arXiv:2301.01491v1 [math.NA] 4 Jan 2023

用于松弛微形态模型的高阶伯恩斯坦-贝塞尔和内德莱克有限元

AdamSky[1], Ingo Muench[2], Gianluca Rizzi[3] 和 Patrizio Neff[4]

2023年1月5日

摘要

松弛微形态模型是一个在空间$X = [H^1]^3 \times [H(\text{curl})]^3$中适定的广义连续体模型。因此，该模型的有限元公式依赖于 H^1-保形子空间和内德莱克单元，以求解相应变分问题的离散解。本研究将近期提出的多面体模板方法应用于内德莱克单元的构造，并结合伯恩斯坦-贝塞尔多项式和对偶数来计算该模型的 hp- 有限元解。伯恩斯坦-贝塞尔多项式凭借其自然因式分解为单变量伯恩斯坦基函数的特性，使组装过程达到最优复杂度。本研究进一步利用对偶数同时计算其函数值及导数，拓展了这一特性。将多面体模板方法应用于内德莱克基函数的构造，使其能够直接继承底层伯恩斯坦-贝塞尔基的最优复杂度。我们介绍伯恩斯坦-贝塞尔基及其向单变量伯恩斯坦基函数的因式分解、通过对偶数实现自动微分的原理，以及基于伯恩斯坦-贝塞尔多项式和多面体模板方法构造内德莱克单元的详细过程。此外，我们还提出了相应的狄利克雷边界条件嵌入技术，并重点讨论一致耦合条件。通过松弛微形态模型的示例展示了这些单元的性能。

关键词： N´ed´elec 单元、Bernstein-B´ezier 单元、松弛微观连续体模型、对偶数、自动微分、hp有限元法、广义连续体。

1 引言

在计算具有显著微结构的材料时，一个挑战是必须对整个区域的复杂几何形状进行建模，才能正确捕捉其精细的运动学特征。换言之，必须考虑超材料中的单胞几何或多孔介质中的各种孔洞形状，才能验证模型的适用性。自然，这与有限元模拟中的离散分辨率有关，并会导致计算时间延长。

松弛微形态模型 [35] 通过引入具有增强运动学的连续体模型，考虑了微结构所产生的独立畸变，从而提供了一种替代方法。因此，对于每个材料点，该模型除了标准位移场 $\mathbf{u}$之外，还引入微畸变场 $\boldsymbol{P}$。由此，每个材料点都具有十二个自由度，实际上成为一个具有自身定向的仿射可变形微体。与 Eringen 和 Mindlin 提出的经典微形态模型 [17]不同

[1]通讯作者：Adam Sky，结构力学、静力学与动力学研究所，多特蒙德工业大学，August-Schmidt-Str. 8, 44227 Dortmund, Germany，电子邮箱：adam.sky@tu-dortmund.de[2]Ingo Muench，结构力学、静力学与动力学研究所，多特蒙德工业大学，August-Schmidt-Str. 8, 44227 Dortmund, Germany，电子邮箱：ingo.muench@tu-dortmund.de[3]Gianluca Rizzi，结构力学、静力学与动力学研究所，多特蒙德工业大学，August-Schmidt- Str. 8, 44227 Dortmund, Germany，电子邮箱：gianluca.rizzi@tu-dortmund.de[4]Patrizio Neff，非线性分析与建模教席，数学学院，杜伊斯堡-埃森大学，Thea- Leymann Str. 9, 45127 Essen, Germany，电子邮箱：patrizio.neff@uni-due.de

松弛微形态模型不采用微畸变的完整梯度 D$\boldsymbol{P}$作为其能量泛函的一部分，而是采用其反对称部分——旋度 Curl $\boldsymbol{P}$，并将其称为微位错。因此，微位错 Curl $\boldsymbol{P}$ 仍为二阶张量，而 D$\boldsymbol{P}$ 是三阶张量。此外，该模型借助特征长度尺度参数 L_{c}，实现了具有显著微结构的材料与均匀材料之间的转换；该参数决定了微结构的影响。在高度均匀的材料中，特征长度尺度参数趋近于零 $L_{\mathrm{c}} \to 0$；对于具有显著微结构的材料，其数值则与底层晶胞几何结构的尺寸有关。近期研究表明，该模型在模拟带隙超材料 [7, 10, 13, 27, 28] 以及屏蔽弹性波方面效果显著 [4, 40, 41, 46]。此外，弯曲 [43], 、扭转 [42], 、剪切 [44], 和伸展 [45]运动学的解析解均已得出。

我们注意到，自由能泛函中旋度算子的使用会直接影响相关变分问题存在唯一性所需的适当希尔伯特空间。具体而言，松弛微形态模型在 $\{\mathbf{u}\ \boldsymbol{P}\} \in X\ = [H^{\,1}]^3 \times [H(\text{旋度})]^3$ [18, 34], 中适定，尽管对于某些光滑度的数据 [22, 38]，微畸变的正则性可以提高到 $\boldsymbol{P} \in [H^{\,1}]^{3\times 3}$。如 [52], 所示，$X$ 空间依据 Lax-Milgram定理保证适定性，因此，H^1-保形子空间和 N´ed´elec 单元 [9, 30, 31] 也继承了适定性。

在本文中，我们采用 [50] 中提出的多面体模板方法，构造基于伯恩斯坦多项式 [23] 的高阶 N´ed´elec 单元，并将该公式应用于松弛微形态模型。选择伯恩斯坦多项式是因为其在组装过程 [1] 中具有最优复杂度特性。我们进一步利用对偶数 [16] 同时计算基函数及其导数的值，以增强这一特性。多面体模板方法还可将这一特性扩展到 N´ed´elec 基函数的组装中，从而实现快速计算。关于基于勒让德多项式构造高阶单元的公式，可参见 [48, 54, 58]。低阶 N´ed´elec 单元的构造见 [5, 51] ，而关于其在松弛微形态模型中的应用，具体可参见 [47, 49, 52, 53]。

本文结构如下。首先，我们介绍松弛微形态模型及其关于特征长度尺度参数 L_{c} 的极限情形，随后将其简化为反平面剪切模型 [55]。接下来，我们简要讨论用于自动微分的伯恩斯坦多项式和对偶数。然后介绍适用于三角形和四面体的 B´ézier 多项式基及其因式分解，并着重说明其与对偶数的兼容性。我们将考察一个二维单元反平面剪切数值算例、一个用于验证圆柱弯曲收敛性的三维算例，以及一个关于模型随特征长度尺度参数 L_{c} 变化时行为的基准测试。最后，我们给出结论并展望未来工作。

本文将始终使用以下定义：

- 向量用粗体字母表示。非粗体字母表示标量；
- 一般而言，公式采用笛卡尔基定义，其中基向量记为 $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$和$\mathbf{e}_3$；
- 物理空间中的三维区域用 $V \subset \mathbb{R}^3$ 表示。相应的参考域记为 Ω；
- 类似地，在二维情形中，我们用 $A \subset \mathbb{R}^2$ 表示物理域，用 Γ 表示参考域；
- 物理域上的曲线记为 s，而参考域中的曲线记为 μ；
- 物理域中的切向量和法向量分别表示为$\mathbf{t}$ 和$\mathbf{n}$。它们在参考域中的对应量为：切向量 $\boldsymbol{\tau}$，法向量 $\boldsymbol{\nu}$。

2 松弛微观形态模型

松弛微形态模型 [35] 由一个自由能泛函支配，该泛函包含位移场的梯度$\mathbf{Du}$、微畸变 $\boldsymbol{P}$ 以及微畸变的旋度

$$
\begin{aligned}
I(\mathbf{u},\boldsymbol{P}) = \frac{1}{2}\int_V &\langle \operatorname{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P}),\, \mathbb{C}_\mathrm{e}\operatorname{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})\rangle + \langle \operatorname{sym}\boldsymbol{P},\, \mathbb{C}_\mathrm{micro}\operatorname{sym}\boldsymbol{P}\rangle \\
&+ \langle \operatorname{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P}),\, \mathbb{C}_\mathrm{c}\operatorname{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})\rangle + \mu_\mathrm{macro}L_\mathrm{c}^2\langle \operatorname{Curl}\boldsymbol{P},\, \mathbb{L}\operatorname{Curl}\boldsymbol{P}\rangle \,\mathrm{d}V \\
&- \int_V \langle \mathbf{u},\, \mathbf{f}\rangle + \langle \boldsymbol{P},\, \boldsymbol{M}\rangle \,\mathrm{d}V \to \min \quad \text{w.r.t.} \quad \{\mathbf{u},\boldsymbol{P}\}\,,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

其中，二阶张量的旋度算子按行定义为

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Curl}\boldsymbol{P} &= \begin{bmatrix} \operatorname{curl}(\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13}\end{bmatrix}) \\ \operatorname{curl}(\begin{bmatrix} P_{21} & P_{22} & P_{23}\end{bmatrix}) \\ \operatorname{curl}(\begin{bmatrix} P_{31} & P_{32} & P_{33}\end{bmatrix}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{13,y}-P_{12,z} & P_{11,z}-P_{13,x} & P_{12,x}-P_{11,y} \\ P_{23,y}-P_{22,z} & P_{21,z}-P_{23,x} & P_{22,x}-P_{21,y} \\ P_{33,y}-P_{32,z} & P_{31,z}-P_{33,x} & P_{32,x}-P_{31,y}\end{bmatrix}, \\
\operatorname{curl}\mathbf{p} &= \nabla\times\mathbf{p}\,, \qquad \mathbf{p}:\overline{V}\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\,,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

而 $\operatorname{curl}(\cdot)$ 是向量旋度算子。位移场和微畸变场是参考域上的函数

$$
\mathbf{u}:\overline{V}\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\,, \qquad\qquad \boldsymbol{P}:\overline{V}\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^{3\times3}\,.
\tag{2.3}
$$

张量 $\mathbb{C}_\mathrm{e}$， $\mathbb{C}_\mathrm{micro}$，$\mathbb{L}\in\mathbb{R}^{3\times3\times3\times3}$ 是标准的正定四阶弹性张量。对于各向同性材料，它们的形式为

$$
\mathbb{C}_\mathrm{e} = \lambda_\mathrm{e}\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} + 2\mu_\mathrm{e}\,\mathbb{J}\,, \qquad\qquad \mathbb{C}_\mathrm{micro} = \lambda_\mathrm{micro}\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} + 2\mu_\mathrm{micro}\,\mathbb{J}\,.
\tag{2.4}
$$

其中，$\mathbb{1}$ 是二阶单位张量， $\mathbb{J}$ 是四阶单位张量。四阶张量$\mathbb{C}_\mathrm{c}\in\mathbb{R}^{3\times3\times3\times3}$ 是一个半正定材料张量，与 Cosserat 微极连续体有关，并计入无穷小转动 $\mathbb{C}_\mathrm{c}:\mathfrak{so}(3)\to\mathfrak{so}(3)$，其中 $\mathfrak{so}(3)$ 是反对称矩阵空间。

对于各向同性材料，有 $\mathbb{C}_\mathrm{c}=2\mu_\mathrm{c}\,\mathbb{J}$，其中 $\mu_\mathrm{c}\geq0$ 称为 Cosserat 偶应力模量。此外，为简便起见，以下假设 $\mathbb{L}=\mathbb{J}$ 。宏观剪切模量记为 μ_macro ，而L_c 表示由微结构几何形态决定的特征长度尺度。力和微力矩分别由$\mathbf{f}$ 和 $\boldsymbol{M}$给出。

平衡状态出现在能量泛函的极小值处，该泛函严格凸（对 $\mathbb{C}_\mathrm{c}\equiv0$ 也如此）。因此，我们考虑关于其参数的变分，即位移和微畸变。对位移场$\mathbf{u}$ 取能量泛函的变分，得到

$$
\delta_u I = \int_V \langle \operatorname{sym}\mathrm{D}\delta\mathbf{u},\, \mathbb{C}_\mathrm{e}\operatorname{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})\rangle + \langle \operatorname{skew}\mathrm{D}\delta\mathbf{u},\, \mathbb{C}_\mathrm{c}\operatorname{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})\rangle - \langle\delta\mathbf{u},\,\mathbf{f}\rangle\,\mathrm{d}V = 0\,.
\tag{2.5}
$$

对微畸变 $\boldsymbol{P}$ 取变分，得到

$$
\begin{aligned}
\delta_P I = \int_V &\langle \operatorname{sym}\delta\boldsymbol{P},\, \mathbb{C}_\mathrm{e}\operatorname{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})\rangle + \langle \operatorname{skew}\delta\boldsymbol{P},\, \mathbb{C}_\mathrm{c}\operatorname{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})\rangle \\
&- \langle \operatorname{sym}\delta\boldsymbol{P},\, \mathbb{C}_\mathrm{micro}\operatorname{sym}\boldsymbol{P}\rangle - \mu_\mathrm{macro}L_\mathrm{c}^2\langle \operatorname{Curl}\delta\boldsymbol{P},\, \operatorname{Curl}\boldsymbol{P}\rangle + \langle\delta\boldsymbol{P},\,\boldsymbol{M}\rangle\,\mathrm{d}V = 0\,.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

从总变分中，我们提取出双线性型

$$
\begin{aligned}
a(\{\delta\mathbf{u},\delta\boldsymbol{P}\},\{\mathbf{u},\boldsymbol{P}\}) = \int_V &\langle \operatorname{sym}(\mathrm{D}\delta\mathbf{u}-\delta\boldsymbol{P}),\, \mathbb{C}_\mathrm{e}\operatorname{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})\rangle + \langle \operatorname{sym}\delta\boldsymbol{P},\, \mathbb{C}_\mathrm{micro}\operatorname{sym}\boldsymbol{P}\rangle \\
&+ \langle \operatorname{skew}(\mathrm{D}\delta\mathbf{u}-\delta\boldsymbol{P}),\, \mathbb{C}_\mathrm{c}\operatorname{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})\rangle + \mu_\mathrm{macro}L_\mathrm{c}^2\langle \operatorname{Curl}\delta\boldsymbol{P},\, \operatorname{Curl}\boldsymbol{P}\rangle\,\mathrm{d}V\,,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

以及载荷的线性型

$$
l(\{\delta\mathbf{u},\delta\boldsymbol{P}\}) = \int_V \langle\delta\mathbf{u},\,\mathbf{f}\rangle + \langle\delta\boldsymbol{P},\,\boldsymbol{M}\rangle\,\mathrm{d}V\,.
\tag{2.8}
$$

对式 (2.5) 应用分部积分可得

$$\int_{\partial V} \langle \delta\mathbf{u}\,, [\mathbb{C}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P}) + \mathbb{C}_{\mathrm{c}}\,\mathrm{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})]\,\mathbf{n}\rangle\,\mathrm{d}A - \int_V \langle \delta\mathbf{u}\,, \mathrm{Div}[\mathbb{C}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P}) + \mathbb{C}_{\mathrm{c}}\,\mathrm{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})] - \mathbf{f}\rangle\,\mathrm{d}V = 0\,. \tag{2.9}$$

同样，对式 (2.6) 进行分部积分可得

$$\int_V \langle \delta\boldsymbol{P},\, \mathbb{C}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P}) + \mathbb{C}_{\mathrm{c}}\,\mathrm{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P}) - \mathbb{C}_{\mathrm{micro}}\,\mathrm{sym}\,\boldsymbol{P} - \mu_{\mathrm{macro}}L_{\mathrm{c}}^2\,\mathrm{Curl}\,\mathrm{Curl}\,\boldsymbol{P} + \boldsymbol{M}\rangle\,\mathrm{d}V - \mu_{\mathrm{macro}}L_{\mathrm{c}}^2\int_{\partial V}\langle \delta\boldsymbol{P},\,\mathrm{Curl}\,\boldsymbol{P}\times\mathbf{n}\rangle\,\mathrm{d}A = 0\,. \tag{2.10}$$

通过拆分边界，从式（2.9）和式（2.10）中提取强形式。

$$A = A_D \cup A_N\,, \qquad\qquad A_D \cap A_N = \emptyset\,, \tag{2.11}$$

带有嵌入式边界条件的狄利克雷边界，以及带有自然边界条件的诺伊曼边界，可从式 (2.9) 和式 (2.10) 中提取强形式，使得诺伊曼边界上不施加牵引力

$$-\mathrm{Div}[\mathbb{C}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P}) + \mathbb{C}_{\mathrm{c}}\,\mathrm{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})] = \mathbf{f} \quad \text{in} \quad V\,, \tag{2.12a}$$

$$-\mathbb{C}_{\mathrm{e}}\,\text{对称}(\mathbf{Du}-\boldsymbol{P}) - \mathbb{C}_{\mathrm{c}}\,\text{反对称}(\mathbf{Du}-\boldsymbol{P}) + \mathbb{C}_{\mathrm{micro}}\,\text{对称}\ \boldsymbol{P} + \mu_{\mathrm{macro}}\,L_{\mathrm{c}}^2\,\text{旋度 旋度}\ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} \quad \text{in} \quad V\,, \tag{2.12b}$$

$$\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{u}} \quad \text{on} \quad A_D^u\,, \tag{2.12c}$$

$$\boldsymbol{P}\times\mathbf{n} = \widetilde{\boldsymbol{P}}\times\mathbf{n} \quad \text{on} \quad A_D^P\,, \tag{2.12d}$$

$$[\mathbb{C}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P}) + \mathbb{C}_{\mathrm{c}}\,\mathrm{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})]\,\mathbf{n} = 0 \quad \text{on} \quad A_N^u\,, \tag{2.12e}$$

$$\mathrm{Curl}\,\boldsymbol{P}\times\mathbf{n} = 0 \quad \text{on} \quad A_N^P\,. \tag{2.12f}$$

力应力张量 $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} := \mathbb{C}_{\mathrm{e}}$ 对称$(\mathbf{Du}-\boldsymbol{P}) + \mathbb{C}_{\mathrm{c}}$ 反对称$(\mathbf{Du}-\boldsymbol{P})$ 当且仅当 $\mathbb{C}_{\mathrm{c}} \equiv 0$ 时是对称的，这种情况是允许的。问题 2.12 表示一个与线弹性耦合的张量型麦克斯韦问题。我们注意到，微畸变的狄利克雷边界条件仅控制其切向分量。如何在不影响位移的情况下控制材料点的微运动尚不明确。因此，松弛微形态模型引入了所谓的一致耦合条件 [11]

$$\boldsymbol{P}\times\mathbf{n} = \mathrm{D}\widetilde{\mathbf{u}}\times\mathbf{n} \quad \text{on} \quad A_D^P\,, \tag{2.13}$$

其中，狄利克雷边界 $\widetilde{\mathbf{u}}$上的规定位移会自动决定同一边界上微畸变的切向分量。因此，一致耦合条件施加了定义 $A_D = A_D^u = A_D^P$ 和 $A_N = A_N^u = A_N^P$ （见图 2.1）。此外，一致耦合条件取代了式 (2.12d)。由于针对不相容张量场 [24–26, 36]的广义 Korn 不等式，问题 2.12 中的方程组在 $\mathbb{C}_{\mathrm{c}} \equiv 0$ 下仍然适定。该不等式要求微畸变场 $A_D^P \neq \emptyset$存在一个非零的狄利克雷边界，而一致耦合条件保证了这一点。

2.1 特征长度尺度参数的极限——真正的双尺度模型

在松弛微形态模型中，特征长度 L_{c} 充当宏观尺度与微观尺度之间的缩放参数。这一特性为松弛微形态模型所独有，使该理论能够在具有显著微结构的材料与均匀材料之间进行插值，从而将特征长度尺度参数 L_{c} 与超材料中微结构的尺寸联系起来。在下限 $L_{\mathrm{c}} \to 0$ 处，连续体被视为均匀材料，并可得出经典柯西连续体理论的解 [3, 32]。重新考察 $L_{\mathrm{c}} = 0$时的式 (2.12b) 即可观察到这一点，

$$-\mathbb{C}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P}) - \mathbb{C}_{\mathrm{c}}\,\mathrm{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P}) + \mathbb{C}_{\mathrm{micro}}\,\mathrm{sym}\,\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M}\,, \tag{2.14}$$

现在可以用代数方式表示微畸变 $\boldsymbol{P}$

$$\mathrm{sym}\,\boldsymbol{P} = (\mathbb{C}_{\mathrm{e}} + \mathbb{C}_{\mathrm{micro}})^{-1}(\mathrm{sym}\,\boldsymbol{M} + \mathbb{C}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{sym}\,\mathrm{D}\mathbf{u})\,, \qquad \mathrm{skew}\,\boldsymbol{P} = \mathbb{C}_{\mathrm{c}}^{-1}\,\mathrm{skew}\,\boldsymbol{M} + \mathrm{skew}\,\mathrm{D}\mathbf{u}\,. \tag{2.15}$$

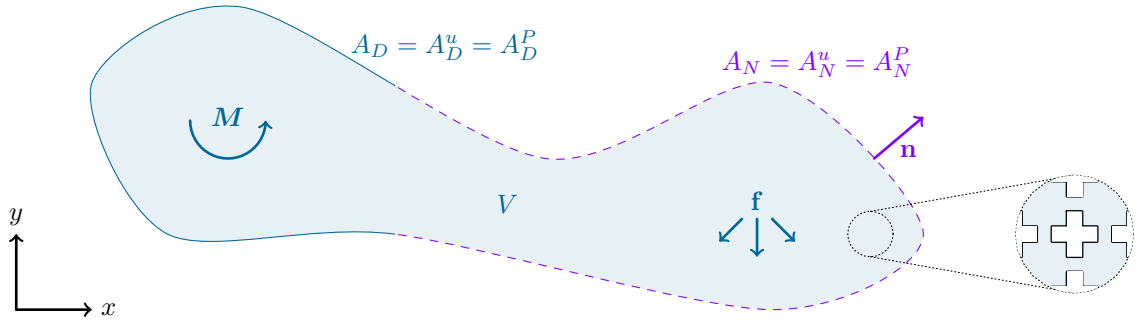


图 2.1：松弛微形态模型中的区域，具有狄利克雷边界和诺伊曼边界，并承受内力和微力矩。微畸变的狄利克雷边界由一致耦合条件给出。该模型能够捕捉底层微结构的复杂运动学。

令 $\boldsymbol{M} = 0$ 对应于柯西连续体，其中不考虑微力矩。因此，可得

$$\mathbb{C}_{\mathrm{c}}\,\mathrm{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u} - \boldsymbol{P}) = 0\,, \quad \mathbb{C}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u} - \boldsymbol{P}) = \mathbb{C}_{\mathrm{micro}}\,\mathrm{sym}\,\boldsymbol{P}\,, \quad \mathrm{sym}\,\boldsymbol{P} = (\mathbb{C}_{\mathrm{e}} + \mathbb{C}_{\mathrm{micro}})^{-1}\mathbb{C}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{sym}\,\mathrm{D}\mathbf{u}\,. \tag{2.16}$$

将前述结果应用于式 (2.12a)，可得

$$-\,\mathrm{Div}[\mathbb{C}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u} - \boldsymbol{P})] = -\,\mathrm{Div}[\mathbb{C}_{\mathrm{micro}}(\mathbb{C}_{\mathrm{e}} + \mathbb{C}_{\mathrm{micro}})^{-1}\mathbb{C}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{sym}\,\mathrm{D}\mathbf{u}] = -\,\mathrm{Div}[\mathbb{C}_{\mathrm{macro}}\,\mathrm{sym}\,\mathrm{D}\mathbf{u}] = \mathbf{f}\,, \tag{2.17}$$

其中，定义

$$\mathbb{C}_{\mathrm{macro}} = \mathbb{C}_{\mathrm{micro}}(\mathbb{C}_{\mathrm{e}} + \mathbb{C}_{\mathrm{micro}})^{-1}\mathbb{C}_{\mathrm{e}} \tag{2.18}$$

将介观和微观弹性张量与柯西连续体的经典宏观弹性张量联系起来。事实上，$\mathbb{C}_{\mathrm{macro}}$ 包含大型周期结构均匀化所产生的材料常数 [3, 32]。对于各向同性材料，可以直接用松弛微形态模型的参数表示宏观参数 [33]

$$\mu_{\mathrm{macro}} = \frac{\mu_{\mathrm{e}}\,\mu_{\mathrm{micro}}}{\mu_{\mathrm{e}} + \mu_{\mathrm{micro}}}\,, \qquad 2\mu_{\mathrm{macro}} + 3\lambda_{\mathrm{macro}} = \frac{(2\mu_{\mathrm{e}} + 3\lambda_{\mathrm{e}})(2\mu_{\mathrm{micro}} + 3\lambda_{\mathrm{micro}})}{(2\mu_{\mathrm{e}} + 3\lambda_{\mathrm{e}}) + (2\mu_{\mathrm{micro}} + 3\lambda_{\mathrm{micro}})} \tag{2.19}$$

用松弛微形态模型的参数表示。

在上限 $L_{\mathrm{c}} \to +\infty$ 下，微体的刚度占主导地位。由于特征长度 L_{c} 可视为微结构的缩放因子，因此状态 $L_{\mathrm{c}} \to +\infty$ 可解释为整个区域本身就是微体。然而，这在理论上才有可能；实际中，该极限由一个晶胞的大小决定。由于被最小化的能量泛函包含 $\mu_{\mathrm{macro}}L_{\mathrm{c}}^2\|$ 旋度 $\boldsymbol{P}\|^2$，在可缩域上且能量有界时，这意味着微畸变可约化为梯度场$\boldsymbol{P} \to \mathrm{D}\mathbf{v}$ ，这是由经典恒等式

$$\mathrm{Curl}\,\mathrm{D}\mathbf{v} = 0 \quad \forall\,\mathbf{v} \in [C^\infty(V)]^3\,, \tag{2.20}$$

由此可知，对于任意大的特征长度值L_{c}，松弛微形态模型的能量仍为有限值。用约化运动学 $\{\mathbf{u},\ \mathbf{v}\}$ 表示的相应能量泛函 $V \to \mathbb{R}^3$ 现在写作

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int_V &\langle \mathrm{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u} - \mathrm{D}\mathbf{v}),\, \mathbb{C}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u} - \mathrm{D}\mathbf{v})\rangle + \langle \mathrm{sym}\,\mathrm{D}\mathbf{v},\, \mathbb{C}_{\mathrm{micro}}\,\mathrm{sym}\,\mathrm{D}\mathbf{v}\rangle \\ &+ \langle \mathrm{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u} - \mathrm{D}\mathbf{v}),\, \mathbb{C}_{\mathrm{c}}\,\mathrm{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u} - \mathrm{D}\mathbf{v})\rangle\,\mathrm{d}V - \int_V \langle \mathbf{u},\, \mathbf{f}\rangle + \langle \mathrm{D}\mathbf{v},\, \boldsymbol{M}\rangle\,\mathrm{d}V\,, \end{aligned} \tag{2.21}$$

使得对两个向量场$\mathbf{u}$ 和$\mathbf{v}$ 进行变分后得到

$$\delta_u I = \int_V \langle \mathrm{sym}\,\mathrm{D}\delta\mathbf{u},\, \mathbb{C}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u} - \mathrm{D}\mathbf{v})\rangle + \langle \mathrm{skew}\,\mathrm{D}\delta\mathbf{u},\, \mathbb{C}_{\mathrm{c}}\,\mathrm{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u} - \mathrm{D}\mathbf{v})\rangle - \langle \delta\mathbf{u},\, \mathbf{f}\rangle\,\mathrm{d}V = 0\,, \tag{2.22a}$$

$$\begin{aligned} \delta_v I = \int_V &\langle \mathrm{sym}\,\mathrm{D}\delta\mathbf{v},\, \mathbb{C}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u} - \mathrm{D}\mathbf{v})\rangle + \langle \mathrm{skew}\,\mathrm{D}\delta\mathbf{v},\, \mathbb{C}_{\mathrm{c}}\,\mathrm{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u} - \mathrm{D}\mathbf{v})\rangle \\ &- \langle \mathrm{sym}\,\mathrm{D}\delta\mathbf{v},\, \mathbb{C}_{\mathrm{micro}}\,\mathrm{sym}\,\mathrm{D}\mathbf{v}\rangle + \langle \mathrm{D}\delta\mathbf{v},\, \boldsymbol{M}\rangle\,\mathrm{d}V = 0\,. \end{aligned} \tag{2.22b}$$

由此得到的双线性型为

$$a(\{\delta\mathbf{u},\delta\mathbf{v}\},\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}) = \int_V \langle \mathrm{sym}(\mathrm{D}\delta\mathbf{u}-\mathrm{D}\delta\mathbf{v}),\, \mathbb{C}_\mathrm{e}\,\mathrm{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\mathrm{D}\mathbf{v})\rangle + \langle \mathrm{sym}\,\mathrm{D}\delta\mathbf{v},\, \mathbb{C}_\mathrm{micro}\,\mathrm{sym}\,\mathrm{D}\mathbf{v}\rangle + \langle \mathrm{skew}(\mathrm{D}\delta\mathbf{u}-\mathrm{D}\delta\mathbf{v}),\, \mathbb{C}_\mathrm{c}\,\mathrm{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\mathrm{D}\mathbf{v})\rangle\,\mathrm{d}V\,. \tag{2.23}$$

By 对式 (2.22a) 和式 (2.22b) 进行分部积分，可得平衡方程

$$-\mathrm{Div}[\mathbb{C}_\mathrm{e}\,\mathrm{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\mathrm{D}\mathbf{v}) + \mathbb{C}_\mathrm{c}\,\mathrm{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\mathrm{D}\mathbf{v})] = \mathbf{f} \qquad \text{in} \quad V\,, \tag{2.24a}$$

$$-\mathrm{Div}[\mathbb{C}_\mathrm{e}\,\mathrm{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\mathrm{D}\mathbf{v}) + \mathbb{C}_\mathrm{c}\,\mathrm{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\mathrm{D}\mathbf{v})] + \mathrm{Div}[\mathbb{C}_\mathrm{micro}\,\mathrm{sym}\,\mathrm{D}\mathbf{v}] = \mathrm{Div}\,\boldsymbol{M} \qquad \text{in} \quad V\,. \tag{2.24b}$$

现在，我们可以将式 (2.24a) 的右端代入式 (2.24b)，得到

$$-\mathrm{Div}(\mathbb{C}_\mathrm{micro}\,\mathrm{sym}\,\mathrm{D}\mathbf{v}) = \mathbf{f} - \mathrm{Div}\,\boldsymbol{M}\,. \tag{2.25}$$

显然，令 $\mathbf{v}=\mathbf{u}$，即可满足局部平衡方程式 (2.24a) 和式 (2.24b)，其中 $\mathbf{f}=0$。此外，一致耦合条件式 (2.13) 也自动满足，这意味着两个场在区域边界上的切向投影相等。由于如 [32, 52] 中利用扩展 Brezzi 定理所示，$L_\mathrm{c}\to+\infty$ 的情形是适定的（包括 $\mathbb{C}_\mathrm{c}\equiv 0$），因此解 $\mathbf{v}=\mathbf{u}$ 是双线性型式 (2.23) 在右端项为

$$l(\{\delta\mathbf{u},\delta\mathbf{v}\}) = \langle \mathrm{D}\delta\mathbf{v},\, \boldsymbol{M}\rangle\,\mathrm{d}V\,. \tag{2.26}$$

实际上，方程式 (2.25) 表明，极限 $L_\mathrm{c}\to+\infty$ 定义了一个具有有限刚度的经典柯西连续体，其刚度由 $\mathbb{C}_\mathrm{micro}$ 控制，代表松弛微形态连续体 [32], 的刚度上限；此时相应的力为 $\mathbf{m}=\mathrm{Div}\ \boldsymbol{M}$。我们强调，在经典微形态模型中，不可能对 $\mathbb{C}_\mathrm{micro}$ 作出这种解释，因为在该模型中，极限 $L_\mathrm{c}\to+\infty$ 会导致微畸变场 $\boldsymbol{P}$ 为常量：$V\to\mathbb{R}^{3\times3}$，这是因为其完整梯度 $\mathrm{D}\boldsymbol{P}$ 通过 $\mu_\mathrm{macro}L_\mathrm{c}^2\|\mathrm{D}\boldsymbol{P}\|^2$ 纳入了能量泛函 [6]。

2.2 反平面剪切

我们引入松弛　　反平面剪切的微形态模型[1] [55]，通过将位移场简化为　　o

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix}0, & 0, & u\end{bmatrix}^T\,, \tag{2.27}$$

s使得 $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x,y)$ 是 $x-y$ 平面上的函数。因此，其梯度为

$$\mathrm{D}\mathbf{u} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ u_{,x} & u_{,y} & 0\end{bmatrix}\,. \tag{2.28}$$

相应地选取微畸变张量的结构

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ p_1 & p_2 & 0\end{bmatrix}\,, \qquad \mathrm{Curl}\,\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_{2,x}-p_{1,y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{curl}_\mathrm{2D}\mathbf{p}\end{bmatrix}\,. \tag{2.29}$$

[1]请注意，反平面剪切模型包含 $1+2=3$ 个自由度，是松弛微形态模型中最简单的非平凡主动版本；而一维伸长假设仅包含 $1+1=2$ 个自由度，并消除了旋度算子

$$I(u,p) = \frac{1}{2}\int_s (\lambda_\mathrm{e}+2\mu_\mathrm{e})|u'-p|^2 + (\lambda_\mathrm{micro}+2\mu_\mathrm{micro})|p|^2\,\mathrm{d}s - \int_s u\,f + p\,m\,\mathrm{d}s \to \min \quad \text{w.r.t.} \quad \{u,p\}\,,$$

由于 $\mathrm{Du}=u'\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1$ 和 $\boldsymbol{P}=p\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1$，满足 $\mathrm{skew}(\mathrm{Du}-\boldsymbol{P})=0$ 和旋度 $\boldsymbol{P}=0$。这与单轴伸长不同，后者涉及 $1+3=4$ 个自由度 [45]。

与位移场 $\mathbf{u}$ 类似，微畸变 $\boldsymbol{P}$ 也被设定为 $\{x,y\}$-变量$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(x,y)$ 的函数。我们观察到梯度张量和微畸变张量的以下对称-反对称分解

$$\operatorname{sym}\boldsymbol{P}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&p_1\\0&0&p_2\\p_1&p_2&0\end{bmatrix},\qquad \operatorname{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&u_{,x}-p_1\\0&0&u_{,y}-p_2\\u_{,x}-p_1&u_{,y}-p_2&0\end{bmatrix},$$
$$\operatorname{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&p_1-u_{,x}\\0&0&p_2-u_{,y}\\u_{,x}-p_1&u_{,y}-p_2&0\end{bmatrix}. \tag{2.30}$$

显然，有

$$\operatorname{tr}[\operatorname{sym}\boldsymbol{P}]=\operatorname{tr}[\operatorname{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})]=\operatorname{tr}[\operatorname{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})]=0\,, \tag{2.31}$$

使得与材料张量的缩并化简为

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}_{\mathrm{e}}\operatorname{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})=2\mu_{\mathrm{e}}\operatorname{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})\,,&&\mathbb{C}_{\mathrm{micro}}\operatorname{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})=2\mu_{\mathrm{micro}}\operatorname{sym}\boldsymbol{P}\,,\\&\mathbb{C}_{\mathrm{c}}\operatorname{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})=2\mu_{\mathrm{c}}\operatorname{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})\,.\end{aligned} \tag{2.32}$$

因此，能量泛函的二次型为

$$\langle\operatorname{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P}),\,\mathbb{C}_{\mathrm{e}}\operatorname{sym}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})\rangle=\mu_{\mathrm{e}}\|\nabla u-\mathbf{p}\|^2\,, \tag{2.33a}$$
$$\langle\operatorname{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P}),\,\mathbb{C}_{\mathrm{c}}\operatorname{skew}(\mathrm{D}\mathbf{u}-\boldsymbol{P})\rangle=\mu_{\mathrm{c}}\|\nabla u-\mathbf{p}\|^2\,, \tag{2.33b}$$
$$\langle\operatorname{sym}\boldsymbol{P},\,\mathbb{C}_{\mathrm{micro}}\operatorname{sym}\boldsymbol{P}\rangle=\mu_{\mathrm{micro}}\|\mathbf{p}\|^2\,, \tag{2.33c}$$

其中定义为

$$\nabla u=\begin{bmatrix}u_{,x}\\u_{,y}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{p}=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

因此，反平面剪切的能量泛函为

$$I(u,\mathbf{p})=\frac{1}{2}\int_A(\mu_{\mathrm{e}}+\mu_{\mathrm{c}})\|\nabla u-\mathbf{p}\|^2+\mu_{\mathrm{micro}}\|\mathbf{p}\|^2+\mu_{\mathrm{macro}}L_{\mathrm{c}}^2\|\mathrm{curl}_{\mathrm{2D}}\mathbf{p}\|^2\,\mathrm{d}A-\int_A u\,f+\langle\mathbf{p},\,\mathbf{m}\rangle\,\mathrm{d}A\,. \tag{2.35}$$

为了与三维模型保持一致，我们必须选择 $\mu_{\mathrm{c}}=0$。关于这一选择的理由将在注 2.1 中说明（另见图 2.2）。因此，能量泛函为

$$\begin{aligned}I(u,\mathbf{p})=\frac{1}{2}\int_A\mu_{\mathrm{e}}\|\nabla u-\mathbf{p}\|^2+\mu_{\mathrm{micro}}\|\mathbf{p}\|^2+\mu_{\mathrm{macro}}L_{\mathrm{c}}^2\|\mathrm{curl}_{\mathrm{2D}}\mathbf{p}\|^2\,\mathrm{d}A\\-\int_A u\,f+\langle\mathbf{p},\,\mathbf{m}\rangle\,\mathrm{d}A\to\min\quad\text{w.r.t.}\quad\{u,\mathbf{p}\}\,.\end{aligned} \tag{2.36}$$

注意，在二维区域上，微分算子可简化为

$$\nabla u=\begin{bmatrix}u_{,x}\\u_{,y}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{R}\nabla u=\begin{bmatrix}u_{,y}\\-u_{,x}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\qquad \mathrm{curl}_{\mathrm{2D}}\mathbf{p}=\operatorname{div}(\boldsymbol{R}\mathbf{p})=p_{2,x}-p_{1,y}\,, \tag{2.37}$$

其中，旋度$_{\mathrm{2D}}$ 就是旋转散度。对能量泛函关于位移场取变分，可得

$$\delta_u I=\int_A\mu_{\mathrm{e}}\langle\nabla\delta u,\,\nabla u-\mathbf{p}\rangle-\delta u\,f\,\mathrm{d}A=0\,, \tag{2.38}$$

对微畸变进行变分可得

$$\delta_p I=\int_A\mu_{\mathrm{e}}\langle\delta\mathbf{p},\,\nabla u-\mathbf{p}\rangle-\mu_{\mathrm{micro}}\langle\delta\mathbf{p},\,\mathbf{p}\rangle-\mu_{\mathrm{macro}}L_{\mathrm{c}}^2(\mathrm{curl}_{\mathrm{2D}}\delta\mathbf{p})\mathrm{curl}_{\mathrm{2D}}\mathbf{p}+\langle\delta\mathbf{p},\,\mathbf{m}\rangle\,\mathrm{d}A=0\,. \tag{2.39}$$

因此可得双线性型和线性型

$$a(\{\delta u, \delta\mathbf{p}\}, \{u, \mathbf{p}\}) = \int_A \mu_\mathrm{e}\langle\nabla\delta u - \delta\mathbf{p},\, \nabla u - \mathbf{p}\rangle + \mu_\mathrm{micro}\langle\delta\mathbf{p},\, \mathbf{p}\rangle + \mu_\mathrm{macro}L_\mathrm{c}^2(\mathrm{curl}_\mathrm{2D}\delta\mathbf{p})\mathrm{curl}_\mathrm{2D}\mathbf{p}\,\mathrm{d}A\,, \tag{2.40a}$$

$$l(\{\delta u, \delta\mathbf{p}\}) = \int_A \delta u\, f + \langle\delta\mathbf{p},\, \mathbf{m}\rangle\,\mathrm{d}A\,. \tag{2.40b}$$

对式 (2.38) 进行分部积分，得到

$$\int_{\partial A} \delta u\,\langle\mu_\mathrm{e}(\nabla u - \mathbf{p}),\, \mathbf{n}\rangle\,\mathrm{d}s - \int_A \delta u\,[\mu_\mathrm{e}\,\mathrm{div}(\nabla u - \mathbf{p}) + f]\,\mathrm{d}A = 0\,, \tag{2.41}$$

对式 (2.39) 进行类似处理，可得

$$\int_A \langle\delta\mathbf{p},\, \mu_\mathrm{e}(\nabla u - \mathbf{p}) - \mu_\mathrm{micro}\,\mathbf{p} - \mu_\mathrm{macro}L_\mathrm{c}^2\boldsymbol{R}\nabla\mathrm{curl}_\mathrm{2D}\mathbf{p} + \mathbf{m}\rangle\,\mathrm{d}A - \int_{\partial A}\langle\delta\mathbf{p},\, \mu_\mathrm{macro}L_\mathrm{c}^2(\mathrm{curl}_\mathrm{2D}\mathbf{p})\,\mathbf{t}\rangle\,\mathrm{d}s = 0\,. \tag{2.42}$$

因此，强形式为

$$-\mu_\mathrm{e}\,\mathrm{div}(\nabla u - \mathbf{p}) = f \qquad \text{in} \quad A\,, \tag{2.43a}$$

$$-\mu_\mathrm{e}(\nabla u - \mathbf{p}) + \mu_\mathrm{micro}\,\mathbf{p} + \mu_\mathrm{macro}L_\mathrm{c}^2\boldsymbol{R}\nabla\mathrm{curl}_\mathrm{2D}\mathbf{p} = \mathbf{m} \qquad \text{in} \quad A\,, \tag{2.43b}$$

$$u = \widetilde{u} \qquad \text{on} \quad s_D^u\,, \tag{2.43c}$$

$$\langle\mathbf{p},\, \mathbf{t}\rangle = \langle\widetilde{\mathbf{p}},\, \mathbf{t}\rangle \qquad \text{on} \quad s_D^P\,, \tag{2.43d}$$

$$\langle\nabla u,\, \mathbf{n}\rangle = \langle\mathbf{p},\, \mathbf{n}\rangle \qquad \text{on} \quad s_N^u\,, \tag{2.43e}$$

$$\mathrm{curl}_\mathrm{2D}\mathbf{p} = 0 \qquad \text{on} \quad s_N^P\,. \tag{2.43f}$$

相应地，一致耦合条件简化为

$$\langle\mathbf{p},\, \mathbf{t}\rangle = \langle\nabla\widetilde{u},\, \mathbf{t}\rangle \qquad \text{on} \quad s_D = s_D^P = s_D^u\,. \tag{2.44}$$

注 2.1
注意，在反平面剪切模型中不令 $\mu_\mathrm{c} = 0$ ，则极限$L_\mathrm{c} \to 0$ 下与式 (2.17) 类似的结果为

$$-\underbrace{\left(\frac{\mu_\mathrm{micro}\,[\mu_\mathrm{e} + \mu_\mathrm{c}]}{\mu_\mathrm{e} + \mu_\mathrm{c} + \mu_\mathrm{micro}}\right)}_{\neq\mu_\mathrm{macro}}\Delta u = f\,, \tag{2.45}$$

其中，与式 (2.19) 中的宏观参数 μ_macro 之间的关系丢失了。此外，式中由 $\boldsymbol{M} = 0$ 定义的极限会导致矛盾 (2.16)

$$\mathrm{sym}\,\boldsymbol{P} = (\mathbb{C}_\mathrm{e} + \mathbb{C}_\mathrm{micro})^{-1}\mathbb{C}_\mathrm{e}\,\mathrm{sym}\,\mathrm{D}\mathbf{u}\,, \qquad \mathbb{C}_\mathrm{c}\,\mathrm{skew}\,\boldsymbol{P} = \mathbb{C}_\mathrm{c}\,\mathrm{skew}\,\mathrm{D}\mathbf{u}\,, \tag{2.46}$$

因为方程退化为

$$\mathbf{p} = \frac{\mu_\mathrm{e}}{\mu_\mathrm{e} + \mu_\mathrm{micro}}\nabla u\,, \qquad \mu_\mathrm{c}\mathbf{p} = \mu_\mathrm{c}\nabla u\,, \tag{2.47}$$

这是由于反平面剪切对应的等价三维形式。选择 $\mu_\mathrm{micro} = 0$ 会导致强形式问题 *2.43* 的结构丢失，但仍满足式 (2.47)。因此，我们必须设定 *Cosserat* 偶应力模量$\mu_\mathrm{c} = 0$ ，以保留方程的结构并同时满足式 (2.19) 和式 (2.47)。

尽管松弛微形态模型在 $\mathbb{C}_\mathrm{micro} \to +\infty$*(*$\mu_\mathrm{micro} \to +\infty$*)*时包含 *Cosserat* 模型作为一个奇异极限，但无法将反平面剪切的 *Cosserat* 模型推导为反平面松弛微形态模型的一个极限，因为必须满足关于 $\mu_\mathrm{c} > 0$ 和 $\mu_\mathrm{micro} \to +\infty$的方程 (2.47) ，而这是不可能的。

松弛微形态模型向反平面剪切的运动学约化，以及其材料参数在极限情形下的行为，如图 2.2 所示。

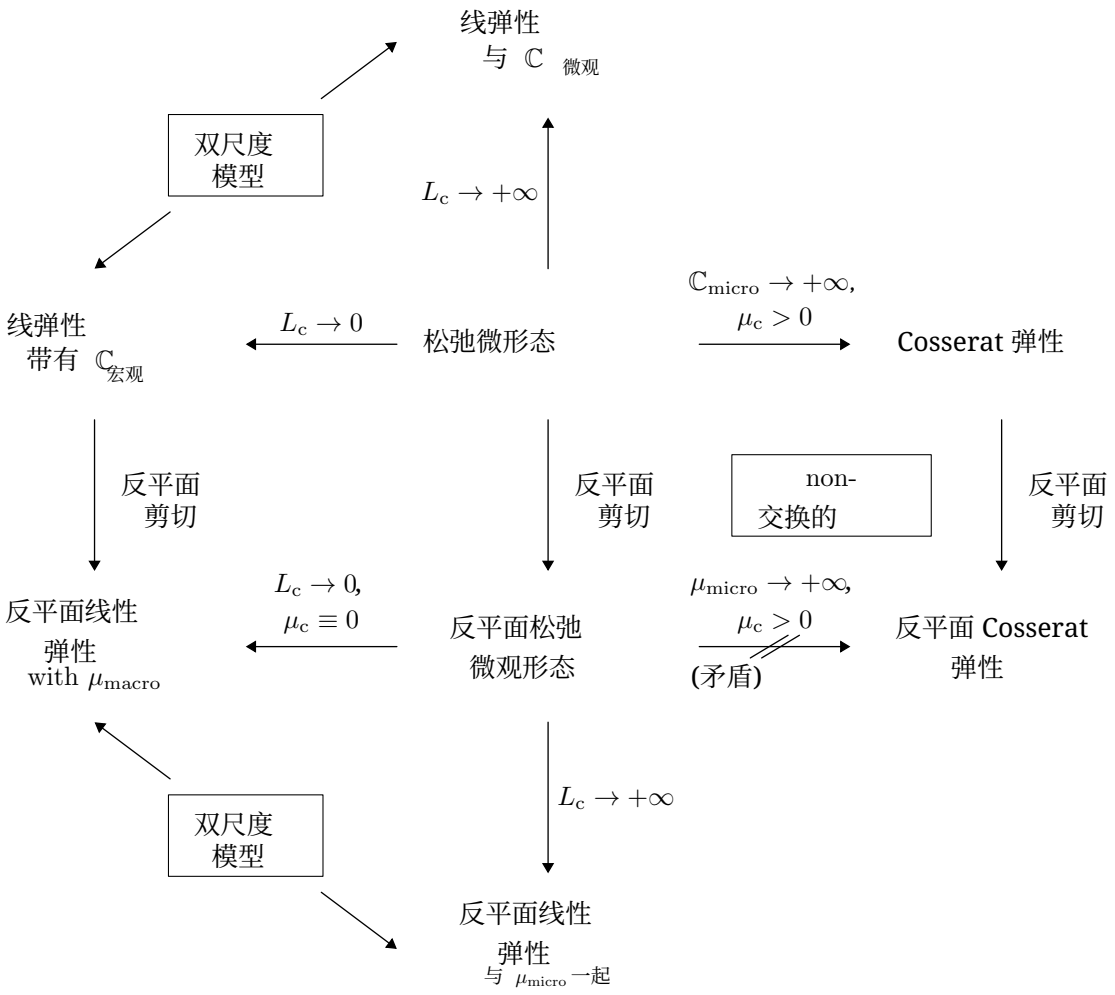


图 2.2：根据注 2.1 和第 2.1 节，将松弛微形态模型运动学约化为反平面剪切，并验证其在极限情形下的一致性。可以清楚地观察到松弛微形态模型的双尺度特性。

3 多项式基

本节简要介绍伯恩斯坦多项式和对偶数。伯恩斯坦多项式用于构造H^1协调子空间；同时结合多面体模板方法，可构造 N´éd´elec 单元。通过使用对偶数计算伯恩斯坦基函数的导数，从而能够同时计算基函数的值及其导数。

3.1 伯恩斯坦多项式

阶数为 p 的伯恩斯坦多项式由单位线段的重心表示的二项式展开给出

$$1 = (\lambda_1 + \lambda_2)^p = ((1-\xi)+\xi)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \xi^i (1-\xi)^{p-i} = \sum_{i=0}^{p} \frac{p!}{i!(p-i)!} \xi^i (1-\xi)^{p-i}\,, \tag{3.1}$$

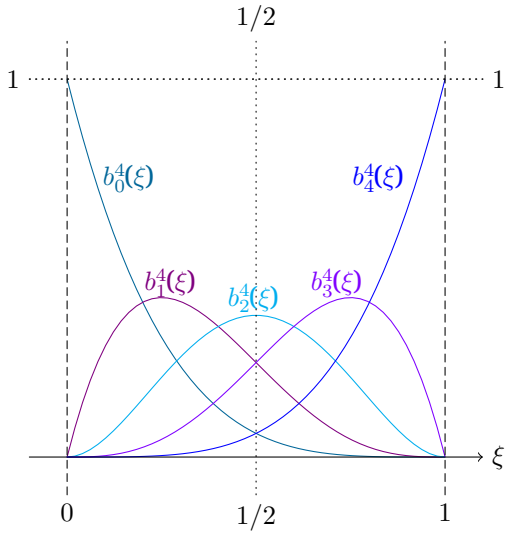


图 3.1：单位域上次数为 $p = 4$ 的伯恩斯坦基函数。它们的和构成单位分解。对于 $\xi = 0.5$，这些基函数关于其指标对称，且始终为正。

其中 $\xi \in [0, 1]$。伯恩斯坦多项式写作

$$b_i^p(\xi) = \binom{p}{i} \xi^i (1 - \xi)^{p-i} . \tag{3.2}$$

二项式展开的一个直接结果是，伯恩斯坦多项式构成单位分解，另见图 3.1。

$$\sum_{i=0}^{p} b_i^p(\xi) = 1 . \tag{3.3}$$

另一个 结果是，伯恩斯坦多项式非负且小于或等于 1

$$0 \leq b_i^p(\xi) \leq 1 , \qquad \xi \in [0, 1] . \tag{3.4}$$

使用伯恩斯坦多项式进行有限单元近似的一个必要条件是，它们张成整个多项式空间。

定理 3.1 （伯恩斯坦多项式的张成空间）
伯恩斯坦多项式的张成空间构成一维多项式空间的一个基

$$P^p(\xi) = \operatorname{span}\{b_i^p\} , \qquad \xi \subseteq \mathbb{R} . \tag{3.5}$$

证明。 首先我们观察到

$$\dim(\operatorname{span}\{b_i^p\}) = \dim P^p(\xi) = p + 1 . \tag{3.6}$$

通过矛盾法证明线性无关。设集合 $\operatorname{span}\{b_i^p\}$ with $0 < i \leq p$ 线性相关，则存在某个至少含有一个非零常数 $c_i \neq 0$ 的线性组合，使得

$$\sum_{i=1}^{p} c_i b_i^p(\xi) = 0 , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \sum_{i=1}^{p} c_i b_i^p(\xi) = 0 . \tag{3.7}$$

然而，根据单位分解性质，式（3.3）中只有完整组合（$0 \leq i \leq p$）才能生成常数；根据正合序列性质，微分算子的核恰好是常数空间 $\ker(\partial) = \mathbb{R}$。完整张成空间的线性无关性也可由单位分解性质推出，因为常数无法通过其他方式构造。

□

伯恩斯坦多项式可以使用递归公式高效求值

$$b_0^p(\xi) = (1-\xi)^p \,, \qquad b_{i+1}^p(\xi) = \frac{(p-i)\xi}{(p+1)(1-\xi)} b_i^p(\xi) \,, \qquad i \in \{0, 1, ..., p-1\} \,, \tag{3.8}$$

这使得基函数能够快速求值。

备注 3.1
请注意，公式 *Eq.* (3.8) 意味着 $\lim_{\xi \to 1} b_{i+1}^p(\xi) = \infty$。因此，使用该公式进行求值时，需要使用 $\xi < 1$，最好再加上额外的容差。对于所有伯恩斯坦基函数，极限情形 $\xi = 1$ 均为零；但属于该顶点的最后一个基函数除外，它的返回值为一

$$b_i^p(1) = 0 \quad \forall\, i \neq p \,, \qquad b_p^p(1) = 1 \,. \tag{3.9}$$

3.2 对偶数

对偶数 [16] 可用于定义增广代数，在这种代数中，函数的导数可与函数求值同时计算。这种增强也常用于前向自动微分 [8, 37], ；它不能与数值微分混淆，因为与数值微分不同，自动微分不涉及近似，并能得出精确的导数。后者是求取基函数导数的另一种方法，与显式公式或近似方法相对。对偶数通过添加一个非零数 ε（其平方为零 $\varepsilon^2 = 0$），扩充了经典数。

定义 3.1（对偶数）
对偶数定义为

$$x + x'\varepsilon \,, \qquad \varepsilon \ll 1 \,, \tag{3.10}$$

其中， x' 是导数（仅用于自动微分）， ε 是一个抽象数（无穷小量），并且形式上$\varepsilon^2 = 0$。

增广代数由对偶数的定义自动得到。

定义 3.2（增广对偶代数）
对于对偶数，标准代数运算具有以下形式

1. 加法和减法

$$(x + x'\varepsilon) \pm (y + y'\varepsilon) = x \pm y + (x' \pm y')\varepsilon \,. \tag{3.11}$$

2. 乘法

$$(x + x'\varepsilon)(y + y'\varepsilon) = xy + (xy' + x'y)\varepsilon \,, \tag{3.12}$$

因为形式上 $\varepsilon^2 = 0$。

3. 除法通过首先定义逆元来实现

$$(x + x'\varepsilon)(y + y'\varepsilon) = 1 \quad \iff \quad y = \frac{1}{x}, \quad y' = -\frac{x'}{x^2} \,, \tag{3.13}$$

使得

$$(x + x'\varepsilon)/(y + y'\varepsilon) = x/y + (x'/y - xy'/y^2)\varepsilon \,. \tag{3.14}$$

将上述定义应用于多项式

$$p(x+\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x+\varepsilon)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{1} c_i \binom{i}{j} x^{i-j} \varepsilon^j = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} i\, c_i x^{i-1} = p(x) + p'(x)\varepsilon \,, \tag{3.15}$$

允许扩展到各种具有幂级数表示的解析函数（例如三角函数或双曲函数）。

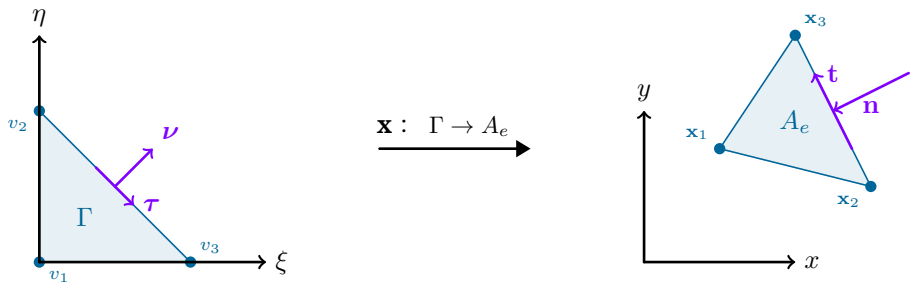


图 4.1：将参考三角形重心映射到物理域中的一个单元 n.

定义 3.3 (一般对偶数函数)对偶数的函数一般定义为

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + f'(x)\varepsilon\,, \tag{3.16}$$

这是前向自动微分的基本公式。

对偶数的定义使其能够直接应用于一般的微分法则，例如链式法则或乘积法则。在这种情况下，导数只需将先前的计算与 ε 复合即可。对偶数的逻辑可以通过方向导数直观地理解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \partial_{x'} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} f(x + x'\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+x'\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}\,, \tag{3.17}$$

其中，除以 ε 并设置 $\varepsilon = 0$ 被推迟到计算的最后一步，也就是提取导数这一步；这等价于使用对偶数增广代数进行运算 $f(x+\varepsilon) - f(x)$。

在本文中，我们使用对偶数，借助公式 (3.8) 中的递归公式计算伯恩斯坦多项式，从而能够在迭代计算每个基函数的同时计算其导数。

4 三角形单元

三角形单元通过重心坐标从参考单元 Γ 映射到物理域 A_e

$$\mathbf{x}(\xi,\eta) = (1-\xi-\eta)\mathbf{x}_1 + \eta\,\mathbf{x}_2 + \xi\,\mathbf{x}_3\,, \qquad \mathbf{x}:\Gamma\to A_e\,, \qquad \Gamma = \{(\xi,\eta)\in[0,1]^2 \mid \xi+\eta\le 1\}\,, \tag{4.1}$$

其中，$\mathbf{x}_i$ 表示物理域中一个三角形的顶点坐标，见图 4.1。相应的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{J} = \mathrm{D}\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1, & \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}\,. \tag{4.2}$$

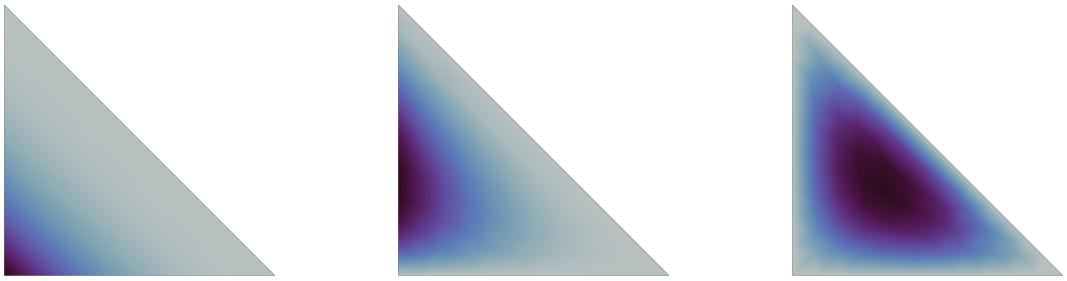
4.1 三角形的伯恩斯坦-贝济埃基

三角形参考单元上的基函数使用区域 Γ 上重心坐标的二项式展开定义

$$1 = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^p = ([1-\xi-\eta]+\eta+\xi)^p\,. \tag{4.3}$$

因此，B´ezier 基函数为

$$b^p_{ij}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \binom{p}{i}\binom{p-i}{j}\lambda_1^{p-i-j}\lambda_2^j\lambda_3^i\,, \tag{4.4}$$



(a) (b) (c)

图 4.2: 参考三角形上的三次顶点 (a)、边 (b) 和单元 (c) B´ézier 基函数 .

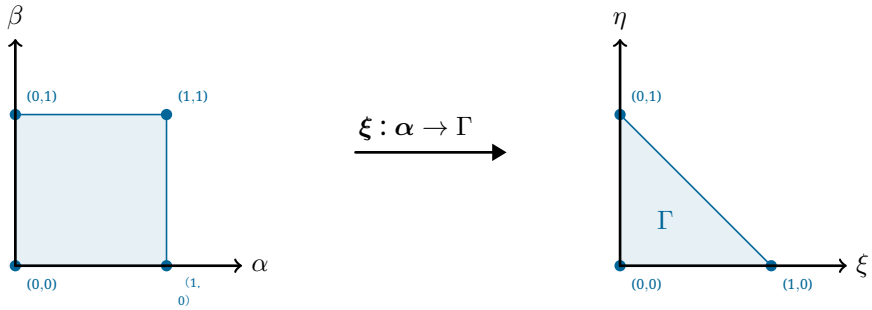


图 4.3：Duffy 变换 通过坐标系塌缩将四边形变换为三角形 .

其等价的二元形式为

$$b_{ij}^{p}(\xi,\eta) = \binom{p}{i}\binom{p-i}{j}(1-\xi-\eta)^{p-i-j}\eta^{j}\xi^{i}\,, \tag{4.5}$$

其中一些示例见图 4.2。Duffy 变换

$$\boldsymbol{\xi} : [0,1]^2 \to \Gamma\,, \qquad\qquad \{\alpha,\beta\} \mapsto \{\xi,\eta\}\,, \tag{4.6}$$

由以下关系给出

$$\xi = \alpha\,, \qquad \alpha = \xi\,, \qquad \eta = (1-\alpha)\beta\,, \qquad \beta = \frac{\eta}{1-\xi}\,, \tag{4.7}$$

可以将三角形视为一个塌缩的四边形，见图 4.3。将 Duffy 映射代入 B´ezier 基函数的定义，可得分解

$$\begin{aligned} b_{ij}^{p}(\xi,\eta) &= \binom{p}{i}\binom{p-i}{j}(1-\xi-\eta)^{p-i-j}\eta^{j}\xi^{i} \\ &= \binom{p}{i}\binom{p-i}{j}(1-\alpha-[1-\alpha]\beta)^{p-i-j}(1-\alpha)^{j}\beta^{j}\alpha^{i} \\ &= \binom{p}{i}\binom{p-i}{j}(1-\alpha)^{p-i-j}(1-\beta)^{p-i-j}(1-\alpha)^{j}\beta^{j}\alpha^{i} \\ &= \binom{p}{i}(1-\alpha)^{p-i}\alpha^{i}\binom{p-i}{j}(1-\beta)^{p-i-j}\beta^{j} \\ &= b_{i}^{p}(\alpha)\,b_{j}^{p-i}(\beta)\,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

换言之，Duffy 变换使 B´ezier 三角形自然分解为伯恩斯坦基函数 [1]。后者可通过和因子分解实现快速求值。此外，现在可以清楚地看出，B´ezier 三角形由 B´ezier 曲线插值得到，其中多项式次数逐条曲线递减

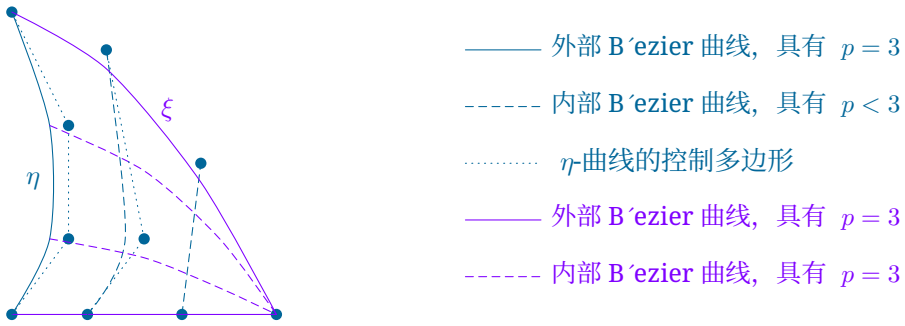


图 4.4：通过对多项式次数不断降低的 B´ezier 曲线进行插值构造的 B´ezier 三角形。

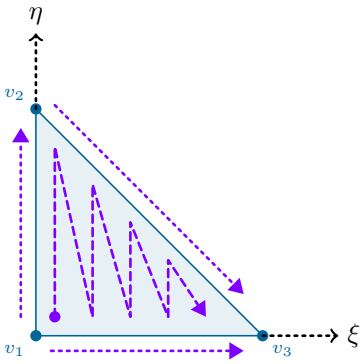


图 4.5：基函数的遍历顺序。紫色线条表示通过因子化求值构造基函数的顺序。请注意，每条边上的遍历顺序本质上都是从顶点索引较小的一端到顶点索引较大的一端。

（见图 4.4）。为了计算参考域上的梯度，可应用链式法则

$$\nabla_\xi b_{ij}^p = (\mathrm{D}_\alpha \boldsymbol{\xi})^{-T} \nabla_\alpha b_{ij}^p \,, \qquad \mathrm{D}_\alpha \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & 1-\alpha \end{bmatrix} \,, \qquad (\mathrm{D}_\alpha \boldsymbol{\xi})^{-T} = \frac{1}{1-\alpha} \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{4.9}$$

这种因式分解天然适用于使用对偶数，因为基函数的 $\boldsymbol{\alpha}$-梯度可写为

$$\nabla_\alpha b_{ij}^p(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} b_j^{p-i} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} b_i^p \\ b_i^p \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} b_j^{p-i} \end{bmatrix} , \tag{4.10}$$

因此只需要伯恩斯坦基函数关于其参数的导数。

Duffy 变换为基函数带来了内在的最优遍历顺序，参见图 4.5，即

$$(i,j) = (0,0) \to (0,1) \to \ldots \to (2,2) \to \ldots \to (i, p-i) \to \ldots \to (p,0) \,, \tag{4.11}$$

该顺序遵循单元的顺时针方向，参见 [52]。因此，共享边上的离散值序列顺序由全局方向决定。为将基函数与单元的多面体片段相关联，可观察到以下结果。

观察 4.1 （三角形基函数）
每个基函数 $b_{ij}^p(\xi, \eta)$ 对应的多胞体可按如下方式确定：

- 索引 $(0,0)$, $(0,p)$ 和 $(p,0)$ 分别表示第一个、第二个和最后一个顶点基函数 y.
- 指标 $(0,j)$ 对应 $0<j<p$ 和 $(i,0)$ 对应 $0<i<p$，分别表示第一个和第二个边基函数。斜边的基函数由 $(i,p-i)$ （其中 $0<i<p$）给出。
- 其余指标组合对应单元基函数。

根据后一观察，顶点、边和单元基函数的构造遵循由 Duffy 变换诱导的内在遍历顺序，并通过指标对关联到特定多胞体。

4.2 第二类 N´ed´elec 单元

我们采用 [50] 中介绍的多面体模板方法，构造第二类 N´ed´elec 单元的基函数。模板集如下

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_1=\{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\}, && \mathcal{T}_2=\{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\}, && \mathcal{T}_3=\{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,-\mathbf{e}_2\},\\
&\mathcal{T}_{12}=\{\mathbf{e}_2,-\mathbf{e}_1\}, && \mathcal{T}_{13}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}, && \mathcal{T}_{23}=\{(1/2)(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2),\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\},\\
&\mathcal{T}_{123}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

B´ezier 多项式空间在参考三角形的多胞体上分解为

$$\mathcal{B}^p(\Gamma)=\left\{\bigoplus_{i=1}^{3}\mathcal{V}_i^p(\Gamma)\right\}\oplus\left\{\bigoplus_{j\in\mathcal{J}}\mathcal{E}_j^p(\Gamma)\right\}\oplus\mathcal{C}_{123}^p(\Gamma),\qquad \mathcal{J}=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}, \tag{4.13}$$

其中， $\mathcal{V}_i^p$ 是顶点基函数集合， $\mathcal{E}_j^p$ 是边基函数集合， $\mathcal{C}_{123}^p$ 是单元基函数集合，而 $\oplus$ 表示对互不重叠的空间求和。因此，N´ed´elec 基为

$$\mathcal{N}_{II}^p=\left\{\bigoplus_{i=1}^{3}\mathcal{V}_i^p\otimes\mathcal{T}_i\right\}\oplus\left\{\bigoplus_{j\in\mathcal{J}}\mathcal{E}_j^p\otimes\mathcal{T}_j\right\}\oplus\{\mathcal{C}_{123}^p\otimes\mathcal{T}_{123}\},\qquad \mathcal{J}=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}. \tag{4.14}$$

使用 B´ezier 基可得到以下基函数，它们继承了底层基的最优复杂度。

定义 4.1 **(B´ezier-N´ed´elec II 三角形基)**
以下基函数定义在参考三角形上。

- 边上的基函数为

$$\begin{aligned}
e_{12}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta)=b_{00}^p\mathbf{e}_2, && \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta)=b_{0p}^p(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2),\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta)=b_{0j}^p\mathbf{e}_2, \quad 0<j<p,\\
e_{13}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta)=b_{00}^p\mathbf{e}_1, && \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta)=b_{p0}^p(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2),\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta)=b_{i0}^p\mathbf{e}_1, \quad 0<i<p,\\
e_{23}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta)=b_{0p}^p\mathbf{e}_1, && \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta)=-b_{p0}^p\mathbf{e}_2,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta)=(1/2)\,b_{i,p-i}^p(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2), \quad 0<i<p,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

其中，每条边对应的前两个基函数是顶点-边基函数，而第三个方程生成纯边基函数。

- 单元基函数如下

$$\begin{aligned}
c_{123}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta)=-b_{0j}^p\mathbf{e}_1, && 0<j<p,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta)=b_{i0}^p\mathbf{e}_2, && 0<i<p,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta)=b_{i,p-i}^p(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2), && 0<i<p,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta)=b_{ij}^p\mathbf{e}_2, && 0<i<p, \quad 0<j<p-i,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta)=b_{ij}^p\mathbf{e}_1, && 0<i<p, \quad 0<j<p-i,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

其中，前三个分别是边-单元基函数，其余两个是纯单元基函数。

4.3 N´ed´elec 第一类单元

为了构造第一类 N´ed´elec 单元，我们依据 [58] 中通过精确 de Rham 序列引入的核构造，以及遵循 [50] 的非核基函数多胞体模板。完整的 N´ed´elec 空间为

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_I^p &= \mathcal{N}_I^0 \oplus \left\{\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} \nabla\mathcal{E}_j^{p+1}\right\} \oplus \nabla\mathcal{C}_{123}^{p+1} \oplus \left\{\bigoplus_{i=1}^{2} \mathcal{V}_i^p \otimes \mathcal{T}_i\right\} \oplus \left\{\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} \mathcal{E}_j^p \otimes \mathcal{T}_j\right\} \oplus \{\mathcal{C}_{123}^p \otimes \mathcal{T}_{123}\}\,,\\ \mathcal{J} &= \{(1,2),(1,3),(2,3)\}\,,\end{aligned} \tag{4.17}$$

这里我们依据分解式 (4.14)。将该构造应用于 B´ezier 基，得到以下基函数。

定义 4.2 (B´ezier-N´ed´elec I 三角形基)
我们在参考三角形上定义基函数。

- 在边上，我们采用最低阶 *N´ed´elec* 基函数和边梯度

$$\begin{aligned} e_{12}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta) = \boldsymbol{\vartheta}_1^I\,, & \\ & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta) = \nabla_\xi b_{0j}^{p+1}\,, & 0<j<p+1,\\ e_{13}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta) = \boldsymbol{\vartheta}_2^I\,, & \\ & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta) = \nabla_\xi b_{i0}^{p+1}\,, & 0<i<p+1,\\ e_{23}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta) = \boldsymbol{\vartheta}_3^I\,, & \\ & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta) = \nabla_\xi b_{i,p+1-i}^{p+1}\,, & 0<i<p+1\,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

- 单元函数为

$$\begin{aligned} c_{123}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta) = b_{00}^p \boldsymbol{\vartheta}_3^I\,, & \\ & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta) = b_{0p}^p \boldsymbol{\vartheta}_2^I\,, & \\ & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta) = b_{0j}^p(\boldsymbol{\vartheta}_3^I - \boldsymbol{\vartheta}_2^I)\,, & 0<j<p\,,\\ & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta) = b_{i0}^p(\boldsymbol{\vartheta}_1^I + \boldsymbol{\vartheta}_3^I)\,, & 0<i<p\,,\\ & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta) = b_{i,p-i}^p(\boldsymbol{\vartheta}_1^I - \boldsymbol{\vartheta}_2^I)\,, & 0<i<p\,,\\ & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta) = b_{ij}^p(\boldsymbol{\vartheta}_1^I - \boldsymbol{\vartheta}_2^I + \boldsymbol{\vartheta}_3^I)\,, & 0<i<p\,,\quad 0<j<p-i\,,\\ & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta) = \nabla_\xi b_{ij}^{p+1}\,, & 0<i<p+1\,,\quad 0<j<p+1-i\,, \end{aligned} \tag{4.19}$$

其中最后一个公式给出了单元梯度，其余基函数则不是梯度 .

该定义依赖于第一类最低阶 N´ed´elec 单元的基函数 [5, 50]

$$\boldsymbol{\vartheta}_1^I(\xi,\eta) = \begin{bmatrix}\eta\\ 1-\xi\end{bmatrix}\,, \qquad \boldsymbol{\vartheta}_2^I(\xi,\eta) = \begin{bmatrix}1-\eta\\ \xi\end{bmatrix}\,, \qquad \boldsymbol{\vartheta}_3^I(\xi,\eta) = \begin{bmatrix}\eta\\ -\xi\end{bmatrix}\,. \tag{4.20}$$

5 四面体单元

四面体单元通过三维重心坐标从参考四面体 Ω 映射到物理域 V_e，见图 5.1

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\xi,\eta,\zeta) &= (1-\xi-\eta-\zeta)\mathbf{x}_1 + \zeta\,\mathbf{x}_2 + \eta\,\mathbf{x}_3 + \xi\,\mathbf{x}_4\,, \qquad & \mathbf{x}:\Omega\to V_e\,,\\ \Omega &= \{(\xi,\eta,\zeta)\in[0,1]^3 \mid \xi+\eta+\zeta\le 1\}\,.\end{aligned} \tag{5.1}$$

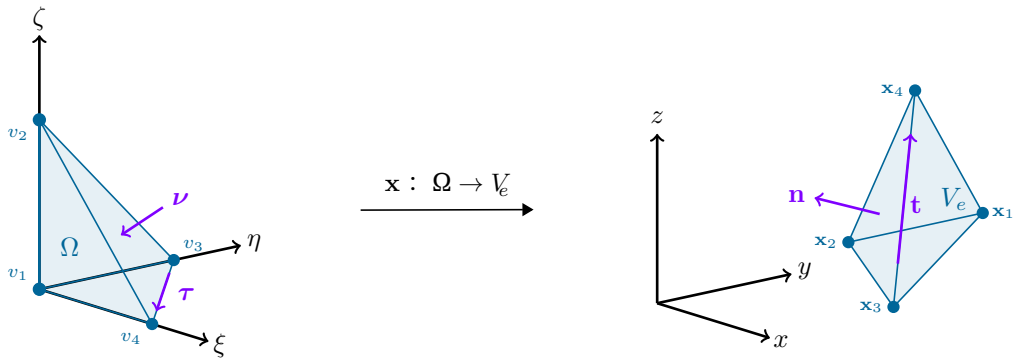


图 5.1: 将参考四面体重心映射到物理域中的一个单元 .

相应的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{J} = \mathrm{D}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1, & \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1, & \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} . \tag{5.2}$$

5.1 四面体的 Bernstein-B´ezier 基

类似于三角形单元，单位四面体 Ω 上的 B´ezier 四面体通过使用重心坐标，对以下系数进行展开来定义，

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^p = ([1 - \xi - \eta - \zeta] + \zeta + \eta + \xi)^p = 1 , \tag{5.3}$$

从而得到

$$b^p_{ijk}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \binom{p}{i}\binom{p-i}{j}\binom{p-i-j}{k} \lambda_1^{p-i-j-k}\lambda_2^k\lambda_3^j\lambda_4^k , \tag{5.4}$$

以及等价的三元形式

$$b^p_{ijk}(\xi, \eta, \zeta) = \binom{p}{i}\binom{p-i}{j}\binom{p-i-j}{k} (1 - \xi - \eta - \zeta)^{p-i-j-k}\zeta^k\eta^j\xi^i . \tag{5.5}$$

我们通过将单位四面体映射为退化六面体来构造 Duffy 变换

$$\boldsymbol{\xi} : [0, 1]^3 \to \Omega , \qquad \{\alpha, \beta, \gamma\} \mapsto \{\xi, \eta, \zeta\} , \tag{5.6}$$

利用以下关系

$$\begin{aligned} &\xi = \alpha , && \eta = (1 - \alpha)\beta , && \zeta = (1 - \alpha)(1 - \beta)\gamma , \\ &\alpha = \xi , && \beta = \frac{\eta}{1 - \xi} , && \gamma = \frac{\zeta}{1 - \xi - \eta} , \end{aligned} \tag{5.7}$$

如图5.2所示。对 B´ezier 四面体应用 Duffy 变换

$$\begin{aligned} b^p_{ijk}(\xi, \eta, \zeta) &= \binom{p}{i}\binom{p-i}{j}\binom{p-i-j}{k} (1 - \xi - \eta - \zeta)^{p-i-j-k}\zeta^k\eta^j\xi^i \\ &= \binom{p}{i}\binom{p-i}{j}\binom{p-i-j}{k} (1 - \alpha - (1 - \alpha)\beta - (1 - \alpha)(1 - \beta)\gamma)^{p-i-j-k} \\ &\quad \cdot (1 - \alpha)^k(1 - \beta)^k\gamma^k(1 - \alpha)^j\beta^j\alpha^i \\ &= \binom{p}{i}\binom{p-i}{j}\binom{p-i-j}{k} (1 - \alpha)^{p-i-j-k}(1 - \beta)^{p-i-j-k}(1 - \gamma)^{p-i-j-k} \\ &\quad \cdot (1 - \alpha)^k(1 - \beta)^k\gamma^k(1 - \alpha)^j\beta^j\alpha^i \\ &= \binom{p}{i}(1 - \alpha)^{p-i}\alpha^i \binom{p-i}{j}(1 - \beta)^{p-i-j}\beta^j \binom{p-i-j}{k}(1 - \gamma)^{p-i-j-k}\gamma^k \\ &= b^p_i(\alpha)b^{p-i}_j(\beta)b^{p-i-j}_k(\gamma) , \end{aligned} \tag{5.8}$$

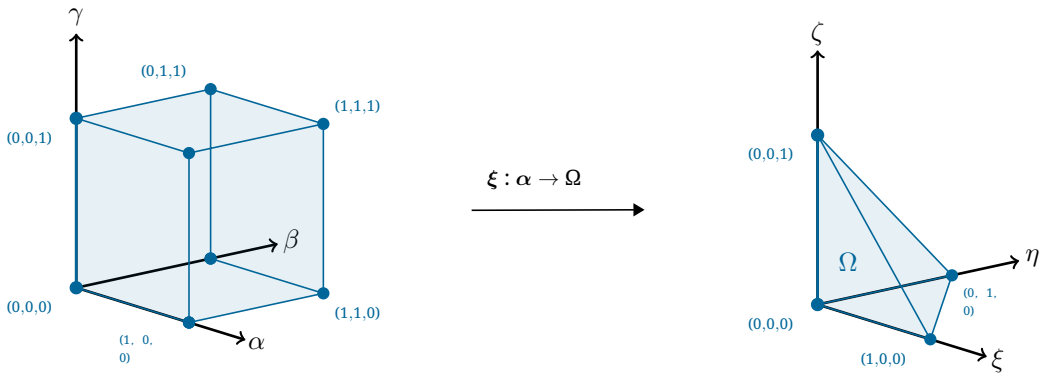


图 5.2：从单位六面体到单位四面体的 Duffy映射。

可通过单变量伯恩斯坦基函数实现内禀因式分解，从而利用和因子分解 [1] 快速求值。此外，由于 $b_j^{p-i}(\beta)$ $b_k^{p-i-j}(\gamma)$ 张成一个 B´ezier 三角形，因此显然，与 $b_i^p(\alpha)$ 相乘可在该三角形与空间中的一个点之间进行插值，从而有效地张成一个四面体。为了计算梯度，采用了相对于 Duffy 变换的链式法则

$$\nabla_\xi b_{ijk}^p = (\mathrm{D}_\alpha \boldsymbol{\xi})^{-T} \nabla_\alpha b_{ijk}^p\,, \qquad \mathrm{D}_\alpha \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\beta & 1-\alpha & 0 \\ (\beta-1)\gamma & (\alpha-1)\gamma & (1-\alpha)(1-\beta) \end{bmatrix},$$
$$(\mathrm{D}_\alpha \boldsymbol{\xi})^{-T} = \frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)} \begin{bmatrix} (1-\alpha)(1-\beta) & (1-\beta)\beta & \gamma \\ 0 & 1-\beta & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

我们使用对偶数 t o 计算每个伯恩斯坦基函数的导数，并构造 $\boldsymbol{\alpha}$-梯度

$$\nabla_\alpha b_{ijk}^p(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} b_j^{p-i} b_k^{p-i-j} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} b_i^p \\ b_i^p b_k^{p-i-j} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} b_j^{p-i} \\ b_i^p b_j^{p-i} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma} b_k^{p-i-j} \end{bmatrix}. \tag{5.10}$$

Duffy 变换产生的基函数最优遍历顺序如图 5.3 所示。注意，遍历顺序与 [52] 中介绍的定向定义一致，并且每个定向面的遍历顺序都与图 4.5 中三角形的遍历顺序相同。我们使用指标三元组将基函数与各自的多胞体关联起来。

观察 5.1 （四面体基函数）
每个基函数 $b_{ijk}^p(\xi,\eta,\zeta)$ 对应的多胞体按如下方式确定。

- 这些指标 $(0,0,0)$、$(0,0,p)$、$(0,p,0)$ 和 $(p,0,0)$ 分别表示相应的顶点基函数；
- 第一条边与三元组 $(0,0,k)$ 相关联，其中 $0<k<p$；第二条边与 $(0,j,0)$ 相关联，其中 $0<j<p$；第三条边与 $(i,0,0)$ 相关联，其中 $0<i<p$。指定的边分别为 $(0,j,p-j)$，对应 $0<j<p$；$(i,0,p-i)$，对应 $0<i<p$；以及 $(i,p-i,0)$，对应 $0<i<p$；
- 第一个面的基函数由 $(0,j,k)$ 给出，对应 $0<j<p$ 和 $0<k<p-j$。第二个面与由三元组 $(i,0,k)$ 给出的基函数相关联，对应 $0<i<p$ 和 $0<k<p-i$。第三个面的基函数与指标 $(i,j,0)$ 相关，对应 $0<i<p$ 和 $0<j<p-i$。最后，指定面的基函数由 $(i,j,p-i-j)$ 给出，对应 $0<i<p$ 和 $0<j<p-i$；
- 其余索引对应单元基函数。

图 5 展示了各多胞体上的 B´ezier 基函数示例 .4.

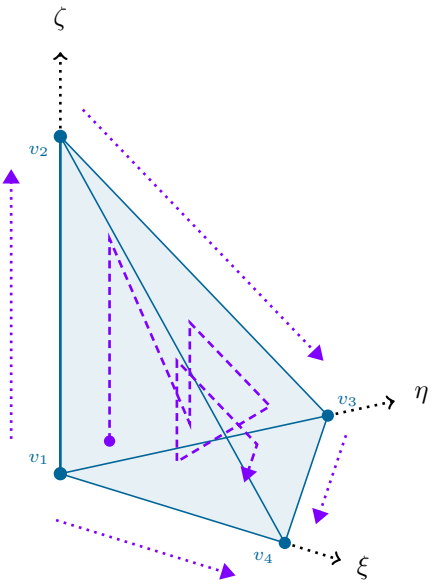


图 5.3：单位四面体上四面体 B´ezier 基函数的遍历顺序。每个面上的遍历顺序与顶点的一种定向一致，$f_{ijk} = \{v_i, v_j, v_k\}$ 使得 $i < j < k$。每条边上的遍历顺序均从索引较小的顶点指向索引较大的顶点。

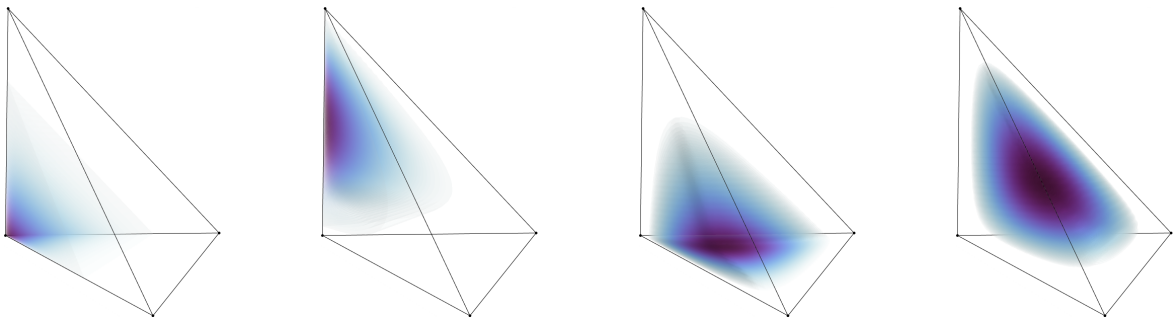


图 5.4：参考四面体上的四次 B´ezier 顶点 (a)、边 (b)、面 (c) 和单元 (c) 基函数。

5.2 第二类 N´ed´elec 单元

B ´ezier 多项式空间根据参考四面体的多胞体进行划分

$$\mathcal{B}^p(\Omega) = \left\{\bigoplus_{i=1}^{4} \mathcal{V}_i^p(\Omega)\right\} \oplus \left\{\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} \mathcal{E}_j^p(\Omega)\right\} \oplus \left\{\bigoplus_{k\in\mathcal{K}} \mathcal{F}_k^p(\Omega)\right\} \oplus \mathcal{C}_{1234}^p(\Omega)\,,$$
$$\mathcal{J} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}\,, \qquad \mathcal{K} = \{(1,2,3),(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4)\}\,, \tag{5.11}$$

其中， $\mathcal{V}_i^p$ 为顶点基函数集， $\mathcal{E}_j^p$ 为边基函数集， $\mathcal{F}_k^p$ 为面基函数集， $\mathcal{C}_{1234}^p$ 为单元基函数集。我们应用来自 [50] 的模板集

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_1 = \{\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\}\,, && \mathcal{T}_2 = \{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\}\,, && \mathcal{T}_3 = \{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,-\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1\}\,,\\
&\mathcal{T}_4 = \{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,-\mathbf{e}_3,-\mathbf{e}_2\}\,, && \mathcal{T}_{12} = \{\mathbf{e}_3,-\mathbf{e}_2,-\mathbf{e}_1\}\,, && \mathcal{T}_{13} = \{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,-\mathbf{e}_1\}\,,\\
&\mathcal{T}_{14} = \{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2\}\,, && \mathcal{T}_{23} = \{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,-\mathbf{e}_1\}\,, && \mathcal{T}_{24} = \{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2\}\,,\\
&\mathcal{T}_{34} = \{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,-\mathbf{e}_3\}\,, && \mathcal{T}_{123} = \{\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2,-\mathbf{e}_1\}\,, && \mathcal{T}_{124} = \{\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}\,,\\
&\mathcal{T}_{134} = \{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,-\mathbf{e}_3\}\,, && \mathcal{T}_{234} = \{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}\,, && \mathcal{T}_{1234} = \{\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\}\,,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

来张成第二类 N´ed´elec 单元

$$\mathcal{N}_{II}^p = \left\{\bigoplus_{i=1}^{4} \mathcal{V}_i^p \otimes \mathcal{T}_i\right\} \oplus \left\{\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} \mathcal{E}_j^p \otimes \mathcal{T}_j\right\} \oplus \left\{\bigoplus_{k\in\mathcal{K}} \mathcal{F}_k^p \otimes \mathcal{T}_k\right\} \oplus \{\mathcal{C}_{1234}^p \otimes \mathcal{T}_{1234}\}\,,$$
$$\mathcal{J} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}\,, \qquad \mathcal{K} = \{(1,2,3),(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4)\}\,. \tag{5.13}$$

现在，我们可以为任意次数定义第二类 B´ezier-N´ed´elec 单元，同时保持最优复杂度。

定义 5.1 (B´ezier-N´ed´elec II 四面体基)我们定义参考四面体上的基函数:

- 边上的基函数为

$$\begin{aligned}
e_{12}: \quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b_{000}^p\mathbf{e}_3\,, && \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b_{00p}^p(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b_{00k}^p\mathbf{e}_3\,, \quad 0<k<p\,,\\
e_{13}: \quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b_{000}^p\mathbf{e}_2\,, && \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b_{0p0}^p(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b_{0j0}^p\mathbf{e}_2\,, \quad 0<j<p\,,\\
e_{14}: \quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b_{000}^p\mathbf{e}_1\,, && \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b_{p00}^p(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b_{i00}^p\mathbf{e}_1\,, \quad 0<i<p\,,\\
e_{23}: \quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b_{00p}^p\mathbf{e}_2\,, && \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = -b_{0p0}^p\mathbf{e}_3\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b_{0j,p-j}^p\mathbf{e}_2\,, \quad 0<j<p\,,\\
e_{24}: \quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b_{00p}^p\mathbf{e}_1\,, && \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = -b_{p00}^p\mathbf{e}_3\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b_{i0,p-i}^p\mathbf{e}_1\,, \quad 0<i<p\,,\\
e_{34}: \quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b_{0p0}^p\mathbf{e}_1\,, && \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = -b_{p00}^p\mathbf{e}_2\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b_{i,p-i,0}^p\mathbf{e}_1\,, \quad 0<i<p\,,
\end{aligned} \tag{5.14}$$

其中每条边上的前两个基函数是顶点-边基函数;

- 面基函数由下式给出

$$
\begin{aligned}
f_{123}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = -b^p_{00k}\mathbf{e}_2\,, && 0<k<p\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{0j0}\mathbf{e}_3\,, && 0<j<p\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{0j,p-j}(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\,, && 0<j<p\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{0jk}\mathbf{e}_3\,, && 0<j<p\,,\quad 0<k<p-j\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{0jk}\mathbf{e}_2\,, && 0<j<p\,,\quad 0<k<p-j\,,\\
f_{124}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = -b^p_{00k}\mathbf{e}_1\,, && 0<k<p\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{i00}\mathbf{e}_3\,, && 0<i<p\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{i0,p-i}(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\,, && 0<i<p\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{i0k}\mathbf{e}_3\,, && 0<i<p\,,\quad 0<k<p-i\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{i0k}\mathbf{e}_1\,, && 0<i<p\,,\quad 0<k<p-i\,,\\
f_{134}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = -b^p_{0j0}\mathbf{e}_1\,, && 0<j<p\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{i00}\mathbf{e}_2\,, && 0<i<p\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{i,p-i,0}(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\,, && 0<i<p\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{ij0}\mathbf{e}_2\,, && 0<i<p\,,\quad 0<j<p-i\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{ij0}\mathbf{e}_1\,, && 0<i<p\,,\quad 0<j<p-i\,,\\
f_{234}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = -b^p_{0j,p-j}\mathbf{e}_1\,, && 0<j<p\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{i0,p-i}\mathbf{e}_2\,, && 0<i<p\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = -b^p_{i,p-i,0}\mathbf{e}_3\,, && 0<i<p\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{ij,p-i-j}\mathbf{e}_2\,, && 0<i<p\,,\quad 0<j<p-i\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{ij,p-i-j}\mathbf{e}_1\,, && 0<i<p\,,\quad 0<j<p-i\,,
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

其中，每个面对应的前三个公式是边-面基函数；

- 最后，单元基函数为

$$
\begin{aligned}
c_{1234}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = -b^p_{0jk}\mathbf{e}_1\,, && 0<j<p\,,\quad 0<k<p-j\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{i0k}\mathbf{e}_2\,, && 0<i<p\,,\quad 0<k<p-i\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = -b^p_{ij0}\mathbf{e}_3\,, && 0<i<p\,,\quad 0<j<p-i\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{ij,p-i-j}(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\,, && 0<i<p\,,\quad 0<j<p-i\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{ijk}\mathbf{e}_3\,, && 0<i<p\,,\quad 0<j<p-i\,,\quad 0<k<p-i-j\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{ijk}\mathbf{e}_2\,, && 0<i<p\,,\quad 0<j<p-i\,,\quad 0<k<p-i-j\,,\\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{ijk}\mathbf{e}_1\,, && 0<i<p\,,\quad 0<j<p-i\,,\quad 0<k<p-i-j\,,
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

其中，前四个公式是面-单元基函数。

5.3 N´ed´elec第一类单元

为了在四面体上构造第一类 N´ed´elec 单元，我们引入模板集

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{T}_1 = \{\boldsymbol{\vartheta}^I_4, \boldsymbol{\vartheta}^I_5, \boldsymbol{\vartheta}^I_6\}\,, && \mathcal{T}_2 = \{-\boldsymbol{\vartheta}^I_2, -\boldsymbol{\vartheta}^I_3, \boldsymbol{\vartheta}^I_6\}\,, && \mathcal{T}_3 = \{-\boldsymbol{\vartheta}^I_3, -\boldsymbol{\vartheta}^I_5\}\,,\\
&\mathcal{T}_{12} = \{\boldsymbol{\vartheta}^I_4 - \boldsymbol{\vartheta}^I_2, \boldsymbol{\vartheta}^I_5 - \boldsymbol{\vartheta}^I_3\}\,, && \mathcal{T}_{13} = \{\boldsymbol{\vartheta}^I_1 + \boldsymbol{\vartheta}^I_4, \boldsymbol{\vartheta}^I_6 - \boldsymbol{\vartheta}^I_3\}\,, && \mathcal{T}_{14} = \{\boldsymbol{\vartheta}^I_1 + \boldsymbol{\vartheta}^I_5, \boldsymbol{\vartheta}^I_2 + \boldsymbol{\vartheta}^I_6\}\,,\\
&\mathcal{T}_{23} = \{\boldsymbol{\vartheta}^I_1 - \boldsymbol{\vartheta}^I_2, \boldsymbol{\vartheta}^I_6 - \boldsymbol{\vartheta}^I_5\}\,, && \mathcal{T}_{24} = \{\boldsymbol{\vartheta}^I_1 - \boldsymbol{\vartheta}^I_3, \boldsymbol{\vartheta}^I_4 + \boldsymbol{\vartheta}^I_6\}\,, && \mathcal{T}_{34} = \{\boldsymbol{\vartheta}^I_2 - \boldsymbol{\vartheta}^I_3, \boldsymbol{\vartheta}^I_4 - \boldsymbol{\vartheta}^I_5\}\,,\\
&\mathcal{T}_{123} = \{\boldsymbol{\vartheta}^I_1 - \boldsymbol{\vartheta}^I_2 + \boldsymbol{\vartheta}^I_4\}\,, && \mathcal{T}_{124} = \{\boldsymbol{\vartheta}^I_1 - \boldsymbol{\vartheta}^I_3 + \boldsymbol{\vartheta}^I_5\}\,, && \mathcal{T}_{134} = \{\boldsymbol{\vartheta}^I_2 - \boldsymbol{\vartheta}^I_3 + \boldsymbol{\vartheta}^I_6\}\,,\\
&\mathcal{T}_{234} = \{\boldsymbol{\vartheta}^I_4 - \boldsymbol{\vartheta}^I_5 + \boldsymbol{\vartheta}^I_6\}\,,
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

这些模板集基于单位四面体上的最低阶 N´ed´elec 基函数

$$\boldsymbol{\vartheta}_1(\xi,\eta,\zeta)=\begin{bmatrix}\zeta\\ \zeta\\ 1-\xi-\eta\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\vartheta}_2(\xi,\eta,\zeta)=\begin{bmatrix}\eta\\ 1-\xi-\zeta\\ \eta\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\vartheta}_3(\xi,\eta,\zeta)=\begin{bmatrix}1-\eta-\zeta\\ \xi\\ \xi\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\vartheta}_4(\xi,\eta,\zeta)=\begin{bmatrix}0\\ \zeta\\ -\eta\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\vartheta}_5(\xi,\eta,\zeta)=\begin{bmatrix}\zeta\\ 0\\ -\xi\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\vartheta}_6(\xi,\eta,\zeta)=\begin{bmatrix}\eta\\ -\xi\\ 0\end{bmatrix}. \tag{5.18}$$

对于非梯度单元函数，我们采用 [2] 中引入的构造

$$\mathcal{R}^p=\left\{(p+1)b^p_{i-e_j}\nabla\lambda_j-\frac{i_j}{p+1}\nabla_\xi b_i^{p+1}\mid i\in\mathcal{I}_o\right\}, \tag{5.19}$$

其中， $\mathcal{I}_o$ 是单元函数的多重指标集合， e_j 是在位置 j 处取值为一的单位多重指标， i_j 是 i 多重指标在位置 j 处的值。注意，由于以下原因，单元函数中只有第一项需要张成序列中的下一个空间

$$\operatorname{curl}\left([p+1]b^p_{i-e_j}\nabla_\xi\lambda_j-\frac{i_j}{p+1}\nabla_\xi b_i^{p+1}\right)=\operatorname{curl}([p+1]b^p_{i-e_j}\nabla_\xi\lambda_j)\,. \tag{5.20}$$

然而，如果不加上梯度，该函数将不属于 $[P^p]^3\oplus\boldsymbol{\xi}\times[\tilde{P}]^3$，因此也不属于 N´é´delec 空间。通过将 $\mathcal{R}^p$ 限定为满足以下条件的 $\mathcal{R}^p_*$： $\mathcal{R}^p_*$ 仅包含满足 $\nabla\lambda_j=\mathbf{e}j$ 的表面置换，以及满足 $j\in\{1,2\}$ 的单元置换，即可得到所需的基函数。最低阶 N´é´delec 基函数、模板基函数、梯度基函数和非梯度单元函数之和恰好等于 $(p+4)(p+3)(p+1)/2$，从而满足 N´é´delec 空间所需的维数。完整空间写作

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_I^p=\mathcal{N}_I^0\oplus\left\{\bigoplus_{i\in\mathcal{I}}\nabla\mathcal{E}_i^{p+1}\right\}\oplus\left\{\bigoplus_{j\in\mathcal{J}}\nabla\mathcal{F}_j^{p+1}\right\}\oplus\nabla\mathcal{C}^{p+1}_{1234}\oplus\left\{\bigoplus_{k=1}^{3}\mathcal{V}_k^p\otimes\mathcal{T}_k\right\}\oplus\left\{\bigoplus_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{E}_i^p\otimes\mathcal{T}_i\right\}\\ \oplus\left\{\bigoplus_{j\in\mathcal{J}}\mathcal{F}_j^p\otimes\mathcal{T}_j\right\}\oplus\mathcal{R}_*^{p+1}\,,\qquad\begin{matrix}\mathcal{I}=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}\,,\\ \mathcal{J}=\{(1,2,3),(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4)\}\end{matrix}.\end{aligned} \tag{5.21}$$

这里使用 B´ézier 基构造高阶第一类 N´éd´élec 基函数。

定义 5.2 (B´ézier-N´éd´élec 第一类四面体基)基函数定义在
参考四面体上 n:

- 对于边，我们采用式(5.18)中的最低阶基函数。其余边基函数由梯度给出

$$\begin{aligned}
e_{12}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta)=\boldsymbol{\vartheta}_1^I\,, && \\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta)=\nabla_\xi b^{p+1}_{00k}\,, && 0<k<p+1,\\
e_{13}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta)=\boldsymbol{\vartheta}_2^I\,, && \\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta)=\nabla_\xi b^{p+1}_{0j0}\,, && 0<j<p+1\,,\\
e_{14}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta)=\boldsymbol{\vartheta}_3^I\,, && \\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta)=\nabla_\xi b^{p+1}_{i00}\,, && 0<i<p+1\,,\\
e_{23}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta)=\boldsymbol{\vartheta}_4^I\,, && \\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta)=\nabla_\xi b^{p+1}_{0j,p+1-j}\,, && 0<j<p+1,\\
e_{24}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta)=\boldsymbol{\vartheta}_5^I\,, && \\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta)=\nabla_\xi b^{p+1}_{i0,p+1-i}\,, && 0<i<p+1,\\
e_{34}:\quad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta)=\boldsymbol{\vartheta}_6^I\,, && \\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta)=\nabla_\xi b^{p+1}_{00k}\,, && 0<i<p+1\,;
\end{aligned} \tag{5.22}$$

- 在面上，我们同时采用模板基函数和梯度

$$
\begin{aligned}
&f_{123}\colon \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{000}\boldsymbol{\vartheta}^I_4, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = -b^p_{00p}\boldsymbol{\vartheta}^I_2, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{00k}(\boldsymbol{\vartheta}^I_4 - \boldsymbol{\vartheta}^I_2) \\
&\qquad 0<k<p, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{0j0}(\boldsymbol{\vartheta}^I_1 + \boldsymbol{\vartheta}^I_4) \qquad 0<j<p, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) \\
&= b^p_{0j,p-j}(\boldsymbol{\vartheta}^I_1 - \boldsymbol{\vartheta}^I_2) \qquad 0<j<p, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{0jk}(\boldsymbol{\vartheta}^I_1 - \boldsymbol{\vartheta}^I_2 + \boldsymbol{\vartheta}^I_4) \\
&\qquad 0<j<p, \quad 0<k<p-j, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = \nabla_\xi b^{p+1}_{0jk}, \\
&\qquad 0<j<p+1, \quad 0<k<p+1-j, f_{124}\colon \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{000}\boldsymbol{\vartheta}^I_5, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\\
&\zeta) = -b^p_{00p}\boldsymbol{\vartheta}^I_3, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{00k}(\boldsymbol{\vartheta}^I_5 - \boldsymbol{\vartheta}^I_3) \qquad 0<k<p, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{i00}(\\
&\boldsymbol{\vartheta}^I_1 + \boldsymbol{\vartheta}^I_5) \qquad 0<i<p, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{i0,p-i}(\boldsymbol{\vartheta}^I_1 - \boldsymbol{\vartheta}^I_3) \qquad 0<i<p, \\
&\boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{i0k}(\boldsymbol{\vartheta}^I_1 - \boldsymbol{\vartheta}^I_3 + \boldsymbol{\vartheta}^I_5) \qquad 0<i<p, \quad 0<k<p-i, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = \nabla_\xi b^{p+1}_{i0k}, \\
&\qquad 0<i<p+1, \quad 0<k<p+1-i, f_{134}\colon \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{000}\boldsymbol{\vartheta}^I_6, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) \\
&= -b^p_{0p0}\boldsymbol{\vartheta}^I_3, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{0j0}(\boldsymbol{\vartheta}^I_6 - \boldsymbol{\vartheta}^I_3) \qquad 0<j<p, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{i00}(\boldsymbol{\vartheta}^I_2 + \boldsymbol{\vartheta}^I_6) \\
&\qquad 0<i<p, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{i,p-i}0(\boldsymbol{\vartheta}^I_2 - \boldsymbol{\vartheta}^I_3) \qquad 0<i<p, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) \\
&= b^p_{ij0}(\boldsymbol{\vartheta}^I_2 - \boldsymbol{\vartheta}^I_3 + \boldsymbol{\vartheta}^I_6) \qquad 0<i<p, \quad 0<j<p-i, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = \nabla_\xi b^{p+1}_{ij0}, \\
&\qquad 0<i<p+1, \quad 0<j<p+1-i, f_{234}\colon \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{00p}\boldsymbol{\vartheta}^I_6, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) \\
&= -b^p_{0p0}\boldsymbol{\vartheta}^I_5, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{0j,p-j}(\boldsymbol{\vartheta}^I_6 - \boldsymbol{\vartheta}^I_5) \qquad 0<j<p, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{i0,p-i}(\\
&\boldsymbol{\vartheta}^I_4 + \boldsymbol{\vartheta}^I_6) \qquad 0<i<p, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{i,p-i}0(\boldsymbol{\vartheta}^I_4 - \boldsymbol{\vartheta}^I_5) \qquad 0<i<p, \boldsymbol{\vartheta} \\
&(\xi,\eta,\zeta) = b^p_{ij,p-i-j}(\boldsymbol{\vartheta}^I_4 - \boldsymbol{\vartheta}^I_5 + \boldsymbol{\vartheta}^I_6) \qquad 0<i<p, \quad 0<j<p-i, \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = \nabla_\xi b^{p+1}_{ij}, \\
&{}_{p-i.j}, \qquad 0<i<p+1, \quad 0<j<p+1-i;
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

- 单元基函数表示为

$$
\begin{aligned}
c_{1234}: \qquad & \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = (p+2)b^{p+1}_{i-1,jk}\mathbf{e}_1 - \frac{i}{p+2}\nabla_\xi b^{p+2}_{ijk}, && \begin{matrix}0<i<p+2,\\ 0<j<p+2-i,\\ 0<k<p+2-i-j\end{matrix}, \\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = (p+2)b^{p+1}_{i,j-1,k}\mathbf{e}_2 - \frac{j}{p+2}\nabla_\xi b^{p+2}_{ijk}, && \begin{matrix}0<i<p+2,\\ 0<j<p+2-i,\\ 0<k<p+2-i-j\end{matrix}, \\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = (p+2)b^{p+1}_{ij0}\mathbf{e}_3 - \frac{1}{p+2}\nabla_\xi b^{p+2}_{ij1}, && \begin{matrix}0<i<p+2,\\ 0<j<p+2-i\end{matrix}, \\
& \boldsymbol{\vartheta}(\xi,\eta,\zeta) = \nabla_\xi b^{p+1}_{ijk}, && \begin{matrix}0<i<p+1,\\ 0<j<p+1-i,\\ 0<k<p+1-i-j\end{matrix}.
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

6 数值求积

尽管基函数是用（α,β,γ）表示的，但区域采用参考三角形或参考四面体；与通过 Duffy 变换得到的对应区域（四边形或六面体）相比，它们所需的求积点更少。因此，我们综合采用 [14, 19, 39, 56, 57] 中针对三角形和四面体提出的高效求积点。由于伯恩斯坦多项式的递推公式（式 (3.8)），我们避开了在参考域的边或面上设有求积点的求积方案。求积点被映射到（α,β,γ）中的等价表达式。因此，在参考三角形或四面体上的积分可写为

$$\begin{aligned}\int_{A_e} f(x,y)\,\mathrm{d}A &= \int_{\Gamma} (f\circ(\xi,\eta))(\alpha,\beta)\,|\det \boldsymbol{J}|\,\mathrm{d}\Gamma\,,\\ \int_{V_e} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V &= \int_{\Omega} (f\circ(\xi,\eta,\zeta))(\alpha,\beta,\gamma)\,|\det \boldsymbol{J}|\,\mathrm{d}\Omega\,.\end{aligned} \tag{6.1}$$

对于低次单元，我们采用 [52, 53] 中的拉格朗日–N´é´lec 构造。

7 边界条件

[12] 中的自由度在连续空间与离散空间之间可交换。因此，它们能够精确满足一致耦合条件 [11]。值得注意的是，这些泛函可视为一个层次化的狄利克雷边界问题系统。对于层次基函数 [58], ，这些问题可以独立求解。然而，由于伯恩斯坦多项式具有非层次性，必须预先给出每个多胞体上的边界值。换言之，必须先求解顶点上的问题，再求解边上的问题，随后是面上的问题，最后是单元上的问题。在我们的情形中，单元的自由度无关紧要，因为单元永远不会成为边界的一部分。

7.1 边界顶点

有限元网格将每个顶点表示为一个坐标元组。只需在该顶点处计算位移场

$$u_i^d = \widetilde{u}\Big|_{\mathbf{x}_i}\,. \tag{7.1}$$

如果场是向量场，则在指定顶点处对其每个分量进行求值。微畸变场的边界条件与切向投影相关，因此不存在顶点类型的自由度。这是因为顶点无法定义唯一的切平面。

7.2 边界边

来自 [12] 的边泛函，针对H^1-协调子空间

$$l_{ij}(u) = \int_{s_i} \frac{\partial q_j}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial s}\,\mathrm{d}s\,,\quad q\in P^p(s)\,, \tag{7.2}$$

可在单位域 $\alpha\in[0,1]$ 上针对参考边重新表述。我们将边参数化为

$$\mathbf{x}(\alpha) = (1-\alpha)\mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2\,. \tag{7.3}$$

因此， 单位参数与弧长参数之间存在以下关系 r

$$\mathbf{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathbf{x} = \mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\,,\qquad \mathrm{d}s = \|\mathrm{d}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\|\mathrm{d}\alpha = \|\mathbf{t}\|\mathrm{d}\alpha\,. \tag{7.4}$$

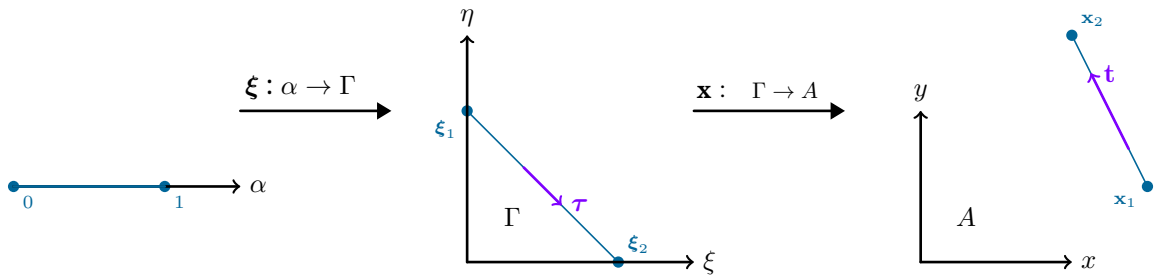


图 7.1：将边从单位域重心映射到参考三角形，再映射到物理域。

根据链式法则，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\|\mathbf{t}\|^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\alpha}\,, \tag{7.5}$$

对于某个函数 u。在边上，试验函数和试探函数是由单位域参数化的伯恩斯坦多项式。然而，表示边界条件 $\widetilde{u}(\mathbf{x})$ 的函数，则由物理空间的笛卡尔坐标参数化。通过观察下式，我们可以求出它关于弧长参数的导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\widetilde{u}=\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{x},\,\nabla_x\widetilde{u}\rangle\,. \tag{7.6}$$

坐标关于弧长的导数就是切向量的模

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{x}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\|\mathbf{t}\|^{-1}\mathbf{t}\,. \tag{7.7}$$

因此，边界边界条件为

$$\begin{aligned}\int_{s_i}\frac{\partial q_j}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial s}\,\mathrm{d}s&=\int_0^1\left(\|\mathbf{t}\|^{-1}\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}\alpha}\right)\left(\|\mathbf{t}\|^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\alpha}\right)\|\mathbf{t}\|\,\mathrm{d}\alpha\\&=\int_0^1\left(\|\mathbf{t}\|^{-1}\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}\alpha}\right)\langle\|\mathbf{t}\|^{-1}\mathbf{t},\,\nabla_x\widetilde{u}\rangle\|\mathbf{t}\|\,\mathrm{d}\alpha=\int_{s_i}\frac{\partial q_j}{\partial s}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial s}\,\mathrm{d}s\qquad\forall\,q_j\in P^p(\alpha)\,,\end{aligned} \tag{7.8}$$

并可通过组装边的刚度矩阵以及由指定位移场 $\widetilde{u}$（表示体力）所产生的载荷向量来求解

$$k_{ij}=\int_0^1\left(\|\mathbf{t}\|^{-1}\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}\alpha}\right)\left(\|\mathbf{t}\|^{-1}\frac{\mathrm{d}n_j}{\mathrm{d}\alpha}\right)\|\mathbf{t}\|\,\mathrm{d}\alpha\,,\qquad f_i=\int_0^1\langle\|\mathbf{t}\|^{-1}\mathbf{t},\,\nabla_x\widetilde{u}\rangle\left(\|\mathbf{t}\|^{-1}\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}\alpha}\right)\|\mathbf{t}\|\,\mathrm{d}\alpha\,. \tag{7.9}$$

接下来，我们考虑使用第二类 N´ed´elec 空间 $\mathcal{N}_{II}$ 对微畸变施加狄利克雷边界条件。问题表述如下

$$\int_{s_i}q_j\langle\mathbf{t},\,\mathbf{p}\rangle\,\mathrm{d}s=\int_{s_i}q_j\langle\mathbf{t},\,\nabla_x\widetilde{u}\rangle\,\mathrm{d}s\qquad\forall\,q_j\in P^p(s_i)\,. \tag{7.10}$$

注意，在边上，检验函数 q_j 选为伯恩斯坦多项式。此外，根据 $\mathcal{N}_{II}$-空间的多胞体模板构造，有 $\langle\mathbf{t}\,\boldsymbol{\theta}_i\rangle|_s=n_i(\alpha)$。因此，相应的刚度矩阵和载荷向量的分量为

$$k_{ij}=\int_0^1 n_i\,n_j\|\mathbf{t}\|\,\mathrm{d}\alpha\,,\qquad\qquad f_i=\int_0^1 n_i\langle\mathbf{t},\,\nabla_x\widetilde{u}\rangle\|\mathbf{t}\|\,\mathrm{d}\alpha\,. \tag{7.11}$$

请注意，为了保持精确性，N´ed´elec 空间 $\mathcal{N}_I^p, \mathcal{N}_{II}^p$的次数始终比子空间 $\mathcal{B}^{p+1}$的次数低一阶。

最后，我们考虑第一类 N´ed´elec 单元。问题表述为

$$\int_{s_i} q_j \langle \mathbf{t},\, \mathbf{p} \rangle \,\mathrm{d}s = \int_{s_i} q_j \langle \mathbf{t},\, \nabla_x \widetilde{u} \rangle \,\mathrm{d}s \qquad \forall\, q_j \in P^p(s_i)\,. \tag{7.12}$$

我们定义

$$q_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} n_i^{p+1}\,, \tag{7.13}$$

并注意到，在各边上，N´ed´elec 基函数给出

$$\langle \mathbf{t},\, \boldsymbol{\theta}_j \rangle = \langle \mathbf{t},\, \nabla_x n_j^{p+1} \rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} n_j^{p+1}\,. \tag{7.14}$$

因此，刚度矩阵和载荷向量的分量为

$$k_{ij} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}n_i^{p+1}}{\mathrm{d}\alpha} \frac{\mathrm{d}n_j^{p+1}}{\mathrm{d}\alpha} \|\mathbf{t}\| \,\mathrm{d}\alpha\,, \qquad\qquad f_i = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}n_i^{p+1}}{\mathrm{d}\alpha} \langle \mathbf{t},\, \nabla_x \widetilde{u} \rangle \|\mathbf{t}\| \,\mathrm{d}\alpha\,. \tag{7.15}$$

7.3 边界面

我们从 H^1-协调子空间的面边界条件开始。问题表述为

$$\int_{A_i} \langle \nabla_f q_j,\, \nabla_f u \rangle \,\mathrm{d}A = \int_{A_i} \langle \nabla_f q_j,\, \nabla_f \widetilde{u} \rangle \,\mathrm{d}A \qquad \forall\, q_j \in P^p(A_i)\,. \tag{7.16}$$

该曲面通过从单位三角形 $\Gamma = \{(\xi,\ \eta) \in [0,1]^2 \mid \xi + \eta \leq 1\}$出发的重心映射进行参数化。曲面梯度为

$$\nabla_f \widetilde{u} = \nabla_x \widetilde{u} - \frac{1}{\|\mathbf{n}\|^2} \langle \nabla_x \widetilde{u},\, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}\,, \tag{7.17}$$

其中，$\mathbf{n}$ 是曲面法向量。曲面梯度也可以表示为

$$\nabla_f u = \mathbf{e}^i \partial_i^x u = \mathbf{g}^\beta \partial_\beta^\xi u\,, \qquad\qquad \beta \in \{1,2\}\,, \tag{7.18}$$

其中，∂_β^x 是关于物理坐标的偏导数，∂_β^ξ 是关于参考域的偏导数，$\mathbf{g}^\beta$ 是逆变基向量。对相应指标采用爱因斯坦求和约定。协变基向量由下式给出

$$\mathbf{g}_\beta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\beta}\,. \tag{7.19}$$

通过下式可以求得与曲面正交的逆变向量

$$\mathbf{g}^3 = \mathbf{n} = \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\,. \tag{7.20}$$

定义混合变换矩阵

$$\boldsymbol{T} = \left[\mathbf{g}_1\,,\, \mathbf{g}_2\,,\, \mathbf{g}^3\right]\,. \tag{7.21}$$

根据正交关系 $\langle \mathbf{g}_i,\ \mathbf{g}^j \rangle = \delta_i^{\,j}$，$\boldsymbol{T}$的转置逆矩阵显然为

$$\boldsymbol{T}^{-T} = \left[\mathbf{g}^1\,,\, \mathbf{g}^2\,,\, \mathbf{g}_3\right]\,. \tag{7.22}$$

因此，我们可以 n 通过参考三角形对函数进行参数化，计算其曲面梯度

$$\nabla_f u = \left[\mathbf{g}^1\,,\, \mathbf{g}^2\right] \nabla_\xi u = \boldsymbol{T}_*^{-T} \nabla_\xi u\,, \qquad\qquad \boldsymbol{T}_*^{-T} = \left[\mathbf{g}^1\,,\, \mathbf{g}^2\right]\,. \tag{7.23}$$

此外， 物理曲面与参考曲面之间满足以下关系 e

$$\mathrm{d}A = \|\mathbf{n}\|\mathrm{d}\Gamma = \|\mathbf{g}^3\|\mathrm{d}\Gamma = \sqrt{\langle \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2,\, \mathbf{g}^3\rangle}\,\mathrm{d}\Gamma = \sqrt{\det \boldsymbol{T}}\,\mathrm{d}\Gamma\,. \tag{7.24}$$

因此，我们可以将刚度矩阵和载荷向量的分量写为 s

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \int_\Gamma \langle \boldsymbol{T}_*^{-T}\nabla_\xi n_i,\, \boldsymbol{T}_*^{-T}\nabla_\xi n_j\rangle \sqrt{\det \boldsymbol{T}}\,\mathrm{d}\Gamma\,, \\ f_i &= \int_\Gamma \langle \boldsymbol{T}_*^{-T}\nabla_\xi n_i,\, \nabla_x \widetilde{u} - (\det \boldsymbol{T})^{-1}\langle \nabla_x \widetilde{u},\, \mathbf{n}\rangle \mathbf{n}\rangle \sqrt{\det \boldsymbol{T}}\,\mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma \langle \boldsymbol{T}_*^{-T}\nabla_\xi n_i,\, \nabla_x \widetilde{u}\rangle \sqrt{\det \boldsymbol{T}}\,\mathrm{d}\Gamma\,, \end{aligned} \tag{7.25}$$

利用正交性 $\langle \mathbf{g}^\beta,\ \mathbf{n}\rangle = 0$ 对于 $\beta \in \{1,2\}$。

为了将一致耦合边界条件嵌入微畸变中，我们不采用 [12] 中定义的自由度，而是应用更简单的 $H(\mathrm{div}\boldsymbol{R})$-投影

$$\langle \mathbf{q}_i,\, \mathbf{p},\rangle_{H(\mathrm{div}\boldsymbol{R})} = \langle \mathbf{q}_i,\, \nabla_f \widetilde{u}\rangle_{H(\mathrm{div}\boldsymbol{R})} \qquad \forall\, \mathbf{q}_i \in \mathcal{N}_I^p(A) \quad \text{or} \quad \forall\, \mathbf{q}_i \in \mathcal{N}_{II}^p(A)\,. \tag{7.26}$$

由于 ker(curl) $= \nabla H^1$ ，问题可简化为

$$\int_{A_i} \langle \mathbf{q}_j,\, \mathbf{p}\rangle + \langle \mathrm{curl}_{2\mathrm{D}}\mathbf{q}_j,\, \mathrm{curl}_{2\mathrm{D}}\mathbf{p}\rangle\,\mathrm{d}A = \int_{A_i} \langle \mathbf{q}_j,\, \nabla_f \widetilde{u}\rangle\,\mathrm{d}A \qquad \forall\, \mathbf{q}_j \in \mathcal{N}_I^p(A) \quad \text{or} \quad \forall\, \mathbf{q}_j \in \mathcal{N}_{II}^p(A)\,. \tag{7.27}$$

我们使用以下形式表示从二维参考域到三维物理域的协变和逆变 Piola 变换

$$\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{T}_*^{-T}\boldsymbol{\vartheta}_i\,, \qquad\qquad \mathrm{div}_x\, \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\theta}_i = \frac{1}{\sqrt{\det \boldsymbol{T}}}\,\mathrm{div}_\xi\, \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\vartheta}_i\,. \tag{7.28}$$

因此，刚度矩阵分量和载荷向量分量可表示为

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \int_\Gamma \langle \boldsymbol{T}_*^{-T}\boldsymbol{\vartheta}_i,\, \boldsymbol{T}_*^{-T}\boldsymbol{\vartheta}_j\rangle + \langle (\det \boldsymbol{T})^{-1/2}\,\mathrm{div}_\xi\, \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\vartheta}_i,\, (\det \boldsymbol{T})^{-1/2}\,\mathrm{div}_\xi\, \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\vartheta}_j\rangle \sqrt{\det \boldsymbol{T}}\,\mathrm{d}\Gamma\,, \\ f_i &= \int_\Gamma \langle \boldsymbol{T}_*^{-T}\boldsymbol{\vartheta}_i,\, \nabla_x \widetilde{u} - (\det \boldsymbol{T})^{-1}\langle \nabla_x \widetilde{u},\, \mathbf{n}\rangle \mathbf{n}\rangle \sqrt{\det \boldsymbol{T}}\,\mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma \langle \boldsymbol{T}_*^{-T}\boldsymbol{\vartheta}_i,\, \nabla_x \widetilde{u}\rangle \sqrt{\det \boldsymbol{T}}\,\mathrm{d}\Gamma\,, \end{aligned} \tag{7.29}$$

其中，我们再次利用曲面切向量与其法向量之间的正交性。

8 数值算例

接下来，我们将在反平面剪切模型中使用人工解析解，并在三维模型中使用无限平面在圆柱弯曲下的解析解，来测试这些有限元公式。最后，我们将基准测试这些有限元公式能否正确地在微观 $\mathbb{C}_{\mathrm{micro}}$ 和宏观 $\mathbb{C}_{\mathrm{macro}}$ 刚度之间进行插值，具体如特征长度尺度参数 L_{c}所述。大多数收敛结果通过测量区域上的勒贝格范数误差来呈现

$$\|\widetilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^h\|_{L^2} = \sqrt{\int_V \|\widetilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^h\|^2\,\mathrm{d}V}\,, \qquad\qquad \|\widetilde{\boldsymbol{P}} - \boldsymbol{P}^h\|_{L^2} = \sqrt{\int_V \|\widetilde{\boldsymbol{P}} - \boldsymbol{P}^h\|^2\,\mathrm{d}V}\,, \tag{8.1}$$

在此情形下， $\{\widetilde{\ }\mathbf{u}\ \ \widetilde{\boldsymbol{P}}\}$ 和 $\{\mathbf{u}^h, \boldsymbol{P}^h\}$ 分别为解析解和近似子空间解。

8.1 相容微畸变

在 [53] 中，我们探讨了微畸变 $\mathbf{p}$ 退化为梯度场（即 $\mathbf{p}$ 相容）的条件。通过用标量势定义微力矩

$$\mathbf{m} = \nabla \frac{100 - x^2 - y^2}{10} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\,, \tag{8.2}$$

并构造位移场的解析解

$$\widetilde{u} = \sin\left(\frac{x^2+y^2}{5}\right), \tag{8.3}$$

我们可以求得微畸变的解析解

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\mu_{\mathrm{e}}+\mu_{\mathrm{micro}}}(\mathbf{m}+\mu_{\mathrm{e}}\nabla\widetilde{u}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + \frac{2}{5}\begin{bmatrix}x\cos([x^2+y^2]/5)\\y\cos([x^2+y^2]/5)\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}x\cos([x^2+y^2]/5)\\y\cos([x^2+y^2]/5)\end{bmatrix} - \frac{1}{10}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, \tag{8.4}$$

为简单起见，我们将所有材料常数设为 1。由于 $\mathbf{m}$ 是梯度场，微畸变 $\mathbf{p}$ 也可化为梯度场，且 $\mathrm{curl}_{2\mathrm{D}}\mathbf{p} = 0$，见 [53]。请注意，这一结果仅适用于反平面剪切，不能推广到完整的三维模型，参见 [52]。我们注意到，微畸变并不等于位移场的梯度，因此，它们在任意边界上的切向投影不会自动相同。然而，对于位移场的梯度和微力矩，在圆形区域边界上的切向投影 $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\| \leq 10\}$均等于零

$$\langle \nabla\mathbf{t},\, \widetilde{u}\rangle\Big|_{\partial A} = \langle \mathbf{t},\, \mathbf{m}\rangle\Big|_{\partial A} = 0\,, \tag{8.5}$$

因此，微畸变属于 $\mathbf{p} \in H_0(\mathrm{curl}\ A)$。由此，我们可以设定 $s_D = \partial A$，且一致耦合条件仍然相容。由位移场和微畸变场，我们推导出相应的力

$$f = \frac{1}{25}\left[2x^2\sin\left(\frac{x^2+y^2}{5}\right) + 2y^2\sin\left(\frac{x^2+y^2}{5}\right) - 10\cos\left(\frac{x^2+y^2}{5}\right) - 5\right]. \tag{8.6}$$

图 8.1 展示了使用线性和高阶单元对位移场和微畸变场进行近似的结果。值得注意的是，即使采用近 3000 个有限元和 6000 个自由度，线性公式仍无法获得足够准确的近似。与之相反，采用 57 个单元和 4097 个自由度的高阶近似（7 次）在区域内部得到了非常准确的结果。然而，区域外部的刻画相当粗略。这是因为圆形区域的几何形状是用线性三角形近似的。因此，在这种情况下，更精细的网格能够更准确地刻画几何形状。几何形状对解的近似所产生的影响，在图 8.2 的收敛图中也清晰可见；只有在区域描述达到一定精度之后，有限元才能达到其预期的收敛率，参见 [52, 53]。比较线性单元和七阶单元的收敛曲线，可以清楚地观察到这一点。线性单元产生二次收敛 $p+1 = 1+1 = 2$，而七阶单元的收敛斜率为 7（预期为 8）。尽管七阶公式包含更多自由度，但它采用了更粗的网格，因此在边界处产生了更大的误差。这些误差可以追溯到一致耦合条件：对于非完美圆形边界，位移场的梯度会在不规则边界上引起切向投影。在微畸变的收敛过程中，后一种效应更加明显，高阶公式在粗网格上无法达到最佳性能。

8.2 圆柱弯曲

为了检验有限元公式捕捉松弛微形态模型内在行为的能力，我们将其与边值问题的解析解进行比较。第一个示例考察无限延伸板在圆柱弯曲下的位移场和微畸变场 [43]。令板定义为 $V = (-\infty,\ \infty)^2 \times [-1/2, 1/2]$，则圆柱弯曲的解析解为

$$\mathbf{u} = \kappa\begin{bmatrix}-xz\\0\\x^2/2\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P} = -\kappa\begin{bmatrix}[41z + 20\sqrt{82}\,\mathrm{sech}(\sqrt{41/2})\sinh(\sqrt{82}z)]/1681 & 0 & x\\0 & 0 & 0\\-x & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{8.7}$$

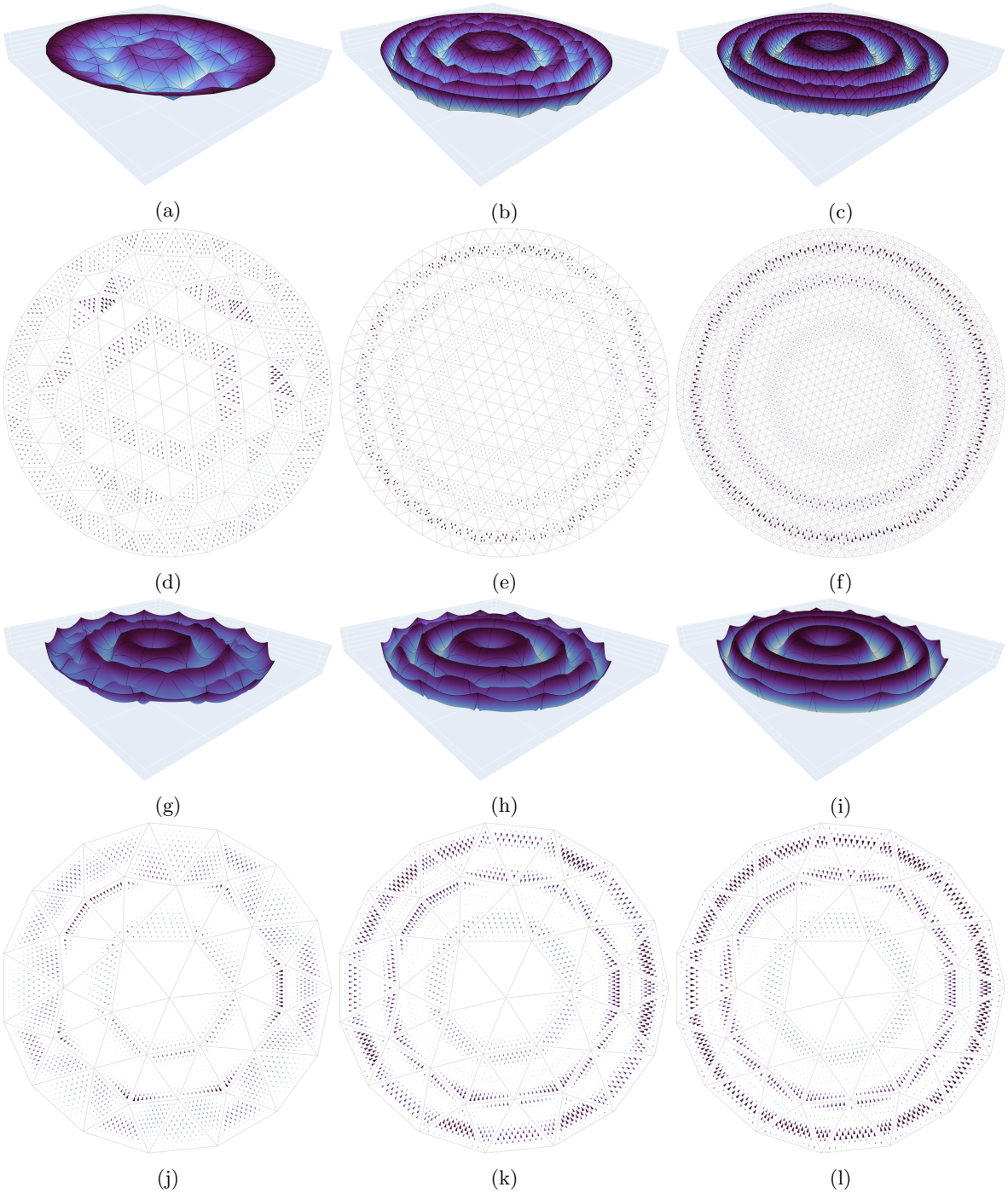
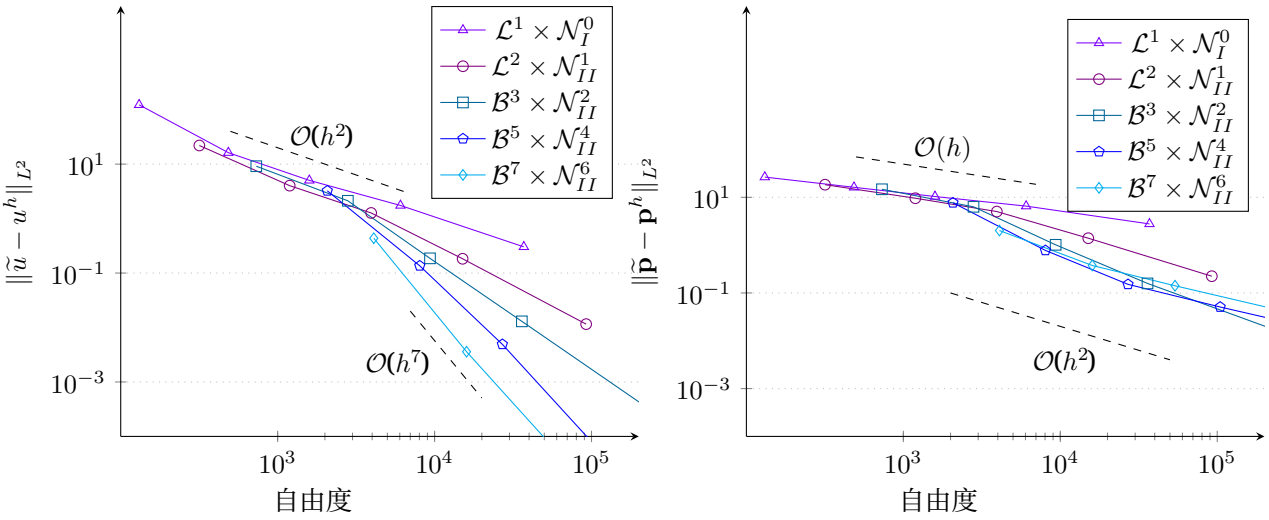


图 8.1：反平面剪切问题中位移场 (a)-(c) 和微畸变场 (d)-(f) 的示意图。线性单元经过 h-细化后，分别包含 225、763 和 2966 个单元，对应 485、1591 和 6060 个自由度。图 (g)-(l) 展示了在包含 57 个单元的最粗网格上对位移场进行 p 加密的结果，其中 $p \in \{3, 5, 7\}$ 分别对应 731、2072 和 4097 个自由度。



(a) (b)

图 8.2：反平面剪切问题中，不同多项式次数下位移 (a) 和微畸变 (b) 随 h-细化的收敛性。

其中 $\mathrm{sech}(x) = 1/\cosh(x)$，材料常数取以下数值

$$\lambda_{\mathrm{e}} = \lambda_{\mathrm{micro}} = 0\,, \qquad \mu_{\mathrm{e}} = \mu_{\mathrm{macro}} = 1/2\,, \qquad \mu_{\mathrm{c}} = 0\,, \qquad L_{\mathrm{c}} = 1\,, \qquad \mu_{\mathrm{micro}} = 20\,. \tag{8.8}$$

板的曲率参数 κ 的强度取为 $\kappa = 14/200$。

注 8.1
已求得圆柱弯曲的特例 $\lambda_{\mathrm{e}} = \lambda_{\mathrm{micro}} = 0$ （相当于微泊松比为零）以及更一般的情形（$\lambda_{\mathrm{e}} \neq \lambda_{\mathrm{micro}} \neq 0$），详见 *[43]*。考虑这一特例的优点在于，从无限域中截取的有限板，其侧表面会自动满足一致耦合边界条件。

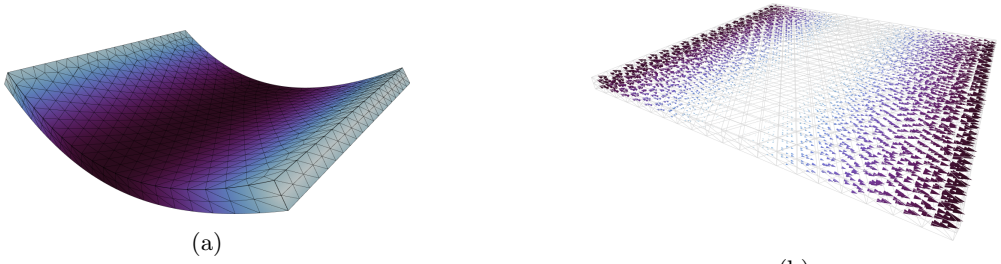
注 8.2
请注意，圆柱弯曲的一般解析解不依赖于 μ_{c}，因此不失一般性，我们可以令 $\mu_{\mathrm{c}} = 0$，参见 *[43]*。

我们定义有限域 $V = [-10, 10]^2 \times [-1/2, 1/2]$ 及其边界

$$\begin{aligned} &\overline{A}_{D_1} = \{-10\} \times [-10, 10] \times [-1/2, 1/2]\,, \qquad \overline{A}_{D_2} = \{10\} \times [-10, 10] \times [-1/2, 1/2]\,, \\ &A_N = \partial V \setminus \{\overline{A}_{D_1} \oplus \overline{A}_{D_2}\}\,. \end{aligned} \tag{8.9}$$

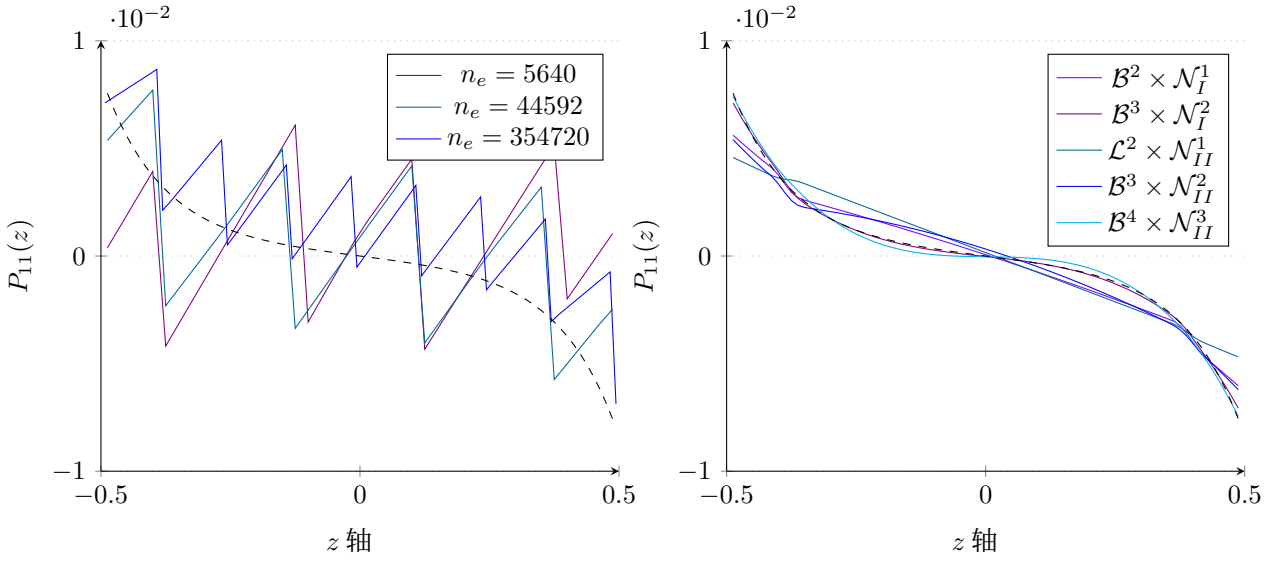
此外，在 D irichlet 边界上，我们施加平移后的解析解 $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix}^T$.

位移场和微畸变的最后一行如图 8.3 所示。位移场由其二次项主导，且得到了正确捕捉。微畸变的最后一行是线性函数，即使使用线性单元也很容易近似。相反，微畸变的 P_{11} 分量是关于 z 轴的双曲函数。图 8.4 给出了其在 $x = y = 0$（平面中心）处的近似结果。我们发现，即便将线性有限元的数量增加到极限，也只会使解析解周围的振荡有所改善。相比之下，高阶公式会收敛至预期的双曲行为。第一类二次 N´ed´elec 单元的近似几乎完美，而其二类对应元在 $z \approx -0.25$ 处明显偏离解析解。采用二类三次元可得到理想结果。这一现象清楚地表明，微畸变的旋度在此类问题中发挥着重要作用。首先，微畸变是一个非梯度场。其次，解析解的旋度会产生一个双曲正弦项。这类函数通常需要用幂级数中至少三次的项来近似，因此也解释了为何正确计算需要使用如此高阶的元。



(a) (b)

图 8.3：使用第一类 N´ed´elec 单元的二次公式所得的位移 (a) 和微畸变最后一行 (b)。



(a) (b)

图 8.4：最低阶公式在 h-细化下使用 732、5640 和 44592 个单元 (a)，以及高阶公式在 p 加密下使用 732 个单元 (b) 时，趋近于 $P_{11}(z)$ 在 $x = y = 0$ 处的分量的解析解（虚线）。

8.3 有界刚度性质

特征长度尺度参数 L_{c} 使松弛微形态模型能够捕捉从高度均匀的材料到具有显著微结构的材料的转变，因为它控制着微结构对模型整体行为的影响。我们通过一个示例展示模型的这一性质：在该示例中，我们改变 L_{c} 并测量由此产生的能量。

设区域 为轴对称立方体 $V=[-1,1]^3$，其边界全部为狄利克雷边界

$$\begin{aligned}
&\overline{A}_{D_1}=\{(x,y,z)\in[-1,1]^3 \mid x=\pm 1\}, \qquad &&\overline{A}_{D_2}=\{(x,y,z)\in[-1,1]^3 \mid y=\pm 1\},\\
&\overline{A}_{D_3}=\{(x,y,z)\in[-1,1]^3 \mid z=\pm 1\}, &&
\end{aligned} \tag{8.10}$$

我们嵌入周期边界条件

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}\Big|_{A_{D_1}} &= \begin{bmatrix}(1-y^2)\sin(\pi[1-z^2])/10\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \qquad &\widetilde{u}\Big|_{A_{D_2}} &= \begin{bmatrix}0\\ (1-x^2)\sin(\pi[1-z^2])/10\\ 0\end{bmatrix},\\
\widetilde{u}\Big|_{A_{D_3}} &= \begin{bmatrix}0\\ 0\\ (1-y^2)\sin(\pi[1-x^2])/10\end{bmatrix}. &&
\end{aligned} \tag{8.11}$$

材料参数选取如下

$$\lambda_{\mathrm{macro}}=2, \qquad \mu_{\mathrm{macro}}=1, \qquad \lambda_{\mathrm{micro}}=10, \qquad \mu_{\mathrm{micro}}=5, \qquad \mu_{\mathrm{c}}=1, \tag{8.12}$$

从而通过式（2.19）得出以下介观参数

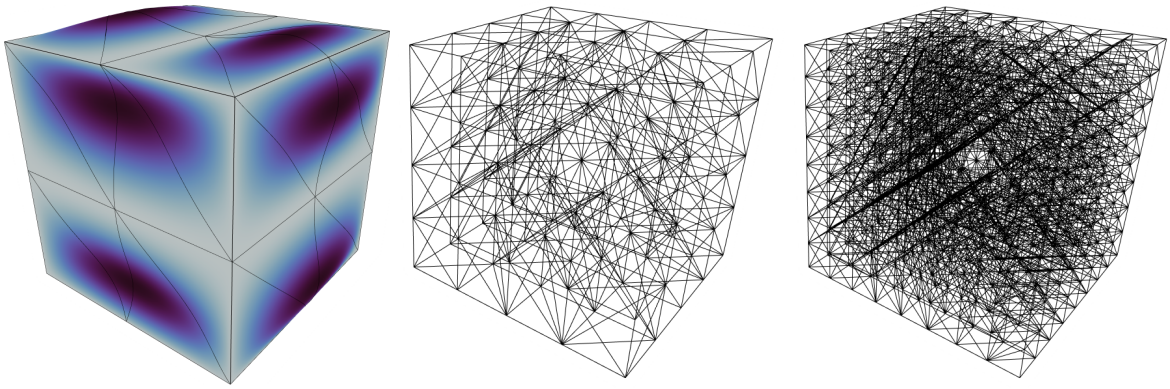
$$\lambda_{\mathrm{e}}=2.5\,, \qquad \mu_{\mathrm{e}}=1.25\,. \tag{8.13}$$

位移场以及所采用网格的一些示例见图 8.5。为了计算能量的上界和下界，我们采用包含微观和宏观弹性参数的等效柯西模型公式。为了确保界限解具有较高精度，我们采用十阶有限元。能量随特征长度参数 L_{c} 变化的情况见图 8.6。我们观察到，低阶公式具有很强的网格依赖性，其能量明显被高估。所有高阶公式都能正确捕捉上界，但对于下界的结果则各不相同。值得注意的是，采用第一类 N´ed´elec 单元得到的近似，比采用第二类 N´ed´elec 单元的等效公式更精确，这表明微位错对能量的影响不可忽略。在采用常规网格粗糙度时，使用第一类 N´ed´elec 单元的三次单元公式可得到令人满意的结果。若要在极粗网格上达到同样的效果，则需采用七阶单元。

9 结论与展望

通过边值问题的解析解，可以揭示松弛微形态模型的内在行为。显然，该连续体呈现双曲函数解和三角函数解，而低阶有限元难以对其进行准确近似。第 8.2 节中的示例表明，三次及更高阶有限元能够出色地近似求解该模型。

[50] 中引入的多面体模板方法能够轻松而灵活地构造满足H(curl)条件的向量有限元，这些有限元继承了底层H^1协调基的许多特性，而该基可以独立选择。在本研究中，我们使用了伯恩斯坦-B´ezier 多项式。它们具有最优复杂度特性，表现为和因子分解。通过 Duffy 变换将其多变量形式自然分解为单变量伯恩斯坦基函数的乘积后，便可利用递推公式构造最优迭代器来计算这些基函数。此外，这一特性使得在计算其导数时使用对偶数尤为理想。最后，通过选择参考单元的顺时针定向，充分利用了因式分解所带来的内在遍历顺序。这些特性结合起来，造就了一个高性能的 hp 有限元程序。



(a) (b) (c)

图 8.5：柯西模型在由 48 个十阶有限元构成的最粗网格上的位移场（a），以及分别包含 384 个（b）和 3072 个（c）单元的网格示意图。

第 8.3 节展示了松弛微形态模型如何通过特征长度尺度参数 L_c，在均匀材料的能量与具有底层微结构的材料的能量之间进行插值。文中还表明，为了正确捕捉L_c 各取值下的能量范围，需要采用精细离散或高阶单元。

所提出的高阶有限元在静态线性情形下表现出色，这为其应用于动态情形奠定了基础。这一点十分重要，因为松弛微形态模型常用于计算弹性波（例如声学超材料中的弹性波），而这类计算通常需要高频范围内的解。

所提出的计算方案对曲线几何的描述尚不完善。由于一致耦合条件，这很容易导致边界处产生误差。因此，未来的研究可以探讨曲线有限元 [20,21]及其相对于该模型的表现。

致谢

Angela Madeo 和 Gianluca Rizzi 感谢欧盟委员会通过资助 ERC Consolidator Grant META-LEGO, N° 101001759.00 提供支持。

Patrizio Neff 感谢德国研究联合会优先计划2256“用于预测工程结构与材料中复杂现象的变分方法”提供的支持，项目编号 Neff 902/10-1，项目号 440935806。

10 参考文献

[1] Ainsworth, M., Andriamaro, G., Davydov, O.：任意阶 Bernstein–B´ezier 有限元及最优组装过程。SIAM科学计算杂志 **33**(6), 3087–3109 (2011)[2] Ainsworth, M., Fu, G.：四面体有限元的 Bernstein–B´ezier 基。应用力学与工程中的计算方法 **340**, 178–201 (2018)[3] Aivaliotis, A., Tallarico, D., d’Agostino, M.V., Daouadji, A., Neff, P., Madeo, A.：基于松弛微形态模型的有限尺寸超结构频率和角度依赖散射。应用力学档案 **90**(5), 1073–1096 (2020)[4] Alberdi, R., Robbins, J., Walsh, T., Dingreville, R.：运用松弛微形态模型探索非均质超结构中的波传播。《固体力学与物理学杂志》 **155**, 104540 (2021)[5] Anjam, I., Valdman, J.：二维和三维边元有限元矩阵的快速 MATLAB 组装。应用数学与计算 **267**, 252–263 (2015)[6] Barbagallo, G., Madeo, A., d’Agostino, M.V., Abreu, R., Ghiba, I.D., Neff, P.：松弛微形态模型的透明各向异性：宏观一致性条件与长波长渐近分析。《国际固体与结构杂志》 **120**, 7–30 (2017)

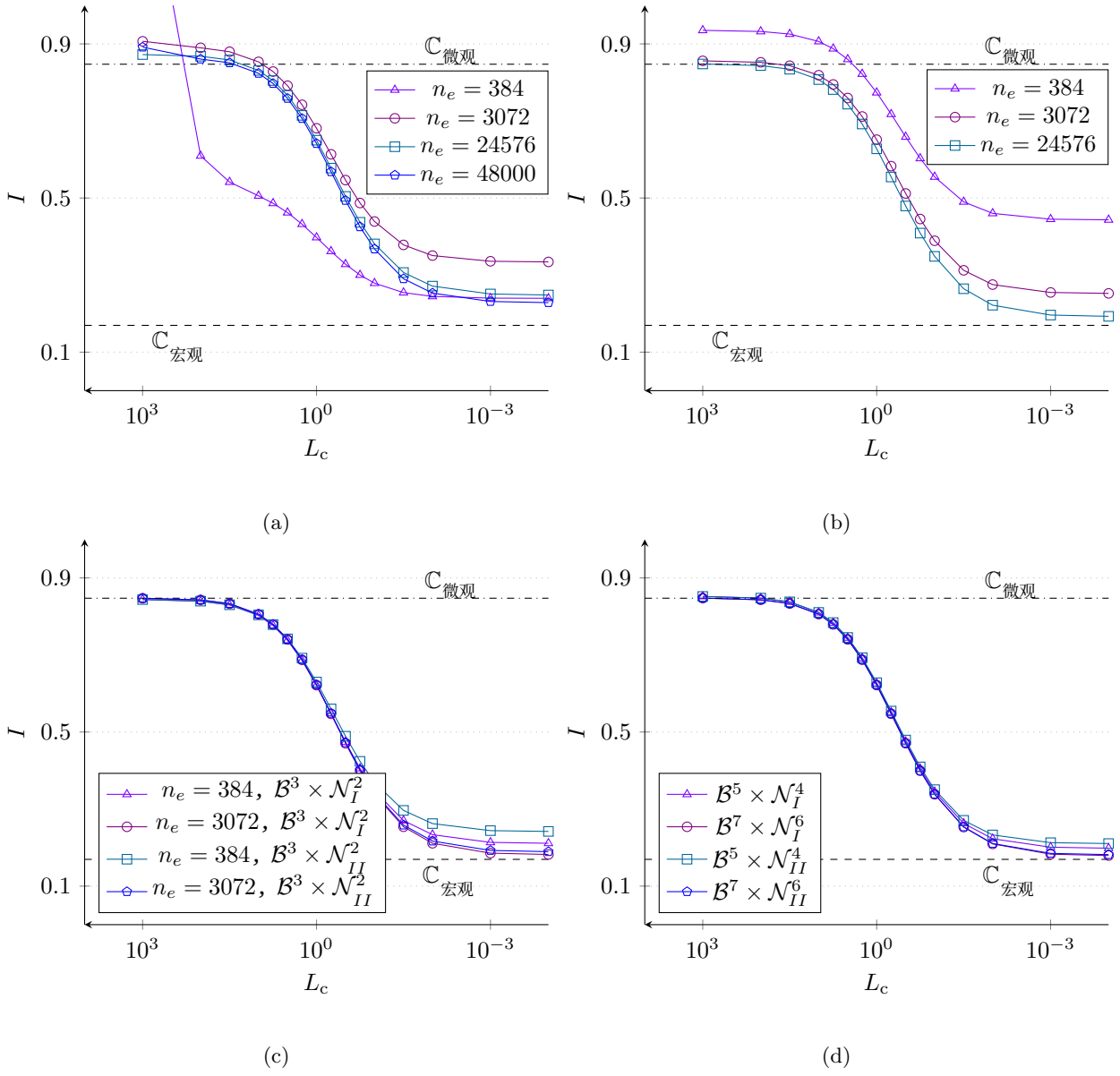


图 8.6：松弛微形态模型相对于 L_c 的能量演化，分别采用线性 (a)、二次 (b) 和三次 (c) 有限元公式。(d) 展示了使用最粗网格（包含 48 个单元）计算得到的能量，其中采用了不同的多项式幂次。

[7] Barbagallo, G., Tallarico, D., D'Agostino, M.V., Aivaliotis, A., Neff, P., Madeo, A.：各向异性带隙超结构中瞬态波传播的松弛微形态模型。《国际固体与结构杂志》162，148–163（2019年）[8] Baydin, A.G., Pearlmutter, B.A., Radul, A.A., Siskind, J.M.：机器学习中的自动微分：综述。《机器学习研究杂志》18，1–43（2018年）[9] Bergot, M., Lacoste, P.：用于麦克斯韦方程的 N´ed´elec H(curl) 有限元高阶多项式基的生成。《计算与应用数学杂志》234(6)，1937–1944（2010年）。第八届波的数学与数值方面国际会议（Waves 2007）[10] d'Agostino, M.V., Barbagallo, G., Ghiba, I.D., Eidel, B., Neff, P., Madeo, A.：通过松弛微形态模型有效描述机械带隙超材料中的各向异性波色散。《弹性杂志》139(2)，299–329（2020年）[11] d'Agostino, M.V., Rizzi, G., Khan, H., Lewintan, P., Madeo, A., Neff, P.：经典微形态模型的一致耦合边界条件：存在性、唯一性及参数解释。《连续介质力学与热力学》（2022年）[12] Demkowicz, L., Monk, P., Vardapetyan, L., Rachowicz, W.：hp有限元空间的德拉姆图。《计算机与应用数学》39(7)，29–38（2000年）[13] Demore, F., Rizzi, G., Collet, M., Neff, P., Madeo, A.：开拓工程超材料设计：大型声学超结构的松弛微形态建模。《固体力学与物理学杂志》168，104995（2022年）[14] Dunavant, D.A.：三角形上的高次数高效对称高斯求积公式。《工程数值方法国际期刊》21(6)，1129–1148（1985年）[15] Eringen, A.：《微连续场理论》第一卷：基础与固体。施普林格纽约出版社（1999年）[16] Fike, J.A., Alonso, J.J.：利用超对偶数进行自动微分以计算二阶导数。载于：S. Forth, P. Hovland, E. Phipps, J. Utke, A. Walther（编），《算法微分最新进展》，第163–173页。施普林格柏林海德堡，柏林，海德堡（2012年）[17] Forest, S.：非线性微形态介质、应变梯度介质和应力梯度介质的连续介质热力学。《英国皇家学会哲学汇刊A辑》378(20190169)（2020年）[18] Ghiba, I.D., Neff, P., Madeo, A., Placidi, L., Rosi, G.：松弛线性微观形态连续体：动力学中的存在性、唯一性与连续依赖性。《固体数学与力学》20(10)，1171–1197（2015年）[19] Ja´skowiec, J., Sukumar, N.：四面体的高阶求积公式。《工程数值方法国际期刊》121(11)，2418–2436（2020年）[20] Johnen, A., Remacle, J.F., Geuzaine, C.：曲线有限元的几何有效性。《计算物理学杂志》233，359–372（2013年）[21] Johnen, A., Remacle, J.F., Geuzaine, C.：高阶三角形有限元的几何有效性。《计算机辅助工程》30(3)，375–382（2014年）[22] Knees, D., Owczarek, S., Neff, P.：基于内变分的松弛微形态模型局部正则性结果。《数学分析与应用杂志》519(2)，126806（2023年）[23] Lai, M.J., Schumaker, L.L.：《三角剖分上的样条函数》。剑桥大学出版社（2007年）[24] Lewintan, P., M¨uller, S., Neff, P.：三维空间中不相容张量场的Korn不等式及共形不变位错能。《变分法与偏微分方程》60(4)，150（2021年）[25] Lewintan, P., Neff, P.：具有 L^p-可积外微分的任意维数不相容张量场的广义Korn不等式的p版本。《数学报告》359(6)，749–755（2021年）Lewintan, P., Neff, P.：重新审视Nečas–Lions引理：不相容张量场广义Korn不等式的一个 L^p版本。《应用科学中的数学方法》44(14)，11392–11403（2021年）[27] Madeo, A., Barbagallo, G., Collet, M., d'Agostino, M.V., Miniaci, M., Neff, P.：均质固体与带隙超材料之间界面的松弛微形态建模：超结构设计的新视角。《固体数学与力学》23(12)，1485–1506（2018年）[28] Madeo, A., Neff, P., Ghiba, I.D., Rosi, G.：非局域带隙超材料中的弹性波反射与透射：基于松弛微形态模型的全面研究。《固体力学与物理学杂志》95，441–479（2016年）[29] Mindlin, R.：线弹性中的微结构。《理性力学与分析档案》16，51–78（1964年）[30] Nedelec, J.C.： $\mathbb{R}^3$中的混合有限元。《数值数学》35(3)，315–341（1980年）[31] N´ed´elec, J.C.： $\mathbb{R}^3$中的一个新的混合有限元族。《数值数学》50(1)，57–81（1986年）[32] Neff, P., Eidel, B., d'Agostino, M.V., Madeo, A.：通过模型适配的一阶均匀化识别松弛微形态模型中的尺度无关材料参数。《弹性杂志》139(2)，269–298（2020年）[33] Neff, P., Forest, S.：考虑仿射微结构的弹性金属泡沫几何精确微观形态模型：建模、极小值解的存在性、模量识别及计算结果。《弹性杂志》87(2)，239–276（2007年）[34] Neff, P., Ghiba, I.D., Lazar, M., Madeo, A.：松弛线性微观形态连续体：静态问题的适定性及其与位错规范理论的关系。《力学与应用数学季刊》68(1)，53–84（2015年）

[35] Neff, P., Ghiba, I.D., Madeo, A., Placidi, L., Rosi, G.：统一视角：松弛线性微观形态连续体。《连续介质力学与热力学》26(5)，639–681（2014年）[36] Neff, P., Pauly, D., Witsch, K.J.：麦克斯韦遇上Korn：针对具有平方可积外微分的张量场的一种新强制不等式。《应用科学中的数学方法》35(1)，65–71（2012年）[37] Neidinger, R.D.：自动微分与MATLAB面向对象编程简介。SIAM评论52(3)，545–563（2010年）[38] Owczarek, S., Ghiba, I.D., Neff, P.：关于动态线性松弛微观形态模型局部高阶正则性的说明。《应用科学中的数学方法》44(18)，13855–13865（2021年）[39] Papanicolopulos, S.A.：求积公式的高效计算及其在三角形新非对称公式中的应用。《计算与应用数学杂志》304，73–83（2016年）[40] Perez-Ramirez, L.A., Rizzi, G., Madeo, A.：通过松弛微形态模型设计多单元超材料。arXiv:2210.14697（2022年）[41] Rizzi, G., d'Agostino, M.V., Neff, P., Madeo, A.：松弛微形态模型中的边界与界面条件：探索用于弹性波控制的有限尺寸超结构。《固体数学与力学》p. 10812865211048923（2021年）[42] Rizzi, G., H¨utter, G., Khan, H., Ghiba, I.D., Madeo, A., Neff, P.：松弛微形态连续体及其他广义连续体的圆柱扭转问题解析解（含完整推导）。《固体数学与力学》p. 10812865211023530（2021年）[43] Rizzi, G., H¨utter, G., Madeo, A., Neff, P.：松弛微形态连续体及其他广义连续体的圆柱弯曲问题解析解。《连续介质力学与热力学》33(4)，1505–1539（2021年）[44] Rizzi, G., H¨utter, G., Madeo, A., Neff, P.：微观形态模型及其他广义连续体简单剪切问题的解析解。《应用力学档案》91(5)，2237–2254（2021年）[45] Rizzi, G., Khan, H., Ghiba, I.D., Madeo, A., Neff, P.：松弛微形态连续体及其他广义连续体单轴拉伸问题的解析解（含完整推导）。应用力学档案（2021年）[46] Rizzi, G., Neff, P., Madeo, A.：通过松弛微形态方法实现内部防护与外部调谐的超材料屏蔽结构。《英国皇家学会哲学汇刊A辑》380(2231)（2022年）[47] Sarhil, M., Scheunemann, L., Schr¨oder, J., Neff, P.：受纯弯曲的超材料梁的尺寸效应：松弛微形态模型中的边界条件与参数识别。arXiv:2210.17117（2022年）[48] Sch¨oberl, J., Zaglmayr, S.：具有局部完全序列性质的高阶N´ed´elec单元。COMPEL - 电气与电子工程计算与数学国际期刊24(2)，374–384（2005年）[49] Schr¨oder, J., Sarhil, M., Scheunemann, L., Neff, P.：用于松弛微形态模型的拉格朗日和 $H(\mathrm{curl}\ \mathcal{B})$有限元公式。《计算力学》（2022年）[50] Sky, A., Muench, I.：用于构造任意阶半连续向量有限元的多面体模板。arXiv:2210.03525（2022年）[51] Sky, A., Muench, I., Neff, P.：关于用于矩阵值旋度问题的 $[H^1]^{3\times3}$、 $[H(\mathrm{curl})]^3$和 $H(\mathrm{symCurl})$有限元。《工程数学杂志》136(1)，5（2022年）[52] Sky, A., Neunteufel, M., Muench, I., Sch¨oberl, J., Neff, P.：松弛微形态模型的原始和混合有限元公式。《应用力学与工程中的计算方法》399，115298（2022年）[53] Sky, A., Neunteufel, M., M¨unch, I., Sch¨oberl, J., Neff, P.：用于反平面剪切松弛微形态连续体模型的混合 $H^1 \times H(\mathrm{curl})$有限元公式。《计算力学》68(1)，1–24（2021年）[54] Solin, P., Segeth, K., Dolezel, I.：《高阶有限元方法》（第1版）。Chapman and Hall/CRC（2003年）[55] Voss, J., Baaser, H., Martin, R.J., Neff, P.：关于反平面剪切的更多讨论。《优化理论与应用杂志》184(1)，226–249（2020年）[56] Witherden, F., Vincent, P.：有限元方法中对称求积公式的识别。《计算机与应用数学》69(10)，1232–1241（2015年）[57] Xiao, H., Gimbutas, Z.：一种用于构造二维及更高维高效求积公式的数值算法。《计算机与应用数学》59(2)，663–676（2010年）[58] Zaglmayr, S.：电磁场计算的高阶有限元方法。约翰内斯·开普勒林茨大学博士论文（2006年）。URL https://www.numerik.math.tugraz.at/~zaglmayr/pub/szthesis.pdf