arXiv:2301.01477v1 [stat.ME] 4 Jan 2023

使用分段线性函数灵活模型的负载共享系统可靠性分析

Shilpi Biswas [*]、Ayon Ganguly [†] 和 Debanjan Mitra [‡]

摘要

为准确估计负载共享系统的系统可靠度，本文通过使用分段线性函数近似部件寿命的累积风险函数，为此类系统构建了一种灵活模型。该模型的优点在于它由数据驱动，且不对底层部件寿命作出苛刻假设。由于模型具有灵活性，因此能够很好地拟合一般负载共享系统所产生的数据，从而准确估计重要的可靠性特征。本文基于所提出的分段线性函数模型，推导了负载共享系统在给定任务时间的可靠度、分位数函数、平均失效时间和平均剩余寿命的估计值。文中详细讨论了该模型的最大似然估计和置信区间的构建。通过一项详尽的蒙特卡罗模拟研究，发现该模型的表现相当令人满意。最后，本文以双电机负载共享系统的寿命数据为例，对负载共享数据进行了分析。总之，本文全面讨论了一种灵活模型，该模型可在最少假设的条件下用于负载共享系统。

关键词：负载共享系统；累积风险函数；基准风险函数；分段线性近似；最大似然估计；费希尔信息；自助法；置信区间；分位数函数；平均失效时间；任务时间点的可靠性；平均剩余寿命。

1 Introduction

1.1 Background

动态模型适用于这样的可靠性系统：一个或多个部件发生失效或退化，会影响仍存部件或运行部件的性能。载荷共享系统就是适合采用此类模型的典型例子。载荷共享系统的总负载由各部件共同分担；当某个部件在

[*]印度理工学院古瓦哈提分校，印度阿萨姆邦 781039；电子邮箱：shilpi.biswas@iitg.ac.in
[†]印度理工学院古瓦哈提分校，印度阿萨姆邦 781039；电子邮箱：aganguly@iitg.ac.in
[‡]印度管理学院乌代布尔分校，印度拉贾斯坦邦 313001；电子邮箱：debanjan.mitra@iimu.ac.in

系统内失效时，总负载会重新分配给其余运行部件。由于额外负载导致应力增大，运行部件的失效率也会随之上升。

载荷共享系统的常见例子包括部件并联连接的系统，例如多处理器计算机中的中央处理器（CPU）、悬索桥的缆索、液压系统中的阀门或泵、发电机系统等。载荷共享系统也存在于其他领域，例如人体的肾脏系统。当一侧肾脏失效或功能衰退时，另一侧肾脏承受的压力会升高，失效的可能性也随之增加。

运行部件之间的负载分担规则取决于相关系统的物理特性。在均等负载分担规则下，失效部件造成的额外负载由运行部件平均分担。另一方面，局部负载分担规则意味着额外负载由失效部件的相邻部件分担。更一般地说，单调负载分担规则假设，系统中其他部件发生失效时，运行部件承受的负载不会减少 [18]。

1.2 Literature review

关于负载共享系统的早期重要文献贡献之一，是 Daniels [9], 对束中单根纱线纤维相继断裂时纱线纤维承受的应力不断增加这一现象的描述。在纺织业这一背景下，早期文献中还出现了 Coleman [4, 5], 、Rosen [29], 以及 Harlow 和 Phoenix [13, 14],等人的研究。总体而言，这一主题吸引了多位研究者的关注，并涌现出许多重要的理论贡献，例如 Birnbaum 和 Saunders [6],、Freund [12], 、Ross [30], 、Schechner [31], 、Lee等人 [19], 、Hollander 和 Pena [15], 以及 Lynch [22]的研究。

早期关于负载共享系统的大多数研究都基于已知的负载分担规则，而 Kim 和 Kvam [16] 则针对负载分担规则未知的多部件负载共享系统提出了一种统计方法。事实上，Kim 和 Kvam [16] 的研究还有另一项重要意义：他们采用假设的潜变量方法对部件寿命进行建模。后来，Park [27, 28] 改进了这一潜变量方法，为负载共享系统建立了推断框架，并假设部件寿命服从指数分布、威布尔分布和对数正态分布。

在负载分担模型的相关文献中，参数模型的应用由来已久。指数分布被广泛用于刻画负载共享系统中部件的寿命 [32, 20, 24]。然而，指数分布具有恒定风险率这一性质，对于大多数应用而言并不实际。因此，Suprasad等人 [33], 提出了适用于负载共享系统的渐变失效率模型，以涵盖部件失效时间分布的广泛范围。关于这一点，还可以提及负载共享系统的加速寿命试验模型；参见 Mettas 和 Vassiliou [23], 、Amari 和 Bergman [1], 以及 Kong 和 Ye [17]。Deshpande等人 [10]使用一族参数分布来刻画双部件负载共享系统的寿命。Asha等人 [2]为此使用了脆弱性模型。Franco等人 [11] 在这一方向上近期的一项研究中使用了广义Freund

双部件负载共享系统的二元指数模型。另请参阅这些文章中引用的文献。

近年来，许多作者对负载共享系统的不同方面进行了研究。M¨uller 和 Meyer [25] 对负载共享系统中的损伤累积进行了建模。Luo 等人[21]开发了一种模型，用于描述动态环境下的相关寿命，并纳入了负载共享准则。Brown 等人 [7]研究了一种负载共享空间模型：部件失效造成的额外负载，会更多地由靠近失效部件的运行中部件分担，而距离较远的部件分担较少。Nezakati 和 Ramzakh [26], 以及 Zhao 等人 [36] 将部件退化与负载共享现象联系起来。在一项有趣的研究中，Che 等人 [8] 将人机单元（MMU）作为分析单位，指出机器问题和人为问题都可能导致负载共享。他们研究了 MMU 的负载共享，试图捕捉机器与操作人员之间复杂的依赖关系。Zhang 等人 [35]研究了一种称为负载-强度模型的通用模型。值得注意的是，迄今为止，大多数关于负载共享系统的研究都采用参数模型进行分析，因此其分析的适用性很大程度上依赖于建模假设。

1.3 Aim and Motivation

本文旨在为负载共享系统的系统可靠度或任务时刻可靠度（RMT）提供适当的估计。此外，本文还旨在准确估计负载共享系统底层系统寿命分布的分位数函数、平均失效时间（MTTF）和平均剩余时间（MRT）。这些量对于全面了解负载共享系统的特性至关重要，同时也具有实际意义，可用于制定各种策略和计划。

自然，对负载共享系统的RMT、分位数函数、MTTF和MRT的估计质量，取决于所拟合模型是否适合其部件寿命，并能否刻画负载分担规则。为此，我们针对部件寿命建立了一种模型，利用累积风险函数的分段线性近似（PLA），以刻画部件连续发生失效各阶段中未知的负载分担规则。该模型由数据驱动，无需对部件寿命分布作出苛刻的参数假设。由于具备这种灵活性，基于PLA的模型能够很好地拟合负载共享数据。后文将详细阐述一个例子，如下所示。

Asha等人 [2] 和 Franco等人 [11]分析了载荷共享系统的数据，其中每个系统都是由两个电动机并联组成的。Asha等人 [2]假设部件寿命服从威布尔分布，但其中一个电动机部件的数据明显提供了经验证据，表明这一假设并不成立。Franco等人 [11]则假设部件寿命服从广义二元 Freund 分布。我们将所提出的基于PLA的模型拟合到这些数据上，并根据用于模型选择的赤池信息准则（AIC）发现，与Asha等人 [2] 的威布尔模型以及 Franco等人 [11]的广义二元 Freund 模型相比，基于PLA的模型拟合效果要好得多。由此直接且显而易见的结果是，能够更准确地估计系统寿命的RMT、分位数函数、MTTF和MRT。有关这项分析的详细内容将在后文介绍。

本文的主要贡献如下:

- 我们开发了一种基于PLA的灵活数据驱动模型，用于对载荷共享系统的部件寿命进行建模。该模型不需要对底层部件寿命作出苛刻的参数假设。

- 我们基于来自多部件载荷共享系统的数据，为所提出的基于PLA的模型开发了推断方法。

- 在所提出的基于PLA的模型下，我们开发了相关方法，以准确估计负载共享系统的重要可靠性特征，例如系统可靠度或RMT、分位数函数、平均失效时间和平均剩余寿命。

本文其余部分安排如下。第2节介绍所提出的负载共享系统基于PLA的模型。第3节阐述基于多部件载荷共享系统数据的模型似然推断，包括最大似然估计的推导细节、置信区间的构建，以及选择分段线性函数切点的一般指导。第4节给出在此设定下对负载共享系统的系统可靠度、分位数函数、平均失效时间和平均剩余寿命的估计。第5节基于双组件负载共享系统的部件寿命数据，展示一个应用基于PLA的模型并估计各种重要可靠性特征的示例。第6节介绍一项详细的蒙特卡罗模拟实验结果，该实验考察了基于PLA的模型的有效性和稳健性。最后，第7节对本文作出总结并提出一些评述。

2 The Piecewise Linear Approximation Model for Cumulative Hazard

一般而言，PLA 是一种有用的数据建模工具，可以避免强参数假设。在生存分析中，分段线性函数得到了广泛应用。最近，Balakrishnan 等人 [3] 提出了一种基于 PLA 的模型，用于描述存在治愈比例的人群的风险率；相关参考文献也可参见其中。本文针对负载分担规则未知的负载共享系统，开发了一种基于 PLA 的模型。具体而言，我们使用 PLA 对部件寿命分布的累积风险函数进行建模。在部件连续失效的各个阶段，随着其余运行部件的寿命分布发生变化，我们会为累积风险采用新的 PLA。通过选择每个失效阶段 PLA 的线性段数量，可以对模型进行适当调整。所提出的基于 PLA 的建模方法的主要优点是所需的模型假设极少。

考虑一个由 J 个部件组成的载荷共享系统。这里， J 个部件组成的载荷共享系统是指由 J 个并联部件构成的载荷共享系统。假设系统中失效的部件不会被更换或修复。当部件逐个失效时，每次失效后，系统的总负载都会重新分配给其余正常工作的部件。因此，正常工作的部件承受的负载会比之前更高

。开始时，所有部件均正常工作，令 $U_{(0)1}$， $U_2^{(0)}$，……， $U_{(0)J}$ 表示各部件的潜在寿命， $Y^{(0)}$ 表示首次部件失效前的系统寿命。显然，

$$Y^{(0)} = \min\left\{U_1^{(0)}, U_2^{(0)}, \ldots, U_J^{(0)}\right\}.$$

类似地，对于 $j = 1$、2、……、 $J-1$，令 $Y_{(j)}$ 表示第 j 次与第 $(j+1)$ 次部件失效之间的系统寿命。于是，

$$Y^{(j)} = \min\left\{U_1^{(j)}, U_2^{(j)}, \ldots, U_{J-j}^{(j)}\right\},$$

其中， $U_1^{(j)}$、 $U_{(j)2}$、 $\ldots U_{(j)J-j}$ 表示第 j 次部件失效后正常工作的部件的潜在寿命， $j = 1$、2、……、 $J-1$。假设对于 j、 $U_1^{(j)}$、……、 $U_{(j)J-j}$ 的所有取值，它们均为独立同分布随机变量。此外，假设 $\left\{U_\ell^{(j)}\right.$、 $\ell = 1$、2、……、 $J-j$； $j = 0$、1、……、 $\left.J-1\right\}$ 均为独立随机变量。

令 $h^{(j)}(\cdot)$ 和 $H^{(j)}(\cdot)$ 分别表示分布 $U_1^{(j)}$、 $j = 0$、1、2、……、 $J-1$ 的风险率（HR）和累积风险函数（CHF）。这里，我们假设 HR $h^{(j)}(\cdot)$ 对所有 j 均为非递减函数。对于 $y > 0$， $Y^{(j)}$ 的生存函数（SF）为

$$P\left(Y^{(j)} > y\right) = P\left[\min\left\{U_1^{(j)}, U_2^{(j)}, \ldots, U_{J-j}^{(j)}\right\} > y\right] = e^{-(J-j)H^{(j)}(y)}.$$

因此，对于 $y > 0$， $Y^{(j)}$ 的累积分布函数（CDF）和概率密度函数（PDF）分别为

$$F^{(j)}(y) = 1 - e^{-(J-j)H^{(j)}(y)} \qquad \text{and} \qquad f^{(j)}(y) = (J-j)h^{(j)}(y)\, e^{-(J-j)H^{(j)}(y)},$$

分别。

现在，假设有 n J 部件载荷共享系统，并令 $Y_{(j)i}$ 表示第 i 个系统在第 j 次与第 $(j+1)$ 次部件失效之间的系统寿命，其中 $i = 1, 2, \ldots, n$， $j = 0, 1, \ldots, J-1$。假设观测到的 $Y_{(j)1}, Y_{(j)2}, \ldots, Y_{(j)n}$ 的值分别为 $y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \ldots, y_n^{(j)}$。对于 $j = 0, 1, \ldots, J-1$， $\xi^{(j)} = \left\{\tau_0^{(j)}\right.$，令 $\tau_{(j)1}, \ldots, \tau_{(j)N}\left.\right\}$ 表示时间尺度 $y_1^{(j)}, \ldots, y_n^{(j)}$ 上的一组 $N+1$ 切点，并满足以下限制：

$$\tau_0^{(j)} < \tau_1^{(j)} < \tau_2^{(j)} < \ldots < \tau_N^{(j)}, \quad \tau_0^{(j)} \le \min\left\{y_1^{(j)}, \ldots, y_n^{(j)}\right\} \text{ and } \tau_N^{(j)} \ge \max\left\{y_1^{(j)}, \ldots, y_n^{(j)}\right\}.$$

最初， $\xi^{(j)}$ 被 视为固定且已知。我们将在后面的章节讨论如何选择 $\xi^{(j)}$.

所提出的模型使用分段线性函数近似累积风险函数 $H^{(j)}(\cdot)$。该函数定义在区间 $[\tau_{(j)k-1}, \tau_{(j)k})$， $k = 1, 2, \ldots, N$ 上，这些区间由 $\xi^{(j)}$ 中连续的切割点构造而成。因此，在范围 $[\tau_0^{(0)}, \tau_{(0)N})$ 内，累积风险函数 $H^{(0)}(\cdot)$ 可近似表示为 $\Lambda^{(0)}(\cdot)$，其中

$$\Lambda^{(0)}(t) = \sum_{k=1}^{N} (a_k + b_k t)\, \mathbf{1}_{[\tau_{k-1}^{(0)}, \tau_k^{(0)})}(t), \tag{2.1}$$

其中 a_k 和 b_k 均为实常数，且

$$\mathbf{1}_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in A \\ 0 & \text{if } t \notin A. \end{cases}$$

将 PLA 延伸至 $\tau_N^{(0)}$ 之外的一种可行方法，是将最后一段直线 $a_N + b_N t$ 延伸至 $[\tau_N^{(0)}, \infty)$。因此，在范围 $[\tau_0^{(0)}, \infty)$ 上与 PLA 对应的 CHF 为

$$\Lambda^{(0)}(t) = \sum_{k=1}^{N} (a_k + b_k t)\, \mathbf{1}_{[\tau_{k-1}^{(0)}, \tau_k^{(0)})}(t) + (a_N + b_N t)\mathbf{1}_{[\tau_N^{(0)}, \infty)}(t),$$

其中 $\Lambda^{(0)}(\tau_0^{(0)}) = 0$。我们还假设 $\Lambda^{(0)}(\cdot)$ 是连续函数。由于 $\Lambda^{(0)}(\tau_{(0)\,0}) = 0$，利用连续性假设，$a_i$ 可以用 b_i 表示如下：

$$a_1 = -b_1 \tau_0^{(0)} \qquad \text{and} \qquad a_k = \sum_{\ell=1}^{k-1} (b_\ell - b_{\ell+1})\, \tau_\ell^{(0)} + a_1 = \sum_{\ell=1}^{k-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(0)} - \tau_{\ell-1}^{(0)} \right) - b_k \tau_{k-1}^{(0)},$$

对于 $k = 1$、2、3、.....、 N.

请注意，上述模型也可以用 HRs 等价地描述。采用这种方法，在范围 $[\tau_0^{(0)}, \tau_{(0)\,N})$ 上的 $h^{(0)}(\cdot)$ 通过分段常数函数 $\lambda^{(0)}(\cdot)$ 进行近似，其中

$$\lambda^{(0)}(t) = \sum_{i=1}^{N} b_k \mathbf{1}_{[\tau_{k-1}^{(0)}, \tau_k^{(0)})}(t)\,. \tag{2.2}$$

当系统中的一个或多个部件失效后，负载增加将直接导致正常工作的部件的风险率升高。为纳入这一信息，在系统的 j 个部件失效后，我们使用分段常数函数 $\lambda^{(j)}(\cdot)$，对 $h^{(j)}(\cdot)$ 在 $[\tau_0^{(j)}, \tau^{(j)\,N})$、 $j = 1$、2、. . .、 $J-1$ 上进行近似，其中

$$\lambda^{(j)}(t) = \gamma_j \sum_{k=1}^{N} b_k \mathbf{1}_{[\tau_{k-1}^{(j)}, \tau_k^{(j)})}(t)\,, \tag{2.3}$$

with

$$1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{J-1}.$$

与式（2.3）中给出的风险率的分段线性近似相对应的累积风险函数的分段线性近似为

$$\Lambda^{(j)}(t) = \gamma_j \sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{\ell=1}^{k-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)} \right) + b_k \left(t - \tau_{k-1}^{(j)} \right) \right] \mathbf{1}_{[\tau_{k-1}^{(j)}, \tau_k^{(j)})}(t)\,. \tag{2.4}$$

为满足 HR 非递减的特性，我们假设 $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_N$。请注意，参数 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{J-1}$ 反映了 HR 增大的负载分担规则。我们将$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{J-1}$ 视为未知参数，并根据部件失效数据对其进行估计。这里需要指出的是，PLA 模型可解释为：在切点所指定的各个范围内，用若干指数模型（具有不同的速率参数）近似底层的寿命分布。

3 Likelihood Inference

基于PLA的模型中涉及的参数，是根据一组负载共享系统的部件失效数据估计得到的。来自 n J部件负载共享系统的可用部件失效数据形式如下

$$Data = \left\{ y_i^{(j)} \,:\, i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n;\, j = 0,\, 1,\, \ldots,\, J-1 \right\},$$

其中， $y_i^{(j)}$ 表示第 i个系统在第 j次与第（$j+1$）次部件失效之间观测到的系统寿命。对于 $j = 0$，1，2，.....，$J-1$，以及 $k = 1$，2，.....，N，定义

$$I_k^{(j)} = \left\{ i : y_i^{(j)} \in \left[\tau_{k-1}^{(j)},\, \tau_k^{(j)} \right) \right\} \quad \text{and} \quad n_k^{(j)} = |I_k^{(j)}|.$$

显然，$\sum_{k=1}^{N} n_k^{(j)} = n$。PLA 模型的似然函数为

$$L\left(\boldsymbol{\theta}\right) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{J-1} \left[(J-j)\gamma_j \sum_{k=1}^{N} b_k \mathbf{1}_{[\tau_{k-1}^{(j)},\, \tau_k^{(j)})} \left(y_i^{(j)} \right) e^{-(J-j)\gamma_j \left[\sum_{\ell=1}^{k-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)} \right) + b_k \left(y_i^{(j)} - \tau_{k-1}^{(j)} \right) \right]} \right], \tag{3.1}$$

其中，$\gamma_0 = 1$和 $\boldsymbol{\theta}$ =（γ_1，γ_2，.....，γ_{J-1}，b_1，b_2，.....，b_N）′为参数向量。忽略加性常数后，相应的对数似然函数可表示为

$$l\left(\boldsymbol{\theta}\right) = \sum_{k=1}^{N} \left[\left(\sum_{j=0}^{J-1} n_k^{(j)} \right) \ln b_k - \left(\sum_{j=0}^{J-1} (J-j)\gamma_j T_k^{(j)} \right) b_k \right] + n \sum_{j=0}^{J-1} \ln \gamma_j, \tag{3.2}$$

其中

$$T_k^{(j)} = \sum_{i \in I_k^{(j)}} \left(y_i^{(j)} - \tau_{k-1}^{(j)} \right) + \left(n - \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell^{(j)} \right) \left(\tau_k^{(j)} - \tau_{k-1}^{(j)} \right),$$

对于 $k = 1$，2，.....，N；$j = 0$，1，.....，$J-1$。令式（3.2）中对数似然函数关于 b_k 的偏导数为零，可将 b_k 表示为载荷分担参数 $\boldsymbol{\gamma}$ =（γ_1，γ_2，.....，γ_{J-1}）的函数：

$$b_k = b_k\left(\boldsymbol{\gamma}\right) = \frac{\sum_{j=0}^{J-1} n_k^{(j)}}{\sum_{j=0}^{J-1} (J-j)\gamma_j T_k^{(j)}}, \quad k = 1, ..., N. \tag{3.3}$$

将式 (3.3) 中的 $b_k(\boldsymbol{\gamma})$ 代入式 (3.2)，忽略加性常数，可得关于 $\boldsymbol{\gamma}$ 的剖面对数似然函数：

$$\tilde{l}\left(\boldsymbol{\gamma}\right) = \sum_{k=1}^{N} \left[\left(\sum_{j=0}^{J-1} n_k^{(j)} \right) \left\{ \ln \left(\sum_{j=0}^{J-1} n_k^{(j)} \right) - \ln \left(\sum_{j=0}^{J-1} (J-j)\gamma_j T_k^{(j)} \right) \right\} \right] + n \sum_{j=0}^{J-1} \ln \gamma_j. \tag{3.4}$$

˜为了优化关于 $\boldsymbol{\gamma}$ 的剖面对数似然函数 $l(\boldsymbol{\gamma})$，可以使用标准统计软件中的任意常规最大化程序。通过对 $l(\boldsymbol{\gamma})$ 进行数值优化，得到 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{J-1}$ 的最大似然估计 $\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2, \ldots, \widehat{\gamma}_{J-1}$ 后，将其代入式 (3.3)，即可得到 b_k 的最大似然估计：

$$\widehat{b}_k = b_k\left(\widehat{\gamma}_1, \ldots, \widehat{\gamma}_{J-1}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

3.1 A SPECIAL CASE: TWO-COMPONENT LOAD-SHARING SYSTEMS

在分析双部件负载共享系统的数据时，如果在基于PLA的模型中使用两个线性段，则可以通过解析方法显式求得最大似然估计。考虑 $J = 2$ 和 $N = 2$的情形。在这种情况下，对数似然函数可简化为

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^{2}\left[\left(\sum_{j=0}^{1} n_k^{(j)}\right)\ln b_k - \left(\sum_{j=0}^{1}(2-j)\gamma_j T_k^{(j)}\right) b_k\right] + n\sum_{j=0}^{1}\ln\gamma_j, \tag{3.5}$$

with

$$T_k^{(j)} = \sum_{i\in I_k^{(j)}}\left(y_i^{(j)} - \tau_{k-1}^{(j)}\right) + \left(n - \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell^{(j)}\right)\left(\tau_k^{(j)} - \tau_{k-1}^{(j)}\right),$$

当 $k = 1$、2、 $j = 0$、1 且 $\gamma_0 = 1$时。这里， $\boldsymbol{\theta} = (\gamma_1, \ b_1, \ b_2)$。

令 $\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial b_1}$ 和 $\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial b_2}$ 等于零，得到

$$b_1 = \frac{n_1^{(0)} + n_1^{(1)}}{2T_1^{(0)} + \gamma_1 T_1^{(1)}} \tag{3.6}$$

$$b_2 = \frac{n_2^{(0)} + n_2^{(1)}}{2T_2^{(0)} + \gamma_1 T_2^{(1)}}. \tag{3.7}$$

令 $\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma_1}$ 等于零，得到

$$\gamma_1 = T_1^{(1)} b_1 + T_2^{(1)} b_2, \tag{3.8}$$

其中，将式 (3.6) 和 (3.7) 中的 b_1 和 b_2 代入，可得到关于 γ_1 的二次方程，如下所示

$$Q(\gamma_1) = n\gamma_1^2 B_{0,12} + 2\gamma_1\left\{\left(n_1^{(0)} + n_1^{(1)} - n\right)B_{2,1} + \left(n_2^{(0)} + n_2^{(1)} - n\right)B_{1,2}\right\} - 4nB_{12,0} = 0, \tag{3.9}$$

取 $B_{0,\ 12} = T_1^{(1)}T_2^{(1)}$, $B_{1,\ 2} = T_1^{(0)}T_2^{(1)}$, $B_{2,\ 1} = T_2^{(0)}T_1^{(1)}$ 和 $B_{12,\ 0} = T_1^{(0)}T_2^{(0)}$. 求解 $Q(\gamma_1) = 0$, 可得 γ_1 的两个值，从中选取合适的一个，然后由方程 (3.6) 和 (3.7) 分别得到 b_1 和 b_2的最大似然估计。

3.2 Confidence Intervals

如上所述，基于PLA的模型参数的最大似然估计通常无法以显式形式得到，只有在第 3.1 节讨论的双部件负载共享系统这一特殊情形下例外。因此，无法获得模型参数的精确置信区间。渐近置信区间可以通过两种方式构造：使用费舍尔信息矩阵，或采用基于自助法的技术。

3.2.1 CIs using Fisher information matrix

利用最大似然估计的渐近性质可以证明，当样本量较大时 $\backsim n$，$\sqrt{n}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta})$ 的分布可近似为多元正态分布 $\boldsymbol{N}(0,\mathbb{I}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$，其中多元正态分布的维数与参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的维数相同，渐近方差-协方差矩阵 $\mathbb{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ 是费舍尔信息矩阵 $\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta})$ 的逆矩阵，并在最大似然估计 $\boldsymbol{\theta}$ 处求值。费舍尔信息矩阵 $\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta})$ 定义为观测信息矩阵 $\mathbb{J}(\boldsymbol{\theta})$ 的期望值，后者由对数似然函数的二阶导数的负值计算得到。即，$\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta})=\mathrm{E}(\mathbb{J}(\boldsymbol{\theta}))$，其中 $\mathbb{J}(\boldsymbol{\theta})=-\nabla^2(\log L(\boldsymbol{\theta}))$。在费舍尔信息难以解析计算或无法求解的情况下，可以用观测信息矩阵替代，也可以通过模拟计算。

根据渐近方差-协方差矩阵 $\mathbb{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$，可以提取最大似然估计的各个渐近方差，并据此构造渐近置信区间。例如，对于最大似然估计 $\widehat{\gamma}_1$，根据从 $\mathbb{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ 得到的渐近方差 $\widehat{Var(\gamma_1)}$，可以为 γ_1 构造渐近置信区间：

$$\left(\widehat{\gamma}_1-z_{\alpha/2}\sqrt{\widehat{Var(\widehat{\gamma}_1)}},\widehat{\gamma}_1+z_{\alpha/2}\sqrt{\widehat{Var(\widehat{\gamma}_1)}}\right),$$

其中，z_α 是标准正态分布的 $100(1-\alpha)\%$ 分位点。

Special case: two-component load-sharing systems

对于第 3.1 节中考虑的双部件负载共享系统这一特殊情形，可以明确求出费舍尔信息矩阵。在此情形下，

$$\mathbb{J}(\boldsymbol{\theta})=-\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\gamma_1^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\gamma_1\partial b_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\gamma_1\partial b_2}\\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial b_1\partial\gamma_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial b_1^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial b_1\partial b_2}\\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial b_2\partial\gamma_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial b_2\partial b_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial b_2^2}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-\frac{n}{\gamma_1^2} & -T_1^{(1)} & -T_2^{(1)}\\ -T_1^{(1)} & -\frac{n_1^{(0)}+n_1^{(1)}}{{b_1}^2} & 0\\ -T_2^{(1)} & 0 & -\frac{n_2^{(0)}+n_2^{(1)}}{{b_2}^2}\end{pmatrix}.$$

因此，费舍尔信息矩阵为

$$\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta})=\begin{pmatrix} \frac{n}{\gamma_1^2} & E\left(\sum_{i\in I_1^{(1)}}Y_i^{(1)}\right)+E\left(N_2^{(1)}\right)\tau_1^{(1)} & E\left(\sum_{i\in I_1^{(1)}}Y_i^{(1)}\right)-E\left(N_2^{(1)}\right)\tau_1^{(1)} \\ E\left(\sum_{i\in I_1^{(1)}}Y_i^{(1)}\right)+E\left(N_2^{(1)}\right)\tau_1^{(1)} & \frac{E\left(N_1^{(0)}\right)+E\left(N_1^{(1)}\right)}{b_1^2} & 0 \\ E\left(\sum_{i\in I_1^{(1)}}Y_i^{(1)}\right)-E\left(N_2^{(1)}\right)\tau_1^{(1)} & 0 & \frac{E\left(N_2^{(0)}\right)+E\left(N_2^{(1)}\right)}{b_2^2} \end{pmatrix},$$

其中， $N_k^{(j)}$是 $[\tau_{(j)k-1},\tau_{(j)k})$中的 $Y_{(j)i}$的数量， $k=1,2,\ j=0,1,\ i=1,...,n_\circ$ 附录A给出了费舍尔信息矩阵相关期望的计算概要。费舍尔信息矩阵的逆为

$$\left\{\mathbb{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right\}=\frac{1}{|\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta})|}\begin{pmatrix} A_{11}(\boldsymbol{\theta}) & -A_{12}(\boldsymbol{\theta}) & A_{13}(\boldsymbol{\theta}) \\ -A_{21}(\boldsymbol{\theta}) & A_{22}(\boldsymbol{\theta}) & -A_{23}(\boldsymbol{\theta}) \\ A_{31}(\boldsymbol{\theta}) & -A_{32}(\boldsymbol{\theta}) & A_{33}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix},$$

其中， $\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta})$的行列式为

$$\begin{aligned} |\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta})| =& \frac{n\left\{2-\left(e^{-2b_1\tau_1^{(0)}}+e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right)\right\}\left(e^{-2b_1\tau_1^{(0)}}+e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right)}{\gamma_1^2 b_1^2 b_2^2} \\ &-\frac{e^{-2\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\left(\frac{1}{\gamma_1 b_2}\right)^2\left\{2-\left(e^{-2b_1\tau_1^{(0)}}+e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right)\right\}}{b_1^2} \\ &-\frac{\left\{\frac{1}{\gamma_1 b_1}\left[1-(1+\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)})e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right]+\tau_1^{(1)}e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right\}^2\left(e^{-2b_1\tau_1^{(0)}}+e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right)}{b_2^2}, \end{aligned}$$

$$A_{11}(\boldsymbol{\theta})=\frac{\left\{2-\left(e^{-2b_1\tau_1^{(0)}}+e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right)\right\}\left(e^{-2b_1\tau_1^{(0)}}+e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right)}{b_1^2 b_2^2},$$

$$\begin{aligned} A_{22}(\boldsymbol{\theta})=&\frac{n\left(e^{-2b_1\tau_1^{(0)}}+e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right)}{\gamma_1^2 b_2^2}-e^{-2\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\left(\frac{1}{\gamma_1 b_2}\right)^2, \\ A_{33}(\boldsymbol{\theta})=&\frac{n\left\{2-\left(e^{-2b_1\tau_1^{(0)}}+e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right)\right\}}{\gamma_1^2 b_1^2} \\ &-\left\{\frac{1}{\gamma_1 b_1}\left[1-(1+\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)})e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right]+\tau_1^{(1)}e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right\}^2, \end{aligned}$$

$$A_{12}(\boldsymbol{\theta})=A_{21}(\boldsymbol{\theta})=\frac{\left\{\frac{1}{\gamma_1 b_1}\left[1-(1+\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)})e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right]+\tau_1^{(1)}e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right\}\left(e^{-2b_1\tau_1^{(0)}}+e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right)}{b_2^2},$$

$$A_{13}(\boldsymbol{\theta}) = A_{31}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{e^{-\gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)}}\left(\frac{1}{\gamma_1 b_2}\right)\left\{2-\left(e^{-2b_1\tau_1^{(0)}}+e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right)\right\}}{b_1^2},$$

$$A_{23}(\boldsymbol{\theta}) = A_{32}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\left\{\left[1-(1+\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)})e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right]+\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}\right\}e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}}{\gamma_1^2 b_1 b_2}.$$

在最大似然估计值 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$处计算 $\mathbb{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$，即可得到最大似然估计的渐近方差-协方差矩阵。因此，γ_1、b_1和 b_2 的100(1 − α)%渐近置信区间分别为 $\left(\widehat{\gamma}_1 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{A_{11}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}{|\mathbb{I}|}}\right.$、$\left.\widehat{\gamma}_1 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{A_{11}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}{|\mathbb{I}|}}\right)$、$\left(\widehat{b_1} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{A_{22}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}{|\mathbb{I}|}}\right.$、$\left.\widehat{b_1} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{A_{22}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}{|\mathbb{I}|}}\right)$，以及$\left(\widehat{b_2} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{A_{33}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}{|\mathbb{I}|}}\right.$、$\left.\widehat{b_2} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{A_{33}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}{|\mathbb{I}|}}\right)$。

3.2.2 Bootstrap confidence intervals

使用最大似然估计 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$，$B$ 在相同的抽样框架下可以获得自助样本；令 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_s^* = \left(\widehat{\gamma}_{1s}^*, \widehat{b}_{1s}^*, \widehat{b}_{2s}^*\right)$表示自助估计值，$s = 1, ..., B$。自助偏差和标准误定义为

$$bias_b(\widehat{\gamma}_1) = \overline{\widehat{\gamma}_1^*} - \widehat{\gamma}_1, \quad bias_b(\widehat{b}_1) = \overline{\widehat{b}_1^*} - \widehat{b}_1, \quad bias_b(\widehat{b}_2) = \overline{\widehat{b}_2^*} - \widehat{b}_2$$

and

$$SE_b(\widehat{\gamma}_1) = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{s=1}^{B}\left(\widehat{\gamma}_{1s}^* - \overline{\widehat{\gamma}_1^*}\right)^2}, SE_b(\widehat{b}_1) = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{s=1}^{B}\left(\widehat{b}_{1s}^* - \overline{\widehat{b}_1^*}\right)^2}, SE_b(\widehat{b}_2) = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{s=1}^{B}\left(\widehat{b}_{2s}^* - \overline{\widehat{b}_2^*}\right)^2},$$

其中

$$\overline{\widehat{\gamma}_1^*} = \frac{1}{B}\sum_{s=1}^{B}\widehat{\gamma}_{1s}^*, \quad \overline{\widehat{b}_1^*} = \frac{1}{B}\sum_{s=1}^{B}\widehat{b}_{1s}^*, \quad \overline{\widehat{b}_2^*} = \frac{1}{B}\sum_{s=1}^{B}\widehat{b}_{2s}^*.$$

最后，γ_1 的 100(1 − α)% 自助法置信区间可通过 a 计算 s

$$\left(\widehat{\gamma}_1 - bias_b(\widehat{\gamma}_1) - z_{\alpha/2}SE_b(\widehat{\gamma}_1), \widehat{\gamma}_1 - bias_b(\widehat{\gamma}_1) + z_{\alpha/2}SE_b(\widehat{\gamma}_1)\right).$$

b_1 和 b_2 的自助法置信区间可类似地计算。

例如，对于 γ_1 的百分位数自助法置信区间，首先按大小对 $\widehat{\gamma}_1$ 的自助估计值进行排序:

$$\widehat{\gamma}_{1(1)}^* < \widehat{\gamma}_{1(2)}^* < ... < \widehat{\gamma}_{1(B)}^*.$$

然后，γ_1的 100(1−α)% 百分位数自助法置信区间为 $\left(\widehat{\gamma}_{1([\frac{\alpha B}{2}])}^* \ \widehat{\gamma}_{1([(1-\frac{\alpha}{2})B])}^*\right)$。类似地，也可以计算 b_1 和 b_2 的百分位数自助法置信区间。

3.3 Choice of Cut Points

构建基于PLA的模型时，需要适当选择切点的数量和位置，使模型能够紧密近似潜在的累积风险函数，同时避免过拟合。大量切点可以对潜在的累积风险函数进行紧密的局部近似。然而，除了计算成本高之外，紧密的局部近似还可能导致过拟合；在这种情况下，基于PLA的模型将难以用于预测部件或系统未来的失效。

选择切点数量和位置的一种可能方法，是查看累积风险函数非参数估计量的图。从图中观察非参数估计值发生显著变化的区域，即可确定切点的位置和数量。

更客观地，可以通过最大化对数似然函数来选择给定数量切点的位置。例如，对于三个切点（$N = 2$），$\tau_0^{(j)}$的自然选择是 $\min\left\{y_1^{(j)}, \ldots, y_n^{(j)}\right\}$，而 $\tau_{(j)\,2}$是 $\max\left\{y_1^{(j)}, \ldots, y_n^{(j)}\right\}$。现在，为了选择 $\tau_1^{(j)}$的位置，可以令 $\tau_{(j)\,1}$等于 $\left\{y_1^{(j)}, \ldots, y_n^{(j)}\right\}$的不同样本分位数，并选择使在最大似然估计处求得的对数似然函数值最大的那个分位数。此过程可表示为以下算法。

算法:

- 步骤 1：固定 $0 < p_1 < p_2 < 1$。
- 步骤 2：求出位于 $\left\{y_{(j)\,1}, \ldots, y_{(j\,n}\right\})$ 的第 p_1 至第 p_2 个样本分位数之间的 $y_{(j)\,1}, \ldots, y_{(j)n}$ 的个数。将该个数记为 l。注意，l 不依赖于 $j = 0, 1, \ldots, J-1$。
- 步骤 3：将 $a_{j1} = p_1$ 设为 $\left\{y_{(j)\,1}, \ldots, y_{(j\,n}\right\})$，$j = 0, 1, \ldots, J-1$ 的第 $a_{j1} = p_1$ 个分位数。
- 步骤 4：令 $LL_1 =$ 为取 $\tau_{(j)\,1} = a_{j1}$，$j = 0, 1, \ldots, J-1$ 时，在最大似然估计处计算的对数似然函数值。
- 步骤 5：令 $a_{j2} =$ 为 $\min\left\{y_{(j)\,i} > a_{j1};\ i = 1, 2, \ldots, n\right\}$，$j = 0, 1, \ldots, J-1$。
- 步骤 6：设定在最大似然估计处计算得到的对数似然函数值为 $LL_2 = {}_{(j)\,1} = a_{j2}$，$j = 0, 1, \ldots, J-1$。
- 步骤 7：重复步骤 5 和 6，得到 $LL_1, LL_2, \ldots, LL_l$。
- 步骤 8：设定 $k^* = \arg\max\ LL_k, 1 \le k \le l$
- 步骤9：最终切割点为 $\tau_{(j)\,1} = a_{jk^*}$，$j = 0, 1, \ldots, J-1$。

4 Estimation of various reliability characteristics

将模型拟合到负载共享数据的最终目标，自然是准确估计负载共享系统的可靠性特征。由于基于PLA的模型具有灵活性，能够很好地拟合负载共享数据，因此在该模型下也能够相当准确地估计负载共享系统的重要可靠性特征。本节将介绍在基于PLA的模型下，如何估计负载共享系统的分位数函数、平均失效时间（MTTF）、RMT和平均剩余寿命（MRT）等可靠性特征。感兴趣的读者可在附录B中查阅这些推导的详细过程。

在基于PLA的模型下， $Y^{(j)}$ 的分位数函数（ j次与第$(j+1)$次部件失效之间的系统寿命） $j = 0, ..., J-1$，可表示为

$$\eta(p) = \inf\left\{y \in \mathbb{R} : G^{(j)}(y) \geq p\right\}, \quad 0 < p < 1,$$

其中 $G^{(j)}(y) = 1 - e^{-(J-j)\Lambda^{(j)}(y)}$。利用第 2 节给出的 $\Lambda^{(j)}(y)$ 表达式，可以推导出分位数函数 $\eta(p)$ 的显式公式，如下:

$$\eta(p) = \begin{cases} \tau_{k-1}^{(j)} - \frac{\log(1-p)}{(J-j)\gamma_j b_k} - \frac{1}{b_k} \cdot \sum_{\ell=1}^{k-1} b_\ell(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}), \text{ if } p \in \left[G^{(j)}(\tau_{k-1}^{(j)}), G^{(j)}(\tau_k^{(j)})\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{for } k = 1, 2, \ldots, N. \\ \tau_{N-1}^{(j)} - \frac{\log(1-p)}{(J-j)\gamma_j b_N} - \frac{1}{b_N} \cdot \sum_{\ell=1}^{N-1} b_\ell(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}), \text{ if } p \in \left[G^{(j)}(\tau_N^{(j)}), 1\right). \end{cases}$$

载荷共享系统的平均失效时间（MTTF）是指系统运行至失效的预期时间。设 T 表示系统失效时间；则 $T = \sum_{j=0}^{J-1} Y^{(j)}$。基于PLA的模型下，载荷共享系统的平均失效时间为

$$E(T) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{s=1}^{N} \left\{ \frac{e^{-\kappa_{j,s-1}} - e^{-\kappa_{j,s}}}{(J-j)\gamma_j b_\ell} \right\},$$

其中

$$\kappa_{j,s} = (J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{s} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right).$$

系统在任务时间的可靠性（RMT）是指系统运行至预期时间 t_0 的概率；它按系统在时间 t_0 的生存概率计算，即 $S(t_0) = P(T > t_0) = P\left(\sum_{j=0}^{J-1} Y^{(j)} > t_0\right)$。利用系统寿命 T 的分布，可以推导出 RMT 的显式表达式。

然而，由于 $Y^{(j)}$s、 $j = 0$、...、 $J-1$ 相互独立但并非同分布，因此很难获得系统寿命 T 的分布的显式表达式，其中 $T = \sum_{j=0}^{J-1} Y^{(j)}$。由 T 的矩母函数 $\phi_T(t)$ 可以明显看出，在基于PLA的模型下，该矩母函数表示为

$$\phi_T(t) = \prod_{j=0}^{J-1} \sum_{s=1}^{N} \frac{(J-j)b_s\gamma_j}{(J-j)b_s\gamma_j - t} \left(e^{t\tau_{s-1}^{(j)} - \kappa_{j,s-1}} - e^{t\tau_s^{(j)} - \kappa_{j,s}}\right) \qquad \text{if } t < \gamma_1 b_N,$$

其中

$$\kappa_{j,s} = (J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{s} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right).$$

由此可见，在该模型下很难通过解析方法求得RMT。不过，对于该模型，可以使用蒙特卡罗模拟估算RMT。若要估算预设时间 t_0 时的RMT，需要生成 R 个数据点 $t_i, i = 1, 2, \ldots, R$，作为系统寿命 T 的实现值，并求出 $^{R}{}_{(t_0)\,R}$，其中 $R(t_0)$ 是超过 t_0 的系统寿命实现值的数量。若要获得较为准确的RMT估计，应使用较大的 R 。

系统的平均剩余时间（MRT）是指系统在已经存活给定时间 t 的情况下，预计还能存活的时间。也就是说，

$$\mathrm{MRT}(t) = E(T-t|T>t) = \int_t^\infty s f_{T|T>t}(s)ds - t.$$

因此，解析推导MRT需要系统寿命 T 的截断分布，而在这种情况下，很难获得 T 的截断分布。作为替代，可以使用蒙特卡罗模拟估算MRT。我们生成 R 个数据点 $t_i^*, i = 1, 2, \ldots, R$，作为截断寿命 $T|T > t$ 的实现值，随后即可得到基于PLA的模型下负载共享系统的MRT蒙特卡罗估计值：

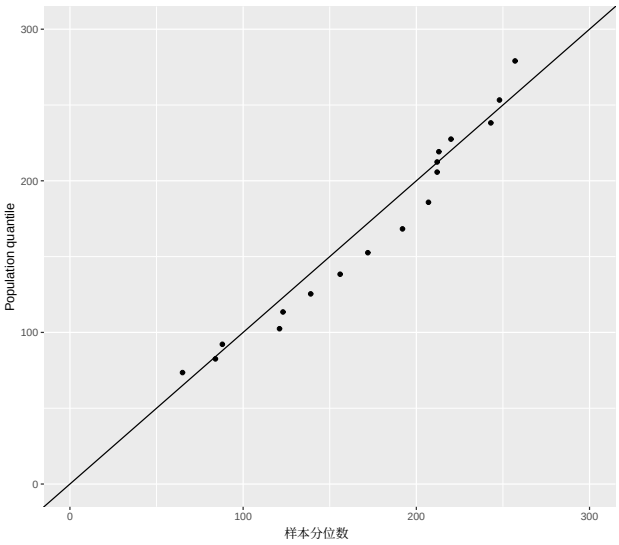
$$\widehat{\mathrm{MRT}}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{R} t_i^*}{R} - t.$$

5 Data Analysis

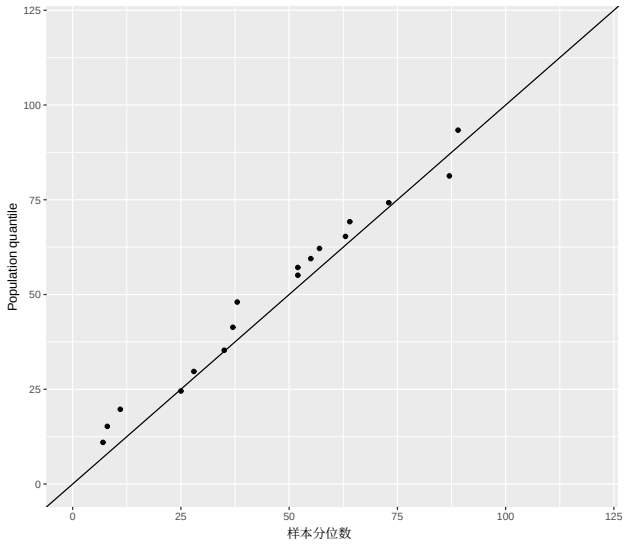
本节将通过一个示例进行说明，所用数据来自由两个部件组成的负载共享系统。就在最近，Sutar 和 Naik-Nimbalkar [34], Asha等人 [2] 以及 Franco等人 [11]对这些数据进行了分析。数据包含18个双部件负载共享系统的部件寿命信息。每个系统都是由两台电动机“A”和“B”组成的并联组合。当电机A和电机B均正常工作时，系统的总负载由两者共同承担。当其中一台电动机发生故障时，全部负载将转移至仍在运行的电动机。

Sutar 和 Naik-Nimbalkar [34] 观察到，该数据集所涉及的系统存在负载共享现象。Asha等人 [2] 假设部件寿命服从威布尔分布。根据 Asha等人 [2], 报告的电机A和电机B寿命威布尔 Q-Q 图可以看出，尽管假设电机B的寿命服从威布尔模型是合理的，但电机A的寿命并不服从威布尔分布。因此，我们决定在此案例中采用基于 PLA 的建模方法来分析负载共享系统的寿命。

为便于读者查阅，表 1 重现了该数据集。第一个部件失效时间的均值和标准差分别为178.61和62.75,

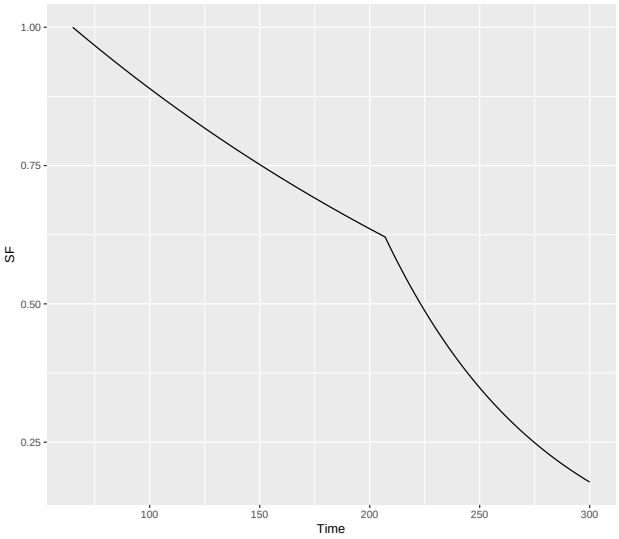


(a) $Y^{(0)}$的Q-Q图

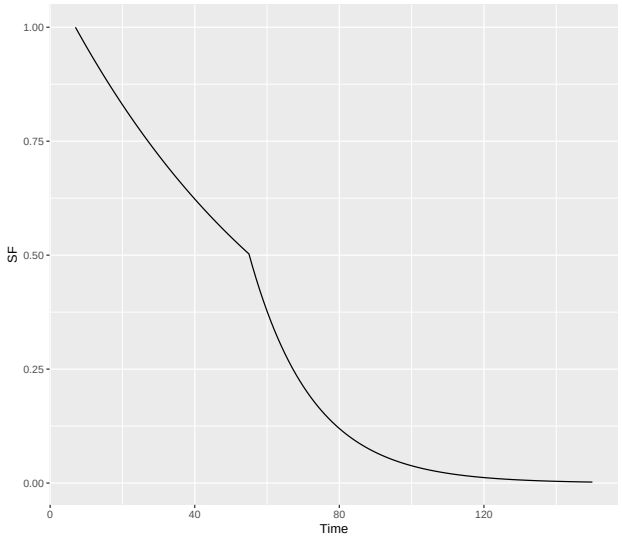


(b) $Y^{(1)}$的Q-Q图

图1：Q-Q图



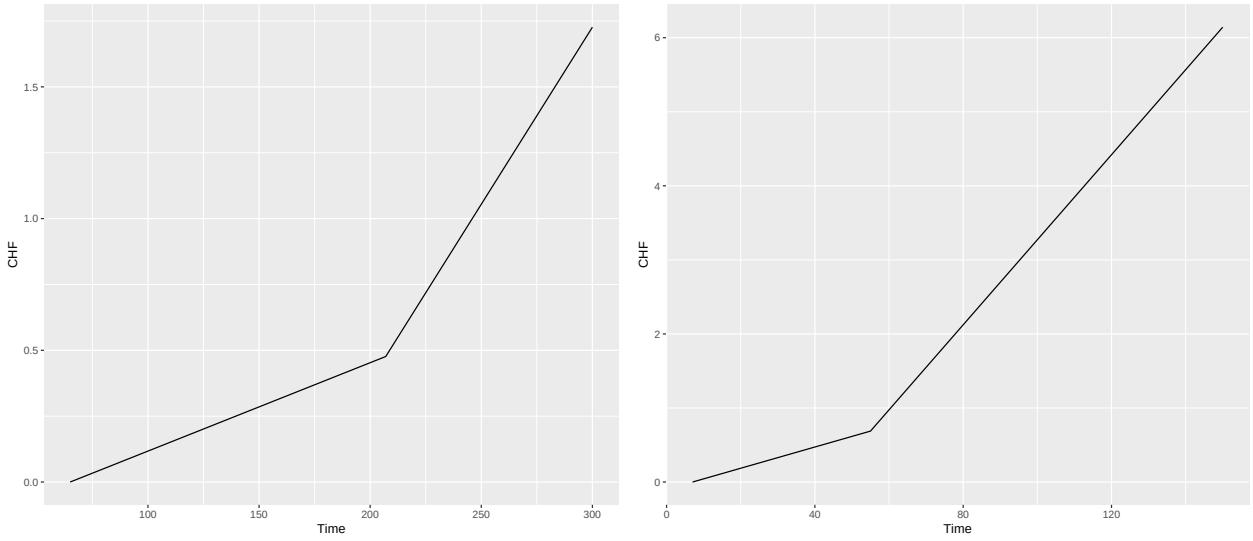
(a) $Y^{(0)}$的生存函数图



(b) $Y^{(1)}$ 的生存函数图

图2：生存函数图

而首次与第二次部件失效之间寿命的均值和标准差分别为49.72和29.45。我们为基于PLA的模型考虑三个切割点（即 $N = 2$）。模型参数的估计值列于表2。 $Y^{(0)}$ 和 $Y^{(1)}$的Q-Q图分别见图1a和图1b。估计的生存函数和累积风险函数图分别见图2和图3。这些图表明，基于PLA的模型对数据的拟合相当充分。



(a) $Y^{(0)}$的累积风险函数图　　(b) $Y^{(1)}$的累积风险函数图

图3：累积风险函数图

表 1：负载共享配置下两台电动机的失效时间（以天为单位）数据集

系统	电机A的失效时间	电机B的失效时间	事件描述
1	102	65	B先失效
2	84	148	A先失效
3	88	202	A先失效
4	156	121	B先失效
5	148	123	B先失效
6	139	150	A先失效
7	245	156	B先失效
8	235	172	B先失效
9	220	192	B先失效
10	207	214	A先失效
11	250	212	B先失效
12	212	220	A先失效
13	213	265	A先失效
14	220	275	A先失效
15	243	300	A先失效
16	300	248	B先失效
17	257	330	A先失效
18	263	350	A先失效

已进行柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫型检验，以检验以下假设：

H_0：真实模型由公式（2.2）和（2.3）指定，与H_1：真实模型并非由公式（2.2）和（2.3）指定相对照

表2：基于PLA的模型应用于双电机负载分担数据时的参数点估计和区间估计

参数	MLE	标准误	渐近法	百分位数自助法	自助法
γ_1	4.2712	1.1901	(1.9386, 6.6038)	(3.0754, 8.0279)	(0.8456, 5.8172)
b_1	0.0034	0.0008	(0.0019, 0.0048)	(0.0021, 0.0062)	(0.0008, 0.0052)
b_2	0.0134	0.0039	(0.0056, 0.0212)	(0.0061, 0.0209)	(0.0083, 0.0232)

表3：任务时间内的平均剩余寿命和可靠性

t_0	MRT_{t_0}	RMT_{t_0}
102.00	124.223	0.963
167.50	88.678	0.706
227.50	60.646	0.466
272.50	42.794	0.271
350.00	36.919	0.044

基于检验统计量

$$T_n = \max_{1\le i\le n}\left|\widehat{G}^{(0)}\left(Y_{i:n}^{(0)}\right)-\frac{i}{n}\right| + \max_{1\le i\le n}\left|\widehat{G}^{(1)}\left(Y_{i:n}^{(1)}\right)-\frac{i}{n}\right|,$$

其中，$\widehat{G}^{(j)}(\cdot)$是与基于PLA的模型相对应的估计累积分布函数，而 $Y_{(j)\,i:\,n}$是与 $Y_{(j)\,i}$，$j=0,1$, $i=1,2,\ldots,n$相对应的第 i个次序统计量。根据这些数据，检验统计量 T_n 的观测值为0.414。相应 p值的蒙特卡罗估计为0.71。因此，在显著性水平0.05下，不能拒绝原假设，我们据此认为，对这些数据使用基于PLA的模型是相当合理的。

还需指出，对于这些数据，Asha等人考虑的模型的赤池信息准则（AIC）值为480.50，而Franco等人考虑的最佳模型的AIC值为409.65。相比之下，基于PLA的模型的AIC值为369.34，这表明对于此处考虑的双电机负载共享系统数据，基于PLA的模型更为合适。

对于基于PLA的模型，γ_1 的估计值为4.2712，这在经验上表明，负载分担模型在此情况下相当合适。从图中也可以得出相同的结论：图2中，第一和第二个部件失效时间间隔的分布的生存函数图，比第一个部件失效时间的生存函数图更快地降至零。

此外，还使用第4节中介绍的表达式和技术估计双电机负载分担系统的可靠性特征。计算得出的MTTF为221.36天。在系统失效时间的不同样本百分位点处，计算蒙特卡罗方法对MRT和RMT的估计值，并将结果列于表3。

6 Simulation Study

所提出的基于PLA的模型在拟合负载共享系统数据时的准确性至关重要，因为后续可靠性特征的估计取决于该模型。本节介绍一项蒙特卡罗模拟研究的结果，从两个方面考察所提出的基于PLA的模型的性能。首先，基于由分段线性累积风险函数对应的母过程生成的样本，评估第3节所述的估计方法的性能。随后，还评估基于PLA的模型对由若干参数模型表示的母过程所生成数据的拟合效果。模拟使用 R软件进行。在模拟中，我们考虑双部件负载共享系统。

6.1 Assessing performance of the estimation method

为评估各估计方法的性能，我们考虑由两个线性段构成的累积风险。为此，我们根据公式（2.2）和（2.3）所指定的模型生成样本，其中 $J = 2$ 和 $N = 2$。真实参数值取为 $b_1 = 0.01$、0.05； $b_2 = 0.1$、0.5； $\gamma_1 = 5$； $\tau_1^{(0)} = \ln\frac{2}{2b_1}$； $\tau_{(1)1} = \ln\frac{2}{\gamma_1 b_1}$。估计基于样本量为 $n = 100$ 和 200 的样本进行。基于 5000 次蒙特卡罗重复试验得到的最大似然估计的平均估计值（绝对误差）、均方误差（均方误差）和方差（方差）报告于表 4、表 5 和表 6 中。同样，这些表中还报告了 95% 置信区间的覆盖率（覆盖概率）和平均长度（平均长度）。

从表 4、5 和 6 中可以看出， γ_1、 b_1 和 b_2 的平均估计值非常接近真实值，且均方误差和方差都相当小，符合预期。此外，还可以发现，所有构造的置信区间表现都令人满意。这些结果表明，所提出的推断方法能够准确估计基于PLA的模型的参数。

表 4： γ_1 估计值的性能度量

n	b_1	b_2	AE	MSE	VAR	渐近法		百分位数自助法		自助法	
						CP	AL	CP	AL	CP	AL
100	0.01	0.1	5.0231	0.3388811	0.3384155	94.38	2.2566	99.94	2.2012	83.58	2.2156
		0.5	5.0178	0.2880872	0.2878297	95.84	2.2509	99.94	2.1278	86.68	2.1993
	0.05	0.1	5.0209	0.3556721	0.3553026	93.98	2.2711	98.52	2.3093	88.60	2.3226
		0.5	5.0231	0.3388811	0.3384155	94.38	2.2566	99.94	2.2012	83.58	2.2156
200	0.01	0.1	5.0144	0.1472563	0.1470773	96.20	1.5963	99.90	1.5000	85.06	1.5093
		0.5	5.0127	0.1373738	0.1372388	96.64	1.5949	99.86	1.4395	84.42	1.4476
	0.05	0.1	5.0145	0.1698002	0.1696241	94.84	1.6037	98.56	1.6165	89.56	1.6246
		0.5	5.0144	0.1472563	0.1470773	96.20	1.5963	99.90	1.5000	85.06	1.5093

表 5： b_1 估计值的性能度量

n	b_1	b_2	AE	MSE	VAR	渐近法		百分位数自助法		自助法	
						CP	AL	CP	AL	CP	AL
100	0.01	0.1	0.0108	0.0000022	0.0000016	87.24	0.0041	81.66	0.0052	92.88	0.0052
		0.5	0.0110	0.0000025	0.0000016	84.56	0.0042	68.70	0.0053	93.96	0.0054
	0.05	0.1	0.0513	0.0000389	0.0000371	90.10	0.0201	95.96	0.0245	93.70	0.0246
		0.5	0.0528	0.0000457	0.0000376	89.18	0.0203	89.88	0.0252	92.70	0.0253
200	0.01	0.1	0.0105	0.0000010	0.0000008	86.42	0.0029	81.74	0.0035	93.48	0.0036
		0.5	0.0106	0.0000011	0.0000008	84.74	0.0029	74.08	0.0036	94.56	0.0036
	0.05	0.1	0.0508	0.0000186	0.0000180	90.06	0.0140	95.14	0.0169	93.08	0.0169
		0.5	0.0525	0.0000255	0.0000193	86.42	0.0143	81.74	0.0177	93.48	0.0178

表 6： b_2 估计值的性能度量

n	b_1	b_2	AE	MSE	VAR	渐近法		百分位数自助法		自助法	
						CP	AL	CP	AL	CP	AL
100	0.01	0.1	0.1006	0.0001691	0.0001688	92.70	0.0464	96.60	0.0534	94.00	0.0530
		0.5	0.5067	0.0038339	0.0037895	94.52	0.2344	97.12	0.2675	95.12	0.2676
	0.05	0.1	0.1030	0.0001794	0.0001705	93.76	0.0472	95.46	0.0529	94.70	0.0532
		0.5	0.5028	0.0042337	0.0042268	92.68	0.2315	96.34	0.2650	94.00	0.2633
200	0.01	0.1	0.1002	0.0000725	0.0000725	94.22	0.0325	96.72	0.0343	93.76	0.0345
		0.5	0.5030	0.0017348	0.0017261	95.06	0.1632	96.52	0.1665	93.60	0.1674
	0.05	0.1	0.1011	0.0000780	0.0000768	93.84	0.0326	96.10	0.0351	94.08	0.0352
		0.5	0.5010	0.0018134	0.0018128	94.22	0.1623	96.72	0.1717	93.76	0.1725

6.2 Assessing efficacy of the PLA-based model in fitting data from other models

现在，我们通过以下方式考察基于PLA的模型的稳健性。我们从参数模型生成负载共享数据，然后将基于PLA的模型拟合到这些数据。随后，根据一个恰当定义、能够反映基于PLA的模型近似质量的积分度量来评估模型拟合效果。我们将该度量称为绝对积分误差（AIE），其定义如下。对于 $j = 0,\ 1$，设 $S_{TGP}^{(j)}(\cdot)$ 和 $H_{TGP}^{(j)}(\cdot)$ 分别表示第 j 次失效与第（$j+1$）次失效之间各寿命的生存函数和累积风险函数。此外，假设基于PLA的模型得到的生存函数和累积风险函数估计值分别记为 $\widehat{S}_{PLA}^{(j)}(\cdot)$ 和 $\widehat{H}_{PLA}^{(j)}(\cdot)$。那么，分别基于生存函数和累积风险函数定义的AIE为

$$AIE_{SF}^{(j)} = \frac{1}{R}\sum_{k=1}^{R} \frac{1}{y_{\max}^{(j)} - y_{\min}^{(j)}} \int_{y_{\min}^{(j)}}^{y_{\max}^{(j)}} \left| S_{TGP}^{(j)}(t) - \widehat{S}_{PCA}^{(j)}(t) \right| dt,$$

Tabl表 7：基于威布尔分布的 SF 和累积风险函数的 AIE，其中 $k = 3$、 $\beta =$ 1.

n	α	$AIE_{SF}^{(0)}$	$AIE_{SF}^{(1)}$	$AIE_{CHF}^{(0)}$	$AIE_{CHF}^{(1)}$
50	1.0	0.0379	0.0291	0.1503	0.2981
	1.5	0.0436	0.0434	0.1329	0.2633
100	1.0	0.0266	0.0183	0.1282	0.2541
	1.5	0.0326	0.0301	0.1231	0.2440

表 8：二次分布的生存函数和累积风险函数的 AIE，其中 $\kappa_1 = 0.5$、 $\tilde{\kappa}_1 = 2\kappa_1 = 1$、 $\tilde{\kappa}_2 > 2\kappa_2$。

n	κ_2	$\tilde{\kappa}_2$	$AIE_{SF}^{(0)}$	$AIE_{SF}^{(1)}$	$AIE_{CHF}^{(0)}$	$AIE_{CHF}^{(1)}$
50	0.50	1.50	0.0380	0.0368	0.1262	0.2536
		2.00	0.0380	0.0389	0.1261	0.2555
	0.70	1.50	0.0389	0.0363	0.1261	0.2524
		2.00	0.0388	0.0383	0.1258	0.2539
100	0.50	1.50	0.0289	0.0262	0.1185	0.2506
		2.00	0.0289	0.0281	0.1178	0.2575
	0.70	1.50	0.0301	0.0257	0.1217	0.2465
		2.00	0.0299	0.0274	0.1206	0.2528

$$AIE_{CHF}^{(j)} = \frac{1}{R}\sum_{k=1}^{R} \frac{1}{y_{\max}^{(j)} - y_{\min}^{(j)}} \int_{y_{\min}^{(j)}}^{y_{\max}^{(j)}} \left| H_{TGP}^{(j)}(t) - \widehat{H}_{PCA}^{(j)}(t) \right| dt,$$

其中 $y^{(j)}{}_{\text{最小}}$ =最小 $\left\{y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \ldots, y_n^{(j)}\right\}$, $y_{\max}^{(j)}$ =最大 $\left\{y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \ldots, y_n^{(j)}\right\}$, $j = 0, 1$.

为生成参数模型的负载共享数据，考虑两种情形：(a) 情形 1：假设一个双部件负载共享系统中各部件的寿命相互独立且服从相同的威布尔分布；当两个部件都在工作时，其形状参数为 α，尺度参数为 β。首次失效后，假设存活部件的寿命服从形状参数相同（α）、但尺度参数不同（$k\beta$）的威布尔分布，其中 $k > 2$ 用于确保存活部件负载增加。对于 $\beta = 1$、 $k = 3$，我们取 $\alpha = 1$ 和 1.5。

(b) 情形 2：在第二种情形中，假设两个部件均正常工作时，部件寿命独立同分布，且服从具有二次累积风险函数 $\kappa_1 t + \kappa_2 t^2$ 的分布。第一个部件失效后，假设存活部件的寿命服从具有不同参数 $\tilde{\kappa}_1$ 和 $\tilde{\kappa}_2$的二次累积风险函数。我们选取若干组参数值 κ_1、 κ_2、 $\tilde{\kappa}_1$和 $\tilde{\kappa}_2$，以确保系统中一个部件失效后，累积风险函数会增大。

数值结果见表 7、8 和 9。对于所有情形，基于SF和累积风险函数计算的AIE值都相当小，这表明

表 9：$\tilde{\kappa}_1 > 2\kappa_1$、 $\kappa_2 = 0.5$、 $\tilde{\kappa}_2 = 2\kappa_2 = 1$ 条件下二次分布的生存函数和累积风险函数的 AIE。

n	κ_1	$\tilde{\kappa}_1$	$AIE_{SF}^{(0)}$	$AIE_{SF}^{(1)}$	$AIE_{CHF}^{(0)}$	$AIE_{CHF}^{(1)}$
50	0.50	1.50	0.0388	0.0313	0.1283	0.2570
		2.00	0.0397	0.0307	0.1309	0.2672
	0.70	1.50	0.0372	0.0314	0.1284	0.2567
		2.00	0.0377	0.0304	0.1301	0.2644
100	0.50	1.50	0.0306	0.0210	0.1265	0.2290
		2.00	0.0319	0.0206	0.1325	0.2285
	0.70	1.50	0.0278	0.0210	0.1184	0.2331
		2.00	0.0285	0.0198	0.1227	0.2271

基于PLA的模型能够较好地近似由不同母体总体生成的数据。

7 Concluding Remarks

本文针对负载共享系统的数据，提出了一种用于累积风险函数的基于PLA的模型，并在该模型下估计了负载共享系统的重要可靠性特征，如分位数函数、RMT、平均失效时间和平均剩余寿命。该模型的主要优点是数据驱动，且无需对底层寿命变量作出严格的参数假设。本文详细讨论了所提模型的似然推断。研究发现，对于双部件负载共享系统，可以得到基于PLA的模型参数的最大似然估计的显式表达式。本文还讨论了利用费舍尔信息矩阵和自助法构造置信区间，并给出了该框架下重要可靠性特征的推导。

开展了蒙特卡罗模拟研究，以考察 (a) 推断方法的性能，以及 (b) 基于PLA的模型对负载共享数据总体上的拟合效果。结果表明，基于PLA的模型在这两方面的表现都相当令人满意。通过分析双电机负载共享系统的部件寿命相关数据，展示了该模型的应用。结果还表明，与负载共享系统文献中针对这组数据所考虑的模型相比，基于PLA的模型更优。总之，本文探讨了一种基于PLA的高效建模框架，该框架对负载共享系统仅作最少假设，并据此给出了此类情形下负载共享系统重要可靠性特征的估计值。

Funding information

- Ayon Ganguly的研究得到印度政府科学技术部科学与工程研究委员会提供的数学研究影响中心支持项目（文件编号：MTR/2017/000700）的资助。

- Debanjan Mitra 的研究获得了印度政府科学技术部科学与工程研究委员会的数学研究影响力中心支持（文件编号：MTR/2021/000533）。

参考文献

[1] S.V. Amari 和 R. Bergman。 k-取-n负载共享系统的可靠性分析。载于年度可靠性与可维护性研讨会，页码 440–445，2008 年。[2] G Asha、AV Raja 和 N. Ravishanker。纳入负载分担和脆弱性的可靠性建模。《商业与工业应用随机模型》，34：206–223，2018 年。[3] N. Balakrishnan、M. Koutras、F. Milienos 和 S. Pal。治愈率模型的分段线性近似。《应用概率的方法与计算》，18(4)：937–966，2016 年。[4] C.D. Bernard。纤维束机械断裂的时间依赖性。I. 恒定总负载。《应用物理学杂志》，28(9)：1058–1064，1957 年。[5] C.D. Bernard。纤维机械断裂的统计特性与时间依赖性。《应用物理学杂志》，29(6)：968–983，1958 年。[6] Z. W. Birnbaum 和 S. C. Saunders。材料寿命的统计模型。《美国统计学会会刊》，53(281)：151–160，1958 年。[7] B. Brown、B. Liu、S. McIntyre 和 M. Revie。具有空间依赖和邻近效应的负载共享系统可靠性分析。《可靠性工程与系统安全》，2022 年。[8] H. Che、S. Zeng、K. Li 和 J. Guo。受机器退化、人为错误和随机冲击影响的人机系统可靠性分析。《可靠性工程与系统安全》，2022 年。[9] H.E. Daniels。纱线束强度的统计理论 I。《伦敦皇家学会会刊》，83：405–435，1945 年。[10] JV Deshpande、I. Dewan 和 UV Naik-Nimbalkar。用于建模负载共享系统的分布族。《统计规划与推断杂志》，140：1441–1451，2010 年。[11] M Franco、JM Vivo 和 D Kundu。适用于双部件负载共享系统的广义 Freund 二元模型。《可靠性工程与系统安全》，2020 年。

[12] JE Freund。指数分布的双变量扩展。《美国统计学会杂志》，56：971–976，1961 年。[13]D. G. Harlow 和 S. L. Phoenix。用于纤维材料强度的链束概率模型 I：分析与推测。《复合材料杂志》，12(2)：195–214，1978 年。[14] D. G. Harlow 和 S. L. Phoenix。局部载荷分担下纤维材料强度的概率分布 I：两级失效与边缘效应。《应用概率进展》，页码 68–94，1982 年。[15] M. Hollander 和 E. A. Pena。具有条件比例风险的动态可靠性模型。《寿命数据分析》，1(4)：377–401，1995 年。[16] H. Kim 和 P.H. Kvam。基于系统数据且载荷分担规则未知的可靠性估计。《寿命数据分析》，10：83–94，2004 年。[17] Y. Kong 和 Z. S. Ye。针对负载共享系统失效数据的基于累积暴露的算法。IEEE可靠性汇刊，65(2)：1001–1012，2016 年。[18] H. P. Kvam 和 J. C. Lu。负载分担模型。数学与计算机科学系教员出版物，2008 年。[19] S. Lee、S. Durham 和 J. Lynch。一般载荷分担系统可靠度的计算。《应用概率杂志》，32：777–792，1995 年。[20] H.H. Lin、K.H. Chen 和 R.T. Wang。多变量指数共享载荷模型。IEEE可靠性汇刊，42(1)：165–171，1993 年。[21] C. Luo、L. Chen 和 A. Xu。动态运行环境和寿命排序约束下系统可靠度的建模与估计。《可靠性工程与系统安全》，2022 年。[22] J D Lynch。单调载荷分担系统中部件失效的联合分布。《统计规划与推断杂志》，78：13–21，1999 年。[23] A. Mettas 和 P. Vassiliou。定量加速寿命模型在负载共享冗余中的应用。载于年度可靠性与可维护性研讨会，2004-RAMS，页码 293–296。IEEE，2004 年。[24] R. Mohammad、A. Kalam 和 S.V. Amari。载荷分担部件分阶段任务系统的可靠性评估。载于年度可靠性与可维护性研讨会会刊，页码 1–6。IEEE，2012 年。[25] C. H. Muller 和 R. Meyer。损伤累积条件下载荷共享系统基于强度的模型推断。IEEE可靠性汇刊，71：539–554，2012 年。[26] E. Nezakati 和 M. Ramzakh。具有相关竞争失效的负载共享 k-取-n:f退化系统的可靠性分析。《可靠性工程与系统安全》，2020 年。

[27] C. Park. 负载共享系统可靠性的参数估计。《IIE Transactions》，42:753–765，2010。[28] C. Park. 使用期望最大化算法从负载共享系统数据中进行参数估计。《IIE Transactions》，45:147–163，2013。[29] B. W. Rosen. 纤维复合材料的拉伸失效。AIAA期刊，2(11):1985–1991，1964。[30] S.M. Ross. 一种组件失效率取决于工作集的模型。海军研究后勤季刊，31(2):297–300，1984。[31] Z. Schechner. 一种负载分担模型：线性断裂规则。海军研究后勤季刊，31(1):137–144，1984。[32] J. Shao 和 L.R. Lamberson. 一种共享负载的 k-取-n: G 系统。IEEE可靠性汇刊，40(2):205–209，1991。[33] A.V. Suprasad、M.B. Krishna 和 P. Hoang. 受干扰失效率负载共享系统：现状与展望。载于《可性能工程手册》，第291–308页。施普林格，2008。[34] S S Sutar 和 U V Naik-Nimbalkar. 负载共享系统的加速失效时间模型。IEEE可靠性汇刊，63:706–714，2014。[35] J. Zhang、Y. Zhao 和 X. Ma. 受离散外部负载影响的负载共享 k-取-n 系统的可靠性建模方法。《可靠性工程与系统安全》，2020。[36] X. Zhao、B. Liu 和 Y. Liu. 连续退化组件负载共享系统的可靠性建模与分析。IEEE可靠性汇刊，67:1096–1110，2018。

Appendix A: Calculation of Fisher information matrix for two-component load sharing systems

为计算 $\mathbb{I}(\boldsymbol{\theta})$，所需的期望为 $E\left(N_{(0}{}_{1}{}^{)}\right)$，$E\left(N_2^{(0)}\right)$，$E\left(N_{(1}{}_{1}{}^{)}\right)$，$E\left(N_2^{(1)}\right)$，$E\left(\sum_{i\in I_1^{(1)}} Y_i^{(1)}\right)$ 和 $E\left(\sum_{i\in I_2^{(1)}} Y_{(}{}_{i}{}^{1}\right)$。注意$N_k^{(0)} \sim Bin(n, p_k^{(0)})$

$$N_{(1)_k} \sim Bin(n, p_k^{(1)}),$$

with

$$p_k^{(0)} = P\left(Y_i^{(0)} \in [\tau_{k-1}^{(0)}, \tau_k^{(0)})\right), \quad p_k^{(1)} = P\left(Y_i^{(1)} \in [\tau_{k-1}^{(1)}, \tau_k^{(1)})\right), \quad k = 1, 2.$$

在.....情况下 双组件负载共享系统的， $Y_{(j)\,i}$, $j = 1, 2$ 的概率密度函数由 b y

$$g_{Y_i^{(j)}}(y) = (2-j)\lambda^{(j)}(y)e^{-(2-j)\int_0^y \lambda^{(j)}(u)du}.$$

因此,

$$p_1^{(0)} = \int_0^{\tau_1^{(0)}} g_{Y_i^{(0)}}(y)dy = 1 - e^{-2b_1\tau_1^{(0)}}, \quad p_1^{(1)} = \int_0^{\tau_1^{(1)}} g_{Y_i^{(1)}}(y)dy = 1 - e^{-\gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)}}.$$

那么， $p_2^{(0)} = 1 - p_1^{(0)} = e^{-2b_1\tau_1^{(0)}}$ 和 $p_2^{(1)} = 1 - p_1^{(1)} = e^{-\gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)}}$。因此,
$E(N_{(0)\,1}) = 1-e^{-2b_1\tau_1^{(0)}}$， $E(N_{(0)\,2}) = e^{-2b_1\tau_1^{(0)}}$， $E(N_1^{(1)}) = 1-e^{-\gamma_1 b_1\tau_1^{(1)}}$， $E(N_{(1)\,2})$
$= e^{-\gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)}}$.现在,

$$E\left(\sum_{i\in I_1^{(1)}} Y_i^{(1)}\right) = E\left(E\left(\sum_{i\in I_1^{(1)}} Y_i^{(1)} | N_1^{(1)} = n_1^{(1)}\right)\right).$$

对于 $i \in I_1^{(1)}$， $Y_i^{(1)}$ 服从概率密度函数为 $\frac{\gamma_1 b_1 e^{-\gamma_1 b_1 y}}{1-e^{-\gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)}}}$、适用于$0 < y < \tau_1^{(1)}$ 的右截断指数分布。因此，对于 $i \in I_1^{(1)}$,

$$E\left(Y_i^{(1)}\right) = \int_0^{\tau_1^{(1)}} y\frac{\gamma_1 b_1 e^{-\gamma_1 b_1 y}}{1 - e^{-\gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)}}}dy = \frac{1}{\gamma_1 b_1}\left[\frac{1 - (1 + \gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)})e^{-\gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)}}}{1 - e^{-\gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)}}}\right].$$

因此,

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i\in I_1^{(1)}} Y_i^{(1)}\right) &= \frac{1}{\gamma_1 b_1}\left[\frac{1 - (1 + \gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)})e^{-\gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)}}}{1 - e^{-\gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)}}}\right] E(N_1^{(1)}) \\ &= \frac{1}{\gamma_1 b_1}\left[\frac{1 - (1 + \gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)})e^{-\gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)}}}{1 - e^{-\gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)}}}\right]\left(1 - e^{-\gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)}}\right) \\ &= \frac{1}{\gamma_1 b_1}\left[1 - (1 + \gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)})e^{-\gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)}}\right]. \end{aligned}$$

同样地,

$$E\left(\sum_{i\in I_2^{(1)}} Y_i^{(1)}\right) = E\left(E\left(\sum_{i\in I_2^{(1)}} Y_i^{(1)} | N_2^{(1)} = n_2^{(1)}\right)\right).$$

对于 $i \in I_2^{(1)}$， $Y_i^{(1)}$ 服从左截断指数分布，其概率密度函数为 $\frac{\gamma_1 b_2 e^{-\gamma_1 b_2 y}}{e^{-\gamma_1 b_2 \tau_1^{(1)}}}$，其中$y > \tau_1^{(1)}$。
因此,

$$E\left(Y_i^{(1)}\right) = \int_{\tau_1^{(1)}}^{\infty} y\frac{\gamma_1 b_2 e^{-\gamma_1 b_2 y}}{e^{-\gamma_1 b_2 \tau_1^{(1)}}}dy = \frac{1}{\gamma_1 b_2} + \tau_1^{(1)}.$$

因此,

$$E\left(\sum_{i\in I_2^{(1)}} Y_i^{(1)}\right) = \left(\frac{1}{\gamma_1 b_2} + \tau_1^{(1)}\right) E(N_2^{(1)}) = \left(\frac{1}{\gamma_1 b_2} + \tau_1'\right) e^{-\gamma_1 b_1 \tau_1^{(1)}}.$$

Appendix B: Calculations of some important reliability characteristics

分位数函数的推导：

将 $y \in$ 表示为 $p = G^{(j)}(y)$ $\left[\tau_{k-1}^{(j)}, \tau_k^{(j)}\right)$；然后，$y = \eta(p)$ 对于 $p \in \left[G^{(j)}(\tau_{k-1}^{(j)}) \; G^{(j)}(\tau_k^{(j)})\right)$，$k = 1, 2, \ldots, N$. 现在，

$$
\begin{aligned}
& p = 1 - e^{-(J-j)\gamma_j \left[\sum_{\ell=1}^{k-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right) + b_k \left(y - \tau_{k-1}^{(j)}\right)\right]} \\
\Longrightarrow\; & b_k \left(y - \tau_{k-1}^{(j)}\right) = -\frac{\log(1-p)}{(J-j)\gamma_j} - \sum_{\ell=1}^{k-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right) \\
\Longrightarrow\; & y = \tau_{k-1}^{(j)} - \frac{\log(1-p)}{(J-j)\gamma_j b_k} - \frac{1}{b_k} \sum_{\ell=1}^{k-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right), \text{ if } p \in \left[G^{(j)}(\tau_{k-1}^{(j)}), G^{(j)}(\tau_k^{(j)})\right), \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

如果 $y \in \left[\tau_N^{(j)}, \infty\right)$，那么对于 $p \in \left[G^{(j)}(\tau_{(j)N}) \; 1\right)$，

$y = \eta(p)$。因此，

$$
\begin{aligned}
& p = 1 - e^{-(J-j)\gamma_j \left[\sum_{\ell=1}^{N-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right) + b_N \left(y - \tau_{N-1}^{(j)}\right)\right]} \\
\Longrightarrow\; & y = \tau_{N-1}^{(j)} - \frac{\log(1-p)}{(J-j)\gamma_j b_N} - \frac{1}{b_N} \sum_{\ell=1}^{N-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right), \text{ if } p \in \left[G^{(j)}(\tau_N^{(j)}), 1\right).
\end{aligned}
$$

平均失效时间的推导：

系统寿命 T 的平均失效时间由 $E(T) = E\left(\sum_{j=0}^{J-1} Y_{(j)}\right) = \sum_{j=0}^{J-1} E(Y_{(j)})$ 给出，其中

$$
E(Y^{(j)}) = \int_0^\infty P(Y^{(j)} > y)dy = \int_0^{\tau_{N-1}^{(j)}} e^{-(J-j)\Lambda^{(j)}(y)} dy + \int_{\tau_{N-1}^{(j)}}^\infty e^{-(J-j)\Lambda^{(j)}(y)} dy = I_1 + I_2 \text{ (say)}.
$$

这里，

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\tau_{N-1}^{(j)}} e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{\ell=1}^{k-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right) + b_k \left(y - \tau_{k-1}^{(j)}\right)\right] \mathbf{1}_{[\tau_{k-1}^{(0)}, \tau_k^{(0)})}(y)} dy \\
&= \sum_{s=1}^{N-1} \int_{\tau_{s-1}^{(j)}}^{\tau_s^{(j)}} e^{-(J-j)\gamma_j \left[\sum_{\ell=1}^{s-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right) + b_s \left(y - \tau_{s-1}^{(j)}\right)\right]} dy \\
&= \sum_{s=1}^{N-1} \left\{ e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{s-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right)} \int_{\tau_{s-1}^{(j)}}^{\tau_s^{(j)}} e^{-(J-j)\gamma_j b_s \left(y - \tau_{s-1}^{(j)}\right)} dy \right\} \\
&= \sum_{s=1}^{N-1} \left\{ e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{s-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right)} \left[\frac{1 - e^{-(J-j)\gamma_j b_s \left(\tau_s^{(j)} - \tau_{s-1}^{(j)}\right)}}{(J-j)\gamma_j b_s} \right] \right\}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{s=1}^{N-1} \left\{ \frac{e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{s-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right)} - e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{s} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right)}}{(J-j)\gamma_j b_s} \right\}$$

and

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\tau_{N-1}^{(j)}}^{\infty} e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{\ell=1}^{k-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right) + b_k \left(y - \tau_{k-1}^{(j)}\right)\right] \mathbf{1}_{[\tau_{k-1}^{(0)},\, \tau_k^{(0)})}(y)} dy \\
&= \int_{\tau_{N-1}^{(j)}}^{\infty} e^{-(J-j)\gamma_j \left[\sum_{\ell=1}^{N-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right) + b_N \left(y - \tau_{N-1}^{(j)}\right)\right]} dy \\
&= e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{N-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right)} \int_{\tau_{N-1}^{(j)}}^{\infty} e^{-(J-j)\gamma_j b_N \left(y - \tau_{N-1}^{(j)}\right)} dy \\
&= e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{N-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right)} \left[\frac{1}{(J-j)\gamma_j b_N}\right] \\
&= \frac{e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{N-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right)}}{(J-j)\gamma_j b_N}.
\end{aligned}$$

因此,

$$E(Y^{(j)}) = \sum_{s=1}^{N} \left\{ \frac{e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{s-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right)} - e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{s} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right)}}{(J-j)\gamma_j b_s} \right\}.$$

由此可立即得到结果。

系统寿命矩母函数的推导:

注意, T的系统寿命矩母函数为 $T = \sum Y_{(j)}$, 其中 $Y_{(j)}$ 相互独立$_{j=0}^{J-1}$, 对于 $j = 0, 1, \ldots, (J-1)$。因此, T的矩母函数为 $\phi_T(t) = \prod \phi_{Y^{(j)}}(t)$。现在, $_{j=0}$

$$\begin{aligned}
\phi_{Y^{(j)}}(t) &= E(e^{tY^{(j)}}) = \int_0^{\infty} e^{ty} g_{Y^{(j)}}(y) dy \\
&= \int_0^{\tau_{N-1}^{(j)}} e^{ty} (J-j)\lambda^{(j)}(y) e^{-(J-j)\Lambda^{(j)}(y)} dy + \int_{\tau_{N-1}^{(j)}}^{\infty} e^{ty} (J-j)\lambda^{(j)}(y) e^{-(J-j)\Lambda^{(j)}(y)} dy \\
&= I_1 + I_2 \text{ (say)},
\end{aligned}$$

其中 $g_{Y^{(j)}}(y) = (J-j)\lambda^{(j)}(y) e^{-(J-j)\Lambda^{(j)}(y)}$。对于 $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\tau_{N-1}^{(j)}} e^{ty} (J-j)\gamma_j \sum_{k=1}^{N} b_k \mathbf{1}_{[\tau_{k-1}^{(j)},\, \tau_k^{(j)})}(y)\, e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{\ell=1}^{k-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right) + b_k \left(y - \tau_{k-1}^{(j)}\right)\right]} dy \\
&= \sum_{s=1}^{N-1} (J-j) b_s \gamma_j \int_{\tau_{s-1}^{(j)}}^{\tau_s^{(j)}} e^{-\left\{(J-j)\gamma_j \left[\sum_{\ell=1}^{s-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right) + b_s \left(y - \tau_{s-1}^{(j)}\right)\right] - ty\right\}} dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=1}^{N-1} \left\{ (J-j) b_s \gamma_j e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{s-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right)} \int_{\tau_{s-1}^{(j)}}^{\tau_s^{(j)}} e^{-\left\{(J-j)\gamma_j b_s \left(y - \tau_{s-1}^{(j)}\right) - ty\right\}} dy \right\} \\
&= \sum_{s=1}^{N-1} \left\{ (J-j) b_s \gamma_j e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{s-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right)} \left[\frac{e^{t\tau_{s-1}^{(j)}} - e^{-\left\{(J-j)\gamma_j b_s \left(\tau_s^{(j)} - \tau_{s-1}^{(j)}\right) - t\tau_s^{(j)}\right\}}}{(J-j)\gamma_j b_s - t} \right] \right\} \\
&= \sum_{s=1}^{N-1} \frac{(J-j) b_s \gamma_j}{(J-j) b_s \gamma_j - t} \left\{ e^{-\left\{(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{s-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right) - t\tau_{s-1}^{(j)}\right\}} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - e^{-\left\{(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{s} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right) - t\tau_s^{(j)}\right\}} \right\}.
\end{aligned}
$$

对于 $t < (J-j)\gamma_j b_N$,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\tau_{N-1}^{(j)}}^{\infty} e^{ty} (J-j)\gamma_j \sum_{k=1}^{N} b_k \mathbf{1}_{[\tau_{k-1}^{(j)},\, \tau_k^{(j)})}(y)\, e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{\ell=1}^{k-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right) + b_k \left(y - \tau_{k-1}^{(j)}\right)\right]} dy \\
&= (J-j) b_N \gamma_j \int_{\tau_{N-1}^{(j)}}^{\infty} e^{ty - (J-j)\gamma_j \left[\sum_{\ell=1}^{N-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right) + b_N \left(y - \tau_{N-1}^{(j)}\right)\right]} dy \\
&= (J-j) b_N \gamma_j e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{N-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right)} \int_{\tau_{N-1}^{(j)}}^{\infty} e^{-\left\{(J-j)\gamma_j b_N \left(y - \tau_{N-1}^{(j)}\right) - ty\right\}} dy \\
&= (J-j) b_N \gamma_j e^{-(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{N-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right)} \left[\frac{e^{t\tau_{N-1}^{(j)}}}{(J-j)\gamma_j b_N - t} \right] \\
&= (J-j) b_N \gamma_j \cdot \frac{e^{t\tau_{N-1}^{(j)} - (J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{N-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right)}}{(J-j) b_N \gamma_j - t}.
\end{aligned}
$$

因此，对于 $t < (J-j)\gamma_j b_N$,

$$
\begin{aligned}
\phi_{Y^{(j)}}(t) = \sum_{s=1}^{N} \frac{(J-j) b_s \gamma_j}{(J-j) b_s \gamma_j - t} &\left\{ e^{-\left\{(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{s-1} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right) - t\tau_{s-1}^{(j)}\right\}} \right. \\
&\left. - e^{-\left\{(J-j)\gamma_j \sum_{\ell=1}^{s} b_\ell \left(\tau_\ell^{(j)} - \tau_{\ell-1}^{(j)}\right) - t\tau_s^{(j)}\right\}} \right\}.
\end{aligned}
$$

由此可立即得到结果。