arXiv:2301.01479v1 [math.OC] 4 Jan 2023

推广 R_0 和 SSM 性质；扩展水平线性互补问题

PUNIT KUMAR YADAV斋浦尔马拉维亚国家理工学院数学系，邮编 302017，印度 电子邮箱：punitjrf@gmail.com
K. PALPANDI斋浦尔马拉维亚国家理工学院数学系，邮编 302017，印度 电子邮箱：kpalpandi.maths@mnit.ac.in

摘要

本文首先为矩阵集引入 R_0-W 和 SSM-W 性质，这是对 R_0 和严格半单调矩阵的推广。随后，我们证明了当相关矩阵具有这些性质时，扩展水平线性互补问题的一些存在性结果。在对矩阵集施加附加条件后，我们证明 SSM-W 性质等价于相应扩展水平线性互补问题具有唯一解。最后，我们给出了扩展水平线性互补问题的解集具有连通性的充要条件。

1 引言

标准线性互补问题（简称 LCP）LCP(C, q），是寻找向量 x、y，使得

$$x \in \mathbb{R}^n,\ y = Cx + q \in \mathbb{R}^n \text{ and } x \wedge y = 0, \tag{1}$$

其中，$C \in \mathbb{R}^{n\times n}$、$q \in \mathbb{R}^n$ 和 $'\wedge'$ 是一个最小映射。LCP 在许多领域有着广泛应用，例如优化、经济学和博弈论。Cottle 和 Pang 的专著 [1]是标准 LCP 的主要参考文献。过去三十年间，文献中提出并讨论了线性互补问题的各种推广形式（参见 [7, 10, 11, 13, 14, 16]）。扩展水平线性互补问题是 LCP 最重要的扩展之一，已有许多作者对其进行研究；参见 [4, 6, 7] 及其中的参考文献。给定有序矩阵集 C: $= \{C_0, C_1, ..., C_k\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$、向量 $q \in \mathbb{R}^n$ 以及有序正向量集 d: $= \{d_1, d_2, ..., d_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$，扩展水平线性互补问题（简称 EHLCP），记为 EHCLP(C, d q），是寻找向量 x_0、x_1、...、$x_k \in \mathbb{R}^n$，使得

$$\begin{aligned} C_0x_0 =& q + \sum_{i=1}^{k} C_ix_i, \\ x_0 \wedge x_1 = 0 \ \text{ and } \ & (d_j - x_j) \wedge x_{j+1} = 0,\ 1 \le j \le k-1. \end{aligned} \tag{2}$$

如果 $k = 1$，那么 EHLCP 就变为水平线性互补问题（简称 HLCP），即:

$$C_0x_0 - C_1x_1 = q \ \text{ and } \ x_0 \wedge x_1 = 0.$$

进一步地，令 $C_0 = I$，HLCP 可化为标准线性互补问题。由于水平线性互补问题在众多领域有着广泛的应用，因此受到了许多学者的广泛研究；参见 [13, 14, 16, 18] 及其中的参考文献。

近年来，许多作者提出了新的矩阵类，用于分析线性互补问题解集的结构；例如参见 [1, 2, 4]。R_0、P_0、P类矩阵以及严格半单调

（SSM）矩阵在确保线性互补问题解的存在唯一性方面起着关键作用。例如， P矩阵（若满足 $[x \in \mathbb{R}^n, x * Ax \leq 0 \implies x = 0]$）为线性互补问题解的唯一性提供了充要条件（参见 [1]中的定理 3.3.7）。为了获得广义线性互补问题的类似存在唯一性结果，Gowda 等人 [4]将 P 矩阵的概念推广到矩阵集，提出了列 W性质。他们证明，列 W性质可保证扩展水平线性互补问题（EHLCP）有解且解唯一。此外，他们还将 P_0矩阵的概念推广为列 W_0性质。

另一类矩阵，即所谓的 SSM 矩阵，在 LCP理论中具有重要意义。这类矩阵为 $\mathbb{R}^n_+$ 上的 LCP 提供唯一解，同时也保证 LCP 解的存在性（见 [1]）。对于 Z 矩阵（如果矩阵的所有非对角元均为非正）， P矩阵等价于 SSM 矩阵（见 [1]中的定理 3.11.10）。一个自然的问题是：从 EHLCP 的角度来看，能否将 SSM 矩阵推广到矩阵集，以及对于 Z 矩阵集，我们是否也能得到类似的等价关系。本文旨在回答这一问题。

LCP 解集的连通性在 LCP 的研究中发挥着重要作用。如果相应 LCP 的解集是连通的，我们就称一个矩阵是连通的。在 [19], 中，Jones 和 Gowda 研究了 LCP 解集的连通性。他们证明，当给定矩阵是 P_0 矩阵且解集具有有界连通分支时，该矩阵是连通的。此外，他们还证明，如果 LCP 的解集是连通的，那么对于所有 $q > 0.$，LCP 几乎都有一个解。由于研究 LCP 解的连通性时所涉及的矩阵具有特殊结构，许多作者研究了 LCP 的连通性，例如见 [19, 20, 21]。本文的主要目标是回答以下问题：

（Q1）在线性互补问题理论中，一个众所周知的结果是， $R0$ 矩阵能够保证线性互补问题解集的有界性。水平线性互补问题 [17]也有同样的结论。这引出了这样一个问题： R_0 矩阵的概念能否推广到矩阵集？如果可以，那么我们是否能够期待扩展水平线性互补问题中也得到相同类型的结果？

（Q2）鉴于严格半单调矩阵能够保证线性互补问题解的存在性及其唯一性（ $q \geq 0$），自然会引发这样的疑问：SSM 矩阵的概念能否扩展到矩阵集？如果可以，那么扩展水平线性互补问题是否也成立相同的结论？

（Q3）受 Gowda 和 Jones [19] 关于线性互补问题解集连通性的结果启发，可以提出这样的问题：如果矩阵集具有列 W_0 性质，并且相应扩展水平线性互补问题的解集具有一个有界连通分支，那么扩展水平线性互补问题的解集是否连通？

本文结构如下：第 2 节介绍一些基本定义和结果。第 3 节推广 R_0 矩阵的概念，并证明扩展水平线性互补问题的存在性结果。第 4 节引入 SSM-W 性质，随后研究当底层矩阵集具有该性质时扩展水平线性互补问题的存在唯一性结果。最后一节给出扩展水平线性互补问题解集连通性的充要条件。

2 记号与预备知识

2.1 记号

全文中，我们使用以下记号：

(i) 通常内积下的 n 维欧几里得空间记为 $\mathbb{R}^n$。 $\mathbb{R}^n$ 中所有非负向量（分别为正向量）的集合记为 $\mathbb{R}^n_+$

（分别为 $\mathbb{R}^n_{++}$ ）。当且仅当 $x \in \mathbb{R}^n_+$ （分别为 $\mathbb{R}^n_{++}$）时，我们称 $x \geq 0$ （分别为 > 0）。

(ii) $\mathbb{R}^n$ 的 k 次笛卡尔幂记为 $\Lambda_n^{(k)}$，$\mathbb{R}^n_{++}$ 的 k 次笛卡尔幂记为 $\Lambda_n^{(k)}$ ，$_{++}$。粗体零"0"用于表示零向量 (0, 0, ..., 0) $\in \Lambda_n^{(k)}$.

(iii) 所有 $n \times n$ 实矩阵的集合记为 $\mathbb{R}^{n\times n}$。我们使用符号 $\Lambda_{n\times n}^{(k)}$ 表示 $\mathbb{R}^{n\times n}$的 k 次笛卡尔积。

(iv) 我们使用 $[n]$ 表示集合 $\{1, 2, ..., n\}$。

(v) 设 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$。我们使用 diag($M$) 表示向量 ($M_{11}, M_{22}$, ..., M_{kk}) $\in \mathbb{R}^n$，其中 M_{ii} 是矩阵 M 的 ii^{th} 对角元素，det(M) 用于表示矩阵 M的行列式。

(vi) SOL(C, d q) 用于表示 EHLCP(C, d q) 的所有解组成的解集 .

现在回顾一些 LCP理论中的定义和结果，这些内容将在本文中经常使用。

命题 2.1（[8]）。设 $V = \mathbb{R}^n$. 则以下陈述等价。

（i） $x \wedge y = 0$.（ii） x、$y \geq 0$ 和 $x * y = 0$，其中 $*$ 是 Hadamard 积。（iii） x、$y \geq 0$ 和 $\langle x$、$y\rangle = 0$.

定义 1（[4]）。设 C $=$（C_0、C_1、...、C_k） $\in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$。若矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足

$$R._j \in \big\{(C_0)._j, (C_1)._j, ..., (C_k)._j\big\},\ \forall j \in [n],$$

其中 $R._j$ 是矩阵 R的 j^{th} 列

接下来，我们定义列 W 性质。

D定义 2（[4]）。设 C := (C$_0$, C$_1$, ..., C$_k$) $\in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$。那么我们称 C 具有

(i) 列 W-性质：C 的所有列代表矩阵的行列式均为正或均为负。

(ii) 列 W_0-性质：若存在 N := (N_0, N_1, ..., N_k) $\in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$，使得对于所有 $\epsilon > 0$，C $+ \epsilon$N := ($C_0 + \epsilon N_0, C_1 + \epsilon N_1$, ..., $C_k + \epsilon N_k$) 都具有列 W-性质。

根据 Gowda 和 Sznajder [4], ，我们有以下结果。

定理 2.2（[4]）。对于 C $=$(C$_0$, C$_1$, ..., C$_k$) $\in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$，以下条件等价:

(i) C 具有列 W-性质。

(ii) 对于任意非负对角矩阵 D_0、D_1、...、$D_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$，满足 diag($D_0 + D_1 + D_2 + ... + D_k$) > 0,

$$\det\big(C_0D_0 + C_1D_1 + ... + C_kD_k\big) \neq 0.$$

(iii) C_0 可逆，且 ($I, C_0^{-1}C_1$, ..., $C_0^{-1}C_k$) 具有列 W-性质。

(iv) 对所有 $q \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{d} \in \Lambda_{n\,++}^{(k-1)}$，，EHLCP(C, d q) 都有唯一解。

若 $k = 1$ 和 C_0^{-1}存在，则 HLCP(C_0, C_1, q) 等价于 LCP($C_0^{-1}C_1, C_0^{-1}(q)$)。在这种情况下，$C_0^{-1}C_1$ 是 P 矩阵，当且仅当对于所有 $q \in \mathbb{R}^n$，LCP($C_0^{-1}C_1$,$C_0^{-1}(q)$) 都有唯一解（参见 [1]中的定理 3.3.7）。因此，根据前述定理，我们得到以下定理。

定理2.3（[4]）。设 $(C_0, C_1) \in \Lambda_{n\times n}^{(2)}$。则以下命题等价。

(i) (C_0, C_1) 具有列 W-性质。(ii) C_0 可逆，且 $C_0^{-1}C_1$ 是 P 矩阵。

(iii) 对所有 $q \in \mathbb{R}^n$，HLCP(C_0, C_1, q) 都有唯一解。

2.2 度理论

现在我们回顾来自 [2, 3] 的度的定义及其一些性质，以供讨论。

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界开集。假设 $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是连续函数，且向量 $p \notin h(\partial\Omega)$，其中 $\partial\Omega$ 和 Ω 分别表示 Ω 的边界和闭包。则相对于 p 在 Ω 上的 h 的度记为 deg(h, Ω p)。当 deg(h, Ω p) 非零时，方程 $h(x) = p$ 有解。若 $h(x) = p$ 只有一个解，记为 y，且 y 属于 $\mathbb{R}^n$，那么对于所有包含 y 的有界开集，其度都相同。这个共同的度记为 deg(h, p)。

2.2.1 度的性质

以下性质在此处经常使用。

(D1) deg(I, Ω $\cdot$) $= 1$，其中 I 是恒等函数。

(D2) 同伦不变性：设同伦 $\Phi(x, s) : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ 连续。若对于某个 $s \in [0, 1]\}$，$\Phi(x, s)$ $X = \{x : \Phi(x, s) = 0$ 的零点集有界，则对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意包含零点集 X 的有界开集 Ω，我们有

$$\deg(\Phi(x, 1), \Omega, 0) = \deg(\Phi(x, 0), \Omega, 0).$$

(D3) 邻近性：假设 deg($h_1(x)$, Ω p) 已定义，且 $h_2 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是连续函数。若 $\sup_{x\in\Omega}\|h_2(x) - h_1(x)\| <$ dist($p, \partial\Omega$)，则 deg($h_2(x)$, Ω p) 已定义，且等于 deg($h_1(x)$, Ω p)。

以下来自 Facchinei 和 Pang [2] 的结果将在后文用到。

命题 2.4 ([2])。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空有界开子集，且 $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是连续单射映射。则对于所有 $p \in \Phi(\Omega)$，deg(Φ, Ω p) $\neq 0$。

注意：所有度理论结果和概念也适用于任意有限维希尔伯特空间（如 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 等）。

3 R_0-W性质

本节首先定义矩阵集的 R_0-W 性质，这是LCP理论中 R_0 矩阵的自然推广。然后我们证明，R_0-W 性质可以保证相应EHLCP的解集有界。

定义3. 设 $\mathbf{C} = (C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$。如果系统满足以下条件，我们称 $\mathbf{C}$ 具有 R_0-W 性质：

$$C_0 x_0 = \sum_{i=1}^{k} C_i x_i \text{ and } x_0 \wedge x_j = 0 \ \ \forall\, j \in [k]$$

只有零解。

容易看出，当 $k = 1$ 和 $C_0 = I$ 时， R_0-W 性质与 R_0 矩阵重合。另据指出（参见 [8]），若 $k = 1$，则 R_0-W 性质称为 R_0 对。为进一步讨论，我们证明以下结果。

引理 3.1. 设 $\mathbf{C} = (C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$，且 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_k) \in$ 解集$(\mathbf{C}, \mathbf{d}\ q)$。则 $\mathbf{x}$ 满足以下方程组

$$C_0 x_0 = q + \sum_{i=1}^{k} C_i x_i \ \ and\ x_0 \wedge x_j = 0 \ \forall\ j \in [k].$$

证明. 由于 $x_0 \geq 0$，存在一个指标集 $\alpha \subseteq [n]$，使得 $(x_0)_i = \begin{cases} > 0 & i \in \alpha \\ 0 & i \in [n] \setminus \alpha \end{cases}$。由于 $x_0 \wedge x_1 = 0$，我们有 $(x_1)_i = 0$ 对所有 $i \in \alpha$ 都成立。由 $(d_1 - x_1) \wedge x_2 = 0$，得到 $(d_1)_i (x_2)_i = 0\ \forall i \in \alpha$。由此可得 $(x_2)_i = 0\ \forall i \in \alpha$。将 $(x_2)_i = 0\ \forall i \in \alpha$ 代入 $(d_2 - x_2) \wedge x_3 = 0$，得到 $(x_3)_i = 0\ \forall i \in \alpha$。以类似方式继续这一过程，可得 $(x_4)_i = (x_5)_i = ... = (x_k)_i = 0\ \forall i \in \alpha$。因此，$x_0 \wedge x_j = 0\ \forall\ j \in [k]$。证明完毕。 □

现在证明，当涉及的矩阵集具有 R_0-W 性质时，EHLCP 的解集有界。

定理3.2. 设 $\mathbf{C} = (C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$. 若 $\mathbf{C}$ 具有 R_0-W 性质，则对任意 $q \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{d} \in \Lambda_{n\ ++}^{(k-1)}$, SOL$(\mathbf{C}, \mathbf{d}\ q)$ 有界。

证明. 假设存在 $q \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ..., d_{k-1}) \in \Lambda_{n\ ++}^{(k-1)}$, 使得 SOL$(\mathbf{C}, \mathbf{d}\ q)$ 无界。那么存在一个序列 $\mathbf{x}^{(m)} = (x_0^{(m)}, x_1^{(m)}, ..., x_k^{(m)})$，属于 $\Lambda_n^{(k+1)}$，使得 $||\mathbf{x}^{(m)}|| \to \infty$，当 $m \to \infty$ 时，并且满足

$$\begin{aligned} &C_0 x_0^{(m)} = q + \sum_{i=1}^{k} C_i x_i^{(m)} \\ &x_0^{(m)} \wedge x_1^{(m)} = 0 \ \text{ and } \ (d_j - x_j^{(m)}) \wedge x_{j+1}^{(m)} = 0\ \forall j \in [k-1]. \end{aligned} \tag{3}$$

由引理 3.1，方程 3 得出

$$\underset{(m)}{C_0 x_0^{(m)}} = q + \sum_{i=1}^{k} C_i x_i^{(m)} \ \text{ and } \ \underset{(m)}{x_0^{(m)} \wedge x_j^{(m)}} = \ \ 0\ \forall j \in [k]. \tag{4}$$

由于对所有 m，$\mathbf{x}\|\ \ \mathbf{x}^{(m)}\|$ 都是单位向量，因此 $\mathbf{x}\|\ \ \mathbf{x}^{(m)}\|$ 收敛到某个向量 $\mathbf{y} = (y_0, y_1, ..., y_k) \in \Lambda_n^{(k+1)}$，且满足 $||\mathbf{y}|| = 1$。现在先将方程 4 除以 $||\mathbf{x}^{(m)}||$，然后取极限 $m \to \infty$，得到

$$C_0 y_0 = \sum_{i=1}^{k} C_i y_i \ \text{ and } \ y_0 \wedge y_j = 0\ \forall j \in [k].$$

这意味着 $\mathbf{y}$ 必须是零向量，因为 $\mathbf{C}$ 具有 R_0-W 性质，这与 $||\mathbf{y}|| = 1$ 的事实相矛盾。因此，SOL$(\mathbf{C}, \mathbf{d}\ q)$ 有界。 □

3.1 扩展水平线性互补问题度

设 C $=(C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$，且 d $=(d_1, d_2, ..., d_{k-1}) \in \Lambda_{n\ ++}^{(k-1)}$，。我们定义函数$F$: $\Lambda_n^{(k+1)} \to \Lambda_n^{(k+1)}$如下

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} C_0x_0 - \sum_{i=1}^{k} C_ix_i \\ x_0 \wedge x_1 \\ (d_1 - x_1) \wedge x_2 \\ (d_2 - x_2) \wedge x_3 \\ . \\ . \\ . \\ (d_{k-1} - x_{k-1}) \wedge x_k \end{bmatrix}. \tag{5}$$

我们将 F 关于有界开集 Ω $\subseteq \Lambda_n^{(k+1)}$ 上的 0 的度记为 deg(C, Ω, 0)。注意，若 C 具有 R_0-W 性质，根据引理 3.1，F(x) $=$ **0** $\Leftrightarrow$ x $=$ **0**，这意味着对于任何包含原点的有界开集 Ω $\Lambda_n^{(k+1)}$，均有 deg(C, Ω, 0) $=$ deg(C, 0)。我们称此度为 C 的扩展水平线性互补问题度。

现在我们证明扩展水平线性互补问题的一个存在性结果。

定理3.3. 设 C $=(C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$。假设以下条件成立:

(i) C 具有 R_0-W 性质。

(ii) deg(C,0) $\neq 0$。

因此，对于所有 $q \in \mathbb{R}^n$ 和 d $\in \Lambda_{n\ ++}^{(k-1)}$，，EHLCP(C, d q) 都有非空紧解。

证明。由于 EHLCP 的解集是闭集，只需证明解集非空且有界。我们首先定义一个同伦 Φ: $\Lambda_n^{(k+1)} \times [0, 1] \to \Lambda_n^{(k+1)}$，如下:

$$\Phi(\mathbf{x}, s) = \begin{bmatrix} C_0x_0 - \sum_{i=1}^{k} C_ix_i - sq \\ x_0 \wedge x_1 \\ (d_1 - x_1) \wedge x_2 \\ (d_2 - x_2) \wedge x_3 \\ . \\ . \\ . \\ (d_{k-1} - x_{k-1}) \wedge x_k \end{bmatrix}.$$

于是,

$$\Phi(\mathbf{x}, 0) = F(\mathbf{x}) \text{ and } \Phi(\mathbf{x}, 1) = F(\mathbf{x}) - \hat{q}, \text{where } \hat{q} = (q, 0, 0, ...0) \in \Lambda_n^{(k+1)}.$$

利用与上述定理3.2类似的论证，我们可以容易地证明，同伦的零点集 $X = \{$x: Φ(x s) $=$ **0** 对某个 $s \in [0, 1]\}$ 有界。由度的性质（D2），对于任意包含 X 的有界开集 Ω，有 deg(F, Ω, 0) $=$ deg($F - \hat{q}$, Ω, 0)。由于 deg(F, Ω, 0) $=$deg(C, 0) $\neq 0$，我们得到 deg($F - \hat{q}$, Ω, 0) $\neq 0$，这意味着 SOL(C, d q) 非空。由于 C 具有 R_0-W 性质，根据定理3，SOL(C, d q) 有界。证明完毕。 □

4 SSM-W性质

本节首先定义矩阵集的 SSM-W 性质，这是 LCP 理论中 SSM 矩阵的一种推广；随后证明，当所涉及的矩阵集具有 SSM-W 性质时，EHLCP 的存在唯一性结论成立。

现在回顾一下，如果$[x \in \mathbb{R}_+^n,\ x * Mx \leq 0 \Rightarrow x = 0]$，则称 $n \times n$ 实矩阵 M 为严格半单调（SSM）矩阵。我们将这一概念推广到矩阵集。

定义 4. 如果 $\mathbf{C} = (C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$ 具有 SSM-W 性质，则称其满足

$$\{C_0x_0 = \sum_{i=1}^{k} C_ix_i,\ x_i \geq 0 \text{ and } \ x_0 * x_i \leq 0 \ \ \forall i \in [k]\} \Rightarrow \mathbf{x} = (x_0, x_1, .., x_k) = \mathbf{0}.$$

我们证明以下结果。

命题4.1. 设 $\mathbf{C} = (C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$。若 $\mathbf{C}$ 具有 SSM-W 性质，则有以下结论：

(i) C_0^{-1}对所有 $i \in [k]$.均存在，且 $C_0^{-1}C_i$ 是严格半单调矩阵。(ii) $(I, C_0^{-1}C_1, ..., C_0^{-1}C_k)$ 具有 SSM-W 性质。(iii) 对任意阶为n的置换矩阵 P，$(P^TC_0P, P^TC_1P, ..., P^TC_kP)$ 均具有 SSM-W 性质。

证明. (i)：假设存在一个向量 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，使得 $C_0x_0 = 0$。那么我们有

$$C_0x_0 = C_10 + C_20 + ... + C_k0.$$

这说明 $x_0 = 0$，因为 $\mathbf{C}$ 具有 SSM-W 性质。因此 C_0 可逆。

现在证明 (i) 的第二部分。不失一般性，只需证明$C_0^{-1}C_1$ 是严格半单调矩阵。假设存在一个向量 $y \in \mathbb{R}^n$，使得 $y \geq 0$ 且 $y *(C_0^{-1}C_1)y \leq 0.$。令 $y_0 := (C_0^{-1}C_1)y$， $y_1 := y$ 且 $y_i := 0$，对所有 $2 \leq i \leq k$均成立。于是我们得到

$$C_0y_0 = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_iy_i + .. + C_ky_k, \ \ y_j \geq 0 \text{ and } y_0 * y_j \leq 0 \ \forall j \in [k].$$

由于 $\mathbf{C}$ 具有 SSM-W 性质， $y_j = 0 \ \ \forall j \in [k]$。因此，$C_0^{-1}C_1$ 是严格半单调矩阵。证明至此完成。

(ii)：由 SSM-W 性质的定义可知。

(iii)：令 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_k) \in \Lambda_n^{(k+1)}$，使得

$$(P^TC_0P)x_0 = \sum_{i=1}^{k}(P^TC_iP)x_i,\ x_j \geq 0 \text{ and } x_0 * x_j \leq 0 \ \forall j \in [k].$$

由于 P是一个非负矩阵且 $PP^T = P^TP$，我们可以将上述方程改写为 a s

$$C_0Px_0 = \sum_{i=1}^{k} C_iPx_i,\ Px_j \geq 0 \text{ and } Px_0 * Px_j \leq 0 \ \forall j \in [k].$$

由 $\mathbf{C}$ 的 SSM-W 性质，对所有 $0 \leq j \leq k$ 都有 $Px_j = 0$，这意味着 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$。证明至此完成。 □

在上述命题4.1中，很容易看出，(ii)和(iii)项的逆命题成立。但(i)项的逆命题未必成立。下面的例子说明了这一点。

例 4.2. 设 $\mathbf{C} = (C_0, C_1, C_2) \in \Lambda_{2\times 2}^{(3)}$，其中

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

容易验证，$C_0^{-1}C_1 = C_1$ 和$C_0^{-1}C_2 = C_2$ 是 P矩阵。因此，$C_0^{-1}C_1$ 和$C_0^{-1}C_2$ 是 SSM 矩阵。设 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) = ((0, 0)^T, (1, 1)^T, (1, 1)^T) \in \Lambda_2^{(3)}$。那么我们可以看到，非零向量 $\mathbf{x}$ 满足

$$C_0x_0 = C_1x_1 + C_2x_2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \text{ and } x_0 * x_1 = 0 = x_0 * x_2.$$

因此，$\mathbf{C}$ 不可能具有 SSM-W 性质。

以下结果推广了矩阵理论中的一个著名结论：每个 P矩阵都是 SSM 矩阵。

定理 4.3。设 $\mathbf{C} = (C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$。若 C 具有列 W-性质，则 C 具有 SSM-W 性质。

证明。假设存在一个非零向量 $\mathbf{x} = (x_0, ..., x_k) \in \Lambda_n^{(k+1)}$，使得

$$C_0 x_0 = \sum_{i=1}^{k} C_i x_i,\ x_j \geq 0,\ x_0 * x_j \leq 0\ \forall j \in [k].$$

考虑一个向量 $y \in \mathbb{R}^n$，其 j^{th} 分量定义为

$$y_j = \begin{cases} -1 & \text{if } (x_0)_j > 0 \\ 1 & \text{if } (x_0)_j < 0 \\ 1 & \text{if } (x_0)_j = 0 \text{ and } (x_i)_j \neq 0 \text{ for some } i \in [k] \\ 0 & \text{if } (x_0)_j = 0 \text{ and } (x_i)_j = 0 \text{ for all } i \in [k] \end{cases}.$$

由于 x 是一个非零向量，y 必定是一个非零向量。考虑对角矩阵 $D_0, D_1, ..., D_k$，它们定义为

$$(D_0)_{jj} = \begin{cases} (x_0)_j & \text{if } (x_0)_j > 0 \\ -(x_0)_j & \text{if } (x_0)_j < 0 \\ 0 & \text{if} (x_0)_j = 0 \text{ and } (x_i)_j \neq 0 \text{ for some } i \in [k] \\ 1 & \text{if } (x_0)_j = 0 \text{ and } (x_i)_j = 0 \text{ for all } i \in [k] \end{cases}$$

并且对所有 $i \in [k]$,

$$(D_i)_{jj} = \begin{cases} 0 & \text{if } (x_0)_j > 0 \\ (x_i)_j & \text{else} \end{cases}.$$

容易验证，$D_0, D_1, ..., D_k$ 是非负对角矩阵，并且 $\text{diag}(D_0 + D_1 + ... + D_k) > 0$。还要注意,

$$x_0 = -D_0 y \text{ and } x_i = D_i y\ \forall i \in [k]. \tag{6}$$

将方程 6 代入 $C_0 x_0 = \sum_{i=1}^{k} C_i x_i$，可得

$$C_0(-D_0 y) = \sum_{i=1}^{k} C_i D_i(y) \Rightarrow \big(C_0 D_0 + C_1 D_1 + ... + C_k D_k\big) y = 0.$$

这意味着 $\det(C_0 D_0 + C_1 D_1 + ... + C_k D_k) = 0$。因此，根据定理 2.2，C 不具有列 W-性质。由此得到矛盾。因此，C 具有 SSM-W 性质。 □

下面的例子说明上述定理的逆命题不成立。

例 4.4。设 $\mathbf{C} = (C_0, C_1, C_2) \in \Lambda_{2\times 2}^{(3)}$，使得

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

设 $\mathbf{w} = (x, y, z) \in \Lambda_2^3$ 满足

$$C_0 x = C_1 y + C_2 z \text{ and } y, z \geq 0, x * y \leq 0, x * z \leq 0.$$

由 $C_0x = C_1y + C_2z$，可得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \end{bmatrix}.$$

由于 $x * y \leq 0$, $x * z \leq 0$，根据上面的方程，我们有

$$\begin{aligned} y_1(y_1 + y_2 + z_1 + z_2) \leq 0 \text{ and } y_2(y_1 + y_2 + z_1 + z_2) \leq 0, \\ z_1(y_1 + y_2 + z_1 + z_2) \leq 0 \text{ and } z_2(y_1 + y_2 + z_1 + z_2) \leq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

由于 $y, z \geq 0$，由方程 7 可得 $x = y = z = 0$. 因此，C 具有 SSM-W 性质。由于 $\det(C_1) = 0$，根据列 W-性质的定义，C 不具有列 W-性质。

现在我们给出 SSM-W 性质的一个刻画。

定理 4.5. 设 $\mathsf{C} = (C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$ 具有 SSM-W 性质，当且仅当对于任意满足 $\mathrm{diag}(D_1 + D_2 + ... + D_k) > 0$的非负对角矩阵集合 $(D_1, D_2, ..., D_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k)}$，$(C_0, C_1D_1 + C_2D_2 + ... + C_kD_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(2)}$ 具有 SSM-W 性质。

证明。必要部分：令 $(D_1, D_2..., D_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k)}$ 为满足 $\mathrm{diag}(D_1 + D_2 + ... + D_k) > 0$的非负对角矩阵集合。假设存在向量 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $y \in \mathbb{R}_+^n$，使得

$$C_0x_0 = \big(C_1D_1 + C_2D_2 + ... + C_kD_k\big)y \text{ and } x_0 * y \leq 0.$$

对每个 $i \in [k]$，我们设 $x_i := D_iy$。由于每个 D_i 都是非负对角矩阵，根据 $x_0 * y \leq 0$，可得 $x_0 * x_i \leq 0\ \forall i \in [k]$。于是我们有

$$C_0x_0 = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_kx_k,$$

$$x_i \geq 0,\ x_0 * x_i \leq 0\ \forall i \in [k].$$

由于 C 具有 C 的 SSM-W 性质，我们必有 $x_0 = x_1 = ... = x_k = 0$. 这意味着$x_1 + x_2 + ... + x_k = (D_1 + D_2 + ... + D_k)y = 0$。由于 $\mathrm{diag}(D_1 + D_2 + ... + D_k) > 0$，我们有$y = 0$。必要部分证毕。

充分部分：设 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_k) \in \Lambda_n^{(k+1)}$，使得

$$C_0x_0 = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_kx_k \text{ and } x_j \geq 0,\ x_0 * x_j \leq 0\ \forall j \in [k]. \tag{8}$$

现在考虑一个 $n \times k$ 矩阵 X，其 j^{th} 列为 x_j，其中 $j \in [k]$。因此，$X = [x_1\ x_2\ ...\ x_k]$。设 $S := \{i \in [k] :\ i^{\text{th}}$ 的行和为零$\}$。由此，我们定义一个向量 $y \in \mathbb{R}^n$ 和对角矩阵 $D_1, D_2, .., D_k$，使得

$$y_i = \begin{cases} 1 & i \notin S \\ 0 & i \in S \end{cases} \text{ and } (D_j)_{ii} = \begin{cases} (x_j)_i & i \notin S \\ 1 & i \in S \end{cases},$$

其中 $(D_j)_{ii}$ 是对于所有 $j \in [k]$，D_j 的对角元素。容易看出，对于所有$j \in [k]$，$D_jy = x_j$，并且每个 D_j都是非负对角矩阵，且 $\mathrm{diag}(D_1 + D_2 + ... + D_k) > 0$。因此，由方程 8 可得

$$C_0x_0 = \big(C_1D_1 + C_2D_2 + ... + C_kD_k\big)y,$$

$$x_0 * y \leq 0.$$

由假设可得 $x_0 = 0 = y$，这意味着 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$。至此，充分部分得证。

□

现在我们给出列 W-性质的刻画。

定理 4.6. 设 C $=(C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$ 具有列-W性质，当且仅当对于任意一组阶数为 n、满足 diag$(D_1 + D_2 + ... + D_k) > 0$ 的非负对角矩阵 $D_1, D_2, ..., D_k$，$(C_0, C_1D_1 + C_2D_2 + ... + C_kD_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(2)}$ 具有列 -W 性质。

证明. 必要部分：显然。
充分部分：设 $\{E^0, E^1, ..., E^k\}$ 是一组阶数为 n 且满足 diag$(E^0 + E^1 + ... + E^k) > 0$ 的非负对角矩阵。我们断言 det$(C_0E^0 + C_1E^1 + ... + C_kE^k) \neq 0$。

为证明这一点，我们首先构造一组非负对角矩阵 $D_1, D_2, ..., D_k$ 和 E，如下所示：

$$(D_j)_{ii} = \begin{cases} E_{ii}^j & \text{if } \sum_{m=1}^k E_{ii}^m \neq 0 \\ 1 & \text{if } \sum_{m=1}^k E_{ii}^m = 0 \end{cases} \text{ and } E_{ii} = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{m=1}^k E_{ii}^m \neq 0 \\ 0 & \text{if } \sum_{m=1}^k E_{ii}^m = 0 \end{cases},$$

其中，$(D_j)_{ii}$ 是 D_j 关于 $j \in [k]$ 的 ii^{th} 对角元素，E_{ii} 是矩阵 E的 ii^{th} 对角元素。通过简单计算，我们得到 $D_jE = E^j \ \forall j \in [k]$ 以及 diag$(D_1 + D_2 + ... + D_k) > 0$。由 diag$(E^0 + E^1 + ... + E^k) > 0$，可得 diag$(E^0 + E) > 0$。由于 $D_jE = E^j \ \forall j \in [k]$ 且 $(C_0, C_1D_1 + C_2D_2 + ... + C_kD_k)$ 具有列 W-性质，根据定理 2.2，我们有

$$\begin{aligned} \det(C_0E^0 + C_1E^1 + ... + C_kE^k) &= \det(C_0E^0 + C_1D_1E + ... + C_kD_kE) \\ &= \det(C_0E^0 + (C_1D_1 + ... + C_kD_k)E) \neq 0. \end{aligned}$$

因此，C 具有列 W-性质。证明完毕。 □

标准线性互补问题中的一个众所周知的结果是：在 Z 矩阵类中，严格半单调矩阵与 P 矩阵是等价的（参见 [1]中的定理 3.11.10）。类似地，我们证明以下定理。

定理 4.7. 设 C $=(C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$，使得 $C_0^{-1}C_i$ 对所有 $i \in [k]$都是一个 Z矩阵。那么以下命题等价。

(i) C 具有列 W性质。

(ii) C 具有 SSM-W 性质。

证明. (i) $\Longrightarrow$(ii)：由定理 4.3 得证。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：令 $\{D_1, D_2, ..., D_k\}$ 为所有满足 diag$(D_1 + D_2 + ... + D_k) > 0$ 的 n 阶非负对角矩阵构成的集合。根据定理 4.6，只需证明 $(C_0, C_1D_1 + C_2D_2 + ... + C_kD_k)$ 具有列 W性质。

由于 C 具有 SSM-W 性质，由定理 4.5 可知，$(C_0, C_1D_1 + ... + C_kD_k)$ 具有 SSM-W 性质。因此，由命题4.1，$\left(I, C_0^{-1}\left(C_1D_1 + ... + C_kD_k\right)\right)$ 具有 SSM-W 性质，并且 $C_0^{-1}\left(C_1D_1 + C_2D_2 + ... + C_kD_k\right)$ 是一个严格半单调矩阵。由于 $C_0^{-1}C_i$ 是一个 Z 矩阵，可得 $C_0^{-1}\left(C_1D_1 + C_2D_2 + ... + C_kD_k\right)$ 也是一个 Z 矩阵。因此，$C_0^{-1}\left(C_1D_1 + C_2D_2 + ... + C_kD_k\right)$是一个 P矩阵。于是，由定理2.3可知，$(C_0, C_1D_1 + C_2D_2 + ... + C_kD_k)$ 具有列 W性质。由此得证。□

推论4.8. 设 C $=(C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda_{n\times n}^{k+1}$，使得 $C_0^{-1}C_i$ 对所有 $i \in [k]$ 都是一个 Z矩阵。那么以下陈述等价。

(i) C 具有 SSM-W 性质。

(ii) 对所有 $q \in \mathbb{R}^n$ 和 d $\in \Lambda_{n\ ++}^{(k-1)}$，，EHLCP(C, d q) 都有唯一解。

证明。(i) $\Longrightarrow$ (ii)：由定理 4.7 和定理 2.2 可得。(ii) $\Longrightarrow$ (i)：由定理 2.2 和定理 4.3 可得。

□

在标准线性互补问题中， [3], 严格半单调矩阵保证线性互补问题存在解。现在我们证明，在扩展水平线性互补问题中也有相同的结论。

定理 4.9. 设 $\mathsf{C} = (C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$ 具有 SSM-W 性质，则对于所有 $q \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathsf{d} \in \Lambda_{n\,++}^{(k+1)}$，SOL(C, d, q) $\neq \emptyset$。

证明。由于 C 具有 SSM-W 性质，因此 C 具有 R_0-W 性质。根据定理 4.1，只需证明 deg(C, 0) $\neq 0$。为此，我们考虑如下同伦 $\Phi: \Lambda_n^{(k+1)} \times [0,1] \to \Lambda_n^{(k+1)}$:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = t \begin{bmatrix} C_0x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_k \end{bmatrix} + (1-t) \begin{bmatrix} C_0x_0 - \sum_{i=1}^k C_ix_i \\ x_0 \wedge x_1 \\ (d_1 - x_1) \wedge x_2 \\ (d_2 - x_2) \wedge x_3 \\ . \\ . \\ . \\ (d_{k-1} - x_{k-1}) \wedge x_k \end{bmatrix}.$$

令 $F(\mathbf{x}) := \Phi(\mathbf{x}, 0)$，且 $G(\mathbf{x}) := \Phi(\mathbf{x}, 1)$。我们首先证明，对于同伦 Φ 的某个 $t \in [0,1]\}$，零点集 $X = \{$ $\mathbf{x}: \Phi(\mathbf{x}\ t)\ = 0$ 仅包含零点。我们考虑以下几种情况。

情形 1：假设 $t = 0$ 或 $t = 1$。若 $t = 0$，则 $\Phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \implies F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$。由于 C 具有 SSM-$W$ 性质，根据引理 3.1，我们有 $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$。若 $t = 1$，则 $\Phi(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{0} \implies G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$。同样，由于 C 具有 SSM-$W$ 性质，C_0^{-1}存在，这意味着 G 是一个单射。因此，$G(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

情形 2：假设 $t \in (0, 1)$。那么 $\Phi(\mathbf{x}\ t) = \mathbf{0}$，由此可得

$$\begin{bmatrix} C_0x_0 - \sum_{i=1}^k C_ix_i \\ x_0 \wedge x_1 \\ (d_1 - x_1) \wedge x_2 \\ (d_2 - x_2) \wedge x_3 \\ . \\ . \\ . \\ (d_{k-1} - x_{k-1}) \wedge x_k \end{bmatrix} = -\alpha \begin{bmatrix} C_0x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_k \end{bmatrix}, \quad \text{where} \quad \alpha = \frac{t}{1-t} > 0. \tag{9}$$

由上式第二行可得

$$x_0 \wedge x_1 = -\alpha x_1 \implies \min\{x_0 + \alpha x_1, (1+\alpha)x_1\} = 0.$$

根据命题 2.1，我们得到 $x_1 \geq 0$ 以及 $(x_0 + \alpha x_1) * (1+\alpha)x_1 = 0$，这意味着 $x_0 * x_1 \leq 0$。令 $\Delta := \{i \in [n] : (x_1)_i > 0\}$。因此，我们有

$$(x_0)_i = \begin{cases} \leq 0 & \text{if } i \in \Delta \\ \geq 0 & \text{if } i \notin \Delta \end{cases} \quad \text{and} \quad (x_1)_i = \begin{cases} > 0 & \text{if } i \in \Delta \\ = 0 & \text{if } i \notin \Delta \end{cases}. \tag{10}$$

由方程 9 的第三行可得 $(d_1 - x_1) \wedge x_2 = -\alpha x_2$，这等价于

$$\min\{d_1 - x_1 + \alpha x_2, (1+\alpha)x_2\} = 0.$$

由此可得 $x_2 \geq 0$ 和 $(d_1 - x_1 + \alpha x_2) * (1+\alpha)x_2 = 0$。由于 $d_1 > 0$，并根据方程 10 中的最后一项，我们有

$$(x_2)_i = \begin{cases} \geq 0 \text{ if } i \in \Delta \\ = 0 \text{ if } i \notin \Delta \end{cases}.$$

由此可得 $x_0 * x_2 \leq 0$。对其余各行继续采用类似的论证，可得

$$x_j \geq 0 \text{ and } x_0 * x_j \leq 0 \ \forall j \in [k].$$

由方程 9 的第一行可知，向量 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_k)$ 满足

$$C_0(1+\alpha)x_0 = \sum_{i=1}^{k} C_i x_i \text{ and } x_j \geq 0,\ x_0 * x_j \leq 0,\ j \in [k].$$

因此，$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 作为 C 具有 SSM-W 性质。

由这两种情况可知， X 仅包含零向量。根据度的同伦不变性（D2），对于任意包含 0 的有界开集，有 $\deg(\Phi(\mathbf{x}, 0), \Omega, 0) = \deg(\Phi(\mathbf{x}, 1), \Omega\ \mathbf{0})$。由于 G是连续的一一函数，根据命题 2.4，可得

$$\deg\big(\mathbf{C}, \mathbf{0}\big) = \deg\big(\Phi(\mathbf{x}, 0), \Omega, \mathbf{0}\big) = \deg\big(F, \Omega, \mathbf{0}\big) = \deg\big(G, \Omega, \mathbf{0}\big) \neq 0.$$

证明至此完成。 □

现在回顾一下，若矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个 M 矩阵，且它是 Z 矩阵，并且 $A^{-1}(\mathbb{R}^n_+) \subseteq \mathbb{R}^n_+$.。我们证明当 $q \geq 0$ 且 $\mathbf{d} \in \Lambda^{(k-1)}_{n\ ++}$, 时，扩展水平线性互补问题具有唯一性。

定理 4.10. 设 $\mathbf{C} = (C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda^{(k+1)}_{n\times n}$ 具有 SSM-W 性质。若 C_0 是一个 M矩阵，则对于每个 $q \in \mathbb{R}^n_+$ 以及每个 $\mathbf{d} \in \Lambda^{(k-1)}_{n\ ++}$, ， EHLCP(C, d q) 都有唯一解。

证明。设 $q \in \mathbb{R}^n_+$ and $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ..., d_{k-1}) \in \Lambda^{(k-1)}_{n\ ++}$, 。我们首先证明 $(C_0^{-1}q, 0, ..., 0) \in$属于 SOL(C, d q)。由于 C_0是一个 M矩阵，且 $q \in \mathbb{R}^n_+$，因此我们有 $C_0^{-1}q \geq 0$。若令 $\mathbf{y} = (y_0, y_1, ..., y_k)$ $:= (C_0^{-1}q, 0, ..., 0) \in \Lambda^{(k+1)}_n$，则很容易看出 $(y_0, y_1, ..., y_k)$ 满足

$$C_0 y_0 = q + \sum_{i=1}^{k} C_i y_i,\ y_0 \wedge y_1 = 0 \text{ and } (d_j - y_j) \wedge y_{j+1} = 0 \ \ \forall j \in [k-1].$$

因此 $(C_0^{-1}q, 0, ..., 0) \in$属于 SOL(C, d q)。

设 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_k) \in \Lambda^{(k+1)}_n$是 EHLCP($C, q, d$) 的另一个解。那么 ,

$$C_0 x_0 = q + \sum_{i=1}^{k} C_i x_i,\ x_0 \wedge x_1 = 0,\ (d_j - x_j) \wedge x_{j+1} = 0\ \forall j \in [k-1]. \tag{11}$$

由引理 3.1，我们有

$$C_0 x_0 = q + \sum_{i=1}^{k} C_i x_i \text{ and } x_0 \wedge x_j = 0\ \forall\ j \in [k]. \tag{12}$$

令 $\mathbf{z} := \mathbf{x} - \mathbf{y}$，则 $\mathbf{z} = (x_0 - C_0^{-1}q, x_1, x_2, .., x_k)$。经过简单计算，由方程 12 可得

$$C_0(x_0 - C_0^{-1}q) = \sum_{i=1}^{k} C_i x_i$$

and

$$x_j \geq 0,\ \ (x_0 - C_0^{-1}q) * x_j = x_0 * x_j - C_0^{-1}q * x_j = -C_0^{-1}q * x_j \leq 0\ \forall j \in [k].$$

由于 C 具有 SSM-W性质，$\mathbf{z} = \mathbf{0}$ 这意味着 $(x_0, x_1, ..., x_k) = (C_0^{-1}q, 0, ..., 0)$。证明至此完成。

□

5 连通解集与列 W_0 性质

本节给出 EHLCP 的连通解集的充要条件。

定义 5. 设 $\mathbf{C} = (C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$。如果对于所有 $q \in \mathbb{R}^n$ 以及所有 $\mathbf{d} \in \Lambda_{n\,++}^{(k-1)}$，，SOL(C, d q) 都是连通的，则称 C 是连通的。

现在回顾一些定义和结果，以便进一步展开讨论。

Defi定义 6. [22] $\mathbb{R}^n$ 的子集称为半代数集，如果它可以表示为 s,

$$S = \bigcup_{u=1}^{s} \bigcap_{v=1}^{r_u} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; f_{u,v}(\mathbf{x}) *_{uv} 0\},$$

其中，对于所有 $u \in [s]$ 以及所有 $v \in [r_u]$、$*_{uv} \in \{>, =\}$ 和 $f_{u,\,v}$ 属于所有实多项式构成的空间。

定理 5.1（[22]）。设 S 为半代数集。当且仅当 S 路径连通时，S 连通。

引理 5.2。SOL(C, d q) 是半代数集。

证明。由 SOL(C, d q) 的定义可知。 □

下面的结果给出了当 C_0 为 M矩阵时存在连通解的一个必要条件。

定理 5.3。设 $C_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为 M矩阵。如果 $\mathbf{C} = (C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$ 连通，则对于所有$q \in \mathbb{R}^n_{++}$ 以及所有 $\mathbf{d} \in \Lambda_{n\,++}^{(k-1)}$，SOL(C, d q) $= \{(C_0^{-1}q, 0, ..., 0)\}$。

证明。设 $q \in \mathbb{R}^n_{++}$ 且 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ..., d_{k-1}) \in \Lambda_{n\,++}^{(k-1)}$。由定理 4.10 的证明可知，$\mathbf{x} = (C_0^{-1}q, 0, ..., 0) \in$ SOL(C, d q)。现在证明 x 是 EHLCP(C, d q) 的唯一解。

反设不然。设 y 是 EHLCP(C, d q) 的另一个解。由于 SOL(C, d q) 是连通的，根据引理 5.2 和定理 5.1，它是路径连通的。因此，存在一条路径 $\gamma = (\gamma^0, \gamma^1, ..., \gamma^k) : [0, 1] \to$ SOL(C, d q)，使得

$$\gamma(0) = \mathbf{x},\ \gamma(1) = \mathbf{y} \text{ and } \gamma(t) \neq \mathbf{x}\ \forall t > 0.$$

令 $\{t_m\} \subseteq (0, 1)$ 为一个序列，使得 $t_m \to 0$ 当 $m \to \infty$。那么，由于 γ 的连续性，当 $m \to \infty$ 时，$\gamma(t_m) \to \gamma(0) = \mathbf{x}$。由于 $\left(\gamma^0(t_m)\ \gamma^1(t_m)\ ...\gamma^k(t_m)\right) \in$ SOL(C, d q),

$$C_0\gamma^0(t_m) = q + \sum_{i=1}^{k} C_i\gamma^i(t_m),$$
$$\gamma^0(t_m) \wedge \gamma^1(t_m) = 0 \text{ and } \left(d_j - \gamma^j(t_m)\right) \wedge \gamma^{(j+1)}(t_m) = 0\ \forall j \in [k-1].$$

现在我们声称存在 $\{t_{m_l}\}$ 的一个子序列 $\{t_m\}$，使得

$$\left(\gamma^j(t_{m_l})\right)_i \neq 0, \text{ for some } j \in [k] \text{ and for some } i \in [n].$$

假设该命题不成立。这意味着，对于给定的任意子序列 $\{t_{ml}\}$ of $\{t_m\}$，存在$m_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $m_l \geq m_0$，都有

$$\left(\gamma^j(t_{m_l})\right)_i = 0\ \ \forall i \in [n]\ \ \forall j \in [k].$$

因此，对于所有 $j \in [k]$， $\gamma^j(t_m)$ 都是最终为零的序列。这意味着存在一个自然数 m_0 ，使得

$$\gamma^1(t_m) = \gamma^2(t_m) = ... = \gamma^k(t_m) = 0 \quad \forall m \geq m_0.$$

由于 $\left(\gamma^0(t_m)\ \gamma^1(t_m)\ ...\gamma^k(t_m)\right) \in$ 解集(C, d q)，我们得到 $\gamma^0(t_m) = C_0^{-1}(q) \quad \forall m \geq m_0$。这说明，对于所有 $m \geq m_0$ ， $\gamma(t_m) =$ x，这与以下事实矛盾：对于所有 m， $\gamma(t_m) \neq$ x。因此，我们的论断成立。不失一般性，假设序列 $\{t_m\}$ 本身满足该条件

$$\left(\gamma^j(t_m)\right)_i \neq 0, \text{ for some } j \in [k] \text{ and for some } i \in [n].$$

现在我们考虑 j 的以下几种可能情况。

情形 1：如果 $j = 1$，则 $(\gamma^0(t_m))_i(\gamma^1(t_m))_i = 0$ ，从而得到 $(\gamma^0(t_m))_i = 0$. 这意味着

$$0 = \lim_{m\to\infty} \gamma^0(t_m)_i = (C_0^{-1}q)_i.$$

但是，由于 C_0 是一个 M 矩阵，$(C_0^{-1}q) > 0$ 。这是不可能的。因此， $j \neq 1$。

情形 2：如果 $2 \leq j \leq k$，则有 $(d_{j-1} - \gamma^{j-1}(t_m))_i(\gamma^j(t_m))_i = 0$ ，这给出 $(d_{j-1} - \gamma^{j-1}(t_m))_i = 0$. 取极限 $m \to \infty$,

$$0 = \lim_{m\to\infty}(d_{j-1} - \gamma^{j-1}(t_m))_i = (d_{j-1})_i - (\gamma^{j-1}(0))_i = (d_{j-1})_i > 0.$$

这是不可能的。

在这两种情况下，都不存在这样的 j exists。这与事实矛盾。因此， x $= (C_0^{-1}q, 0, ..., 0)$ 是 EHLCP(C, d q) 的唯一解。 □

以下结果给出了 EHLCP 存在连通解的一个充分条件。

定理5.4. 设 C $:= (C_0, C_1, ..., C_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$ 具有列 W_0-性质。若 SOL(C, d q) 有一个有界连通分支，则 SOL(C, d q) 是连通的。

证明. 若 SOL(C, d q) $= \emptyset$，则无需证明。设 SOL(C, d q) $\neq \emptyset$ 且 A 是 SOL(C, d q) 的一个连通分支。若 SOL(C, d q) $= A$，则结论成立。假设 SOL(C, d q) $\neq A$. 那么存在 y $= (y_0, y_1, .., y_k) \in$ SOL(C, d q) $\setminus A$。由于 A 是 SOL(C, d q) 的一个有界连通分支，我们可以找到一个有界开集 Ω $\subseteq \Lambda_n^{(k+1)}$，它包含 A 且与其他连通分支不相交。因此 y $\notin$ Ω 且 ∂(Ω) $\cap$ SOL(C, d q) $= \emptyset$。由于 C 具有列 W_0-性质，存在 N $:= (N_0, N_1, ..., N_k) \in \Lambda_{n\times n}^{(k+1)}$，使得对于每个 $\epsilon > 0$， C $+ \epsilon$N $:= (C_0 + \epsilon N_0, C_1 + \epsilon N_1,$ $..., C_k + \epsilon N_k)$ 都具有列 W- 性质。

令 z $= (z_0, z_1, ..., z_k) \in A$ and $\epsilon > 0$，我们将函数 H_1、 H_2 and H_3 定义如下：

$$H_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} C_0x_0 - \sum_{i=1}^k C_ix_i - q \\ x_0 \wedge x_1 \\ (d_1 - x_1) \wedge x_2 \\ . \\ . \\ . \\ (d_{k-1} - x_{k-1}) \wedge x_k \end{bmatrix},$$

$$H_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (C_0 + \epsilon N_0)x_0 - \sum_{i=1}^k (C_i + \epsilon N_i)x_i + (\sum_{i=1}^k \epsilon N_i y_i - \epsilon N_0 y_0 - q) \\ x_0 \wedge x_1 \\ (d_1 - x_1) \wedge x_2 \\ . \\ . \\ . \\ (d_{k-1} - x_{k-1}) \wedge x_k \end{bmatrix},$$

$$H_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (C_0+\epsilon N_0)x_0 - \sum_{i=1}^{k}(C_i+\epsilon N_i)x_i + (\sum_{i=1}^{k}\epsilon N_i z_i - \epsilon N_0 z_0 - q) \\ x_0 \wedge x_1 \\ (d_1 - x_1) \wedge x_2 \\ . \\ . \\ . \\ (d_{k-1} - x_{k-1}) \wedge x_k \end{bmatrix}.$$

将 x = y 代入 H_2(x)，并将 x = z 代入 H_1(x) 和 H_3(x)，可得

$$H_1(\mathbf{z}) = H_2(\mathbf{y}) = H_3(\mathbf{z}) = 0.$$

由于度的邻近性 (D3)，当 ϵ 接近零时，deg(H_1, Ω, 0)= deg(H_2, Ω, 0)= deg(H_3, Ω, 0)。由于 z $\in$ Ω 是 H_3(x) = 0 的一个解，且 C $+\epsilon$N 具有列 W- 性质，根据定理 4.3 和 4.9，我们得到 deg(H_3, Ω, 0) $\neq 0$ 。由于 deg(H_2, Ω, 0)= deg(H_3, Ω, 0)，因此 deg(H_2, Ω, 0) $\neq 0$。这意味着，若令 q_2: $= q+\epsilon N_0 y_0 - \sum_{i=1}^{k}\epsilon N_i y_i$，则 EHLCP(C $+\epsilon$N, d q_2) 在 Ω 中必有一个解。由于 C $+\epsilon$N 具有列 W-性质，根据定理 2.2，EHLCP(C $+\epsilon$N, d q_2) 有唯一解，且该解必定等于 y。因此，y $\in$ Ω。这就产生了矛盾。因此 SOL(C, d q) $= A$。所以 SOL(C, d q) 是连通的。 □

6 结论

本文介绍了 R_0-W 性质和 SSM-W 性质，并研究了当底层矩阵集具有这些性质时 EHLCP 的存在唯一性结果。最后，我们给出了 EHLCP 解集连通性的充要条件。

利益冲突声明

作者不存在利益冲突。

致谢

第一作者是 CSIR-SRF 研究员，谨此感谢科学与工业研究委员会（CSIR）提供的经费支持。

参考文献

[1] R.W. Cottle、J.-S. Pang、R.E. Stone，《线性互补问题》，应用数学经典丛书，费城：SIAM；2009。[2] Facchinei, F., Pang, J.S.《有限维变分不等式与互补问题》。纽约：施普林格；2003。[3] M. S. Gowda：《度理论在线性互补问题中的应用》，《数学运筹学研究》18,868-879(1993)[4] R. Sznajder, M.S. Gowda：P_0 性质和 P 性质的推广：扩展的垂直与水平线性互补问题，《线性代数及其应用》695-715(1995)

[5] A. N. Willson：P_0 矩阵概念的一个有用推广，《数值数学》62-70（1971）)

[6] Camlibel M.K. 和 Schumacher J.M.：一类分段线性动力系统解的存在唯一性：《线性代数及其应用》351-352；147-184（2004）[7] I. Kaneko：具有 nby 2nP 矩阵的线性互补问题，《数学规划研究》120-141（1978）[8] Chi, X.、Gowda, M.S.、Tao, J.：欧几里得约当代数上的加权水平线性互补问题。《全球优化杂志》73；153-169（2019）[9] R.W. Cottle、G.B. Dantzig：线性互补问题的一个推广，《组合理论杂志》；8；79-90（1970）[10] O.L. Mangasarian、J.S. Pang：扩展线性互补问题，《SIAM 矩阵分析与应用杂志》16(2)；359-368（1995）[11] B.D. Schutter、B.D. Moor：扩展线性互补问题，《数学规划》71；289-325（1995）[12] R.A. Horn、C.R. Johnson：《矩阵分析》。剑桥：剑桥大学出版社；（1985）[13] F. Mezzadri、E. Galligani：一类水平线性互补问题的分裂方法，《优化理论与应用杂志》；180；500-517（2019）[14] Y. Zhang：关于一类用于水平线性互补问题的不可行内点法的收敛性，《SIAM 优化杂志》4(1)；208-227（1994）[15] M. Gowda：将单调水平线性互补问题化为线性互补问题，《应用数学快报》8(1)；97-100（1995）。[16] R.H. T¨ut¨unc¨u、M.J. Todd：水平线性互补问题的化简，《线性代数及其应用》；223–224；717-729（1995）。[17] Sznajder, R.：垂直和水平线性互补问题的度理论分析，博士论文，马里兰大学巴尔的摩县分校（1994）。[18] D. Ralph：水平线性互补问题的稳定同伦方法，《控制与控制论》31；575-600（2002）。[19] C. Jones、M.S. Gowda：关于线性互补问题解集的连通性，《线性代数及其应用》；272；33-44（1998）。[20] G.S.R. Murthy、T. Parthasarathy、B. Sriparna：关于线性互补问题的解集，《SIAM 矩阵分析与应用杂志》；21(4)；1229-1235（2000）。[21] T. Rapcsak：关于线性互补系统解集的连通性，《优化理论与应用杂志》；80(3)；501-512（1994）。[22]Basu S、Pollack R、Roy MF.：《实代数几何中的算法》。第10卷。柏林：施普林格出版社；（2006）