归一化径向位置为 $\rho_0 \equiv r_0/a = 0.28$。

这里，整数 L 是径向本征模数。相应的本征函数为

$$\delta\phi_m(r) = H_L(z)e^{-z^2} \propto \exp\left(-\frac{(r - r_0 + \delta_b)^2}{4\sigma^2}\right), \tag{9}$$

其中 $H_L(z)$ 表示 L阶厄米多项式，而离散束缚模上的因果性约束要求 $\mathcal{R}e(\sigma^2) > 0$，其中 σ^2 通过与色散关系（式 (7) ）保持一致地求解式 (8)中的第二个方程得到。典型径向宽度 w（$\delta\phi_m(r)$ 的径向宽度由 $w^2 = 4\sigma^2$确定。

式 (1) 和 (8) 构成了本节的结果，即由高能离子激发的低频剪切阿尔芬波的局部和全局 GFLDR。借助其显式形式，我们可以计算方程中涉及的各个项，并研究实验观测到的低频剪切阿尔芬波的线性性质。

III. 低频剪切阿尔芬波不稳定性的数值结果与分析

本节将分别展示存在高能离子时局域和全局低频剪切阿尔芬波稳定性的数值结果，其色散关系由方程 (1) 和(8)给出。数值研究采用了 DIII-D 炮次 #178631 在时刻 $t = 1200$ 毫秒[16], 的实验平衡和剖面，如图 3 所示，其中 q剖面呈反剪切构型，且 $q_{min} = 1.37$ 位于 $r_0/a = 0.28$

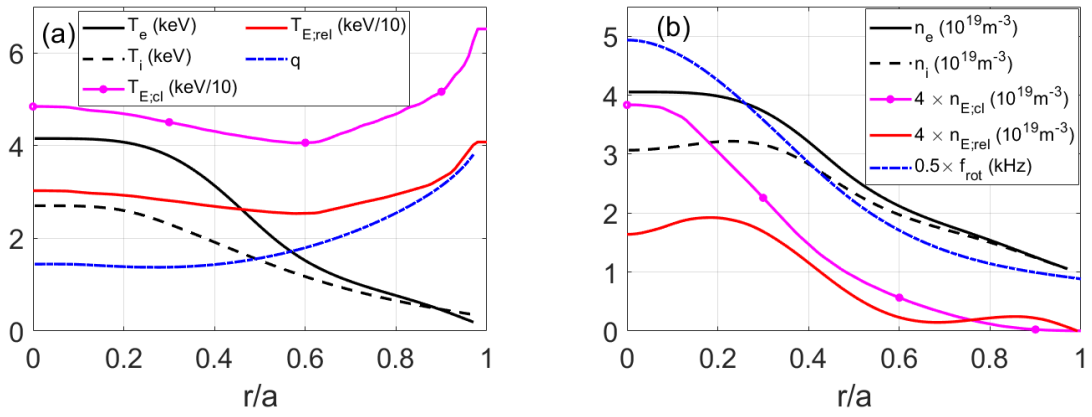


图3. DIII-D 炮次 #178631 用于数值研究的（a）温度和 q 以及（b）密度与环向旋转频率f_{rot} 的径向分布。

并且 q_{min} 在 1050 毫秒 $< t <$ 1350 毫秒的时间窗口内从 1.49 降至 1.18，如参考文献16中的图 6(b) 所示。

A. 局部低频剪切阿尔芬波稳定性

我们首先考察具有松弛高能离子分布的低频剪切阿尔芬波的线性性质，即情形I。数值研究中使用的局部平衡参数在 $r_0/a = 0.28$ 处计算得到，分别为 $S = 0.5895$, $\tau = T_e/T_i$ =3.86 keV/2.37 keV=1.62, $n_e = 3.80 \times 10^{19} m^{-3}$, $n_i = 3.19 \times 10^{19}\ m^{-3}$, $\epsilon_r = r_0/R = 0.10$, $\beta_i \simeq 0.01$, $\epsilon_{ni} = L_{ni}/R_0 = 0.414$, $\eta_i = L_{ni}/L_{Ti} = 0.8324$, $\omega_{*ni}/\omega_{ti} = 0.1919$, $(m,\ n)$ =(8, 6), $k_\theta \rho_{Li} = 0.2555$ 以及 $k_\theta \rho_{Le} = 0.0054$。其他固定的平衡参数为 $a = 0.64$ m、$R_0 = 1.74$ m、$B_0 = 1.8$ T。这里，k_θ为极向波数，ρ_{Li} 和 ρ_{Le} 分别为热离子和热电子的拉莫尔半径。

方程(1)预测的 (a) 模频率、(b) 增长率和 (c) 模极化随归一化热离子抗磁频率 $\Omega_{*pi} \equiv \omega_{*pi}/\omega_{ti}$ 的变化如图 4 所示，分别对应未考虑和考虑快离子效应的情形。根据模频率随物理参数的标度关系以及 $|S_f|$ [21] 的取值，图 4 中的三个分支可分类如下：(i) 气球模（红色圆圈曲线），其频率随 $\omega \sim \omega_{*pi}$ 标度变化；(ii) 阿尔芬本征模（蓝色曲线），其频率接近众所周知的估算值 $\omega/\omega_{ti} = q_{min}\sqrt{7/4 + \tau} \simeq 2.51$;

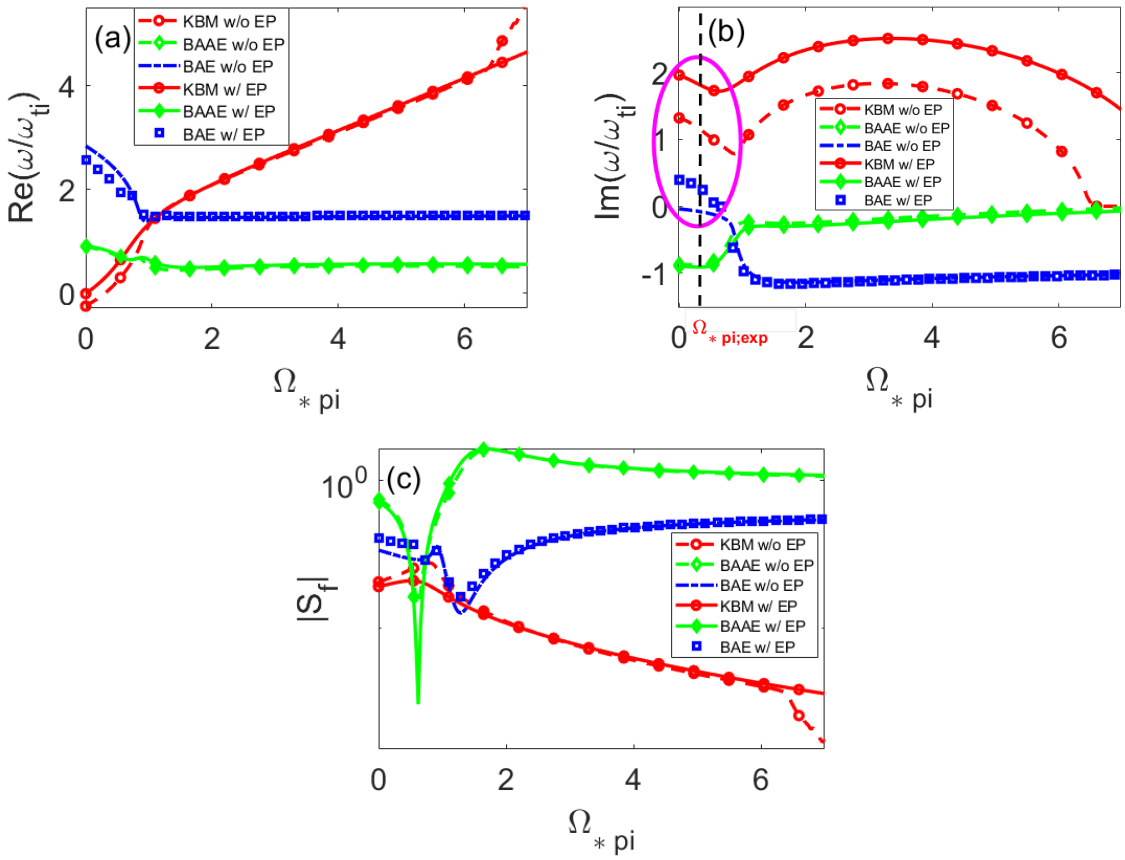


图 4. 无快离子效应（w/o）和有快离子效应（w/）时，低频剪切阿尔芬波的 (a) 实频率、(b) 增长率和 (c) 极化随 $\Omega_{*pi} \equiv \omega_{*pi}/\omega_{ti}$ 的变化。此处，虚线竖线表示 $\Omega_{*pi;exp}$ 的实验值，约为 0.35。

以及 (iii) 弹跳阿尔芬声学本征模（绿色菱形曲线），其频率约为阿尔芬本征模的一半，并受到强阻尼。快离子效应对低频剪切阿尔芬波稳定性的影响在图 4 (b) 中紫色曲线标示的区域十分明显：不存在高能粒子时，气球模是唯一的不稳定模；而存在高能粒子时，低频区域内的气球模和阿尔芬本征模均不稳定。特别是，根据实验参数计算得到的抗磁离子频率为 $\Omega_{*pi;exp} = 0.3517$，如虚线所示。在此情况下，气球模和阿尔芬本征模均不稳定，其等离子体参考系中的频率分别为 5.6 kHz 和 63.7 kHz，与实验观测结果吻合良好。同时，图 4(c) 的极化图显示，气球模和阿尔芬本征模的 $|S_f| \lesssim 0.1$ 值较小，这表明二者本质上都具有阿尔芬′极化。此外，为了排除

局域全局快速离子色散关系（D）的超越函数的奇点产生的伪非零解，复 D 平面中的奈奎斯特图见图5，显示在存在高能粒子时，路径绕原点两圈（见图5（b）），而不存在高能粒子时仅绕一圈（见图5（a）），从而证实存在两个含高能粒子的不稳定模。它

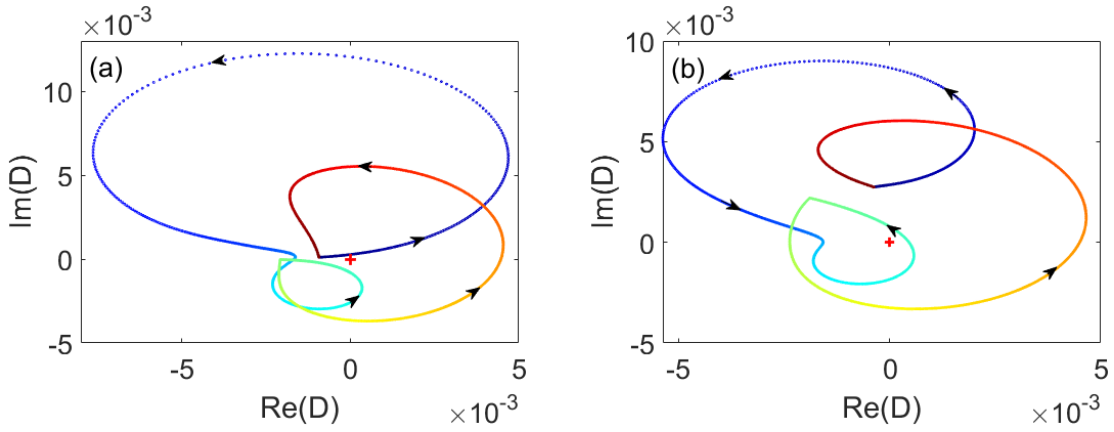


图 5. 不含和含快离子效应时，复 D(ω) 平面中的奈奎斯特图，分别对应情形（a）和（b）。

需要指出的是，与对快离子效应不敏感的频率相比，含快离子效应和不含快离子效应时气球模的增长率发生了显著变化。这是因为在我们的理论模型中，高能粒子的绝热贡献和对流贡献会修改 δW_f 的值，修改方式为 α，如式（2）所示。此时，为了更有说服力地比较理论预测与实验观测，有必要提供更精确的理论模型以及更全面的实验分析。我们还注意到，在这种情况下，弹跳阿尔芬声学本征模的稳定性/性质不受高能离子的影响——如三幅图中的带符号绿色虚线（不含快离子效应）和带符号实线（含快离子效应）明显完全重合所示——尽管由于足够强的 Ω_{*pi}引起的抗磁效应和俘获粒子效应，弹跳阿尔芬声学本征模通过与气球模耦合而变为弱阻尼。数值结果与文献 [20, 23, 24]报道的数值模拟结果以及文献 [27],中的理论预测一致，即“由于更强的波-能量粒子相互作用，高能粒子优先激发阿尔芬本征模而非弹跳阿尔芬声学本征模分支”。

现在，我们通过使用，来研究 DIII-D 中观测到的高频 BAE 和低频阿尔芬模上升谱背后的不稳定机制（见文献 [17] 的图 8）。

q_{min} 作为扫描参数。图 6 展示了不同极向模数和环向模数下（m、 n），气球模（红色曲线）和阿尔芬本征模（蓝色、绿色、紫色和橙色曲线）的模频率（带标记的实线曲线）与增长率（带标记的虚线曲线）随 q_{min} 变化的情况。结果表明，呈上升模式的模

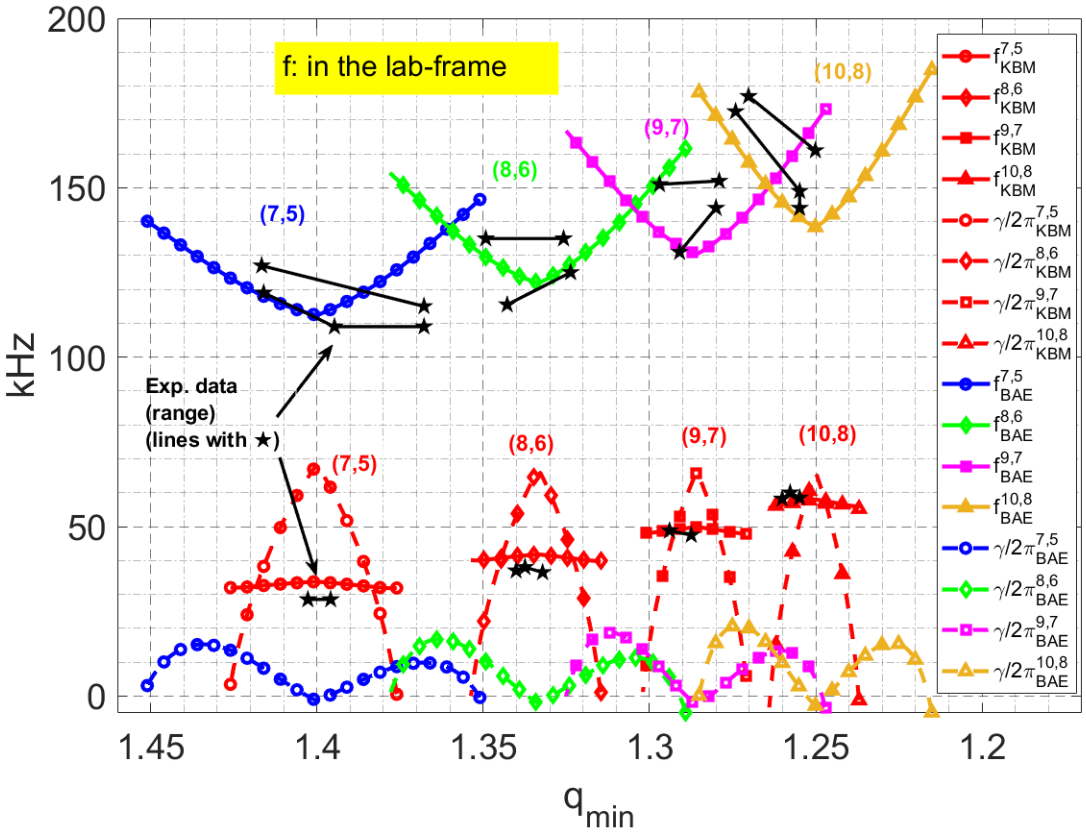


图 6. 不同（m、 n）条件下，KBM（红色曲线）和 BAE（蓝色、绿色、紫色和橙色曲线）的模频率（带标记的实线）和增长率（带标记的虚线）对 q_{min} 的依赖关系。图中还给出了实验观测到的频率。对于 BAE，由于这些模式覆盖一定的频率范围，线条表示不稳定带的上下限；对于 LFAM，实验频率变化为 < 0.5 kHz。横坐标中，采用图 8 所示的 [17] 实验测量的 q_{min}（t）拟合结果，将时间转换为q_{min}，其不确定度为 $\Delta q_{min} \simeq 0.01$。纵坐标中，理论实验室坐标系频率是在计算得到的 nf_{rot}等离子体坐标系频率基础上考虑多普勒频移得到的，其不确定度为 $\sim 0.5 \times n$ kHz。

高频 BAE 与低频动理学气球模之间的间隔均约为

f_{rot} 约为 7.5 kHz。具体而言，对于动理学气球模，不稳定性恰好在有理数值 q_{min}处达到峰值；而阿尔芬本征模有时出现在接近有理数值 q_{min} 的位置，但不稳定模出现的时刻不如动理学气球模那样精确。此外，低频 n 阿尔芬本征模与有理数值 q_{min} 交叉点的偏差大于高频 n 模式。从图 6中也可以清楚地看到理论预测频率与实验测量值的比较。下一节将进一步讨论，这些数值结果与实验观测吻合良好。

为了深入了解图中所示不稳定性的不同激发机制6，我们进一步分析高频（$|\omega| \gg \omega_{ti}$）和低频 $|\omega| \ll \omega_{bi}$ 极限下的 GFLDR。

对于 $|\omega| \gg |\omega_{ti}|$，BAE 对应的惯性项可化简为含 $\Lambda^2 \simeq \frac{\omega^2-\omega_{BAE}^2}{\omega_A^2}$ [4, 35, 42] 的简化表达式。这里，$\omega_{BAE}^2 = (7/4+\tau)v_i^2/R_0^2$ 是 BAE 频率的流体极限表达式。取 $\omega = \omega_r + i\gamma$ 和 $\delta W_{ku} = \mathrm{Re}\delta W_{ku} + i\mathrm{Im}\delta W_{ku}$，并假设 $|\gamma/\omega_r|$，可得 $|\mathrm{Im}\delta W_{ku}/\mathrm{Re}\delta W_{ku}| \ll 1$。于是，对于频隙模，其存在条件为 $\delta W_{nf} + \mathrm{Re}(\delta W_{nk}(\omega_r)) < 0$，而模实频率为

$$\omega_r^2 = \omega_{BAE}^2 \left[1 + \frac{\omega_A^2}{\omega_{BAE}^2} \left(k_{\|n0}^2 q_{min}^2 R_0^2 - \frac{n}{\left|k_{\|n0} q_{min} R_0\right|} \frac{\left(\delta\hat{W}_{nf} + \mathrm{Re}(\delta\hat{W}_{nk}(\omega_r))\right)^2}{S^2} \right) \right], \quad (10)$$

而增长率则由下式得到

$$\gamma = -\mathrm{Im}(\delta\hat{W}_{nk}(\omega_r)) \frac{\omega_A^2}{\omega_r} \frac{n\left(\delta\hat{W}_{nf} + \mathrm{Re}(\delta\hat{W}_{nk}(\omega_r))\right)}{\left|k_{\|n0} q_{min} R_0\right| S^2}, \quad (11)$$

由式(10) 可直接得出，BAE频率与$\left|k_{\|n0} q_{min} R_0\right|$呈正相关。因此，偏离有理 q_{min} 面越大，BAE频率就越高，如图6所示。还需注意，BAE具有正频率。ˆ 式(11) 要求 $\mathrm{Im}(\delta W_{nk}(\omega_r)) > 0$，这是高能粒子通过共振波粒相互作用激发BAE的条件。由此可知，BAE 模式的持续时间受其与高能粒子之间相关共振的影响，也取决于 q_{min} [17]的值。

同样，对于 $|\omega| \ll |\omega_{bi}|$ 的气球模，我们有 $\Lambda^2 \simeq c_0 \frac{q_{min}^2}{\sqrt{\epsilon}} \frac{\omega-\omega_{*pi}}{(\omega-\bar{\omega}_{di})(\omega_A^2}$ [7, 16, 21, 35, 43]) 。这里，$\bar{\omega}_{di}$ 是热离子平均进动频率，$c_0 \simeq 1.6$由俘获粒子和近乎

循环粒子 [44, 45]。因此，模实频率为

$$\omega = \frac{1}{2}(\bar{\omega}_{di}+\omega_{*pi})\pm\frac{1}{2}\left[(\omega_{*pi}-\bar{\omega}_{di})^2 - \frac{4\omega_A^2\sqrt{\epsilon}}{q_{min}^2 c_0}\left(\frac{n\left(\delta\hat{W}_{nf}+\mathrm{Re}(\delta\hat{W}_{nk}(\omega_r))\right)^2}{\left|k_{\|n0}q_{min}R_0\right|S^2} - k_{\|n0}^2 q_{min}^2 R_0^2\right)\right]^{1/2}, \tag{12}$$

并且当

$$\frac{|\omega_{*pi}-\bar{\omega}_{di}|^2}{\omega_A^2} < \frac{4\sqrt{\epsilon}}{q_{min}^2 c_0}\left(\frac{n\left(\delta\hat{W}_{nf}+\mathrm{Re}(\delta\hat{W}_{nk}(\omega_r))\right)^2}{\left|k_{\|n0}q_{min}R_0\right|S^2} - k_{\|n0}^2 q_{min}^2 R_0^2\right). \tag{13}$$

ˆ ˆ 注意到，由于同样的因果性约束， $\delta W_f + \mathrm{Re}\delta W_{ku} < 0$。因此，对于反应型不稳定性，当 $k_{\|n0}q_{min}R_0 \to 0$时，驱动达到最大值，这对应于不稳定的气球模恰好在 q_{min}的有理数值处达到峰值。

上述数值结果和理论分析解释了这一实验观测：与气球模相比，BAE 模式在时间上偏离 q_{min} 有理数值的程度更大。为进一步刻画这种偏离及其对径向模结构的影响，有必要对低频剪切阿尔芬波的全局模型进行数值研究。

B. 全局低频剪切阿尔芬波稳定性

在本部分中，我们考虑情形II，并应用方程 (8) 研究具有经典高能离子分布的全局低频剪切阿尔芬波稳定性。

图 7 显示了：（a）气球模（三角形标记）和 BAE（带标记的曲线）的实频率（蓝色标记）与增长率（红色标记）对径向模数 L 的依赖关系；以及（b） $\delta\phi_m$（r）处的径向模结构 $L=0$ 。可以发现：（i）对于 BAE 模式和气球模，具有 $L=0$ 的基态本征态最不稳定；（ii）对于 BAE 模式，等离子体参考系中的频率和增长率为（$80.7+15.2i$）kHz，增长率与实频率之比为 $\gamma/\omega \simeq 0.19$，这是由高能粒子激发的边缘不稳定间隙模的典型特征；（iii）对于气球模，等离子体参考系中的频率和增长率为（$-3.2+5.7i$）kHz，且 $\gamma/\omega \simeq 1.8$，这是反应型不稳定性的典型特征，与参考文献 [24] 中报告的结果一致。

相应地，图中 $L=0$的阿尔芬本征模径向本征函数曲线，如图7 (b)所示，表明 $\delta\phi_m$ 呈高斯形式，其形状与实验测得的

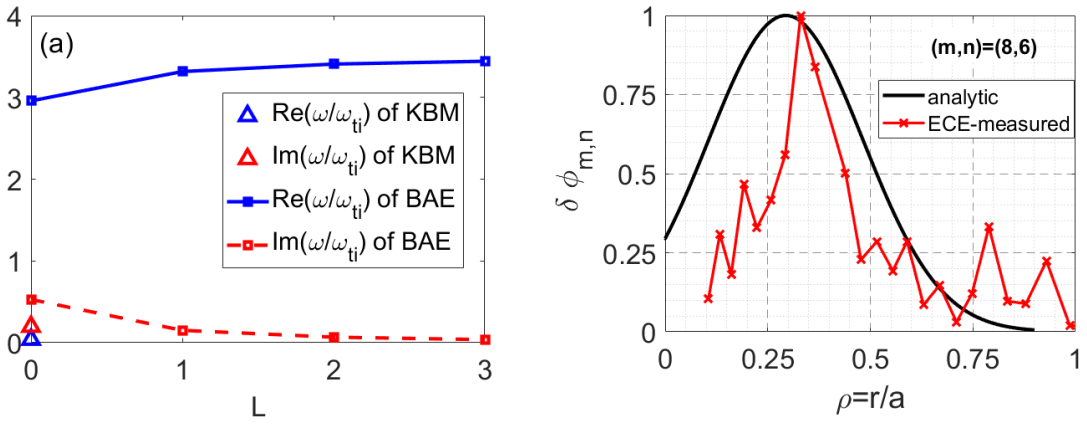


图 7。（a）气球模（三角标记）和阿尔芬本征模（带标记的线）的实频率（蓝色标记）与增长率（红色标记）随径向模数 L 的变化；（b） $L = 0$ 阿尔芬本征模的径向模结构 $\delta\phi_m$(r)。图中还显示了阿尔芬本征模模结构的近似实验测量结果。

径向模结构相似。在此情况下，理论计算得到的 $\delta\phi_m$ 的径向宽度为 w =0。2107，与高能离子压强的尺度长度相当，即 $L_{P_{E;cl}} = 0.1773$；这与图 1的分析一致。需要注意的是，由高能粒子分布决定的阿尔芬本征模本征函数在高能粒子压力梯度最大处的径向位置达到峰值，因此与 q_{min} 面有较大偏差。还可以预期，气球模本征函数应在不稳定性驱动最大的 q_{min} 有理数值处达到峰值。

最后，图´展示了低频剪切阿尔芬波和声波的连续谱图，见 $\Lambda_n^2(\omega) = k_{\|n}^2 q^2 R_0^2 = (nq-m)^2$ [4, 6, 28, 29, 42, 46, 47] 。这里，惯性项包含抗磁效应和热离子可压缩性，以及通过波与热穿越离子相互作用和抗磁效应产生的漂移阿尔芬波与漂移波边带耦合´。 [6]图中表明，基于 GFLDR，可以通过各分支的频率（a）、增长率（b）和极化（c）清晰地对其性质进行分类。这里，简写“e-KBM”表示沿热电子抗磁漂移方向传播的气球模分支。e-KBM 的不稳定连续谱是由于在惯性项中纳入了热粒子的动力学效应所致。此外，局部和全局情形计算得到的 $(m, n) = (8,6)$ 阿尔芬本征模以及 $(m, n) = (8,6)$ 气球模的频率分别位于阿尔芬本征模连续谱和气球模连续谱的间隙中，

其中 c　　与文献 [16, 24]报道的数值模拟结果一致。

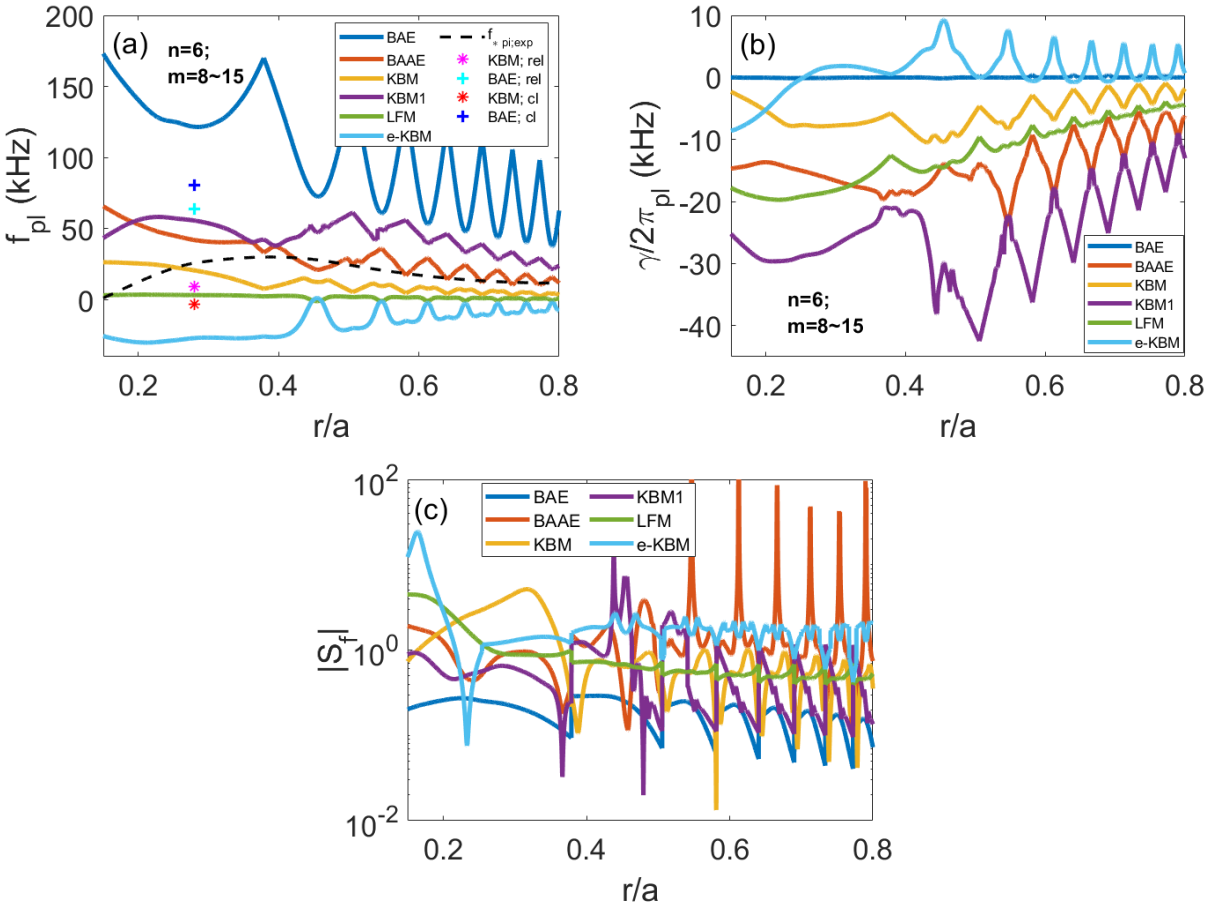


图 8. n=6、m=8-15 时低频剪切 Alfv´én 波和声学分支的连续谱。采用 DIII-D #178631 在 1200 毫秒时的平衡剖面。

IV. 总结与讨论

本研究探讨了 DIII-D 反向磁剪切托卡马克实验中考虑高能离子时低频剪切阿尔芬波（SAW）的线性性质。通过分析实验平衡剖面，基于广义鱼骨状色散关系（GFLDR）的统一理论框架，讨论了弱磁剪切和/或磁剪切消失时低频剪切阿尔芬波的局域模型和全局模型。结合数值与理论分析，阐述了模频率、增长率和极化对安全因子最小值（q_{min}）的依赖关系，以及不稳定机制。

本研究的主要结果是，DIII-D 实验中观测到的低频阿尔芬模和阿尔芬本征模分别属于反应型和耗散型不稳定模，且极化主要呈阿尔芬特征。由于不稳定机制不同，BAE峰值比LFAM峰值更远离有理 q_{min} 。BAE本征函数局域在高能离子驱动空间分布最强的径向位置，因此偏离了 q_{min}的径向位置。

理论分析解释了许多实验观测。

1. 该理论成功解释了两个不稳定性频带的时间模式：BAE频带和LFAM频带。它们都出现在 q_{min} 的有理数值附近，但稳定性却截然不同。

2. 预测的KBM频率值与实验测得的LFAM频率高度吻合。即使没有高能粒子（EPs），气球模也可能不稳定。

3. 预测的BAE频率值涵盖了实验观测值的相同范围。

4. 该理论还成功解释了为何在弹跳阿尔芬声学本征模频率处不存在第三支不稳定模：理论预测该模是稳定的。

5. 实验上，单个不稳定BAE的频率范围远大于不稳定LFAM的频率范围，这一特征也被该理论成功再现。

6. 实验中，不稳定LFAM 仅持续几毫秒。LFAM 持续时间较短，这与气球模增长率对 q_{min} 的强烈依赖相符。

7. 实验中，不稳定的阿尔芬本征模持续时间比低频阿尔芬模更长，这与理论上阿尔芬本征模增长率对 q_{min} 的依赖较弱相符。

8. 从时间上看，实验中的低频阿尔芬模出现在 q_{min}的有理数值处；阿尔芬本征模也出现在有理数值附近，但吻合度较低。理论稳定性预测也重现了这一特征：气球模的增长率在有理 q_{min} 数值处出现尖锐峰值，而阿尔芬本征模的增长率峰值则略有偏离。

9. 实验中，对于低频阿尔芬模和阿尔芬本征模，环向模数 n 较高的不稳定模，其持续时间比 n较低的不稳定模更短。随着 n 增加，增长率曲线变得更窄，这成功解释了这一特征。

10. 实验上，BAE 的径向本征函数近似呈高斯形状，这与理论预测一致，即 $L = 0$ 径向谐波最不稳定。

11. 实验上，与纯氘等离子体相比，含氢等离子体中的低频阿尔芬模更不稳定 [18], 这一现象可由氢等离子体中 ω_A 的值较高来解释。如方程(13) 所示， ω_A 值越大，不稳定性阈值越低。

另一方面, 理论与实验之间存在三处差异 .

1. 尽管预测的气球模增长率在 q_{min} 取有理数值时正确地出现尖锐峰值，但其保持为正的持续时间远长于实验观测到的低频阿尔芬模持续时间。显然，理论中缺少一种额外的阻尼机制。

2. 尽管在有无高能粒子的情况下，预测的气球模增长率发生了显著变化，但实验上低频阿尔芬模的稳定性似乎并不依赖于高能粒子。因此，要进行有意义的比较，还需要更精确的理论模型和更全面的实验分析。

3. 尽管预测的 BAE 频率涵盖了观测值，但预测频率随时间呈抛物线形变化，而实验频率的变化规律性较弱。这种差异可能是由于快离子分布函数的建模不够精确所致。

最后，有一项理论预测尚未得到实验的明确验证：模极化。理论预测，气球模和阿尔芬本征模均以阿尔芬波极化为主。实验中，通常可在外部磁线圈上观测到低环向模数（$n \leq 3$）的阿尔芬本征模；而低频阿尔芬模从未被探测到，但推断出的环向模数范围通常比常规探测到的 RSAE 模式或阿尔芬本征模更宽。DIII-D 配备了一种能够探测内部磁场的诊断仪器——径向干涉仪-偏振仪（RIP） [48] ，它测量密度和径向磁场的线积分，$\int n_e B_r dl$。该诊断仪器能清晰地探测到 RSAE 模式和阿尔芬本征模，这与

它们预期的剪切波偏振一致。RIP 观测到某些低频阿尔芬模存在涨落，表明其中至少含有一定的磁性分量，但信号比 RSAE 模式和阿尔芬本征模的信号弱。目前尚不清楚，这种差异是由与模结构相关的线积分效应造成的，还是因为低频阿尔芬模的极化不如其他模式那样具有阿尔芬特性。

致谢

作者之一 R.R. Ma 谨向 Lei Yang 博士和 Yunpeng Zou 博士表示感谢，感谢他们提出的宝贵意见，并感谢 DIII-D 团队提供实验数据。作者感谢 Xiaodi Du 博士就模极化提出的宝贵意见。R.R Ma 还感谢非线性等离子体科学中心 （CNPS）开展的启发性学术讨论，这些讨论为科学研究提供了宝贵的灵感来源。

本研究部分得到了中国国家重点研发计划项目（资助编号：2022YFE03040002 和 2018YFE0304103）、中国国家自然科学基金项目（资助编号：12261131622 和 12175053）、四川省自然科学基金项目（资助编号：2022NSFSC1814）以及四川省科技计划项目（资助编号：2022ZYD0019）的资助。本研究还在 EUROfusion 联盟框架内开展，该联盟由欧盟通过欧拉姆研究与培训计划（资助协议编号：101052200 – EUROfusion）提供资助。然而，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧盟委员会的立场。欧盟和欧盟委员会均不对这些观点和意见承担责任。本材料基于美国能源部科学办公室聚变能科学办公室的支持开展的工作，使用了 DIII-D 国家聚变设施（美国能源部科学办公室用户设施），资助编号为 DE-FC02-04ER54698 和 DE-SC0020337。

本报告是作为美国政府某机构赞助的工作报告编制的。美国政府及其任何机构或其任何雇员，均不对所披露的任何信息、设备、产品或工艺的准确性、完整性或有用性作出明示或默示的任何保证，也不承担任何法律责任或义务，亦不表示其使用不会侵犯私人所有权利。本文提及任何特定商业产品、工艺或服务的商品名称、商标、制造商或

其他信息，并不一定构成或暗示美国政府或其任何机构对其的认可、推荐或偏好。本文作者所表达的观点和意见不一定代表或反映美国政府或其任何机构的观点。

附录 A： Λ_n^2 和 S_f的详细表达式

广义惯性的详细推导， Λ_n^2 以及波极化， S_f可见参考文献 7。此处仅给出结果。在低 β ($\beta = 8\pi P/B_0^2 \approx \epsilon^2$) 轴对称托卡马克等离子体中，

$$\Lambda_n^2 = I_\phi \left[\frac{\omega^2}{\omega_A^2}\left(1 - \frac{\omega_{*pi}}{\omega}\right) + \Lambda_{cir}^2 + \Lambda_{tra}^2 \right], \tag{A1}$$

其中， Λ_{cir}^2 和 Λ_{tra}^2 分别表示修正后的通行离子响应和俘获离子响应，而 I_ϕ 描述了由于俘获热粒子进动共振 [7, 21]的影响而产生的平行电场（$\delta E_\parallel$）中非零的“长笛型”分量。同时， $\omega_A = v_A/qR_0$ 是 Alfv´en 频率， v_A 是 Alfv´en 速度，而$\omega_{*ps} = (T_s c/e_s B)(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\nabla n_s/n_s + \nabla T_s/T_s) \equiv \omega_{*ns} + \omega_{*Ts}$是由密度和温度梯度导致的热粒子抗磁漂移频率。

对于 Λ_n^2，式(A1) 中涉及的各项为 [7]

$$\begin{aligned}\Lambda_{cir}^2 = q^2 \frac{\omega\omega_{ti}}{\omega_A^2}\Big[&\Big(1 - \frac{\omega_{*ni}}{\omega}\Big)\Big(F\Big(\frac{\omega}{\omega_{ti}}\Big) + \Delta F\Big(\frac{\omega}{\omega_{ti}}\Big)\Big) - \frac{\omega_{*Ti}}{\omega}\Big(G\Big(\frac{\omega}{\omega_{ti}}\Big) + \Delta G\Big(\frac{\omega}{\omega_{ti}}\Big)\Big) \\ &+ \frac{\omega\omega_{ti}}{4\bar{\omega}_{Di}^2}\Big(N_1\big(\frac{\omega}{\omega_{ti}}\big) + \Delta N_1\Big(\frac{\omega}{\omega_{ti}}\Big)\Big) S_f(\omega, \bar{\omega}_{Di}, \omega_{bi}, \omega_{ti})\Big],\end{aligned} \tag{A2}$$

$$\Lambda_{tra}^2 = \frac{\omega^2\omega_{bi}^2}{\omega_A^2\bar{\omega}_{Di}^2}\frac{q^2}{\sqrt{2\epsilon}}\big[P_3 + (P_2 - P_3) S_f(\omega, \bar{\omega}_{Di}, \omega_{bi}, \omega_{ti})\big], \tag{A3}$$

$$I_\phi = 1 + \frac{\sqrt{2\epsilon}(L(\omega/\bar{\omega}_{Di}) + \tau^{-1}L(\omega/\bar{\omega}_{De}))}{1 + \tau\omega_{*ni}/\omega + \sqrt{2\epsilon}\tau[1 - \omega_{*ni}/\omega - M(\omega/\bar{\omega}_{Di}) - \tau^{-1}M(\omega/\bar{\omega}_{De})]}, \tag{A4}$$

至于 $S_f \equiv (i\delta E_\parallel/k_\parallel)_{a.c.}/\delta\phi_{d.c.}$，其表达式为 [7]

$$S_f = -\frac{N_1\left(\frac{\omega}{\omega_{ti}}\right) + \Delta N_1\left(\frac{\omega}{\omega_{ti}}\right) + \sqrt{2\epsilon}P_2}{1 + \frac{1}{\tau} + D_1\left(\frac{\omega}{\omega_{ti}}\right) + \Delta D_1\left(\frac{\omega}{\omega_{ti}}\right) + \sqrt{2\epsilon}\,(P_1 - P_2)} \tag{A5}$$

其中函数 $F(x)$、 $\Delta F(x)$、 $G(x)$、 $\Delta G(x)$、 $N_1(x)$、 $\Delta N_1(x)$、 $D_1(x)$、 $\Delta D_1(x)$、 P_1、 P_2、 P_3、$L(\omega/\bar{\omega}_{Ds})$ 和 $M(\omega/\bar{\omega}_{Ds})$，其中 $x = \omega/\omega_{ti}$，并使用等离子体色散函数 $Z(x)$，

定义如下

$$
\begin{aligned}
&Z(x)=\pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-y^2}}{y-x}dy,\\
&F(x)=x(x^2+3/2)+(x^4+x^2+1/2)Z(x),\\
&\Delta F(x)=\frac{1}{\pi^{1/2}}\int_0^{\infty}e^{-y}\ln\left(\frac{x+\sqrt{2\epsilon y}}{x-\sqrt{2\epsilon y}}\right)\frac{y^2}{4}dy,\\
&G(x)=x(x^4+x^2+2)+(x^6+x^4/2+x^2+3/4)Z(x),\\
&\Delta G(x)=\frac{1}{\pi^{1/2}}\int_0^{\infty}e^{-y}\ln\left(\frac{x+\sqrt{2\epsilon y}}{x-\sqrt{2\epsilon y}}\right)\frac{y^2}{4}\left(y-\frac{3}{2}\right)dy,\\
&N_1(x)=2\frac{\bar{\omega}_{Di}}{\omega_{ti}}\left\{\left(1-\frac{\omega_{*ni}}{\omega}\right)[x+(1/2+x^2)Z(x)]-\frac{\omega_{*Ti}}{\omega}[x(1/2+x^2)+(1/4+x^4)Z(x)]\right\},\\
&\Delta N_1(x)=\frac{\bar{\omega}_{Di}/\omega_{ti}}{\pi^{1/2}}\int_0^{\infty}ye^{-y}\ln\left(\frac{x+\sqrt{2\epsilon y}}{x-\sqrt{2\epsilon y}}\right)\left[1-\frac{\omega_{*ni}}{\omega}-\frac{\omega_{*Ti}}{\omega}\left(y-\frac{3}{2}\right)\right]dy,\\
&D_1(x)=x\left(1-\frac{\omega_{*ni}}{\omega}\right)Z(x)-\frac{\omega_{*Ti}}{\omega}[x+(x^2-1/2)Z(x)],\\
&\Delta D_1(x)=\frac{\bar{\omega}_{Di}/\omega_{ti}}{\pi^{1/2}}\int_0^{\infty}e^{-y}\ln\left(\frac{x+\sqrt{2\epsilon y}}{x-\sqrt{2\epsilon y}}\right)\left[1-\frac{\omega_{*ni}}{\omega}-\frac{\omega_{*Ti}}{\omega}\left(y-\frac{3}{2}\right)\right]dy,\\
&P_1=-2\frac{\omega^2}{\bar{\omega}_{Di}^2}\left[\left(1-\frac{\omega_{*ni}}{\omega}+\frac{3}{2}\frac{\omega_{*Ti}}{\omega}\right)G_2-\frac{\omega_{*Ti}}{\omega}G_4\right],\\
&P_2=-2\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Di}}\left[\left(1-\frac{\omega_{*ni}}{\omega}+\frac{3}{2}\frac{\omega_{*Ti}}{\omega}\right)G_4-\frac{\omega_{*Ti}}{\omega}G_6\right],\\
&P_3=-2\left[\left(1-\frac{\omega_{*ni}}{\omega}+\frac{3}{2}\frac{\omega_{*Ti}}{\omega}\right)G_6-\frac{\omega_{*Ti}}{\omega}G_8\right],\\
&G_n=\frac{1}{\pi^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2}x^n}{(\omega/\bar{\omega}_{Di}-x^2)^2-(\omega_{bi}/\bar{\omega}_{Di})^2x^2}dx,\\
&M\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}\right)=-2\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}\left\{\left(1-\frac{\omega_{*ni}}{\omega}+\frac{3}{2}\frac{\omega_{*Ti}}{\omega}\right)\left[1+\sqrt{\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}}Z\left(\sqrt{\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}}\right)\right]\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\omega_{*Ti}}{\omega}\left[\frac{1}{2}+\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}+\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}\right)^{3/2}Z\left(\sqrt{\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}}\right)\right]\right\},\\
&L\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}\right)=-2\left\{\left(1-\frac{\omega_{*ni}}{\omega}+\frac{3}{2}\frac{\omega_{*Ti}}{\omega}\right)\left[\frac{1}{2}+\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}+\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}\right)^{3/2}Z\left(\sqrt{\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}}\right)\right]\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\omega_{*Ti}}{\omega}\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}+\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}\right)^{2}+\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}\right)^{5/2}Z\left(\sqrt{\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{A6}
$$

此处，深俘获粒子的磁漂移轨道进动频率 $\bar{\omega}_{ds}=\bar{\omega}_{Ds}m_s\upsilon^2/2T_s$ $(s=i,\ e)$，其中 $\bar{\omega}_{Ds}=(nq/r)\ T_s/m_sR_0\omega_{cs}$ 和 $\omega_{cs}=e_sB/m_sc$；深俘获离子的弹跳频率 $\omega_{bi}\equiv(r/R_0)^{1/2}(T_i/m_i)^{1/2}/(qR_0)\approx\epsilon^{1/2}\omega_{ti}$ 与

$\omega_{ti} = (2T_i/m_i)^{1/2}/qR_0$；以及 $\tau \equiv T_e/T_i$。

参考文献

---

[1] L. Chen 和 F. Zonca, 《核聚变》**47**, S727 (2007年)。[2] W. W. Heidbrink、E. J. Strait、M. S. Chu 和 A. D. Turnbull, 《物理评论快报》**71**, 855 (1993)。[3] A. D. Turnbull、E. J. Strait、W. W. Heidbrink、M. S. Chu、H. H. Duong、J. W. Greene、L. L. Lao、T. S. Taylor 和 S. J. Thompson, 《B辑流体物理》**5**, 2546 (1993)。[4] F. Zonca、L. Chen 和 R. A. Santoro, 《等离子体物理与受控聚变》**38**, 2011 (1996)。[5] F. Zonca、L. Chen、J. Q. Dong 和 R. A. Santoro, 《等离子体物理》 **6**, 1917 (1999)。[6] F. Zonca 、 A. Biancalani 、 I. Chavdarovski、L. Chen、C. D. Troia 和 X. Wang, 《物理学杂志：会议系列》**260**, 012022 (2010)。[7] I. Chavdarovski 和 F. Zonca, 《等离子体物理与受控聚变》**51**, 115001 (2009)。[8] P. Lauber、M. Brudgam、D. Curran、V. Igochine、K. Sassenberg、S. Gunter、M. Maraschek、M. Garcia-Munoz、N. Hicks 和 ASDEX Upgrade 团队, 《等离子体物理与受控聚变》**51**, 124009 (2009)。[9] L. Chen 和 F. Zonca, 《现代物理评论》**88**, 015008 (2016)。[10] F. Zonca、L. Chen、M. V. Falessi 和 Z. Qiu, 《物理学杂志：会议系列》**1785**, 012005 (2021)。[11] C. Cheng, 《流体物理》**25**, 1020 (1982)。[12] W. Tang、J. Connor 和 R. Hastie, 《核聚变》**20(11)**, 1439 (1980)。[13] H. Biglari 和 L. Chen, 《物理评论快报》**67**, 3681 (1991)。[14] S. Sharapov、B. Alper、H. Berk、D. Borba、B. Breizman、C. Challis、I. Classen、E. Edlund、J. Eriksson、A. Fasoli、E. Fredrickson、G. Fu、M. Garcia-Munoz、T. Gassner、K. Ghantous、V. Goloborodko、N. Gorelenkov、M. Gryaznevich、S. Hacquin、W. Heidbrink、C. Hellesen、V. Kiptily、G. Kramer、P. Lauber、M. Lilley、M. Lisak、F. Nabais、R. Nazikian、R. Nyqvist、M. Osakabe、C. P. von Thun、S. Pinches、M. Podesta、M. Porkolab、K. Shinohara、K. Schoepf、Y. Todo、K. Toi、M. V. Zeeland、I. Voitsekhovich、R. White、V. Yavorskij、I. E. TG 和 J.-E.

合作者a, 《核聚变》53, 104022 (2013).[15] N. Gorelenkov, S. Pinches, and K. Toi, 《核聚变》54, 125001 (2014).[16] W. Heidbrink, M. V. Zeeland, M. Austin, A. Bierwage, L. Chen, G. Choi, P. Lauber, Z. Lin, G. McKee, and D. Spong, 《核聚变》61, 016029 (2021).[17] W. Heidbrink, M. V. Zeeland, M. Austin, N. Crocker, X. Du, G. McKee, and D. Spong, 《核聚变》61, 066031 (2021).[18] W. Heidbrink, G.Choi, M. V. Zeeland, M.Austin, G.Degrandchamp, D.Spong, A. Bierwage, N. Crocker, X. Du, P. Lauber, Z. Lin, and G. McKee, 《核聚变》61, 106021 (2021).[19] D. Curran, P. Lauber, P. J. M. Carthy, S. da Graca, V. Igochine, and ASDEX 升级团队, 《等离子体物理与受控聚变》54, 055001 (2012).[20] P. Lauber, 《物理学报告》533, 33 (2013).[21] I. Chavdarovski and F. Zonca, 《等离子体物理》21, 052506 (2014).[22] A. Fasoli, S. Brunner, W. Cooper, J. Graves, P.Ricci, O. Sauter, and L. Villard, 《自然·物理》12, 411 (2016).[23] A. Bierwage and P. Lauber, 《核聚变》57, 116063 (2017).[24] G. Choi, P. Liu, X. Wei, J. Nicolau, G. Dong, W. Zhang, Z. Lin, W. Heidbrink, and T. Hahm, 《核聚变》61, 066007 (2021).[25] N. Gorelenkov, H. Berk, E. Fredrickson, S. Sharapov, and J. E. Contributors, 《物理快报A辑》370, 70 (2007).[26] N. N. Gorelenkov, M. A. V. Zeeland, H. L. Berk, N. A. Crocker, D. Darrow, E. Fredrickson, G.-Y. Fu, W. W. Heidbrink, J. Menard, and R. Nazikian, 《等离子体物理》16, 056107 (2009).[27] L. Chen and F. Zonca, 《等离子体物理》24, 072511 (2017).[28] F. Zonca and L. Chen, 《等离子体物理》21, 072120 (2014).[29] F. Zonca and L. Chen, 《等离子体物理》21, 072121 (2014).[30] J. Varela, D. Spong, L. Garcia, J. Huang, M. Murakami, A. Garofalo, J. Qian, C. Holcomb, A. Hyatt, J. Ferron, C. Collins, Q. Ren, J. McClenaghan, and W. Guo, 《核聚变》58, 076017 (2018).[31] L. Chen, R. B. White, and M. Rosenbluth, 《物理评论快报》52, 1122 (1984).[32] L. Chen, 《等离子体物理》1, 1519 (1994).[33] S. Tsai and L. Chen, 《B辑流体物理》5, 3284 (1993).[34] F. Zonca and L. Chen, 《等离子体物理与受控聚变》48, 537 (2006).

[35] F. Zonca, P. Buratti, A. Cardinali, L. Chen, J.-Q. Dong, Y.-X. Long, A. Milovanov, F. Romanelli, P. Smeulders, L. Wang, Z.-T.Wang, C. Castaldo, R.Cesario, E.Giovannozzi, M. Mar- inucci, and V. P. Ridolfini, 《核聚变》**47**, 1588 (2007).[36] R. Ma, L. Chen, F. Zonca, Y. Li, and Z. Qiu, 《等离子体物理与受控聚变》**64**, 035019 (2022).[37] L. L. Lao, H. S. John, and R. D. Stambaugh, 《核聚变》**25**, 1611 (1985).[38] A. Pankin, D. McCune, R. Andre, G. Bateman, and A. Kritz, 《计算物理通讯》**159**, 157 (2004).[39] F. Zonca and L. Chen, 《等离子体物理》**7**, 4600 (2000).[40] F. Zonca, S. Briguglio, L. Chen, S. Dettrick, G. Fogaccia, D. Testa, and G. Vlad, 《等离子体物理》**9(12)**, 4939 (2002).[41] J. W. Connor, R. J. Hastie, and J. B. Taylor, 《物理评论快报》**40**, 396 (1978).[42] F. Zonca, L. Chen, A. Botrugno, P. Buratti, A. Cardinali, R. Cesario, V. P. Ridolfini, and JET-EFDA 合作者, 《核聚变》**49**, 085009 (2009).[43] L. Chen, 私人笔记 (2020).[44] M. N. Rosenbluth and F. L. Hinton, 《物理评论快报》**80**, 724 (1998).[45] J. P. Graves, R. J. Hastie, and K. I. Hopcraft, 《等离子体物理与受控聚变》**42**, 1049 (2000).[46] M. V. Falessi, N. Carlevaro, V. Fusco, G. Vlad, and F. Zonca, 《等离子体物理》**26**, 082502 (2019).[47] M. V. Falessi, N. Carlevaro, V. Fusco, E. Giovannozzi, P. Lauber, G. Vlad, and F. Zonca, 《等离子体物理杂志》**86**, 845860501 (2020).[48] J. Chen, W. X. Ding, D. L. Brower, D. Finkenthal, C. Muscatello, D. Taussig, and R. Boivin, 《科学仪器评论》**87**, 11E108 (2016).