arXiv:2301.01471v1 [cs.GR] 4 Jan 2023

自由形式伊斯兰几何图案

Rebecca Lin[1,2] 和 Craig S. Kaplan[3]

[1] 美国马萨诸塞州剑桥市，麻省理工学院[2] 加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华市，不列颠哥伦比亚大学[3] 加拿大安大略省滑铁卢市，滑铁卢大学

摘要。 伊斯兰几何图案是一种丰富而古老的装饰传统。许多经典设计以玫瑰花饰的周期性排列为特色：星形周围环绕着六边形花瓣组成的环。我们提出一种生成“自由形式”玫瑰花饰构图的新技术：这种有限的设计可自由混合大小各异的玫瑰花饰，同时保留传统图案的美感。我们以圆堆积作为脚手架，构建多边形拼片，并用基于伊斯兰艺术既有构造的图案填充每个多边形。

关键词： 伊斯兰几何图案 · 模块化设计 · 圆堆积

1 引言

伊斯兰几何图案是一种源远流长、丰富多彩的装饰传统 [6]。这类图案中最具代表性的，是星形的周期性排列，星形之间的空隙则由对称性较低的其他多边形填充（图 2）。星形的凹角通常会填入由花瓣形六边形组成的环，形成称为玫瑰花饰 [25] 的复合形状（图 1）。

我们将星形或玫瑰花饰的臂数称为其秩。这些图案常以几种标准秩出现在图案中：三的倍数和四的倍数最为常见，因为它们与周期对称群中的旋转相容。创作包含罕见秩或罕见秩组合的图案颇具挑战。例如，对于 11 和 13 这样的秩（图 2b），由于它们与晶体学对称不相容，需要运用相当巧妙的几何技巧 [3, 第 484]页。

无论设计师采用常规还是特殊秩的星形和玫瑰花饰，他们通常都会构建周期性构图，使其在平面上沿两个方向重复。重复是装饰的标志之一：墙面和地板、衣物及物品上的表面装饰应当赏心悦目，却不应喧宾夺主。面对周期图案时，我们会在视觉上将其“分解”为一个不重复的内核，以及一条用该内核的副本铺满平面的规则。这样，眼睛便能轻松欣赏图案，而不会被它压倒。贡布里希 [18], 说：“审美愉悦介于厌倦与困惑之间”，许多人也表达过类似的看法 [21,2,11]。在装饰情境中，适度的厌倦有助于图案从意识的注意中退隐。

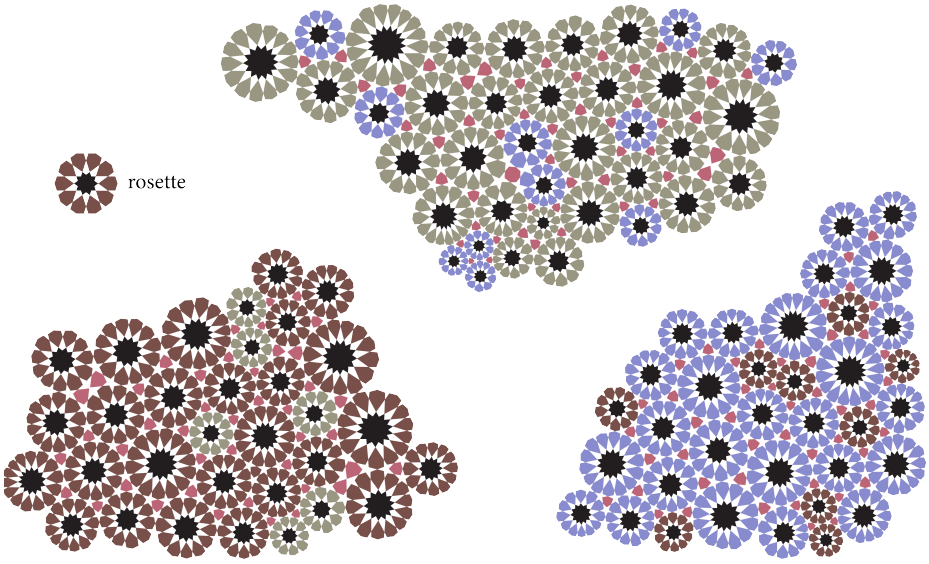


图 1。 由不同秩的蔷薇图案构成的自由形式设计。

另一方面，艺术则需要更多的困惑。一件绘画之类的艺术作品是有限的构图，值得仔细品味，因此构图的每个部分都可以带有一定程度的新意。相比之下，一种铺展在墙面上时赏心悦目的无限伊斯兰图案，若被裁切、装框并挂在同一面墙上，可能就会失去魅力。作为一件艺术作品，它没有自然的边界——也没有引导视线的宏观构图。

本文介绍了一种构造“自由形式”伊斯兰几何图案的技术：将蔷薇图案进行有限且不重复的排列，使其成为自包含的构图，而非装饰性纹理。图 1 展示了几个示例构图。我们的自由形式设计让我们能够灵活地混合搭配不同寻常的蔷薇图案秩级。我们沿着贡布里希的连续谱移动，远离装饰的乏味，走向艺术的混沌。由此产生的视觉实验，使我们得以在高度非传统的环境中重新构想伊斯兰几何图案的经典图案母题。

我们结合多种标准技术（第3节），基于初始多边形拼片构造图案。我们根据三角剖分得出的圆堆积，确定蔷薇图案的整体布局（第4节）。我们展示如何将任意圆堆积转换为相连多边形组成的拼片（第4.3节）。然后，我们在每个多边形中内接一个图案，并将这些图案连接起来，形成最终图案（第4.4节）。这项技术适用于各种蔷薇图案秩。设计者可以通过选择三角剖分来控制最终图案。我们还借助执行圆堆积局部手术的“小工具”实现一些额外的特殊效果（第5节）。此外，我们利用环面圆堆积，将这项技术应用于周期图案（第6节）。

2 相关工作

艺术家和数学家采用多种策略，打破装饰性伊斯兰图案可能产生的单调感。例如，在由其他方面完全相同的星形或蔷薇图案构成的周期图案中，艺术家常常会对颜色、装饰性填充或书法铭文作细微变化。他们有时也会改变选定蔷薇图案中心的几何形状，同时保持其与图案其余部分向外衔接兼容。

随着伊斯兰图案技艺日益精湛，艺术家们开始尝试将不同寻常秩的星形图案或蔷薇图案融入作品中。托普卡帕卷轴是一份15世纪绘制伊斯兰装饰的视觉指南，其中收录了许多由特殊星形图案组合而成的图案。Cromwell [12]分析了这些图案，并阐明了其构造规则。后来，他提出了一种稳健的方法，用不同点数的不规则星形图案组装图案 [13]。该研究展示了轮式构造（第3节），我们将在本文的方法中详细介绍并加以运用。最近，Gailiunas [16]研究了将原本不兼容的星形图案并置时所累积的几何误差。

Bonner [3] 全面论述了伊斯兰图案的模块化构造。他的多边形技术也称为多边形接触（PIC），得名于Hankin [20], ，在多边形镶嵌的每个瓷砖中构建一个图案（图2）。Bonner的著作收录了大量由不同星形图案组合而成的图案，其中包括一些具有不同寻常秩的星形图案或玫瑰花饰的“非系统性”图案，例如7、9、11、13和14。

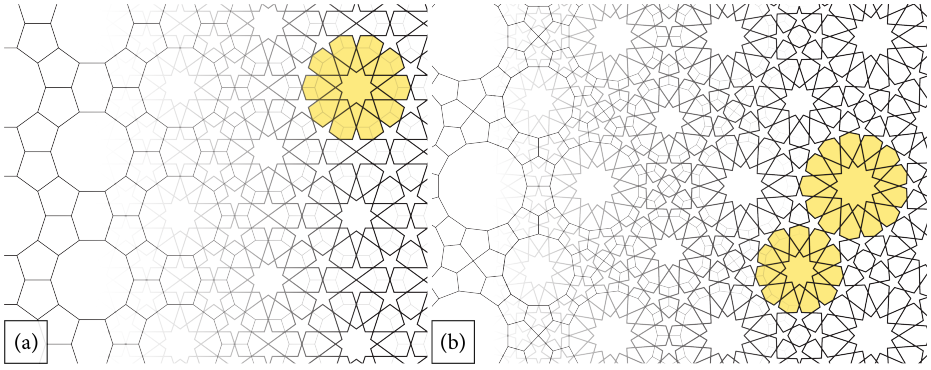


图 2。 多边形相接的示意图，其中突出显示了玫瑰花饰示例。(a) 一种经典的伊斯兰几何图案，由正十边形、五边形和桶形六边形铺砌而成。(b) 一种非系统性图案，其底层铺砌由正十一边形、十三边形和不规则五边形构成。

实现不规则性的另一种方法是脱离欧几里得平面。在伊斯兰建筑中，穹顶常饰以专门设计的几何图案，以适应不同的曲率 {v1}。

Kaplan和Salesin [24] 展示了如何调整PIC，以在球面和双曲平面上生成图案。尽管从数学意义上说，双曲图案具有重复性，但投影到欧几里得平面时必然会发生扭曲。后来，Kaplan [22] 提出了一种更通用的方法，可将具有足够对称性的平面图案（包括许多伊斯兰图案）映射到三维中的任意曲面上。

摩洛哥的泽利吉瓷砖设计通常以一颗大型中心星形为核心，周围环绕着径向对称的较小模块星形组合 [7]。这些模块由一组标准的独立瓷砖形状构成，而这些形状源自八角星。最终作品气势恢宏，兼具显著的视觉新颖性与吸引力。创作这类设计的难题更多在于组合而非几何：艺术家要从一组固定形状中寻求新的离散构形。最近，Kaplan [23]提出了一种用于程序化生成小型泽利吉瓷砖组合的算法，其审美目标与我们的工作有一定共通之处。

现代数学使我们能够创作出有序却非周期性的图案。人们提出了许多技术，利用替换镶嵌或准周期性来指导伊斯兰装饰母题的布局 [4,27,8,9,29]。一些研究者甚至认为，古代设计师明确理解准周期性 [1,26], ，尽管这种说法颇具争议 [14]。具有远程组织结构的非周期图案处于审美上的理想平衡点：它们展现了整体结构，但这种结构的确切性质并非一眼就能轻易看透。

在计算机图形学的更广阔领域中，研究人员探索了一些交互式和自动化技术，用于排布小型图案以创作装饰性图案 [17]。用于构造圆填充的实用数值算法问世不久 [10], ，因此圆填充作为图案设计的组织工具尚未受到太多关注。一个值得注意的例外是 Hamekasi 和 Samavati [19], 的研究，他们利用圆填充来引导波斯花卉图案中各个图案的排布。最近，Brewer 等人从 k-均匀镶嵌中推导出圆填充，并将其用作绘制伊斯兰装饰母题的框架 [5]。他们的技术与我们的方法有些相似，不过他们仅限于采用能够自然地由其所用镶嵌的顶点类型和多边形阶数生成的排列。

3 模块化母题构造

许多构造伊斯兰图案的标准技术都是模块化的：它们将画布分解为互不相交的区域，例如圆盘或多边形，并定义一种用图案填充每个区域的流程。本节概述两种图案构造技术，它们将构成我们方法的基础。

在多边形接触技术（PIC）中，画布被细分为彼此边边相接的多边形。我们选择一个接触角 $\theta \in (0, \pi/2)$。对于细分中的每个多边形 P的每条边，我们构造两条射线，从该边的中点朝向 P内部延伸，并相对于该边旋转 $\pm\theta$ 。当这些射线与

其他边发出的射线相交时，将射线截断，由此形成图案。在简单情况下，只需计算与相邻边发出的射线（图 3a）或相隔两条边的射线（图 3b）的交点。更稳健的构造需要启发式方法来决定如何截断射线，例如最小化图案中线段的总长度 [3, 第 4.4 节。2]。图 2 展示了通过为细分中的每个多边形构造图案而生成的两种图案。

在轮式构造中，模块是圆，每个圆都与更大图案中相邻的圆相切。该构造在每个圆内绘制一个星形。给定一个半径为 r的圆 C ，我们首先确定其边界上的一组点 S ，其中包括 C 与相邻圆相交的位置。对于给定的 $\alpha \in$ （0，1），我们还选择一个半径为 αr 的小圆 C' ，使其位于C的内部。设 p 和 q 是 S中的两个点。我们作弦 pq 的垂直平分线，并找出该平分线与 C'的交点。然后，从 p 和 $\overline{q}$ 向该交点作线段。图3展示了当我们对 S 中所有相邻（c）或不相邻（d）的 p 和 q 点对重复这一过程时形成的星形图案。通过改变外圆与内圆半径之间的缩放比 α ，我们可以控制星形的尖锐程度。

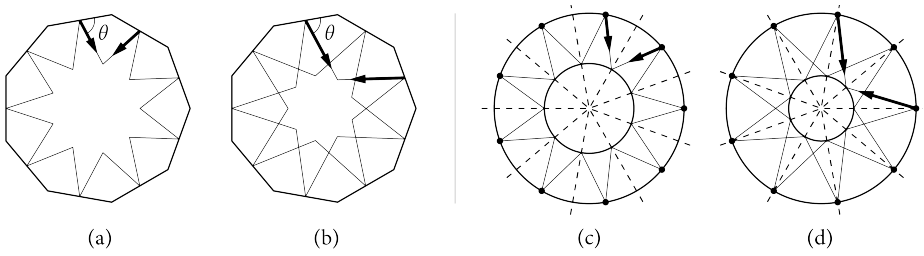


图 3. 使用 PIC（左）和轮式构造（右）构造的正九角星。使用 PIC 时，以接触角 $2\pi/5$ 在射线与交点的首次（a）或第二次（b）相交处截断射线。使用轮式构造时，绘制连接外圆上相邻点（c）或间隔一个点的点（d）的锯齿路径。

这两种构造都可以生成对称的 n 角星形图案。对于 PIC，当 P 为正则时，可以生成对称星形图案；对于轮式构造，则要求 S 中的点沿 C 均匀分布，并且 C 与 C' 同心。在这种情况下，可以将 PIC 的 θ 转换为轮式构造的 α。图 3 中的星形图案（a）和（c）之间存在如下关系：

$$\alpha = 1 - \frac{\sin(\pi/n)\sin\theta}{\sin(\pi(n+2)/2n - \theta)} \tag{1}$$

星形图案（b）和（d）之间存在如下关系：

$$\alpha = 1 - \frac{2\sin(\pi/n)\sin(\pi(n-2)/2n)\sin(\theta - \pi/n)}{\sin(\pi/2 + 2\pi/n - \theta)}. \tag{2}$$

从经验上看，构造顶点位于同一圆上的星形时，轮式构造效果良好；即使顶点分布变得不均匀，其效果也会逐渐减弱。

对于不规则性更难描述的小型多边形，PIC 是更好的选择。我们的方法会同时采用这两种技术。请注意，这两种技术都不会显式构造蔷薇图案。尽管存在显式构造蔷薇图案的方法 [25], ，我们仍会像图 2 的示例那样，让蔷薇图案作为多边形分解的副产品自然涌现，并以这些分解作为图案构造的基础。

4 自由形态设计

本节介绍构造有限自由形式玫瑰花饰构图的主要技术步骤。图 4 对这些步骤进行了可视化展示。我们从任意一个单纯复形 (a) 开始，它会生成一个圆堆积 (b)。基于该圆堆积，我们构造一个多边形拼片 (c)，其中较大的内接多边形由较小的不规则五边形隔开。最后，我们结合 PIC 和轮式构造，为每个多边形定义图案(d)，并可选择渲染该设计(e)。在接下来的小节中，我们将详细介绍这些步骤。

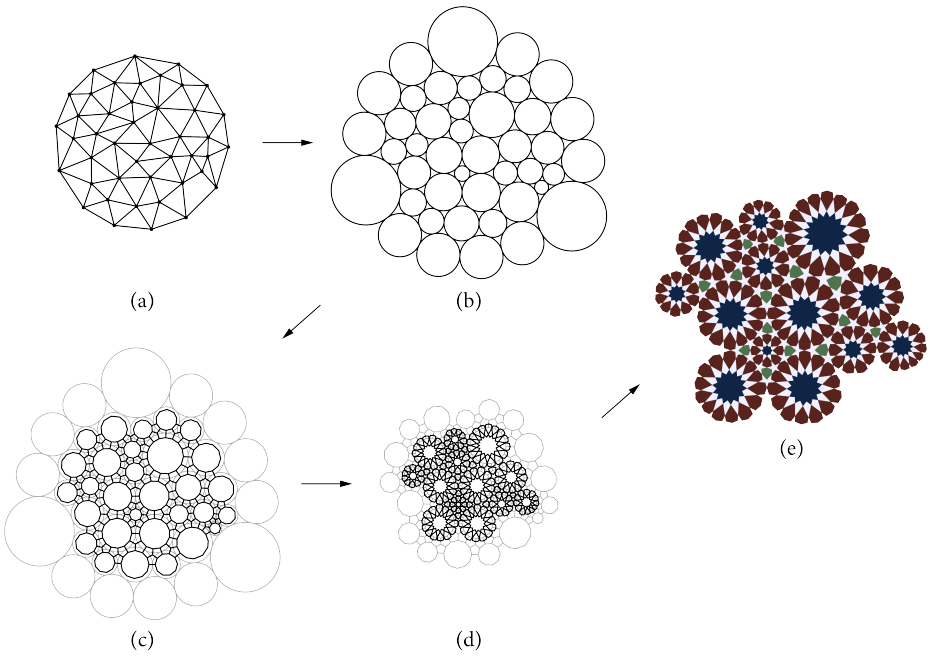


图 4. 我们的方法以一个复形 (a) 为输入，并计算出一个圆填充 (b)。随后，它构建出由多边形组成的自由形状图案片 (c)，并以此生成图案，形成一个无缝星座 (d)，还可以对其进行样式设计 (e)。

4.1 复形

我们这项技术的主要输入是一个复形，更形式化地说，是一个平面、单连通、纯单纯 2-复形 $\mathcal{K}$。简单来说，我们可以将 $\mathcal{K}$ 视为平面上一组边对边相接且互不重叠的三角形。这些三角形的并集在平面上界定出一个区域——一个简单多边形。我们将提及该复形的顶点、边和面。我们区分其边界顶点（位于简单多边形边界上）与内部顶点（位于多边形内部）。

我们可以通过多种方式构造输入复形。手动放置并连接顶点即可轻松创建，也可以通过程序生成，例如计算点集的德劳内三角剖分。

4.2 圆堆积

设 $\mathcal{K}$ 是一个包含 n 个顶点的复形。 $\mathcal{K}$ 的圆填充是由一组互不重叠的圆 $\{C_1, \ldots, C_n\}$ 构成，其切点呼应了 $\mathcal{K}$ 的组合结构。每个圆 C_i 对应复形的一个顶点 v_i ；当且仅当 v_i 和 v_j 由 $\mathcal{K}$ 中的一条边连接时，两个圆 C_i 和 C_j 才外切。离散一致化定理保证，任意给定的复形 $\mathcal{K}$ [28] 都存在圆填充。尽管圆填充的连通关系与其复形完全相同，但二者在几何上通常并不等价：圆的位置和大小与复形中顶点的位置或三角形的形状没有直接关系。

Collins 和 Stephenson [10] 描述了一种简单的数值算法，通过迭代调整初始分配给 C_i的半径来计算圆堆积。边界圆的半径还必须受到额外边界条件的约束。Eppstein [15] 编写的简单 Python 脚本接受明确指定的边界半径值。给定一个度为 n的边界顶点，我们的实现会为一个圆选择半径 r ，使其恰好被 $2n-2$ 个单位圆环绕，从而得到 $r = (1 - \sin\ \phi)/\sin\ \phi$，其中 $\phi = \pi/(2n-2)$。

4.3 多边形拼片

拼片 是由有限个多边形组成的集合，这些多边形的内部互不相交，且其并集是一个拓扑圆盘。给定一个圆堆积，我们构造一个拼片，其中每个圆都对应一个较大的循环多边形（即顶点位于同一圆上的多边形），各循环多边形之间由五边形“填充多边形”组成的环带隔开。按照设计，这些多边形可作为脚手架，用于构建伊斯兰几何图案中常见的图案。

设 C 为圆填充中的一个内部圆， k 为复形中与 C 关联的顶点的度。如图 5a 所示，我们在 C内部构造一个循环 $2k$边形 P。首先，将 P 的顶点设为 C 与其相邻圆之间的k 个切点，以及连接相邻切点的 C 的劣弧的中点。现在设 $\tau \in (0,1)$

为用户选择的缩放因子。以 C 的圆心为基准，将 P 按 τ的比例缩放，并将缩放后的多边形添加到拼片中。默认情况下，我们采用 $\tau = 0.8$，这一选择将在第7节中讨论。

圆堆积中圆与圆之间的空隙是三角形区域，其边界由三个两两相切的圆的圆弧构成。设 C_i、 C_j 和 C_k 为这样一组三个圆。如图5b所示，我们通过绘制连接内接多边形顶点的边，将它们的内接多边形之间的空间划分为三个新的五边形。三条外部线段分别穿过圆的两两相切点。三条内部线段则连接圆弧中点与一个新点 o；该点是由 C_i、 C_j 和 C_k 的圆心构成的三角形的内心。

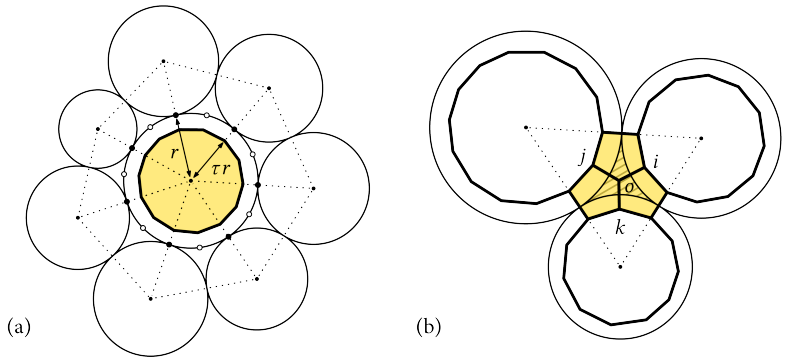


图5. 从圆堆积构造多边形拼片：我们为每个圆构造一个内接多边形（a），并用三组不规则五边形填充三个两两相切的圆之间的空隙（b）。

4.4 图案构造

我们流程的最后一步，是为上一步生成的拼片中的每个多边形构造一个图案。根据所装饰多边形的类型，我们在此采用轮式构造和 PIC。较大的内接多边形可生成引人注目的图案。我们利用轮式构造在图案生成过程中的稳健性，确保这些图案的品质（图6a）。随后，我们对更难以预测的填充五边形使用 PIC（图6b）。我们还可以选择移除构图边界附近的图案线段，将其精简为由完整玫瑰花饰组成的核心（图6c）。如第3节所述，我们的构造依赖于一个全局接触角 θ。默认情况下，我们使用 $\theta = 2\pi/5$，即 PIC 能在正五边形中内接出完美五角星时所对应的角度。

设 C 为圆填充中的一个内部圆，其圆心为 o ，切点为 k 。设 P 为拼片中与 C 相关联的循环 $2k$边形。我们使用轮式构造，构造一个以 o 为中心的星形，其外侧点位于边

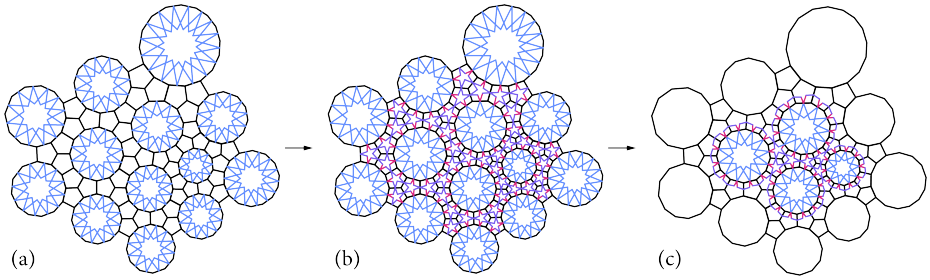


图 6. 要从拼片构造设计，我们使用轮式构造，在每个循环多边形中创建一个星形 (a)，并应用 PIC 为填充多边形构建图案 (b)。还可以选择移除几何结构的外层，以提取由完整蔷薇图案组成的排列 (c)。

P的中点上。通常，这些中点不在同一个圆上，但轮式构造能够容忍它们到 o 的距离存在较小偏差。设 r_C为 C的半径，并定义 r 为 $r_C \cos(\pi/2k)$。 r 的值近似于一个与 P的边中点相切的内切圆半径；当 P 为正则图形时，该近似值会收敛至正确值。现在，将用户提供的接触角 θ 代入公式 2，计算 α ；再设 C' 为一个圆，其圆心为o ，半径为 αr。选择 C' 的半径，以确保星形各点处的接触角近似于 θ。我们使用 P 的边中点和内圆 C'进行轮式构造，并如图 3d 所示，连接每隔一个星点。

接下来需要为填充五边形构建图案。设 Q 为其中一个填充五边形。与 PIC 中一样，从 Q每条边的中点作出一对射线，并在其与相邻边延伸出的射线相交处截断。如果 Q 的一条边 e 与循环多边形相邻，则选择能使射线平行于在 e 处相交的星形边的接触角（图 6b，红色）。这些角相对于 e的垂直平分线可能并不对称，但实际中的偏差很小。另一方面，如果 e 与另一个五边形相邻，则将 θ 用作其射线的接触角（图 6b，紫色）。

总而言之，我们的方法利用一个拼片构造出一组局部化图案，它们组合形成熟悉的视觉元素：玫瑰花饰。通过应用离散一致化定理，每个玫瑰花饰对应三角剖分 $\mathcal{K}$ 中的一个顶点；当且仅当两个玫瑰花饰所对应的顶点在 $\mathcal{K}$ 中共享一条边时，这两个玫瑰花饰相邻。玫瑰花饰的秩是其对应顶点的度的两倍。

5 个小工具

上一节的基本技术可以通过组合不同秩的玫瑰花饰，生成各种各样的自由形态设计。然而，传统伊斯兰几何图案中的某些构形仍然难以实现，

最明显的原因是，我们只定义了一种填充循环多边形之间三角形间隙的方法。本节将介绍两种小工具，帮助我们重现其中一些变化，增加设计的视觉趣味。小工具是带有带标签顶点的小型子图，可以并入复形。在图案构造过程中，这些顶点会决定局部多边形簇，从而覆盖第 4.3 节中的多边形。

一个方形小构件 是一个包含 5 个顶点的子图，其中心顶点 a 的度为 4，如图 8a 所示。给定一个包含方形小构件副本的复形，我们可以得到一个圆填充，其中包含如图 8b 所示的圆簇，圆 A 与顶点 a相关联。构建拼片时，我们从圆填充中移除 A ，并用四个五边形铺满留下的空洞，如图 8c 所示。新点 o 是顶点 i 、j、 k和 ℓ的均值。我们的图案构造将生成一个近似正方形的区域，其周围环绕着四个各含有一个中心八边形的玫瑰花饰。

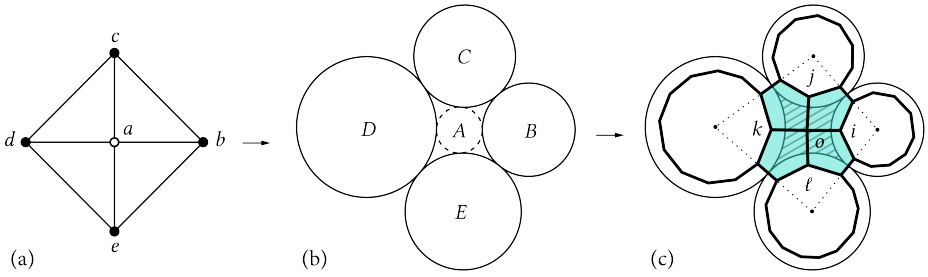


图 7. 方形小构件（a）生成圆填充（b），我们从中导出四个填充五边形（c）。

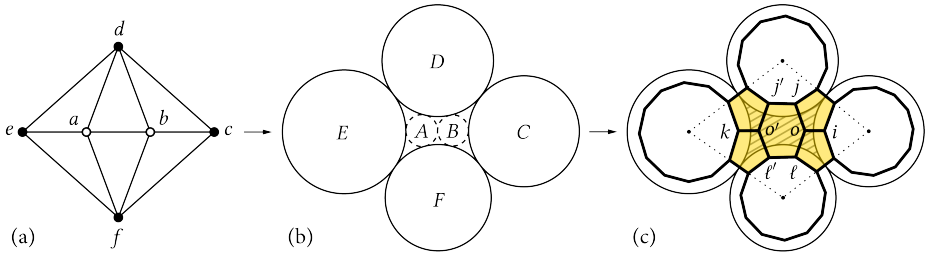
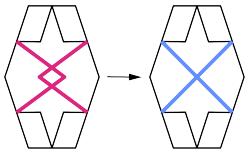


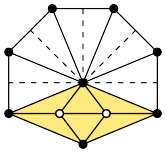
图 8. 蝴蝶结小构件（a）生成圆填充（b），我们从中导出一个由四个填充五边形和一个桶形六边形组成的圆簇（c）。

蝴蝶结小构件是一个包含6个顶点的子图，有两个度为4的中心顶点 a 和 b，如图7a所示。与方形小构件一样，我们从圆堆积中移除相应的圆 A 和 B ，并用新的瓷砖构型填补空隙。首先，在为与顶点 d相关联的圆 D构造循环多边形时，我们将切点与C 和 E 之间的劣弧等分为三 段，而不是通常的两段，由此得到顶点 j 和

j' （见图7c）。类似地，我们将 F的弧三等分，由此得到顶点 ℓ和 ℓ'。然后，我们构造一个由四个五边形和一个桶形六边形组成的蝴蝶结形排列，如图7c所示，其中 o 是 i、 j和 ℓ 的均值，而 o' 是 j'、 k和 ℓ'的均值。



当蝴蝶结小构件中央的桶形六边形变得过于细长时，可能会产生一种图案，其中心有一小块重叠区域，如插图中的红色部分所示。出现这种重叠时，我们会用一个完美的“X”替换红色线段，如蓝色部分所示。蓝色线段会改变六边形各边的接触角；我们会将所有变化传递到六边形相邻的四个五边形上。



请回想一下，如果不使用小工具，我们的构造只能生成偶数秩的玫瑰花饰。但当复形中出现蝴蝶结构件时，顶点 d 和 f 各自会为对应的内接多边形贡献三条边。因此，如果某个复形顶点在这种构件中充当 d 或 f，就像插图中子图的中心顶点那样，该顶点就会生成奇数秩玫瑰窗。更一般地，我们可以从一个顶点悬接任意奇数个方向恰当的蝴蝶结构件，从而得到奇数阶玫瑰窗。

图9展示了一种自由形式设计，由蝴蝶结结构件和方形小构件随机排列而成。未来工作中，我们希望探索这两种以外的小构件。

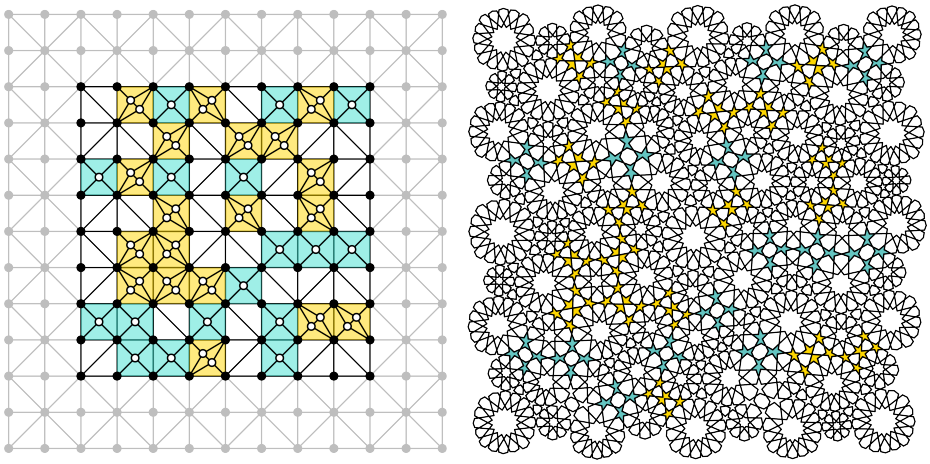


图9. 基于方格网的构图，其中每个正方形都随机地用一条对角线、一个方形小构件或一个蝴蝶结小构件进行细分。

6 周期图案

虽然我们的技术侧重于创作有限的自由形式构图，但我们也考察了它生成更规整设计的能力。例如，蝴蝶结构件周期性排列的一个有限子集（图10左）可近似呈现图2a中的十边形设计（图10右）。三角形和小构件的其他周期性排列也能再现不同的经典设计。不过，由于圆填充算法具有灵活性，这些自由形式设计中可能包含尺度连续变化的玫瑰花饰。

我们可以将这种技术推广到欧几里得平面以外的情形，从而将离散一致化定理推广至欧几里得平面之外，生成真正的周期图案。具体而言，如果 $\mathcal{K}$ 嵌入在环面上，那么该定理保证存在一个环面内在度量 [28, 下的圆堆积 9]章 9]。在某种意义上，此时圆堆积算法甚至更简单，因为不再需要显式的边界条件：每个圆都完全被其他圆包围。随后可以将环面剪开并展开，得到有限个圆，由此可生成无限的周期圆填充。

图11展示了一个周期图案示例，该图案由嵌入环面上的单纯复形生成。图11b中的浅灰色圆盘应视为深灰色圆盘的平移副本，且索引相同。数值圆堆积算法得出一种能够通过平移铺满平面的布局（图11c），据此我们可以创建一个带有秩为10、12、14和16的玫瑰花饰的周期图案。

未来工作可以探索将这一技术以类似方式扩展到其他空间，例如球面和双曲平面的庞加莱圆盘模型 [24]。

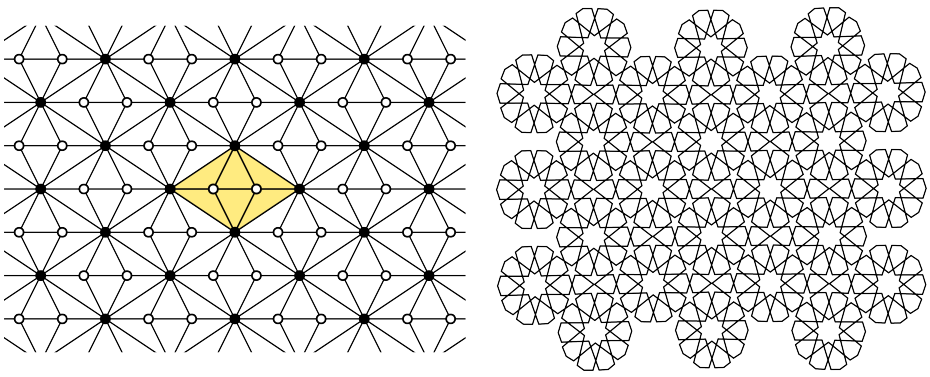


图 10。蝴蝶结小构件的周期排列（左）可用于生成图 2a 中图案的自由形式版本（右）。

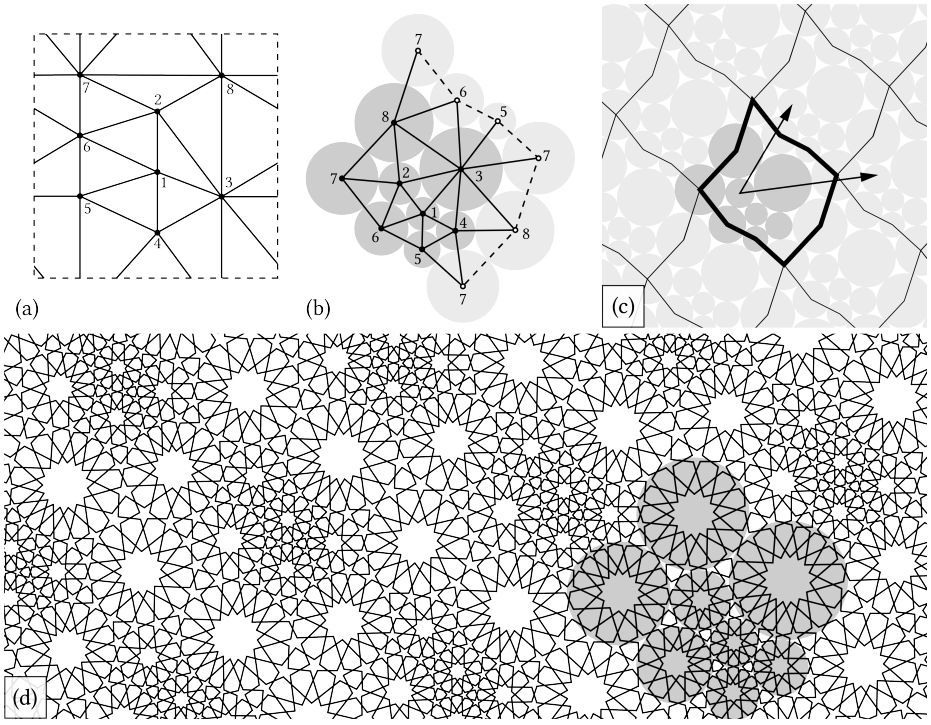


图 11. 在带有周期边界条件的正方形 (a) 上绘制三角剖分，并以此生成圆堆积 (b)，再通过平移 (c) 将其铺满平面。我们构造图案，得到周期性伊斯兰几何图案 (d)。

7 讨论

本节将讨论我们这项技术的一些细节，包括开发过程中考虑过的替代方法。其中一些替代方案或许能为未来工作提供机会。

选择内部圆。 通常，我们不会为圆填充中的每个圆都生成图案。边界圆及其相邻的圆，尺寸可能与周围的圆有很大差异。这些变化可能会传播到构造的其余部分，造成不可接受的图案变形，例如玫瑰花瓣不均匀（图 12）。未来工作可考虑如何优化圆填充的几何结构，以便用于拼片和图案构造。目前，我们会在最终设计中省略外层的圆。请注意，这种方法可能会使设计分成多个连通分量；在这种情况下，我们只保留最大的分量。

除了这些技术细节，我们还可以出于审美考虑进行选择。自由塑造设计的形状，为创作有趣的构图提供了机会（图15）。

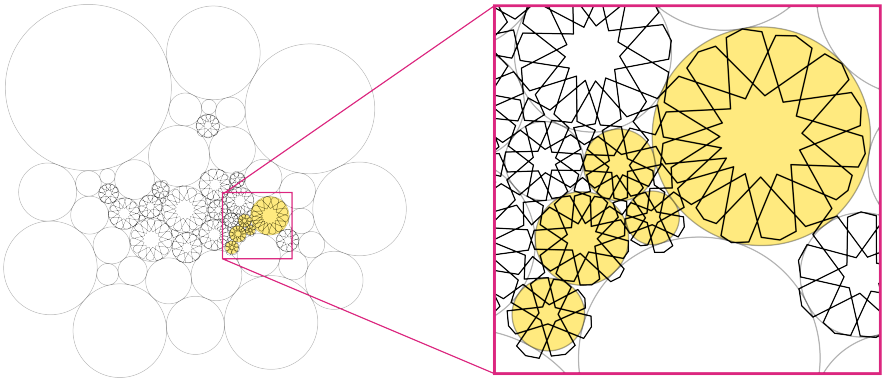


图 12. 圆填充边界附近的圆可能会形成变形的星形图案和玫瑰花饰（右）。我们舍弃外圆；它们有时会将设计分割成多个连通分量（左）。

选择缩放因子。请记住，参数 τ 控制每个循环多边形相对于其圆的缩放比例，进而影响填充五边形的形状。如插图所示，在填充五边形中生成的图案，其质量会随着该五边形偏离规则形状而降低。因此，我们希望选择 τ，以尽量减小整个设计中的总偏差。

为了衡量五边形 Q 偏离规则性的程度，我们采用 Zabrodsky 等人 [30]，提出的连续对称性度量，该度量量化了 Q 的顶点必须移动的最短距离，才能构成正五边形。我们将自由形状图案片中各个五边形偏离规则性的平均程度定义为误差。我们可以针对一系列间隔很小的 τ 值计算该误差，并选取误差最小的值（图 13a）。观察一系列圆堆积后，我们发现，在区间 (0.7,0.9) 之外，偏差显著；而 $\tau = 0.8$ 能产生令人满意的结果，如本文各处所示。

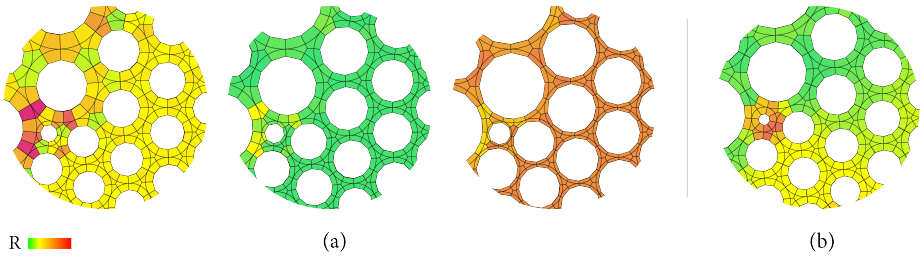
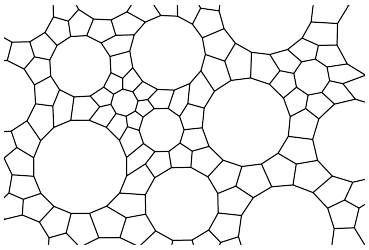


图 13. 一块拼片，其中五边形根据其偏离规则性（绿色）的程度着色（红色）。在 (a) 中，内接多边形按 $\tau = 0.7$、0.8 和 0.9 的比例缩放，结果表明 0.8 整体效果良好。在 (b) 中，它们按固定量偏移，结果的一致性较差。

未来，我们希望研究其他衡量多边形质量的方法，以生成更接近理想状态的拼片。例如，PIC 通常能在具有较低秩对称性但并非完全规则的多边形中生成令人满意的图案。

除了将 τ 视为缩放因子外，我们还考虑通过固定的向内距离 τ对内接多边形进行偏移。然而，我们发现，这种方法生成高质量五边形的效果并不理想（图 13b）。无论如何解释 τ，与两个半径相差很大的内接多边形相邻的五边形质量都最差。Hamekasi 和 Samavati 也指出了这一问题 [19], ，并通过避免包含度数差异很大的相邻顶点的复形来缓解该问题。在未来工作中，我们希望开发一种全局优化方法，为每个内接多边形选择不同的缩放因子，以最大限度地提高所有填充五边形的整体质量。

内接多边形与正多边形。 用正多边形代替内接多边形来构造图案颇具吸引力，因为这样可以得到完全对称的星形图案。我们使用上述规则性度量 [30], ，为第 4.3 节中生成的每个内接多边形 P 拟合一个正多边形 P，并将其中心 P 置于 P 的外接圆圆心。 $\tau = 0.8$ 的结果如图所示



内嵌部分。这种方法优先保证大型醒目星形图案的质量。然而，它会产生变形的五边形，其图案会自相交。通过选择内接多边形而非正多边形，我们的算法牺牲了大型星形图案的一些质量，以便在它们之间创建可行的连接。

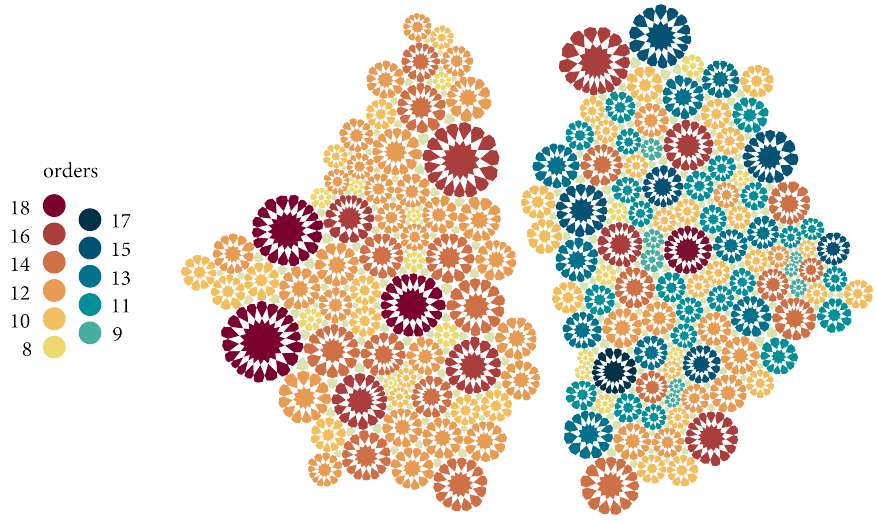


图14. 由随机点集的德劳内三角剖分构造的生成式设计，左图未使用蝴蝶结构件，右图使用了蝴蝶结构件。

8 结果

我们通过展示一系列自由形式设计，证明了这项技术的多样性。对于图14中的填充构图和图17中的交错设计等风格化结果，我们改编了 Kaplan 在 Bonner 的文本 [3,第4节5]中描述的渲染算法。

我们的方法不对输入复形施加任何限制，使用户能够对输出设计进行相当大的控制。利用随机点集的德劳内三角剖分，可以创建完全生成式的设计，从而形成具有不同秩的玫瑰花饰排列（图14，左）。通过插入随机构件（图14，右），我们还可以进一步增加可能的电荷数量，并拓展技术的表现力。当然，艺术家也可以从生成式设计中选取一部分玫瑰花饰，以构思所需的高层次构图（图15）。

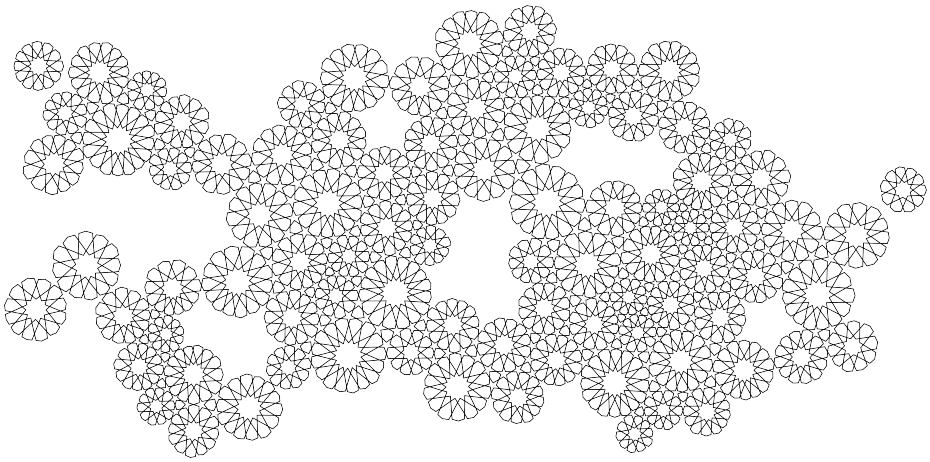


图15。 一种生成式设计，用户从初始排列中手动选择保留一部分玫瑰花饰，从而形成边界不规则且带有内部空洞的更具动态感的构图。

另一方面，我们可以从高度结构化的复形开始，获得重复性的最终设计（图10和图17），也可以使用环面复形来生成真正的周期图案（图11d）。原则上，这些方法可用于绘制许多历史上的伊斯兰几何图案，使其呈现严格或近似的周期性。然而，我们并未尝试准确 catalog 哪些图案是可实现的，因为现有的构造技术更适合完成这项绘制工作。

在完全控制与生成式随机性这两个极端之间，我们可以将精心构造的子图插入复形中，从而创建单个高阶玫瑰图案（图16a），或形成富有吸引力的玫瑰图案局部排列（图16b、c）。

平衡秩与混沌的另一种方式，是将随机构件置于原本有序的网格中（图9）。

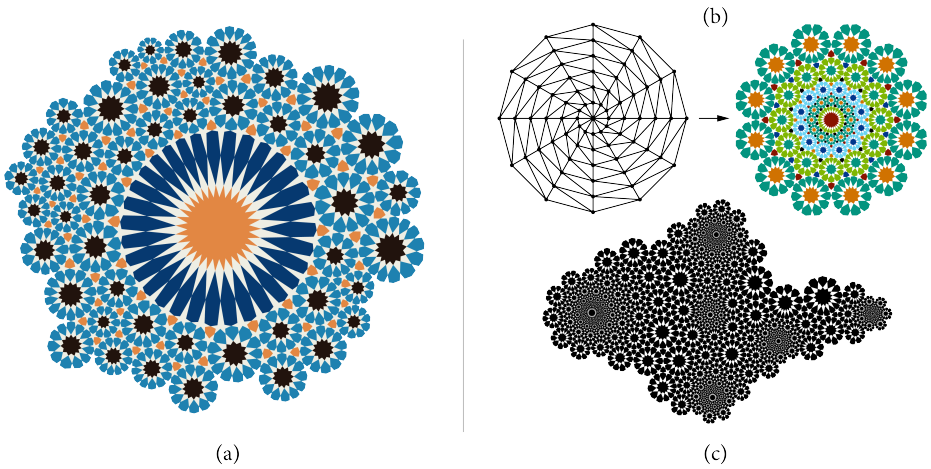


图 16. 经过调校的设计，其中包含一个高阶玫瑰图案 (a)，其满足 $\tau = 0.96$ 和 $\alpha = 0.75$；以及一个构图 (c)，其中融入了多个网状子复形 (b)。

图 16a 中的高阶玫瑰图案是一个特殊情况，因为它需要手动调校。请回想一下，半径相差悬殊的相邻圆可能会产生变形的图案（图 12）。为生成令人满意的大型玫瑰图案，我们手动设置其循环多边形的 τ 和 α 值，使其与周围几何结构更好地贴合。

仔细观察许多结果，会发现一些细微的几何偏差，图 12 将这类偏差鲜明地展示了出来。当玫瑰花饰的臂在宽度或长度上变化过于显著时，就会破坏图案的优雅感，以及其构造所带来的“必然性”之感。在我们的工作中，有几处会选用诸如 τ 这样的全局常数，使整体结果尚可，却未针对各个设计中局部部分的具体几何结构作出调整。图 16a 中的大型玫瑰图案便清楚地展示了局部调整如何改善设计。未来工作中，我们希望探索更精细的构造方法，根据邻近区域内圆填充的配置，提升每个玫瑰图案的质量。

9 结论

我们提出了一种稳健的方法，用于构造由非常规秩的玫瑰花饰组成的自由形式伊斯兰几何图案。我们的方法基于圆堆积理论，为我们提供了有据可依的几何脚手架，以此构建多边形拼片，进而生成图案。用户可以控制初始复形及其中的任何小工具，从而在设计过程中拥有充分的创作自由

。我们的结果比现有图案更加自然、不那么重复，也为进一步探索提供了许多思路。我们认为，这些图案既传达了伊斯兰几何图案的审美特质，又以非传统的方式对其加以诠释。它们仍能传达贡布里希所说的“审美愉悦” [18]，但略少些乏味，也多了几分困惑，为这些设计在艺术领域的更多应用铺平了道路。这项工作加深了我们对传统图案的理解，并为装饰和艺术创作揭示了新的可能性，无论其形式是否自由。

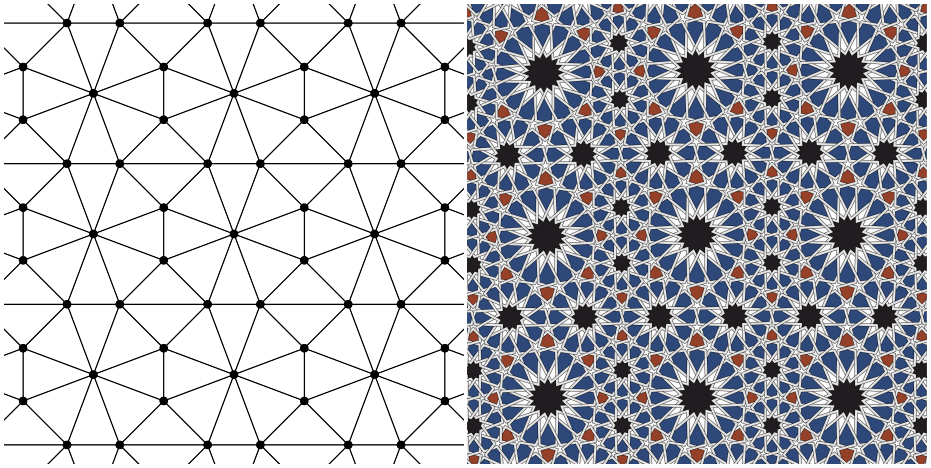


图17。 由概念上具有周期性的复形的有限子集（左）生成的高度结构化构图（右）。尽管该圆填充并非像第6节中那样构造于环面域内，但所得构图看起来接近周期性。

致谢

本研究得到了加拿大自然科学与工程研究委员会以及滑铁卢大学 Cheriton 计算机科学学院的支持。

参考资料

1. R.A. Al Ajlouni, *The global long-range order of quasi-periodic patterns in islamic architecture* 68 2012 235 243 ，《晶体学报》A辑 ( ), pp. – . Available at https://doi.org/10.1107/S010876731104774X. 2. R. Arnheim, *Art and Visual Perception: A Psychology of the Creative Eye* 加利福尼亚大学出版社，伯克利和洛杉矶，1974年。3. J. Bonner, *Islamic Geometric Patterns: Their Historical Development and Traditional Methods of Construction* 2017 ，施普林格出版社，纽约，。

4. J. Bonner and M. Pelletier, *A 7-Fold System for Creating Islamic Geometric Patterns Part 1: Historical Antecedents* , in *Proceedings of Bridges 2012: Mathematics Music Art Architecture Culture*, R. Bosch, D. McKenna, and R. Sarhangi, eds., 亚利桑那州菲尼克斯。Tessellations Publishing，2012年，pp. 141–148。Available at http://archive.bridgesmathart.org/2012/bridges2012-141.html. 5. S.G. Brewer, M. Zha, and S. Neno, *Generating Families of Islamic Star Rosette Patterns Based on k-Uniform Tilings*, in *Proceedings of Bridges 2022: Mathematics, Art Music Architecture Culture*, D. Reimann, D. Norton, and E. Torrence, eds., 亚利桑那州菲尼克斯。Tessellations Publishing，2022年，pp. 391–394。Available at http: //archive.bridgesmathart.org/2021/bridges2022-391.html. 6. E. Broug, *Islamic Geometric Design*, Thames & Hudson，伦敦，2013年。7. J.M. Castera, *Arabesques: Decorative Art in Morocco*, ACR Edition，巴黎，1999年。8. J.M. Castera, *From the Angle of Quasicrystals* , in *Proceedings of Bridges 2010: Mathematics Music Art Architecture Culture*, G.W. Hart and R. Sarhangi, eds., 亚利桑那州菲尼克斯。Tessellations Publishing，2010年，pp. 215–222。Available at http: //archive.bridgesmathart.org/2010/bridges2010-215.html. 9. J.M. Castera, *Another look at Pentagonal Persian Patterns* , in *Proceedings of Bridges 2016: Mathematics Music Art Architecture Education Culture*, E. Torrence, B. Torrence, C. S´equin, D. McKenna, K. Fenyvesi, and R. Sarhangi, eds., 亚利桑那州菲尼克斯。Tessellations Publishing，2016年，pp. 325–330。Available at http://archive.bridgesmathart.org/2016/bridges2016-325.html. 10. C.R. Collins and K. Stephenson, *A circle packing algorithm*, Computational Ge- ometry 25 (2003), pp. 233–256. 11. P. Cromwell, *Looking at islamic patterns i: The perception of order*, PsyArXiv (2021). Available at psyarxiv.com/ghg3f. 12. P.R. Cromwell, *Islamic geometric designs from the topkapı scroll i: unusual arrangements of stars* 4 2010 73 85 ,《数学与艺术杂志》( ), pp. – . Available at https://doi.org/10.1080/17513470903311669. 13. P.R. Cromwell, *On irregular stars in islamic geometric patterns*, 2013. Available at https://girih.wordpress.com/on-irregular-stars-in-islamic- geometric-patterns/, accessed 2021年8月12日。14. P.R. Cromwell, *Cognitive bias and claims of quasiperiodicity in traditional islamic patterns* 37 2015 30 44 ,《数学智者》( ), pp. – . 15. D. Eppstein, *CirclePack.py* (2012). Available at https://www.ics.uci.edu/ ~ eppstein/PADS/CirclePack.py. 16. P. Gailiunas, *Near-miss Star Patterns* , in *Proceedings of Bridges 2020: Mathematics Art Music Architecture Education Culture*, C. Yackel, R. Bosch, E. Torrence, and K. Fenyvesi, eds., 亚利桑那州菲尼克斯。Tessellations Publishing，2020年，pp. 27–34。Available at http://archive.bridgesmathart.org/2020/bridges2020-27.html. 17. L. Gieseke, P. Asente, R. Mˇech, and M. Benes Bedrich an d Fuchs, *A survey of control mechanisms for creative pattern generation*,《计算机图形学论坛》40 (2021), pp. 585–609。Available at https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/ 10.1111/cgf.142658. 18. E. Gombrich, *The Sense of Order: A study in the psychology of decorative art*, 修订版第2版，Phaidon Press，牛津，1994年。19. N. Hamekasi and F. Samavati, *Designing Persian Floral Patterns using Circle Packing*, in *Proceedings of the International Conference on Computer Graphics Theory and Applications and International Conference on Information Visualization Theory and Applications (GRAPP/IVAPP)* , P. Richard, M. Kraus, R.S. Laramee, and J. Braz, eds., 2月24日至26日。SciTePress，2012年，pp. 135–142。Available at http://dx.doi.org/10.5220/0003850101350142.

20. E.H. Hankin, *The Drawing of Geometric Patterns in Saracenic Art*, 《印度考古学会纪要》第15卷，印度政府，加尔各答，1925年。21. F. Hutcheson, *An inquiry into the original of our ideas of beauty and virtue*，由 J. Darby 于伦敦巴塞洛缪巷印制，1725年。可通过 https://oll.libertfund.org/title/leidhold-an-inquiry-into-the-original-of-our-ideas-of-beauty-and-virtue-1726-2004#lf1458_head_013 获取。22. C.S. Kaplan, *Semiregular patterns on surfaces*，载于 *NPAR '09: Proceedings of the 7th international symposium on Non-photorealistic animation and rendering*，纽约。ACM出版社，2009年，第35–39页。23. C.S. Kaplan, *Generative Zellij*，载于 *Proceedings of Bridges 2022: Mathematics, Art Music Architecture Culture*，,,,，D. Reimann、D. Norton 和 E. Torrence 编，亚利桑那州菲尼克斯。Tessellations Publishing，2022年，第285–288页。网址：http://archive.bridgesmathart.org/2022/bridges2022-285.html。24. C.S. Kaplan 和 D.H. Salesin, *Islamic star patterns in absolute geometry*，《ACM图形学汇刊》23（2004年），第97–119页。25. A. Lee, *Islamic star patterns*，《穆卡纳斯》4（1987年），第182–197页。26. P.J. Lu 和 P.J. Steinhardt, *Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval islamic architecture* 315 2007 1106 1110，《科学》（），第 – 页。27. M. Pelletier 和 J. Bonner, *A 7-Fold System for Creating Islamic Geometric Patterns Part 2: Contemporary Expression Proceedings of Bridges 2012: Mathematics Music Art Architecture Culture*，载于 ,,,,，R. Bosch、D. McKenna 和 R. Sarhangi 编，亚利桑那州菲尼克斯。Tessellations Publishing，2012年，第149–156页。网址：http://archive.bridgesmathart.org/2012/bridges2012-149.html。28. K. Stephenson, *Introduction to circle packing: The theory of discrete analytic functions* 2005，剑桥大学出版社，纽约，。29. B. Wichmann 和 J. Rigby, *A penrose-type islamic interlacing pattern*，《视觉数学》9（2007年）。网址：http://symmetry-us.com/Journals/wichmann2007/penrose.html，访问于2021年8月12日。30. H. Zabrodsky、S. Peleg 和 D. Avnir, *Continuous symmetry measures*，《美国化学会志》114（1992年），第7843–7851页。