arXiv:2301.01473v1 [math.CO] 4 Jan 2023

复量子游走中的态传输

AntonioAcuaviva[1], Ada Chan[2], Summer Eldridge[3], Chris Godsil[4], Matthew How-Chun-Lun[5],Christino Tamon[6], Emily Wright[7], 和张晓红[8]

[1]马德里康普顿斯大学数学系[2]约克大学数学与统计系[3]多伦多大学数学系[4]滑铁卢大学组合学与优化系[5]麦克马斯特大学数学系[6]克拉克森大学计算机科学系[7]女王大学数学系[8]数学研究中心，蒙特利尔大学

2023年1月5日

摘要

给定一个厄米邻接矩阵为 H 的图，若在某个时间 t，酉矩阵 $\exp(-iHt)$ 的 (b,a) 项的模为1，则完美态传输会从顶点 a 传输到顶点 b。这一现象与量子自旋网络中的信息传输相关，并且已知在实对称矩阵下具有单态性。我们证明以下结果：

- 对于有向图（其非零权重为 $\pm i$），有向3圈和有向边是仅有的能在每一对顶点之间发生完美态传输的图。这解决了 Cameron等人 [1]提出的猜想。另一方面，我们构造了一个无限族的有向图，其中大小为四的子集内任意一对顶点之间都能发生完美态传输。

- 存在无限族的厄米图具有单向完美态传输，即发生完美态传输而不具有周期性。相反，只要邻接矩阵具有代数元，完美态传输就意味着周期性（见 Godsil [2]）。

- 在有根图的乘积中，存在具有非单配近乎完美态传输的无穷族。具体而言，我们推广了关于双星图的已知结果（由 Fan 和 Godsil [3] 得出），以及关于带环路的路径的已知结果（由 Kempton 、 Lippner 和 Yau [4] 得出）。后者扩展了 Zimborás 等人 [5] 对量子传输的实验观察，并表明相距较远的顶点之间也可能发生非单配近乎完美态传输。

1 引言

给定一个邻接矩阵为 A的图 $X=(V,E)$，其上的连续时间量子游走定义为随时间变化的酉矩阵 $U(t)=e^{-iAt}$。这种对连续时间随机游走的自然量子推广，对于设计量子算法十分重要。Childs 等人 [6] 证明，连续时间量子游走算法能在图上的一个明确搜索问题中实现指数级时间加速。

随后，Childs [7] 证明，连续时间量子游走是量子计算的通用模型。

本文的研究重点受到 Bose [8]的启发，他研究了通过图上的连续时间量子游走实现量子通信。若对任意 $\epsilon > 0$，都存在一个时间 t，使得 $\|U(t)e_a - \gamma e_b\| \leq \epsilon$，其中 γ 是相位因子，则称图 X 中顶点 a到顶点 b 之间存在近乎完美态传输。这里，e_a表示在位置 a 处为 1、其他位置为 0 的单位向量；e_b也类似。若 $\epsilon = 0$ 可实现，则称在时间 t图 X 中从 a 到 b存在完美态传输。

Kay [9]证明了实对称邻接矩阵图上完美态传输的单配性：若存在从 a 到 b 以及从 a 到 c 的完美态传输，则 $b = c$。与此相反，Cameron等人 [1]证明，存在有向图（其邻接矩阵为厄米矩阵，且有 $\pm i$ 个非零元素），其中任意一对顶点之间都存在态传输。这种性质称为普适态传输。他们的主要例子是具有普适近乎完美态传输的素数阶有向圈。一个值得注意的例外是有向 3-圈，它具有普适完美态传输。

人们曾在 [1] 猜想，有向 K_2 和 3-环是仅有的具有通用完美态传输的有向图。本文证明了他们的猜想。这证实了通用完美态传输在有向图中是一种极为罕见的现象。另一方面，已知存在一些具有通用完美态传输的图的无限族，其邻接矩阵是厄米矩阵，且对矩阵元没有任何限制（见 Connelly等 [10]）。我们称这类图为厄米图。

Godsil 和 Lato [11] 证明了有向图中完美态传输的一个强有力刻画，并指出完美态传输总是蕴含周期性（根据盖尔丰德-施奈德定理）。事实上，Godsil [2] 曾指出，对于任何具有代数元的邻接矩阵，这一性质都成立。我们的下一个观察表明，要保证周期性，这一假设是必要的。我们构造了首个具有单向完美态传输的厄米图无限族，其中完美态传输发生但不具有周期性。这些例子还展现了一种仅发生一次的完美态传输性质：完美态传输只在唯一的一个时间点发生，之后不再重现。

Godsil 和 Lato [11] 还引入了通用完美态传输的一种弱化形式，称为多重完美态转移。我们称图 X 在顶点子集 $S \subset V(X)$ 上具有多重态传输，其中 $|S| \geq 3$，如果 S中的任意一对顶点之间都发生态传输。文献 [11], 给出了一个具有多重完美态传输的 8 顶点循环图的具体示例，但尚不清楚是否还有其他具有相同性质的例子。我们构造了首个具有多重完美态传输的有向图无限族（其中包含上述 8 顶点循环图作为特例）。这表明，与通用完美态传输不同，多重完美态传输并非极为罕见的现象。

众所周知，完美态传输在笛卡尔图积下保持。在这项工作中，我们在较弱的假设下证明，多重态转移在根积下保持（参见 Godsil 和 McKay [12]）。首先，我们完整刻画了有向 3-圈与星图的根积上的近乎完美态传输 $K_{1,\ m}$。这推广了 Fan 和 Godsil [3] 关于双星图的一个结果。接下来，我们考虑以单自环路径代替星图的根积。设 X 是具有通用完美态传输的 n顶点循环图，设 P_m^γ 是一个 m顶点路径，其一个端点带有权重为 γ 的自环。我们证明，若 γ 是超越数，则根积 $X \circ P_m^\gamma$ 中每一对带自环的顶点之间都存在多重近乎完美态传输。这推广了 Kempton、Lippner 和 Yau [4] 的一个结果，并表明自环有助于促进相距较远顶点之间的多重态转移。当 X 为有向 3-圈这一特殊情形时，我们的结果强化了 Zimborás等人 [5] 的实验观察（借助自环）。

2 预备知识

给定一个图 X 及其对应的厄米矩阵 H，其连续时间量子游走的转移矩阵为

$$U(t) = e^{-\mathrm{i}tH}.$$

如果不对 H 的元素施加任何其他条件，我们就称 X 为厄米图。对于 X 是有向图的特殊情形，我们使用如下定义的厄米矩阵 H

$$H_{a,b} = \begin{cases} \mathrm{i} & \text{if there is an arc from } a \text{ to } b \text{ in } X, \\ -\mathrm{i} & \text{if there is an arc from } b \text{ to } a \text{ in } X, \text{ and} \\ 0 & \text{if there is no arc between } a \text{ and } b \text{ in } X. \end{cases}$$

令 θ_1、…、θ_d 为 H 的互异特征值。对于 $r = 1$、…、d，令 E_r 表示投影到 H 的 θ_r-特征子空间上的正交投影矩阵。则 $E_r E_s = \delta_{r,s} E_r$ 且 $\sum_r E_r = I$。谱分解 $H = \sum_r \theta_r E_r$ 给出

$$U(t) = \sum_{r=1}^{d} e^{-\mathrm{i}t\theta_r} E_r.$$

给定一个单位向量 $v \in \mathbb{C}^n$，初始态为 v 的系统在时间 t 演化至 $U(t)v = \sum_r e^{-it\theta_r} E_r v$。因此，$(\theta_r, E_r)$ 与 $E_r v = 0$ 这一对不会影响状态。我们将向量 v 的特征值支撑定义为 $\Phi_v = \{\theta_r : E_r v \neq 0\}$。在 $v = e_a$ 对某个顶点 a 成立的情况下，我们也称 Φ_{e_a}（简称 Φ_a）为 a 的特征值支撑集。

完美态传输从顶点 a到顶点 b 在时间 τ 发生，当且仅当

$$U(\tau)e_a = \alpha e_b, \tag{1}$$

存在某个相位因子 α。若 $a = b$，则称量子游走在 a处是周期的。

将 E_r 乘到方程（1）两边，得到

$$e^{-\mathrm{i}\tau\theta_r} E_r e_a = \alpha E_r e_b. \tag{2}$$

因此，对于 $r = 1$、…、d，存在 $q_r(a,b) \in [0, 2\pi)$ 使得

$$E_r e_a = e^{\mathrm{i}q_r(a,b)} E_r e_b. \tag{3}$$

当满足此条件时，我们称顶点 a 和 b 是强余谱的，并称 $q_r(a,b)$ 为相对于特征值 θ_r，从 a 到 b 的争执。注意，强余谱顶点具有相同的特征值支撑集。

我们在第3节和4节研究有向图和厄米图中的完美态传输。这里我们给出厄米图中完美态传输的一个刻画。

定理 2.1. 在厄米图 X 中，a 与 b之间发生完美态传输，当且仅当

i. a 和 b 是具有争执 $q_r(a,b)$（其中 $\theta_r \in \Phi_a$）的强余谱顶点，并且

ii. 对于满足 $h \neq \ell$ 的 θ_r、θ_s、θ_h、$\theta_\ell \in \Phi_a$，存在整数 $m_{r,s}$ 和 $m_{h,\ell}$，使得

$$\frac{\theta_r - \theta_s}{\theta_h - \theta_\ell} = \frac{q_r(a,b) - q_s(a,b) + 2m_{r,s}\pi}{q_h(a,b) - q_\ell(a,b) + 2m_{h,\ell}\pi}.$$

证明。 由方程 (3)，可知从 a 到 b的完美态传输意味着它们是强余谱的。

假设 a 和 b 是强余谱的，且争执为 $q_r(a,b)$，对于 $\theta_r \in \Phi_a(=\Phi_b)$。那么方程（1）成立，当且仅当对于 θ_r，$\theta_s \in \Phi_a$，

$$\alpha = e^{\mathrm{i}(q_r(a,b)-\tau\theta_r)} = e^{\mathrm{i}(q_s(a,b)-\tau\theta_s)}. \tag{4}$$

这等价于

$$e^{\mathrm{i}\tau(\theta_r-\theta_s)} = e^{\mathrm{i}(q_r(a,b)-q_s(a,b))}$$

and

$$\tau\left(\theta_r-\theta_s\right) = q_r(a,b)-q_s(a,b)+2m_{r,s}\pi,$$

对于某个整数 $m_{r,\ s}$。条件 (ii) 立即成立。 □

我们称 Φ_a 满足比值条件，如果

$$\frac{\theta_r-\theta_s}{\theta_h-\theta_\ell} \in \mathbb{Q} \tag{5}$$

对于 θ_r，θ_s，θ_h，$\theta_\ell \in \Phi_a$，使得 $h \neq \ell$。

定理 2.2。 在厄米图 X中，a是周期的，当且仅当 Φ_a 满足比值条件。

证明。 注意，$q_r(a,a)=0$ 对于 $\theta_r \in \Phi_a$。由定理 2.1即可立即得到结论。 □

在第 5节中，我们考虑完美态传输的一种放宽形式。如果一个图从 近乎完美态传输到 a b，则称其具有近乎完美态传输；也就是说，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个时间 τ 满足

$$|U(\tau)_{a,b}| \geq 1-\varepsilon. \tag{6}$$

利用 [13]，中引理 13.1 的证明，我们得出：若从 a到 b存在近乎完美态传输，则 a与 b 强余谱。由

$$U(t)_{a,b} = \sum_{r=1}^{d} e^{-\mathrm{i}t\theta_r} e_a^T E_r e_b = \sum_{r=1}^{d} e^{\mathrm{i}(q_r(a,b)-t\theta_r)}(E_r)_{b,b},$$

我们看到，从 a 到 b存在近乎完美态传输，当且仅当对于任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\tau > 0$ 和$\delta_\epsilon \in \mathrm{R}$，使得

$$|\tau\theta_r - q_r(a,b) - \delta_\epsilon| < \epsilon \pmod{2\pi}, \quad \text{for } r \in \Phi_a.$$

定理 2.3。 （克罗内克 *[14]*）设 θ_1、…、θ_d和 q_1、…、q_d为任意实数。对于任意 $\epsilon > 0$，不等式组

$$|\theta_r\tau - q_r| < \epsilon \pmod{2\pi}, \quad r = 1,\ldots,d$$

有解的充要条件是，对于所有整数集 l_1、…、l_d，

$$l_1\theta_1 + \ldots + l_d\theta_d = 0$$

推出

$$l_1q_1 + \ldots + l_dq_d = 0 \pmod{2\pi}.$$

定理 2.4。 设 X 是一个特征值为 θ_1、 …、 $\theta_d \in \Phi_a$ 的厄米图。那么， X 从 a 到 b 存在近乎完美态传输，当且仅当满足以下条件。

i. 顶点 a 和 b 强余谱，争执为 $q_r(a,b)$，其中 $r = 1$、 …、 d .

ii. 存在 $\delta \in \mathbb{R}$，使得对所有满足 $\sum_{r=1}^{d} l_r\theta_r = 0$ 的整数 l_1、 …、 l_d，都有

$$\sum_{r=1}^{d} l_r \left(q_r(a,b) + \delta\right) = 0 \pmod{2\pi}. \tag{7}$$

证明。 结论由 [15] 的命题 4.01 和定理 2.3得出。 □

设 S 是 X中的一个顶点集，我们称多重良好态传输发生在 S，如果其中任意两个顶点之间都存在近乎完美态传输 S。第 5 节给出了两个具有多重良好态传输的厄米图族。

3 有向图中的完美态传输

对于邻接矩阵为实对称矩阵的图，Kay 证明了完美态传输不可能从一个顶点传输到两个不同的顶点 [9]。这种单配行为在含有非实数项的厄米图中并不成立。若集合 S 中至少有三个顶点，且其中任意两个顶点之间都存在完美态传输，则称图在该集合上具有 多重完美态传输 S。当 $S = V(X)$ 时，我们称 X 具有通用完美态传输。文献 [10] 的引理 22 给出了一个构造，能构造出具有通用完美态传输的厄米循环图。有向 3-圈是该构造的一个特例。在同一篇论文中，Cameron 等人猜想，具有通用完美态传输的有向图只有有向 K_2 和有向 K_3。我们在第 3.1 节证明了这一猜想。

在 [11], 中，Godsil 和 Lato研究了满足 S 是 $V(X)$的真子集时有向图中的多重完美态转移。他们给出了一个有向图的例子，该图有八个顶点，并且在一个包含四个顶点的集合上实现了多重完美态转移。在第 3.2 节中，我们将他们的例子推广到一个具有多重完美态转移的有向图无限族。

3.1 通用完美态传输

在 [1], 中，Cameron 等人证明，任意定向的有向 K_2 和 K_3 都具有通用完美态传输。他们给出了具有通用完美态传输的厄米图所满足的以下必要条件。

定理 3.1. 设 H 是与具有通用完美态传输的厄米图 X 相关联的矩阵。那么有：

1. H 的所有特征值都是单重的。
2. 若 P是对角化 H 的酉矩阵，则 $|P_{a,\,b}| = \frac{1}{\sqrt{n}}$，其中 a、 $b \in V(X)$。
3. X 中的每个顶点都是周期的。

设 X 是一个具有 n 个顶点且存在通用完美态传输的有向图。令 H 为其关联的厄米矩阵，其谱分解为

$$H = \sum_{r=1}^{n} \theta_r E_r.$$

于是 E_r 是一个秩一矩阵，且其对角元均为 n^{-1}。我们看到， H^2 具有常对角线，且 X 的底层（无向）图是正则图。此外，由 [11]的定理 6.1 可知，存在一个正平方自由整数 Δ 使得 $\theta_r \in \mathbb{Z}\sqrt{\Delta}$，其中 $r = 1, \ldots, n$。因此

$$\min_{r \neq s} |\theta_r - \theta_s| \geq \sqrt{\Delta}. \tag{8}$$

下面的引理将证明，具有通用完美态传输的有向图至多有十一个顶点。

引理 3.2。 设 H 是一个阶为 n 且对角元为零的厄米矩阵。设 $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_n$ 是 H的特征值。则

$$\sum_{r,s=1}^{n} \left(\theta_r - \theta_s\right)^2 = 2n \operatorname{Tr}(H^2).$$

证明。 注意到，对于 $r, \ s = 1 \ldots, \ n, \ \theta_r - \theta_s$ 是 $\left(H \otimes I_n - I_n \otimes H\right)$的一个特征值。因此

$$\sum_{r,s=1}^{n} \left(\theta_r - \theta_s\right)^2 = \operatorname{Tr}\left(H \otimes I_n - I_n \otimes H\right)^2 = \operatorname{Tr}\left(H^2 \otimes I_n + I_n \otimes H^2 - 2H \otimes H\right).$$

结论由 $\operatorname{Tr}(H \otimes H) = 0$得出。 □

引理 3.3。 设 X 是一个有 n 个顶点和 m 条边、特征值为 $\theta_1 < \cdots < \theta_n$的有向图。设 $\sigma = \min_{r \neq s} |\theta_r - \theta_s|$。则

$$\sigma^2 \frac{n(n^2-1)}{24} \leq m \quad \textit{and} \quad \sigma^2 \leq \frac{12}{n+1}.$$

证明。 由 σ 的定义可得 $\sigma|r-s| \leq |\theta_r - \theta_s|$, 且

$$\sigma^2 \sum_{r,s=1}^{n} (r-s)^2 \leq \sum_{r,s=1}^{n} \left(\theta_r - \theta_s\right)^2.$$

下界为

$$\sigma^2 \sum_{r,s=1}^{n} (r-s)^2 = \sigma^2 \left(2n \sum_{r=1}^{n} r^2 - 2 \left(\sum_{r=1}^{n} r \right)^2 \right) = \sigma^2 \frac{n^2(n^2-1)}{6}.$$

应用引理 3.2可得

$$\sigma^2 \frac{n^2(n^2-1)}{6} \leq 2n \operatorname{Tr}(H^2) = 4mn.$$

引理中的第二个不等式可直接由 $m \leq \binom{n}{2}$ 得出。 □

推论 3.4. 设 X 是一个有 n 个顶点的有向图。若 X 具有通用完美态传输，则$n \le 11$。此外，若 $n \ge 6$, 则 X 具有整数特征值。

证明。 由方程（8）可得 $\sigma^2 \ge \Delta \ge 1$。引理3.3 的第二个不等式给出 $n \le 11$。当 $n \ge 6$时，有 $\sigma^2 < 2$ 这意味着 $\Delta = 1$且 X 的特征值为整数。 □

我们现在可以 排除顶点数超过三个的有向图具有通用完美态传输的可能性 s.

定理 3.5。 有向 K_2 和 K_3 是仅有的能够实现通用完美态传输的有向图。

证明。 设 X 是一个具有 n 个顶点且能够实现通用完美态传输的有向图。那么， X 的底层图是 k-正则图，其中 k为某个整数。

设 $\theta_1 < \cdots < \theta_n$ 是与 X相关联的厄米矩阵 H 的特征值。那么 $\theta_r \in \mathbb{Z}\sqrt{\Delta}$，其中 Δ为某个正平方自由整数。由于 $\mathrm{i}H$ 是一个元素为 ± 1的斜对称矩阵，因此我们有

$$\theta_r = -\theta_{n+1-r} \quad \text{for } r = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

此外， $\mathrm{i}H$ 的特征多项式与其底层图在 $\mathbb{Z}_2$ 上的特征多项式相同。

当 $n = 4$ 为 5 时， C_n 和 K_n 是 n 个顶点上的唯一正则图。穷举搜索排除了具有上述谱条件的 4 个或 5 个顶点的有向图。

For $n \ge 6$, 由引理 3.3 和推论 3.4 可知 $\sigma = \min_{r \ne s} |\theta_r - \theta_s| = 1$ 一个 d

$$\frac{n^2 - 1}{12} \le k \le n - 1.$$

利用这个不等式以及 k 在 n 为奇数时是偶数这一事实，我们将可能情况缩小至以下几种。

n	6	7	8	9	10	11
k	3, 4, 5	4, 6	6, 7	8	9	10

将方程（9）应用于 $\mathrm{Tr}(H^2)$ 得到

$$nk = 2 \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \theta_r^2.$$

直接计算可知，只有以下三种情况能得到该方程的整数解：

n	k	底层图	可能的谱为 $\mathrm{i}H$
11	10	K_{11}	$0, \pm\mathrm{i}, \pm 2\mathrm{i}, \pm 3\mathrm{i}, \pm 4\mathrm{i}, \pm 5\mathrm{i}$
7	6	K_7	$0, \pm\mathrm{i}, \pm 2\mathrm{i}, \pm 4\mathrm{i}$
7	4	$\overline{C_7}$	$0, \pm\mathrm{i}, \pm 2\mathrm{i}, \pm 3\mathrm{i}$

可以直接验证，对于每种情况，底层图的特征多项式都不等于表中列出的根在 $\mathbb{Z}_2$ 上所对应的多项式。

我们得出结论：不存在具有 $n \ge 4$ 个顶点且允许通用完美态传输的有向图。

□

3.2 多重完美态转移

在 [11], Godsil 和 Lato 将通用完美态传输的概念放宽为有向图中顶点子集上的多重完美态传输。令

$$H_{\overrightarrow{C_4}} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$$

是有向 4-圈的厄米矩阵。他们证明，具有厄米矩阵的有向图 rix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes H_{\overrightarrow{C_4}} + \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \otimes J_4$$

在一组包含四个顶点的集合上具有多重完美态传输。

利用来自 [16], 的这一技术引理，我们将上述例子推广到一族无限的有向图，其中存在多重完美态传输。

引理 3.6. 设 A 和 B 为厄米矩阵，其中 A 的谱分解为 $A = \sum_r \theta_r E_r$。那么

$$e^{-it(A\otimes B)} = \sum_r E_r \otimes e^{-it\theta_r B}.$$

引理 3.7. 设 X 是一个有 n 个顶点的有向图，其对应的厄米矩阵为 H_X，且其特征值均为奇整数。设 Y 是一个厄米矩阵为

$$H_Y = I_n \otimes H_{\overrightarrow{C_4}} + H_X \otimes J_4.$$

则 Y 在集合 $\{4h+1, 4h+2, 4h+3, 4h+4\}$ 上对 $h = 0$、1、…、$n-1$ 具有多重完美态转移。

证明。令 $H_X = \sum_r \theta_r E_r$ 为 H_X的谱分解。由于 $I_n \otimes H_{\overrightarrow{C_4}}$ 与 $H_X \otimes J_4$ 可交换，应用引理3.6 可得

$$e^{-\mathrm{i}tH_Y} = \left(I_n \otimes e^{-\mathrm{i}tH_{\overrightarrow{C_4}}}\right)\left(\sum_r E_r \otimes e^{-\mathrm{i}t\theta_r J_4}\right) = \sum_r E_r \otimes e^{-\mathrm{i}t\left(H_{\overrightarrow{C_4}} + \theta_r J_4\right)}.$$

对于奇整数 θ_r，有

$$e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\left(H_{\overrightarrow{C_4}} + \theta_r J_4\right)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此

$$e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}H_Y} = I_n \otimes \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

并且，对于 $h = 0$，1，…，$n-1$，顶点 $4h+1$ 分别在时间$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{2}$和 $\frac{3\pi}{4}$向 $4h+4$、$4h+3$和 $4h+2$实现完美态传输。 □

如果 X 是通过将 $(2m+1)$-立方体中的所有边从一个二分部定向到另一个二分部而得到的，那么其关联矩阵的形式为

$$H_X = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i}B \\ -\mathrm{i}B^T & 0 \end{bmatrix}.$$

那么 H_X 与（无向） $(2m+1)$超立方体的邻接矩阵具有相同的谱，而该谱仅由奇整数构成。引理3.7 给出了一个对于整数$m \geq 0$存在多重完美态传输的有向图。当 $m = 0$时， Y 就是 [11]中给出的有向图。

4 厄米图中的完美态传输

本节第一部分将重点讨论具有代数元的厄米图。具体而言，我们将在4.1节研究这些图中发生完美态传输时的相位因子。

设 X 是一个具有代数元的厄米图。根据 [2] 的定理 6.1 和定理2.2，若从 a 到 b 发生完美态传输，则 X 上的量子游走在 a 和 b处均为周期的。4.2节给出了具有超越数条目的厄米图示例，在这些图中，从a 到 b发生完美态传输，但 a 和 b 均不具有周期性。

4.1 相位因子

我们将注意力限制在代数元为代数数的厄米图，并提取完美态传输发生时有关相位因子的信息。

设 H 是代数厄米矩阵。其特征多项式的系数均为代数数。给定谱分解 $H = \sum_r \theta_r E_r$，特征值 θ_r 均为代数数，因此 E_r 中的元素也都是代数数。

定理 4.1. 设 H 是与某个厄米图相关联的代数矩阵，其谱分解为 $H = \sum_r \theta_r E_r$。若从 a 到 b 发生完美态传输，且相位因子为 α，则 α 是代数数当且仅当

$$\frac{\theta_r}{\theta_s} \in \mathbb{Q},$$

对于满足 $\theta_s \neq 0$ 的 θ_r、 $\theta_s \in \Phi_a$。

证明。 假设从 a 到 b在时间 τ 发生完美态传输，且相位因子为代数数 α。由方程 (2) 可得 $e^{-\mathrm{i}\tau\theta_r}$ 是代数数，因为 $\theta_r \in \Phi_a = \Phi_b$。将盖尔丰德-施奈德定理应用于

$$\left(e^{-\mathrm{i}\tau\theta_s}\right)^{\frac{\theta_r}{\theta_s}} = e^{-\mathrm{i}\tau\theta_r},$$

对于 θ_r， $\theta_s \in \Phi_a$ 且 $\theta_s \neq 0$，我们得出 $\frac{\theta_r}{\theta_s}$ 是有理数。

现在假设 $\frac{\theta_s}{\theta_r}$ $\in$有理数集 对于 θ_r， $\theta_s \in \Phi_a$且 $\theta_s \neq 0$。令 $q_r(a,b)$ 为从 a到 b相对于$\theta_r \in \Phi_a$ 的争执。由方程（3）可知 $e^{\mathrm{i}q_r(a,b)}$ 是代数数。应用方程（4）得到

$$\alpha^{\left(\frac{\theta_r}{\theta_s}-1\right)} = \left(e^{\mathrm{i}(q_s(a,b)-\tau\theta_s)}\right)^{\frac{\theta_r}{\theta_s}} e^{\mathrm{i}(\tau\theta_r - q_r(a,b))} = \left(e^{\mathrm{i}q_s(a,b)}\right)^{\frac{\theta_r}{\theta_s}} e^{-\mathrm{i}q_r(a,b)}.$$

右边是代数的，因此 α 也是。 □

定理 4.2. 设 H 是与某个厄米图相关联的代数矩阵，其谱分解为$H = \sum_r \theta_r E_r$。假设从 a 到 b 发生了完美态传输，相位因子为 α。若存在整数k_r'满足

$$\sum_{r\in\Phi_a} k_r\theta_r = 0 \quad and \quad \sum_{r\in\Phi_a} k_r \neq 0$$

那么 α 是代数的。

证明。 由方程（4），我们有

$$\alpha^{\sum_{r\in\Phi_a} k_r} = e^{-\mathrm{i}\tau\left(\sum_{r\in\Phi_a} k_r\theta_r\right)} \prod_{r\in\Phi_a} \left(e^{\mathrm{i}q_r(a,b)}\right)^{k_r} = \prod_{r\in\Phi_a} \left(e^{\mathrm{i}q_r(a,b)}\right)^{k_r}.$$

由于右侧是代数的，且 $\sum_{r\in\Phi_a} k_r \neq 0$，我们得出 α 是代数的。 □

我们将该定理应用于代数厄米图，其中 Φ_a 包含 H的所有特征值。

推论 4.3。 设 H 是一个与零对角元的厄米图相关联的代数矩阵。假设从 a 到 b发生完美态传输，其相位因子为 α。如果 a 具有完全特征值支撑，那么 α是代数的。

证明。 设 k_r 为 θ_r的重数，其中 $\theta_r \in \Phi_a$。由于 Φ_a 包含 H的所有特征值，我们有 $\sum_{r\in\Phi_a} k_r\theta_r = \mathrm{Tr}(H) = 0$并且 $\sum_{r\in\Phi_a} k_r$ 等于顶点数。由定理 4.2 可知，完美态传输的相位因子是代数的。 □

给定代数厄米矩阵的谱分解 $H = \sum_r \theta_r E_r$，若 E_r 具有常对角线，则每个顶点都有完全特征值支撑。特别地，推论 4.3 适用于

- 游走正则图的邻接矩阵，
- 属于 Bose-Mesner 代数且对角线为零的代数厄米矩阵，以及
- 具有代数元且对角线为零的厄米循环图。

4.2 单向完美态传输

我们在第 4 节开头看到，若完美态传输发生在 a 到 b 之间，且该图是代数厄米图，那么 a和 b 都是周期的。特别地，存在从 b 返回 a的完美态传输。

我们给出一族含有超越数条目的厄米图，它们具有从a 到 b的完美态传输，但在 a 和 b处都不具有周期性。特别是，它们不具有从 b 到 a的完美态传输。

定理 4.4. 存在无穷多个厄米图，它们具有从 a 到 b 的完美态传输，但在 a处不具有周期性。

证明。设 λ 是任意一个满足 $\lambda \notin$ 有理数集π 的实数。定义矩阵

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & e^{\mathrm{i}\lambda} & -e^{\mathrm{i}\lambda} \\ 1 & -1 & -e^{\mathrm{i}\lambda} & e^{\mathrm{i}\lambda} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+\pi \end{bmatrix}.$$

考虑厄米矩阵

$$H := PDP^{-1} = \left(\frac{\pi+\lambda}{2}\right) I_4 - \begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda}{2} & \frac{\pi}{4}(1+e^{-i\lambda}) & \frac{\pi}{4}(1-e^{-i\lambda}) \\ \frac{\lambda}{2} & 0 & \frac{\pi}{4}(1-e^{-i\lambda}) & \frac{\pi}{4}(1+e^{-i\lambda}) \\ \frac{\pi}{4}(1+e^{i\lambda}) & \frac{\pi}{4}(1-e^{i\lambda}) & 0 & \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\pi}{4}(1-e^{i\lambda}) & \frac{\pi}{4}(1+e^{i\lambda}) & \frac{\lambda}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

令 $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_3 = \lambda$ 和 $\theta_4 = \lambda + \pi$。所有顶点都具有完全特征值支撑集。顶点 1 和 3 强余谱，其争执为: $q_1(3,1) = 0$, $q_2(3,1) = \pi$, $q_3(3,1) = \lambda$, 以及 $q_4(3,1) = \lambda + \pi$。根据定理 2.1，顶点 3 到 1 在时间 $\tau = 1$ 发生完美态传输，相位因子为 1。由于 λ 不是 π的有理数倍，因此有

$$\frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{\lambda}{\pi} \notin \mathbb{Q}.$$

根据定理 2.2, H 在顶点 1 和顶点 3 处都不是周期的。 □

例 4.5。 考虑复 Hadamard 矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & i & i & i & i \\ 1 & -1 & e^{i\theta} & -e^{i\theta} & -1 & 1 & -e^{i\theta} & e^{i\theta} \\ 1 & 1 & e^{i2\theta} & e^{i2\theta} & -i & -i & -ie^{i2\theta} & -ie^{i2\theta} \\ 1 & -1 & e^{i3\theta} & -e^{i3\theta} & 1 & -1 & e^{i3\theta} & -e^{i3\theta} \\ i & i & -i & -i & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -i & i & ie^{i\theta} & -ie^{i\theta} & i & -i & -ie^{i\theta} & ie^{i\theta} \\ i & i & -ie^{i2\theta} & -ie^{i2\theta} & 1 & 1 & -e^{i2\theta} & -e^{i2\theta} \\ -i & i & ie^{i3\theta} & -ie^{i3\theta} & -i & i & ie^{i3\theta} & -ie^{i3\theta} \end{bmatrix}$$

以及对角矩阵 $D = \operatorname{diag}\left(0, \pi, \theta, \theta+\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \theta+\frac{\pi}{2}, \theta+\frac{3\pi}{2}\right)$。那么，具有矩阵 $H = PDP^{-1}$ 的厄米图 X 可在 $t = 1$从顶点 1 向顶点 2、在 $t = 2$从顶点 1 向顶点 3、并在 $t = 3$从顶点 1 向顶点 4 发生完美态传输。每个顶点都具有完全特征值支撑集；若 $\theta \notin \mathrm{Q}\pi$，则不满足比值条件，并且 X 在任何顶点处都不是周期的。

5 多重近乎完美态传输

定理 4.4 表明，厄米图中可能存在单向完美态传输。现在我们证明，厄米图中的近乎完美态传输是双向的。

引理 5.1. 如果一个厄米图从 a 到 b存在近乎完美态传输，那么它也存在从 b 到 a的近乎完美态传输。

证明。 假设 $U(t)$ 是一个厄米图的转移矩阵，且该图从a 到 b存在近乎完美态传输。那么，对于 $\varepsilon > 0$, 存在一个时间 τ_1，使得 $U(\tau_1)e_a = \gamma_1 e_b + \rho_1$，其中相位因子为 γ_1，向量为 ρ_1，且满足$\|\rho_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$。

由于 $U(t)$ 是几乎周期的，存在 $\tau_2 > \tau_1$ 使得 $U(\tau_2)e_a = \gamma_2 e_a + \rho_2$，其中 γ_2 是某个相位因子，ρ_2 是满足 $\|\rho_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$ 的某个向量。我们有

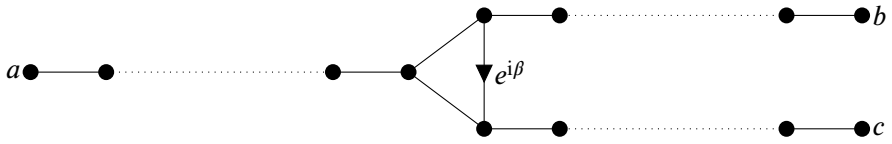
$$U(\tau_2 - \tau_1)e_b = \overline{\gamma_1} U(\tau_2)\left(e_a - U(-\tau_1)\rho_1\right) = \overline{\gamma_1}\left(\gamma_2 e_a + \rho_2 - U(\tau_2 - \tau_1)\rho_1\right).$$

因此

$$\|U(\tau_2-\tau_1)e_b-\overline{\gamma_1}\gamma_2 e_a\| = \|\rho_2 - U(\tau_2-\tau_1)\rho_1\| \le \|\rho_1\| + \|\rho_2\| < \varepsilon$$

并且存在从 b 到 a的近乎完美态传输。 □

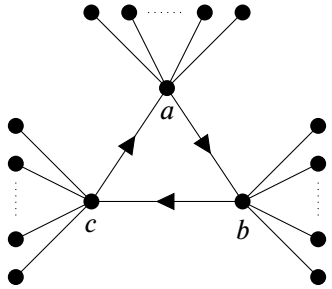
在 [5], Zimborás等人给图中的一条边赋予复权重 $e^{i\beta}$，并利用该权重控制 b 和 c 处的保真度，初始态为 e_a。



该图可以看作带权 K_3 与一条路径的根积。给定一个有 n 个顶点的图 X，以及一个根为 a 的有根图 Y。X 与 Y的根积 $X\circ Y$的构造方法是：取 n 个与 Y 同构的副本，并将 X 的第 j 个顶点与 Y 的第 j 个副本的根相识别。本节给出两个具有多重良好态传输的根积族。

5.1 以星图为根的有向 3-圈

在 [3], Fan和Godsil证明，双星（即 K_2 与K_1的根积），$_m$在两个非悬挂顶点之间存在近乎完美态传输，当且仅当 $4m+1$ 不是完全平方数。注意，K_2 是唯一具有通用完美态传输的简单无向图。我们将他们的结果推广到有向 3-圈 K_3 与 K_1 的根积$\overrightarrow{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$$_{,\ m}$，其中$K_{1,\ m}$ 表示以非悬挂顶点为根的星图$K_{1,\ m}$。



引理 5.2。 假设 a 和 b 是具有 $n\ge 2$ 个顶点的厄米图 X 中的强余谱顶点。$\widehat{\quad}$那么，它们在根积 $X\circ K_{1,\ m}$中也是强余谱顶点。

证明。 设 H_X 为与 X 相关联的厄米矩阵，其谱分解为 $H_X=\sum_{r=1}^{d}\theta_r E_r$。$\widehat{\quad}$则与根积 $Y=X\circ K_{1,\ m}$ 相关联的矩阵为

$$H_Y=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\otimes H_X+\begin{bmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\otimes I_n.$$

对于 $r = 1, \ldots, d$，定义

$$\lambda_r^{\pm} = \frac{\theta_r \pm \sqrt{\theta_r^2 + 4m}}{2},$$

and

$$F_r^{\pm} = \frac{1}{(\lambda_r^{\pm})^2 + m} \begin{bmatrix} (\lambda_r^{\pm})^2 & \lambda_r^{\pm} & \lambda_r^{\pm} & \cdots & \lambda_r^{\pm} \\ \lambda_r^{\pm} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_r^{\pm} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_r^{\pm} & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \otimes E_r.$$

定义

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m & I_m - \frac{1}{m} J_m \end{bmatrix} \otimes I_n.$$

则 H_Y 的谱分解为

$$H_Y = 0 \cdot F_0 + \sum_{r=1}^{d} \left(\lambda_r^{+} \cdot F_r^{+} + \lambda_r^{-} \cdot F_r^{-} \right). \tag{10}$$

注意， $(1,1)$块以 X 中的顶点为索引，且特征值 0 不在 a 或b的支撑集中。由F_r^{+}的 $(1,1)$块是 E_r的非零标量倍数，以及F_r^{-}，即可得出结论。 □

推论 5.3。 设 X 是一个厄米图，具有通用完美态传输，谱为 Φ。令$\wedge S$ 为$X \circ K_{1,m}$中非悬挂顶点的集合。令

$$\Psi = \left\{ \frac{\theta \pm \sqrt{\theta^2 + 4m}}{2} \,\middle|\, \theta \in \Phi \right\}.$$

^若 Ψ 在有理数集上线性无关，则$X \circ K_{1,m}$ 在 S上具有多重近乎完美态传输。

证明。 对于 $a, b \in S$， 在 X中， a 与 b 之间存在完美态传输，因此 a 与 b 在$\wedge X \circ K_{1,m}$ 中由引理5.2可知是强余谱的。由方程（10）可知， Ψ 是根积中 a 的特征值支撑集。^根据定理2.4， a与 b 之间在$X \circ K_{1,m}$中发生近乎完美态传输。 □

¯在以下结果中，我们关注 $X = K_3$， 其具有谱分解

$$\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \frac{1}{3} J_3 + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & e^{-2\pi \mathrm{i}/3} & e^{2\pi \mathrm{i}/3} \\ e^{2\pi \mathrm{i}/3} & 1 & e^{-2\pi \mathrm{i}/3} \\ e^{-2\pi \mathrm{i}/3} & e^{2\pi \mathrm{i}/3} & 1 \end{bmatrix} - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & e^{2\pi \mathrm{i}/3} & e^{-2\pi \mathrm{i}/3} \\ e^{-2\pi \mathrm{i}/3} & 1 & e^{2\pi \mathrm{i}/3} \\ e^{2\pi \mathrm{i}/3} & e^{-2\pi \mathrm{i}/3} & 1 \end{bmatrix}.$$

→ ¯因此， K_3 中的任意两个顶点都是强余谱的。设 $V(K_3) = \{a, b, c\}$。那么， a 在 $\overrightarrow{K}_3 \circ \widehat{K}_{1,m}$ 中的特征值支撑集为 $\lambda_1 = \sqrt{m}$, $\lambda_2 = -\sqrt{m}$,

$$\lambda_3 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3 + 4m}}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3 + 4m}}{2}, \quad \lambda_5 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3 + 4m}}{2} \quad \text{and} \quad \lambda_6 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3 + 4m}}{2}.$$

由方程 (10) 可知，$K_3 \circ K_{1,m}$ 中的争执为

$$q_r(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{if } r = 1, 2, \\ \frac{2\pi}{3} & \text{if } r = 3, 4, \text{ and} \\ -\frac{2\pi}{3} & \text{if } r = 5, 6. \end{cases}$$

定理 5.4. 根积 $K_3 \circ K_{1,m}$ 在非悬挂顶点集合 $\{a, b, c\}$ 上存在多重良好态传输，当且仅当以下条件之一成立。

1. $\gcd(3, m) = 1$。
2. $m = 3s$，其中 s 为某个整数，且 s 和 $4s + 1$ 均不是完全平方数。
3. $m = 27k^2$，其中 k 为某个整数。
4. $m = 27k^2 + 27k + 6$，其中 k 为某个整数。

证明. 由于 $K_3 \circ K_{1,m}$ 存在一个自同构，将 a 映射到 b、将 b 映射到 c，并将 c 映射到 a，因此只需证明根积中存在从 a 到 b 的近乎完美态传输。

根据引理5.2，定理（i）的条件 2.4 成立。对于定理 ii）的条件 2.4，我们考虑满足以下条件的整数 $l_1, \ldots, l_6$：

$$\sum_{r=1}^{6} l_r \lambda_r = (l_1 - l_2)\sqrt{m} + \left(\frac{l_3 + l_4 - l_5 - l_6}{2}\right)\sqrt{3} + \left(\frac{l_3 - l_4 + l_5 - l_6}{2}\right)\sqrt{3 + 4m} = 0. \tag{11}$$

情形 1：若 $\gcd(3, m) = 1$，则集合 $\{\sqrt{3}, \sqrt{m}, \sqrt{3 + 4m}\}$ 在 有理数集上线性无关。方程（11）推出 $(l_3 + l_4 - l_5 - l_6)/2 = 0$ 且

$$\sum_{r=1}^{6} l_r q_r(a,b) = (l_3 + l_4 - l_5 - l_6)\frac{2\pi}{3} = 0 \pmod{2\pi}. \tag{12}$$

定理（ii）2.4 的条件由 $\delta = 0$满足，因此从 a 到 b 在$K_3 \circ K_{1、m}$之间存在近乎完美态传输。

情形 2：当 $m = 3s$时，方程（11）变为

$$(l_1 - l_2)\sqrt{s} + \left(\frac{l_3 + l_4 - l_5 - l_6}{2}\right) + \left(\frac{l_3 - l_4 + l_5 - l_6}{2}\right)\sqrt{1 + 4s} = 0.$$

若 s和 $4s + 1$都不是完全平方数，则 $\{1, \sqrt{s}, \sqrt{1 + 4s}\}$ 在 有理数集 上线性无关，且方程（11）推出方程（12）。因此，从 a 到 b存在近乎完美态传输。

情形 3：假设 $m = 3h^2$，其中某个整数为 h。那么 $4h^2 + 1$ 不是完全平方数，方程（11）变为

$$\left(\frac{2h(l_1 - l_2) + l_3 + l_4 - l_5 - l_6}{2}\right) + \left(\frac{l_3 - l_4 + l_5 - l_6}{2}\right)\sqrt{4h^2 + 1} = 0,$$

这意味着 $l_3 + l_4 - l_5 - l_6 = -2h(l_1 - l_2)$。如果 $h = 3k$，其中某个整数为 k，那么方程（12）成立，并且 a 到 b之间会发生近乎完美态传输。

假设 h 不能被 3整除。方程 (11) 在 $l_1 = l_2 = l_4 = l_5 = 0$且 $l_3 = l_6 = 1$时成立。由于

$$\sum_{r=1}^{6} l_r \left(q_r(a,b) + \delta\right) = 2\delta,$$

方程 (7) 成立当且仅当 $\delta \in \mathbb{Z}\pi$。

方程 (11) 在 $l_1 = 1$、$l_2 = l_3 = l_4 = 0$、$l_5 = l_6 = h$时也成立，但

$$\sum_{r=1}^{6} l_r(q_r(a,b) + \delta) = -\frac{4h\pi}{3} + (2h+1)\delta \neq 0 \pmod{2\pi}$$

当 $\delta \in \mathbb{Z}\pi$ 时。我们得出结论：从 a 到 b不会发生近乎完美态传输。

情形 4：假设 $m = 3s$ 其中 $4s + 1 = h^2$，对某个整数 h成立。那么 s 不是完全平方数，方程 (11) 变为

$$(l_1 - l_2)\sqrt{s} + \frac{(l_3 + l_4 - l_5 - l_6) + h(l_3 - l_4 + l_5 - l_6)}{2} = 0,$$

这意味着 $l_3 + l_4 - l_5 - l_6 = -h(l_3 - l_4 + l_5 - l_6)$。如果 h 能被 3 整除，那么方程 (12) 成立，并且从 a 到 b 会发生近乎完美态传输。在这种情况下， $m = 27k^2 + 27k + 6$ 若我们写作 $4s + 1 = 3^2(2k+1)^2$。

如果 h 不能被3整除，则方程（11）在 $l_1 = l_2 = l_4 = l_5 = 0$， $l_3 = l_6 = 1$以及$l_1 = l_2 = 0$，$l_3 = l_4 = h$， $l_5 = -1$ 和 $l_6 = 1$时成立。使用与前一种情形相同的论证，我们发现不存在 δ 满足方程（7）且适用于 l_j的两种赋值的情形。因此，我们得出结论：从 a 到 b不会发生近乎完美态传输。

□

5.2 带环路的路径为根的循环图

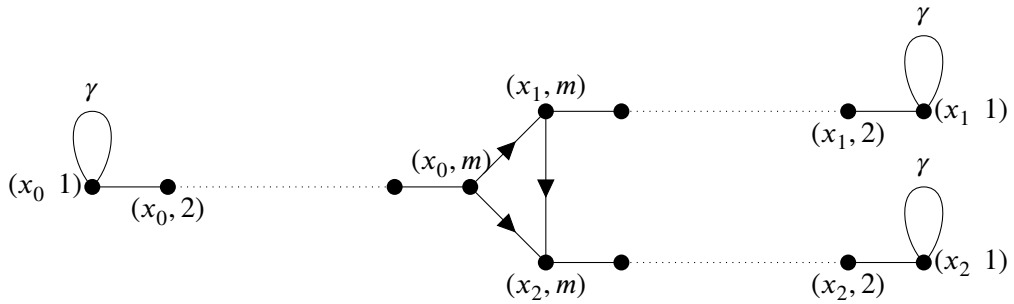
在[4], 中，Kempton 等人证明，若一条路径的每个端点都带有权重为 γ 的自环，且该权重为超越数，则两个端点之间存在近乎完美态传输。我们用 P_m^γ 表示顶点$\{1, 2, \ldots, m\}$ 构成的有根路径，其根为 m，且顶点1 上带有权重为 γ的自环。那么，文献 $2m - 1$ 中研究的长度为 γ、每个端点都带有权重为 [4] 的自环的路径，可以看作是 K_2 与 P_m^γ的根积。



以 m 为根且在1处带环的路径 P_m^γ

我们将他们的结果推广到根积$X\circ P_m^\gamma$，其中 X 是一个具有有理特征值、且允许通用完美态传输的厄米循环图。本节主要使用正交多项式和域迹作为工具。关于正交多项式的背景知识，请参阅 [17] 的第8章；关于域迹的一些基本事实，请参阅 [4]和 [18] 的第14章。

假设 $V(X)=\{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\}$。于是我们用有序对 (x_h,j) 标记 $X\circ P_m^\gamma$ 的顶点，其中 (x_h,j) 表示 X 中以 x_h 为根的 P_m^γ 上的第 j 个顶点，对于 $h=0$，1，…，$n-1$ 和 $j=1$，…，m。



$\overrightarrow{K}_3$ 与 P_m^γ 的根积

令 H_X 为具有通用完美态传输的厄米循环图 X 的矩阵。由 [1] 的定理8可知，H_X 的特征值均为单特征值。给定 H_X的互异特征值 θ_0，θ_1，…，θ_{n-1} 以及阶数为 n的离散傅里叶矩阵

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&\zeta&\zeta^2&\cdots&\zeta^{n-1}\\1&\zeta^2&\zeta^4&\cdots&\zeta^{2(n-1)}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&\zeta^{n-1}&\zeta^{2(n-1)}&\cdots&\zeta^{(n-1)^2}\end{bmatrix}$$

其中 $\zeta=e^{2\pi \mathrm{i}/n}$，我们可以写成

$$H_X=F_n\begin{bmatrix}\theta_0&0&\cdots&0\\0&\theta_1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\theta_{n-1}\end{bmatrix}F_n^*.$$

对于 $0\le a$，$b\le n-1$，顶点 x_a 和 x_b 强余谱，其争执为

$$q_j(x_a,x_b)=\frac{2\pi j(b-a)}{n},\tag{13}$$

对于 $j=0$、1、…、$n-1$。

[1] 中的定理22给出了具有通用完美态传输的厄米循环图的如下刻画。

定理 5.5。设 X 是一个具有单特征值 θ_0、…、θ_{n-1}的 n 阶厄米循环图。那么，X具有通用完美态传输，当且仅当存在 α、$\beta\in\mathbb{R}$，使得 $\beta>0$、c_0、…、$c_{n-1}\in\mathbb{Z}$，且整数h与 n 互素。

$$\theta_j=\alpha+\beta\left(jh+c_jn\right),$$

对于 $j=0$、…、$n-1$。

为了确定 $Z = X \circ P_m^{\gamma}$ 的谱，我们考虑 $m \times m$ 雅可比矩阵

$$T_j := \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \theta_j \end{bmatrix}, \qquad \text{for } j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{14}$$

令 $\varphi_{j,0} = 1$，并令 $\varphi_{j,r}(t)$ 为 T_j 的第 r 个前导主子矩阵的特征多项式，其中 $r = 1, \ldots, m$。那么 $\varphi_{j,0}(t)$, $\varphi_{j,1}(t), \ldots, \varphi_{j,m}(t)$ 是一列满足 $\varphi_{j,0}(t) = 1, \varphi_{j,1}(t) = t - \gamma$ 的正交多项式，

$$\varphi_{j,r}(t) = t\, \varphi_{j,r-1}(t) - \varphi_{j,r-2}(t) \tag{15}$$

对于 $r = 2, \ldots, m-1$，并且

$$\varphi_{j,m}(t) = \left(t - \theta_j\right) \varphi_{j,m-1}(t) - \varphi_{j,m-2}(t). \tag{16}$$

由 [17], 的引理 8.5.2 可知，$\varphi_{j,m}(t) = 0$ 的根 $\lambda_{j,1}, \ldots, \lambda_{j,m}$ 是 T_j 的特征值。此外，

$$\Phi_{j,s} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_{j,1}(\lambda_{j,s}) & \cdots & \varphi_{j,m-1}(\lambda_{j,s}) \end{bmatrix}^T$$

是 T_j 对应于特征值 $\lambda_{j,s}$ 的特征向量，其中 $s = 1, \ldots, m$。由 [17] 的引理 8.1.1 可知，T_j 的特征值都是单重的。另已知，相邻的正交多项式没有非平凡公因子。

Z 的厄米矩阵为

$$H_Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes H_X + \begin{bmatrix} \gamma & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes I_n. \tag{17}$$

由于 $H_X F_n e_j = \theta_j F_n e_j$，我们有

$$H_Z \left(\Phi_{j,s} \otimes F_n e_j\right) = \lambda_{j,s} \left(\Phi_{j,s} \otimes F_n e_j\right) \tag{18}$$

对于 $j = 0, \ldots, n-1$ 和 $s = 1, \ldots, m$。

引理 *5.6*。设 X 是一个具有互异特征值 θ_0、θ_1、…、θ_n 的厄米循环图，并设 F_n、$\lambda_{j,s}$ 和 $\Phi_{j,s}$ 如上定义。对于 $j = 0$、…、$n-1$ 和 $s = 1$、…、m，$\lambda_{j,s}$ 是由方程 *(17)* 定义的厄米图 Z 的一个单特征值，其谱分解为

$$H_Z = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{m} \lambda_{j,s} \frac{1}{\|\Phi_{j,s}\|^2} \left(\Phi_{j,s} \Phi_{j,s}^*\right) \otimes \left((F_n e_j)(F_n e_j)^*\right).$$

对于 x_a、$x_b \in V(X)$ 和 $h = 1$、…、m，顶点 (x_a, h) 和 (x_b, h) 在 Z 中强余谱，其对应于特征值 $\lambda_{j,\,s}$ 的争执为

$$q_{j,s}\left((x_a, h), (x_b, h)\right) = \frac{2\pi j(b-a)}{n},$$

对于 $j = 0, \ldots, n-1$ 和 $s = 1, \ldots, m$。

证明。只需证明，对于 $j=0,\ldots,n-1$ 和 $s=1,\ldots,m$， Z的特征值 $\lambda_{j,s}$ 互不相同。

假设 $\lambda_{j_1,s_1}=\lambda_{j_2,s_2}$。由方程（15），可得

$$\varphi_{j_1,r}\left(\lambda_{j_1,s_1}\right)=\varphi_{j_2,r}\left(\lambda_{j_2,s_2}\right),$$

对于 $r=1,\ldots,m-1$。由方程（16），$\varphi_{j_1,m}\left(\lambda_{j_1,s_1}\right)=\varphi_{j_2,m}\left(\lambda_{j_2,s_2}\right)=0$ 推出 $\theta_{j_1}=\theta_{j_2}$ 和 $j_1=j_2$。由于 $\varphi_{j_1,m}(t)=0$ 有 m个互异的根，我们得出 $s_1=s_2$。

我们可直接由方程（Z 18）和（13）得到 □

本节余下部分，我们假设 γ 是超越数，且 $\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}\in$ 有理数集 与定理 5.8中的条件相同。沿方程（T_j 14）中 的前两行进行拉普拉斯展开，得到

$$\varphi_{j,m}(t)=(t-\gamma)g_{n-1}(t)-g_{n-2}(t),$$

其中 $g_{n-1}(t)$ 是 $(n-1)\times(n-1)$ 雅可比矩阵的特征多项式

$$\begin{pmatrix}\theta_j & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix},$$

并且 $g_{n-2}(t)$ 是其第 $(n-2)$个前导主子矩阵的特征多项式。现在， $g_{n-1}(t)$ 和$g_{n-2}(t)$ 是相邻的正交多项式，因此它们没有任何正次数公因子。由于 $g_{n-1}(t)$ 和 $g_{n-2}(t)$ 是有理系数多项式，且 γ 是超越数，我们得出 $\varphi_{j,\ m}(t)$ 在有理数集$\mathrm{Q}(\gamma)$上不可约。于是，$\varphi_{j,\ m}(t)$ 的分裂域 F_j 是有理数集$\mathrm{Q}(\gamma)$上的伽罗瓦扩张。

给定一个伽罗瓦扩张 E/K，我们用 $\mathrm{Tr}_{E/K}(\mu)$ 表示 μ 从 E 到 K的迹。下面列出一些对定理5.8的证明有用的迹映射性质。

定理 5.7。设 E/K 是一个伽罗瓦扩张。以下性质成立。

i. 对于 $\mu\in E$， $\mathrm{Tr}_{E/K}(\mu)\in K$。

ii. 对于 $\mu\in K$, $\mathrm{Tr}_{E/K}(\mu)=[E\ :\ K]\mu$。

iii. 对于 $\mu_1,\mu_2\in E$, $\mathrm{Tr}_{E/K}(\mu_1+\mu_2)=\mathrm{Tr}_{E/K}(\mu_1)+\mathrm{Tr}_{E/K}(\mu_2)$。

iv. 如果 $K\subset F\subset E$ 是扩域，则 $\mathrm{Tr}_{E/K}(\mu)=\mathrm{Tr}_{F/K}\left(\mathrm{Tr}_{E/F}(\mu)\right)$。

v. 如果 $\mu\in E$ 在 K 上的最小多项式是 $t^m+a_{m-1}t^{m-1}+\cdots+c_0$， 那么

$$\mathrm{Tr}_{E/K}(\mu)=-\frac{[E\ :\ K]}{m}a_{m-1}.$$

特征值 $\lambda_{j,\ s}$ 的 $X\circ P_m^{\gamma}$ 在 $\varphi_{j,\ m}(t)$ 上的最小多项式为 $\mathbb{Q}(\gamma)$。将性质（v）应用于 $\lambda_{j,\ s}\in F_j$， 方程（16）得

$$\mathrm{Tr}_{F_j/\mathbb{Q}(\gamma)}(\lambda_{j,s})=\frac{[F_j\ :\ \mathbb{Q}(\gamma)]}{m}\left(\gamma+\theta_j\right). \tag{19}$$

考虑包含 M的最小扩域 F_j，其中包含 F_0、…、F_{n-1}。对于 $j=0$、…、$n-1$， M/F_j是伽罗瓦扩张。由性质（ii）和（iv）以及方程（19）可得

$$\mathrm{Tr}_{M/\mathbb{Q}(\gamma)}(\lambda_{j,s})=\mathrm{Tr}_{F_j/\mathbb{Q}(\gamma)}\left([M\ :\ F_j]\lambda_{j,s}\right)=[M\ :\ F_j]\frac{[F_j\ :\ \mathbb{Q}(\gamma)]}{m}\left(\gamma+\theta_j\right)=\frac{[M\ :\ \mathbb{Q}(\gamma)]}{m}\left(\gamma+\theta_j\right). \tag{20}$$

定理 5.8。 设 X 是一个具有 n 个顶点的厄米循环图，它允许通用完美态传输，其特征值由定理 5.5给出。若 θ_0、 …、 $\theta_{n-1} \in$ 有理数集 且 γ 是超越数，那么对于任意正整数m，根积 $X \circ P_m^\gamma$ 在集合 $\{(x_0,h),(x_1,h),\ldots,(x_{n-1},h)\}$上具有多重近乎完美态传输，其中 $1 \le h \le m$。

证明。 对于 $h = 1, \ldots, m$， $X \circ P_m^\gamma$ 存在一个自同构，将 (x_a,h) 映射到 (x_{a+1},h)，对于 $a \in$ 有理数集$_n$。只需证明存在从 (x_0,h) 到 (x_1,h)的近乎完美态传输。由引理 5.6， (x_0,h) 和 (x_1,h) 具有争执的强余谱

$$q_{j,s}\left((x_0,h),(x_1,h)\right) = \frac{2\pi j}{n},$$

对于 $j = 0, \ldots, n-1$ 和 $s = 1, \ldots, m$。

为了证明定理 2.4(ii)成立，考虑满足以下条件的整数 $l_{j,\ s}$’:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{m} l_{j,s}\lambda_{j,s} = 0. \tag{21}$$

我们对两边应用从 M 到 有理数集(γ) 的迹。应用定理 5.7 (iii)和方程(20)， 方程(21)可得

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{m} l_{j,s}(\gamma+\theta_j) = \gamma\left(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{m} l_{j,s}\right) + \sum_{j=0}^{n-1}\theta_j\left(\sum_{s=1}^{m} l_{j,s}\right) = 0.$$

由于 γ 是超越数且 $\sum_j \theta_j\left(\sum_s l_{j,s}\right) \in$ 有理数集， 方程(21)等价于

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{m} l_{j,s} = 0 \tag{22}$$

and

$$\sum_{j=0}^{n-1}\theta_j\left(\sum_{s=1}^{m} l_{j,s}\right) = 0. \tag{23}$$

回忆一下， $\theta_j = \alpha + \beta(jh + c_j n)$ 其中 $\gcd(h,n) = 1$。方程(22)和(23)意味着

$$\sum_{j=0}^{n-1}(jh + c_j n)\left(\sum_{s=1}^{m} l_{j,s}\right) = 0.$$

由于 $\gcd(h,n) = 1$， 我们有

$$\sum_{j=0}^{n-1} j\sum_{s=1}^{m} l_{j,s} = 0 \pmod{n}.$$

若方程(22)和(23)成立，则对于任意 $\delta \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{m} l_{j,s}\left(q_{j,s}\left((x_0,h),(x_1,h)\right)+\delta\right) = \frac{2\pi}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-1} j\sum_{s=1}^{m} l_{j,s}\right) + \delta\left(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{m} l_{j,s}\right) = 0 \pmod{2\pi}.$$

根据定理 2.4， 从 (x_0,h) 到 (x_1,h)的近乎完美态传输会在 $h = 1$、 …、 m时发生。 □

注 5.9.

- 在自环上赋予超越数权重 γ，足以使 $\varphi_{0,\,m}(t)$、…、$\varphi_{n-1,\,m}(t)$ 在 $\mathrm{Q}(\gamma)$ 上不可约。只要 $\varphi_{0,\,m}(t)$、…、$\varphi_{n-1,\,m}(t)$ 在 $\mathrm{Q}(\gamma)$ 上不可约，定理 5.8 对无理数 γ 成立。

- 如果我们将自环从 $(x_a, 1)$ 移到 (x_a, m)，对于 $a = 0, \ldots, n-1$，那么类似的论证表明，所得图在集合 $\{(x_0, h), (x_1, h), \ldots, (x_{n-1}, h)\}$ 上具有多重近乎完美态传输，对于 $h = 1, \ldots, m$。

致谢

本项目是在 2021 年菲尔兹本科生暑期研究计划的支持下完成的，该计划为 A. Acuaviva、S. Eldridge、M. How 和 E. Wright 提供了支持。C. Godsil 谨此感谢加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）第 RGPIN-9439 号资助的支持。A. Chan 感谢 NSERC 第 RGPIN-2021-03609 号资助的支持。

参考文献

[1] S. Cameron、S. Fehrenbach、L. Granger、S. Shrestha 和 C. Tamon，《图上的普适态传输》，线性代数及其应用，第 455 卷，第 115–142 页，2014 年。[2] C. Godsil，《实态传输》，arXiv1710:04042。[3] X. Fan 和 C. Godsil，《双星图上的近乎完美态传输》，线性代数及其应用，第 438 卷，第 2346–2358 页，2013 年。[4] M. Kempton、G. Lippner 和 S.-T. Yau，《通过磁场在对称自旋网络中实现近乎完美量子态传输》，Quantum Inf. Process.，第 16 卷，第 9 期，论文编号 210，共 23 页，2017 年。[5] Z. Zimborás、M. Faccin、Z. Kádár、J. Whitfield、B. Lanyon 和 J. Biamonte，《时间反演对称性破缺增强量子传输》，Scientific Reports，第 3 卷，第 2361 页，2013 年。[6] A. M. Childs、R. Cleve、E. Deotto、E. Farhi、S. Gutmann 和 D. A. Spielman，《通过量子游走实现指数级算法加速》，第三十五届 ACM 计算理论研讨会论文集，2003 年。[7] A. Childs，《通过量子漫步实现普适计算》，Physical Review Letters，第 102 卷，第 180 501 页，2009 年。[8] S. Bose，《通过未调制自旋链实现量子通信》，Physical Review Letters，第 91 卷，20，2003 年。[9] A. Kay，《完美高效态传输及其作为构造工具的应用》，International Journal of Quantum Information，第 8 卷，第 641–676 页，4，2011 年。[10] E. Connelly、N. Grammel、M. Kraut、L. Serazo 和 C. Tamon，《完美态传输的普适性》，线性代数及其应用，第 531 卷，第 516–532 页，2017 年。[11] C. Godsil 和 S. Lato，《有向图上的完美态传输》，线性代数及其应用，第 604 卷，第 278–292 页，2020 年。

[12] C. Godsil 和 B. McKay，《一种新的图乘积及其谱》，澳大利亚数学学会会刊，第 18 卷，1978 年 2 月。[13] C. Godsil，《图上的态传输》，《离散数学》，第 312 卷，第 123–147 页，2012 年。[14] B. M. Levitan 和 V. V. Zhikov，几乎周期函数与微分方程。剑桥大学出版社，剑桥—纽约，1982 年，第 xi 页+211。[15] C. van Bommel，《量子游走与路径上的近乎完美态传输》，博士论文，滑铁卢大学，2019 年。[16] G. Coutinho 和 C. Godsil，《图谱与连续时间量子游走》，预印本。[17] C. Godsil，代数组合学。纽约：Chapman & Hall，1993 年，Chapman and Hall 数学丛书。[18] D. S. Dummit 和 R. M. Foote，抽象代数，第三版。John Wiley & Sons, Inc.，新泽西州霍博肯，2004 年，第 xii 页+932。