具有梯度机制的知情垄断模型的复杂动力学

李晓亮[a]、傅嘉诚[b]和牛伟[*b, c]

[a]东莞城市学院数字经济学院，中国东莞[b]北京航空航天大学中法工程师学院，中国北京[c]北航杭州创新研究院（余杭），中国杭州

arXiv:2301.01497v1 [econ.TH] 4 Jan 2023

摘要

本文探讨了两种由充分知情的参与者参与的垄断模型的动力学。第一种模型最初由 Naimzada 和 Ricchiuti 提出，第二种模型则是对 Puu 提出的著名垄断模型进行简化所得。我们运用多种基于符号计算的工具，分析这两种模型的局部稳定性和分岔。据我们所知，第二种模型的完整稳定性条件是首次得到。我们还研究了周期解及其稳定性。最重要的是，我们发现，第二种模型参数空间的拓扑结构远比第一种模型复杂。具体而言，在第一种模型中，任意固定阶数的周期轨道的稳定参数区域均构成一个连通集。然而，在第二种模型中，3-周期、4周期和5周期轨道的稳定区域均是不连通集，由许多彼此分离的部分组成。此外，我们发现第二种模型中两个稳定平衡点的吸引域互不连通，且具有复杂的拓扑结构。此外，我们通过分别在这两种模型中找到回弹排斥子和3-周期轨道，严格证明了 Li-Yorke 意义下混沌的存在。

关键词：垄断；梯度机制；稳定性；周期轨道；混沌

1 引言

不同于由大量规模相对较小、生产同质产品并相互竞争的公司组成的竞争市场，寡头垄断是一个仅由少数企业供应的市场。众所周知，Cournot 在 [7], 提出了第一个形式化的寡头垄断理论，其中假定参与者持有朴素预期，认为其竞争对手的产量与紧邻的上一周期相同。Cournot 引入了调整产量的梯度机制，并证明其模型具有唯一的平衡点；只要市场中仅存在两家企业，该平衡点就是全局稳定的。

垄断是最简单的寡头垄断，即由唯一一家企业服务的市场。在现有文献中，由两家、三家甚至四家公司供应的市场分别称为双头垄断 [17], 、三头垄断[19], 或四头垄断 [21], 。然而，如果相关企业被假定为有限理性，垄断也可能表现出复杂的动力学行为，例如周期轨道和混沌。正如 Matsumoto 和 Szidarovszky [22], 所区分的那样，如果有限理性垄断者掌握有关逆需求函数的完整信息，则称其为知识型；如果它不知道逆需求函数的形式，但仅拥有过去两个周期的产量和价格值，则称其为有限型。知识型和有限型参与者已在若干垄断模型中得到研究。

例如，Puu [26] 引入了一种垄断模型，其中逆需求函数是具有拐点的三次函数，而边际成本是二次函数。在该模型中，垄断者被

*通讯作者：wei.niu@buaa.edu.cn

假定为有限理性的参与者。Puu指出，模型存在多个（最多三个）平衡点；如果垄断者的反应性足够大，则可能出现混沌等复杂动力学。此外，Al-Hdaibat 等人在 [1], 中重新研究了 Puu 的模型，采用数值延拓法计算具有不同周期的解，并确定其稳定区域。特别是，他们从解析角度研究了周期为四的解的一般公式。

需要指出的是，Puu 的模型中平衡点的多重性和复杂动力学可能严格取决于具有拐点的逆需求函数。在这方面，Naimzada 和 Ricchiuti [25]提出了一种更简单的、包含具备充分信息的参与者的垄断模型，其中逆需求函数仍为三次函数，但没有拐点。研究发现，复杂动力学也可能出现，尤其是在利润变化的反应系数较高时。Askar [2]和 Sarafopoulos [27]将 Naimzada 和 Ricchiuti 的逆需求函数推广为一种形式相似的函数，但其次数可以是任意正整数。不同之处在于，Askar 的模型中成本函数是线性的，而 Sarafopoulos 的模型中则是二次的。

Cavalli 和 Naimzada [4] 研究了一种以恒定弹性需求函数为特征的垄断模型，其中还假设企业具备充分信息，且成本函数为线性。他们关注需求价格弹性变化时平衡点的稳定性，并证明存在两种不同的可能情形：弹性具有稳定作用，或兼具稳定作用与不稳定作用。此外，Elsadany 和 Awad [8] 探讨了逆需求为对数凹函数的具有时滞的垄断博弈。Caravaggio 和 Sodini [3]研究了一种非线性模型，其中具备充分信息的垄断者提供固定数量的中间品，然后利用该中间品生产两种垂直差异化最终商品。他们发现了混沌吸引子和多个吸引子。此外，连续动力系统也被用于研究垄断市场。在 [23], Matsumoto 和 Szidarovszky 提出了一个以连续时间构建的垄断模型，并研究了获取和实施产出信息时的时滞效应。受上述研究启发，该研究方向还涌现了其他值得关注的成果，包括[9, 10] 。

在本研究中，我们考察了两个基于离散动力系统建立的垄断模型，并假设其中的参与者都掌握充分信息。两个模型的主要区别在于其逆需求函数。第一个模型采用 Naimzada 和 Ricchiuti [25], 的逆需求函数，第二个模型则采用 Puu [26]的逆需求函数。对于这两个模型，我们利用三角分解和部分柱面代数分解等符号计算方法，分析平衡点和周期解的存在性及局部稳定性。需要指出的是，与数值计算不同，符号计算是精确的，因此在一定意义上，其结果可用于严格证明经济学定理。

本文的主要贡献如下。据我们所知，本文首次得到了第二个模型的完整稳定性条件。我们还研究了这两个模型中的周期解及其稳定性。最重要的是，我们发现所考察的两个模型的参数空间具有不同的拓扑结构。具体而言，在第一个模型中，任意给定周期的周期解的稳定参数区域构成一个连通集。然而，在第二个模型中，3-周期、4周期和5周期轨道的稳定区域是不连通的集合，由许多互不相交的部分组成。换言之，模型2中稳定周期轨道区域的拓扑结构远比模型1中的复杂。这可能是因为模型2的逆需求函数存在一个拐点。此外，根据我们对模型2进行的数值模拟，我们发现两个稳定平衡点的吸引域彼此不连通，且具有复杂的拓扑结构。另外，通过分别在这两个模型中找到回弹排斥子和3-周期轨道，我们严格证明了 Li-Yorke 意义下混沌的存在性。

本文其余部分安排如下。第2节回顾两个模型的构建。第3节深入研究平衡点的局部稳定性，并探讨平衡点失去稳定性时发生的分岔。第4节考察两个模型中阶数较低的周期轨道的存在性与稳定性。第5节严格推导出 Li-Yorke 意义下混沌动力学的存在性。第6节以若干评论作为全文结尾。

2 基本模型

假设市场中存在一位垄断者，其产量记为 x。我们用 $P(x)$ 表示价格函数（也称为逆需求函数），并假设该函数单调递减，即

$$\frac{dP(x)}{dx} < 0, \quad \text{for any } x > 0. \tag{1}$$

由此可知， $P(x)$是可逆的。需求函数（ $P(x)$的反函数）存在，且也呈下降趋势。此外，成本函数记为 $C(x)$。那么利润为

$$\Pi(x) = P(x)x - C(x).$$

假设垄断者采用梯度机制调整产量，以提高利润。设企业是具备充分信息的参与者，这意味着它充分了解逆需求函数 $P(x)$，并能够计算边际利润 $\mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}x$。企业通过关注 x 的变化如何影响 $\Pi(x)$的变化来调整产量。具体而言，调整过程表示为

$$x(t+1) = x(t) + K\frac{\mathrm{d}\Pi(x(t))}{\mathrm{d}x(t)}, \quad K > 0.$$

由于 $K > 0$，正的边际利润会促使垄断者增加产量，反之亦然。

本文考虑的第一个模型最初由 Naimzada 和 Ricchiuti [25],提出，该模型采用了不含拐点的三次价格函数。下文将重新陈述该模型的公式。

模型1。价格函数为三次函数，成本函数为线性函数，具体如下。

$$P(x) = a - bx^3, \quad C(x) = cx,$$

其中 a， b， c为参数。若 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}x = -3bx^2 < 0$，即 $b > 0$，则可确保满足向下倾斜条件 **(1)**。此外，假设边际成本 $\mathrm{d}C/\mathrm{d}x = c > 0$。我们采用价格高于边际成本这一一般原则，即对于任意 $x \geq 0$， $P(x) - c > 0$ 。因此，必须有 $a > c$。已知利润函数为

$$\Pi(x) = P(x)x - C(x) = (a - bx^3)x - cx = (a-c)x - bx^4.$$

因此，梯度调整机制可描述为

$$x(t+1) = x(t) + K(a - c - 4bx^3(t)), \quad K > 0.$$

不失一般性，记 $f = 4bK$ 和 $e = (a-c)/4b$。于是，模型可简化为一个仅含两个参数的映射:

$$x(t+1) = x(t) + f(e - x^3(t)), \quad e, f > 0. \tag{2}$$

本文考虑的第二个模型由 Puu [26]提出的一个著名垄断模型简化而来。我们保留相同的逆需求函数和成本函数。唯一的区别在于，本模型中的垄断者是知识充分的，而 Puu 原始模型中的垄断者则能力有限。

模型2。 价格函数是更一般形式的三次函数

$$P(x) = a_1 - b_1 x + c_1 x^2 - d_1 x^3,$$

其中 a_1, b_1， $c_1, d_1 > 0$ 为参数。成本函数也为三次函数，且没有固定成本，即 .,

$$C(x) = a_2 x - b_2 x^2 + c_2 x^3,$$

其中 $a_2, b_2, c_2 > 0$。因此，利润函数变为

$$\Pi(x) = P(x)x - C(x) = (a_1 - a_2)x - (b_1 - b_2)x^2 + (c_1 - c_2)x^3 - d_1x^4,$$

可记为

$$\Pi(x) = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4$$

with

$$a = a_1 - a_2,\ b = b_1 - b_2,\ c = c_1 - c_2,\ \text{and}\ d = d_1.$$

为简化起见，我们假设 a， b， c， $d > 0$。直接求得边际利润 $d\Pi/dx$，梯度调整机制可表示为

$$x(t+1) = x(t) + K(a - 2bx(t) + 3cx^2(t) - 4dx^3(t)), \quad a, b, c, d > 0. \tag{3}$$

3 局部稳定性与分岔

首先，我们通过逐步分析模型1的局部稳定性，阐述本文所用符号方法的主要思路。随后，我们将给出模型2的理论结果，但不提供所有计算细节。

3.1 模型1

命题1. 模型*1*始终存在唯一的平衡点，且当

$$4b(a-c)^2K^3 < \frac{8}{27}$$

此外，当满足以下条件时，会发生倍周期分岔

$$4b(a-c)^2K^3 = \frac{8}{27}.$$

上述命题是一个已知结果，最早由 Naimzada 和 Ricchiuti[25] 推导得出。事实上，由于可以得到唯一平衡点的解析表达式，即 $x^* = (\frac{a-c}{4b})^{1/3}.$，因此很容易证明该命题。不过，我们希望以计算风格提供另一种证明，详细展示我们如何运用符号方法。

下文采用模型公式（2）。令 $x(t+1) = x(t) = x$，可得平衡点方程 $x = x + f(e - x^3)$。若一维迭代映射的平衡点 x 满足

$$\left|\frac{\mathrm{d}x(t+1)}{\mathrm{d}x(t)}\Big|_{x(t)=x}\right| = \left|1 - 3fx^2\right| < 1.$$

此外，若平衡点 x 满足 $x > 0$，则称其为可行的。因此，稳定且可行的平衡点可表示为以下方程的实解

$$\begin{cases} x = x + f(e - x^3), \\ \left|1 - 3fx^2\right| < 1, \\ x > 0,\ e > 0,\ f > 0. \end{cases} \tag{4}$$

虽然方程组（4）非常简单，可以根据等式部分求出 x 的闭式表达式，但问题在于如何处理可能不存在闭式解的一般多项式。此外，确定含不等式的方程组在何种参数条件下有实解，也并非易事。在 [18], ，本文第一作者及其同事提出了一种代数方法，以系统地解决这些问题。该方法的主要思路如下。

参数系统 **(4)** 是关于 x的一元系统。对于一元系统，下面我们将引入一个称为边界多项式 的重要概念。边界多项式的一个有用性质是，其实零点将参数空间划分为彼此分离的区域，并且在每个区域内，对所有参数点而言，原系统的解的个数均保持不变。

定义1（边界多项式）。考虑一个一元系统

$$\begin{cases} P(\boldsymbol{u}, x) = \sum_{i=0}^{m} a_i(\boldsymbol{u})\, x^i = 0, \\ Q_1(\boldsymbol{u}, x) > 0, \ldots, Q_s(\boldsymbol{u}, x) > 0, \end{cases} \tag{5}$$

其中 P和 $Q_1 \quad \ldots, Q_s$是关于 x的一元多项式，而 $\boldsymbol{u}$表示所有参数。乘积 ct

$$a_m(\boldsymbol{u}) \cdot \operatorname{discr}(P) \cdot \prod_{i=1}^{s} \operatorname{res}(P, Q_i)$$

称为方程组 (5) 的边界多项式 。这里，res(F, G)表示两个多项式 F和 G的结式，而 discr(F)表示 F的判别式。

更具体地说，上述定义中结式和判别式的形式化定义如下。令

$$F = \sum_{i=0}^{m} a_i\, x^i, \quad G = \sum_{j=0}^{l} b_j\, x^j$$

为关于 x 的两个一元多项式，其系数为复数域中的 a_i, b_j，且 $a_m, b_l \neq$0。行列式

$$\left| \begin{array}{ccccccc} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & \end{array} \right\} l$$
$$\left| \begin{array}{ccccccc} b_l & b_{l-1} & \cdots & b_0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & b_l & b_{l-1} & \cdots & b_0 & \end{array} \right\} m$$

称为 F和 G的西尔维斯特结式（或简称结式），记作 res(F, G)。 F 与其导数 dF/dx的结式，即 res(F,dF/dx)，称为 F 的判别式，记作 discr(F)。以下引理是结式的一个众所周知的性质，可见于 [24]。

引理1. </style}两个一元多项式 和 在复数域中有公共零点，当且仅当 res(F, G) $=0$。此外，一元多项式 F 在复数域中有重零点，当且仅当 $\operatorname{discr}(F) = 0$。

值得注意的是，当首项系数a_m(**u**)或判别式 discr(P)从非零变为零，或从零变为非零时， P 的实零点数量可能会改变。此外，如果 res(P, Q_i)穿过零点，那么 P 的零点将穿过 $Q_i > 0$的边界，这意味着 (5) 的实根数量可能会改变。因此，得到以下引理。

引理2. 考虑一个如 (5) 所示的一元系统。设 A 和 B 是参数空间$\boldsymbol{u}$中的两个点。假设 A、 B 中任意一个都不会使系统 (5) 的边界多项式为零。如果存在一条从 A 到 B 的实路径 C，且 C 上的任意点都不是该边界多项式的根，那么系统 (5) 在 A 处取值时的实解数量与在 B处取值时相同。

由于 $1 - 3fx^2 < 1$，我们知道方程组 (4) 等价于

$$\begin{cases} x^3 - e = 0, \\ 2 - 3fx^2 > 0, \\ x > 0,\ e > 0,\ f > 0. \end{cases} \tag{6}$$

我们有 $a_m = 1$和 discr($x^3 - e$) $= 27e^2$。此外，res($x^3 - e$， $2 - 3fx^2$) $= -27e^2f^3 + 8$，且 res($x^3 - e$， x) $= e$。根据定义1，方程组(6)的边界多项式为 $27e^3(-27e^2f^3 + 8)$，其零点以蓝色标出，如图1所示。这条蓝色曲线将参数集 {(e， f) $\mid e > 0$， $f > 0$} 分为两个区域（东北区域和西南区域）。

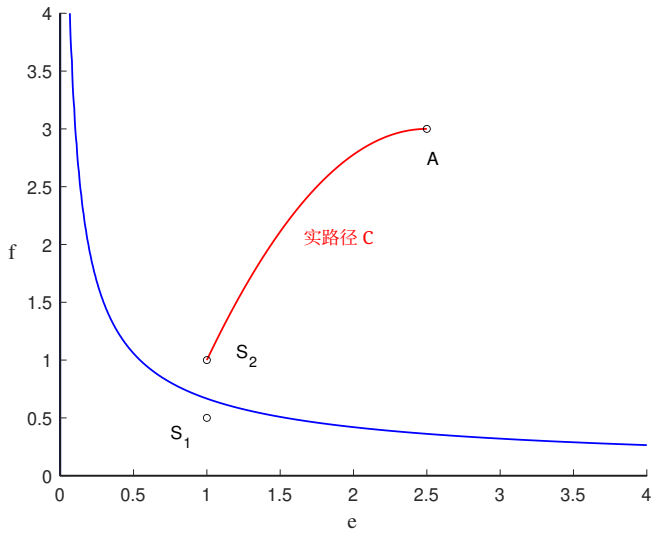


图1：模型1的参数空间划分及样本点

注意图1中的两点 S_2 和 A 。可以找到一条从 A 到 S_2 、且不经过蓝色曲线的实路径 C 。根据引理2，当参数分别取 S_2 和 A处的值时，方程组(6)具有相同数量的实根。这意味着方程组(6)的实解数量在东北区域内保持不变。因此，我们可以从每个区域选取一个样本点来确定根的数量。对于这个简单的方程组，可以直接目测选取样本点，例如 $S_1 = (1,\ 1/2)$、 $S_2 = (1,\ 1)$。然而，一般情况下，选取过程可能极其复杂，例如可以使用部分柱面代数分解（也称为 PCAD 方法）自动完成 [5]。

对于每个区域，都可以通过计算在相应样本点处求值的式（6）非参数方程组的根数来确定根的数量。以 S_1 为例，此时（6）变为

$$\left\{x^3 - 1 = 0,\ 2 - \frac{3}{2}x^2 > 0,\ x > 0\right\}. \tag{7}$$

为了计算其实根的数量，一种显而易见的方法是直接求解 $x^3 - 1 = 0$，即 $x = 1$，然后检查是否满足 $2 - \frac{3}{2}x^2 > 0$ 和 $x > 0$ 。结果为真，这意味着（7）存在唯一的实解。然而，由于次数大于 4 的多项式不存在根公式，因此难以精确求出一般一元系统的所有实零点。因此，这里通常需要一种更系统的方法，称为实根计数 [31] 。下面以（7）为例，说明这种方法的工作原理。

需要指出的是， $x^3 - 1$、 $2 - \frac{3}{2}x^2$ 和 x 没有公共零点，即它们没有公因子。否则，首先需要从不等式中约去公因子。之后，我们用有理区间隔离 $2 - \frac{3}{2}x^2$ 和 x 的所有实零点，例如：

$$\left[-\frac{12}{10}, -\frac{11}{10}\right],\ \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right],\ \left[\frac{11}{10}, \frac{12}{10}\right]. \tag{8}$$

尽管对于这个简单的例子，隔离过程很简单，但对于一般的多项式，这一过程可能相当困难，例如可以使用修正的乌斯宾斯基算法 [6]来处理。此外，可以将区间缩小到尽可能小，以确保 $x^3 - 1$ 在这些区间内没有零点；例如，可以使用 Sturm定理 [28]进行检验。因此， $x^3 - 1$的实零点必定位于（8）的补集内：

$$\left(-\infty, -\frac{12}{10}\right),\ \left(-\frac{11}{10}, -\frac{1}{10}\right),\ \left(\frac{1}{10}, \frac{11}{10}\right),\ \left(\frac{12}{10}, +\infty\right). \tag{9}$$

在这些开区间中的每一个区间内， $2 - \frac{3}{2}x^2$和 x的符号保持不变，可以通过在选定的样本点处检验它们来确定。例如，要确定$2 - \frac{3}{2}x^2$在

$(12/10,\ +\infty)$上的符号，我们在一个样本点（例如 $x=2$）处检验其符号。由此可得$2-\frac{3}{2}x^2|_{x=2}=-4<0$，因此 $2-\frac{3}{2}x^2<0$在$(12/10,\ +\infty)$上。类似地，可以得到 $2-\frac{3}{2}x^2$和 x在(9)处的符号分别为−，+，+，−和−，−，+，+。因此，$(1/10,\ 11/10)$是方程组(7)中的两个不等式$2-\frac{3}{2}x^2>0$ 和 $x>0$ 同时成立的唯一区间。

我们关注 $(1/10,11/10)$。利用Sturm定理，我们可以计算出 x^3-1 在$(1/10,11/10)$处的实零点个数，为一个。因此，方程组(6)在 $S_1=(1,1/2)$处有一个实根。对于由一元多项式方程和不等式构成的方程组，上述方法效果良好，尽管对于这个简单例子而言，有些步骤似乎繁琐且没有必要。同理，我们知道方程组(6)在 $S_2=(1,1)$处没有实根。

总之，当参数取值位于 S_1 所在的西南区域时，方程组(6)有一个实根；当参数取值位于 S_2所在的东北区域时，则没有实根。此外，边界多项式中某些因子的不等式可用于明确描述给定区域。显然，$27e^2f^3-8<0$描述了 S_1所在的区域。因此，只要满足以下条件，模型1就有唯一的稳定均衡

$$e^2f^3=\left(\frac{a-c}{4b}\right)^2(4bK)^3=4b(a-c)^2K^3<\frac{8}{27},$$

这与命题1一致。

根据经典分岔理论，对于一维迭代映射 $x(t+1)=F(x(t))$，我们知道，当

$$\left|\frac{\mathrm{d}x(t+1)}{\mathrm{d}x(t)}\bigg|_{x(t)=x}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right|=1.$$

更具体地说，如果 $\mathrm{d}F/\mathrm{d}x=-1$，则方程组可能发生倍周期分岔（也称为翻转分岔），此时动力学会转变为一种新行为，其周期是原系统周期的两倍。另一方面，如果 $\mathrm{d}F/\mathrm{d}x=1$，则方程组可能发生鞍结（折叠）分岔、跨临界分岔或叉形分岔。可以根据（稳定）平衡点数量的变化来判断分岔类型。在鞍结分岔的情况下，一个稳定平衡点（结点）会与另一个不稳定平衡点（鞍点）相消。跨临界分岔前后，各有一个不稳定平衡点和一个稳定平衡点，且不稳定平衡点变为稳定平衡点，反之亦然。在叉形分岔的情况下，平衡点的数量会从一个变为三个，或从三个变为一个；稳定平衡点的数量则会从一个变为两个，或从一个变为零。因此，可以得出结论：如果

$$e^2f^3=4b(a-c)^2K^3=\frac{8}{27},$$

且不存在其他分岔。

3.2 模型2

根据式（3），令 $x(t+1)=x(t)=x$，可知模型2至多有三个平衡点。平衡点的解析表达式虽然存在，但形式复杂，即，

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{\sqrt[3]{M}}{12d}-\frac{8bd-3c^2}{4d\sqrt[3]{M}}+\frac{c}{4d},\\x_{2,3}&=-\frac{\sqrt[3]{M}}{24d}+\frac{8bd-3c^2}{8d\sqrt[3]{M}}+\frac{c}{4d}\pm\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{M}}{12d}+\frac{8bd-3c^2}{4d\sqrt[3]{M}}\right),\end{aligned}\tag{10}$$

其中

$$M=12d\sqrt{3}\sqrt{108a^2d^2-108abcd+27\,ac^3+32b^3d-9b^2c^2}+216ad^2-108bcd+27c^3.$$

此外，平衡点 x 局部稳定的条件是

$$\left|\frac{\mathrm{d}x(t+1)}{\mathrm{d}x(t)}\Big|_{x(t)=x}\right| = \left|1+K(-2b+6cx-12dx^2)\right| < 1.$$

因此，映射（3）的稳定均衡是以下方程的实解:

$$\begin{cases} x = x + K(a-2bx+3cx^2-4dx^3), \\ K(-2b+6cx-12dx^2) < 0, \\ 2 + K(-2b+6cx-12dx^2) > 0, \\ x > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0. \end{cases} \tag{11}$$

显然，将闭式解（10）代入（11）来分析稳定均衡，过程复杂且不切实际。相比之下，分析模型1时采用的方法无需显式求解任何闭式平衡点。即使解析解的表达式很复杂，甚至不存在闭式解，我们的方法在理论上仍然适用。

关于方程组（11）的边界多项式，我们计算得到

$$\begin{aligned} &\mathrm{discr}(K(a-2bx+3cx^2-4dx^3)) = -16K^5dR_1, \\ &\mathrm{res}(K(a-2bx+3cx^2-4dx^3), K(-2b+6cx-12dx^2)) = -16K^5dR_1, \\ &\mathrm{res}(K(a-2bx+3cx^2-4dx^3), 2+K(-2b+6cx-12dx^2)) = -16K^2dR_2, \\ &\mathrm{res}(K(a-2bx+3cx^2-4dx^3), x) = -Ka, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} R_1 &= 108a^2d^2 - 108abcd + 27ac^3 + 32b^3d - 9b^2c^2, \\ R_2 &= 108K^3a^2d^2 - 108K^3abcd + 27K^3ac^3 + 32K^3b^3d - 9K^3b^2c^2 - 24Kbd + 9Kc^2 - 8d. \end{aligned}$$

因此，边界多项式为 $-16384\,d^4K^{14}aR_1^2R_2$，其零点将参数集$\{(a,\ b,\ c,\ d,\ K)\mid a,\ b,\ c,\ d,\ K>0\}$划分为若干互不相连的区域。PCAD 方法 [5] 使我们能够从每个区域中至少选取一个样本点。表 1 列出了选取的 30 个样本点，以及方程组（11）的互异实解数量。

表 1: $\{(a,\ b,\ c,\ d,\ K)$ 中的选定样本点 $\mid a,\ b,\ c,\ d,\ K>0\}$

(a,b,c,d,K)	num	R_1	R_2	(a,b,c,d,K)	num	R_1	R_2
$(1,\ 1,\ 1/4,\ 1/64,\ 1/2)$	2	$-$	$-$	$(1,\ 1,\ 1/4,\ 1/64,\ 1)$	1	$-$	$+$
$(1,\ 1,\ 1/4,\ 1/64,\ 2)$	0	$-$	$-$	$(1,\ 1,\ 1/4,\ 19/1024,\ 1)$	2	$-$	$-$
$(1,\ 1,\ 1/4,\ 19/1024,\ 2)$	1	$-$	$+$	$(1,\ 1,\ 1/4,\ 19/1024,\ 3)$	0	$-$	$-$
$(1,\ 1,\ 1/4,\ 1/16,\ 1)$	1	$+$	$-$	$(1,\ 1,\ 1/4,\ 1/16,\ 2)$	0	$+$	$+$
$(1,\ 1,\ 1/4,\ 1,\ 1/2)$	1	$+$	$-$	$(1,\ 1,\ 1/4,\ 1,\ 1)$	0	$+$	$+$
$(1,\ 1,\ 3/8,\ 1/64,\ 1/8)$	1	$+$	$-$	$(1,\ 1,\ 3/8,1/64,\ 1)$	0	$+$	$+$
$(1,\ 1,\ 3/8,1/32,1/4)$	2	$-$	$-$	$(1,\ 1,\ 3/8,1/32,\ 1)$	1	$-$	$+$
$(1,\ 1,\ 3/8,\ 1/32,\ 17)$	0	$-$	$-$	$(1,1,3/8,49/1024,1)$	2	$-$	$-$
$(1,1,3/8,49/1024,4)$	1	$-$	$+$	$(1,\ 1,\ 3/8,\ 49/1024,\ 8)$	0	$-$	$-$
$(1,1,3/8,1/16,1)$	1	$-$	$+$	$(1,1,3/8,1/16,3)$	0	$-$	$-$
$(1,\ 1,\ 3/8,\ 1,\ 1/2)$	1	$+$	$-$	$(1,\ 1,\ 3/8,\ 1,\ 1)$	0	$+$	$+$
$(1,\ 1,\ 15/32,\ 1/16,\ 1/2)$	1	$+$	$-$	$(1,\ 1,\ 15/32,\ 1/16,\ 1)$	0	$+$	$+$
$(1,1,15/32,3/32,1)$	1	$+$	$-$	$(1,1,15/32,3/32,8)$	0	$+$	$+$
$(1,\ 1,\ 15/32,\ 1,\ 1/2)$	1	$+$	$-$	$(1,\ 1,\ 15/32,\ 1,\ 1)$	0	$+$	$+$
$(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1/2)$	1	$+$	$-$	$(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$	0	$+$	$+$

根据表 1 可知，系统（11）有一个实解，当且仅当 $R_1<0, R_2>0$或 $R_1>0, R_2<0$。此外，系统（11）有两个实解的一个必要条件是

$R_1 < 0$和 $R_2 < 0$，但这并非充分条件。例如，在 $(a, b, c, d, K) = (1, 1, 1/4, 1/64, 2)$ 处，系统（11）没有实解，但 $R_1 < 0$和 $R_2 < 0$均成立。要得到必要且充分条件，还需要额外的多项式（R_3 和 R_4），这些多项式可在所谓的广义判别式列表中找到，并可通过反复试验筛选出来。关于广义判别式列表，读者可参阅 [32] 了解更多详情。由于篇幅所限，我们不提供计算细节，直接给出系统（11）有两个实解的必要且充分条件：

$$R_1 < 0, R_2 < 0, R_3 > 0, R_4 < 0,$$

其中

$$\begin{aligned} R_3 =& 8Kbd - 3Kc^2 + 8d, \\ R_4 =& 432K^2a^2d^3 - 432K^2abcd^2 + 108K^2ac^3d + 128K^2b^3d^t2 - 36K^2b^2c^2d + 192Kb^2d^2 \\ & - 144Kbc^2d + 27Kc^4 + 64bd^2 - 24c^2d. \end{aligned}$$

我们继续分析该模型的分岔。当满足以下条件时，映射 (3) 的平衡点 x 可能发生倍周期分岔：

$$\left.\frac{\mathrm{d}x(t+1)}{\mathrm{d}x(t)}\right|_{x(t)=x} = 1 + K(-2b + 6cx - 12dx^2) = -1.$$

因此，若以下方程组至少有一个实解，则可能发生倍周期分岔。

$$\begin{cases} x = x + K(a - 2bx + 3cx^2 - 4dx^3), \\ K(-2b + 6cx - 12dx^2) + 2 = 0, \\ x > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0. \end{cases} \tag{12}$$

通过使用三角分解方法[1], ，我们将方程组 (12) 前两个方程的解转化为三角集的零点：

$$\mathcal{T} = [(8Kbd - 3Kc^2 + 4d)x - 6adK + bcK - c, R_2].$$

显然，若 $R_2 = 0$ 且 $x = (6adK - bcK + c)/(8Kbd - 3Kc^2 + 4d) > 0$，则方程组 $\{\mathcal{T} = 0,\ x > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0\}$ 至少有一个正实解，即：

$$R_2 = 0,\ R_5 > 0,$$

其中

$$\begin{aligned} R_5 =& (6adK - bcK + c)(8Kbd - 3Kc^2 + 4d) \\ =& 48K^2abd^2 - 18K^2ac^2d - 8K^2b^2cd + 3K^2bc^3 + 24Kad^2 + 4Kbcd - 3Kc^3 + 4cd. \end{aligned}$$

同样，关于叉形分岔的出现，我们考虑

$$\begin{cases} x = x + K(a - 2bx + 3cx^2 - 4dx^3), \\ K(-2b + 6cx - 12dx^2) = 0, \\ x > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0, \end{cases} \tag{13}$$

并统计稳定平衡点的数量。由于篇幅有限，此处不再报告更多细节。我们将所有已获得的结果总结为以下定理。

[1]三角分解方法可视为高斯消元方法的推广。这两种方法的主要思想都是将方程组转化为三角形式。不过，三角分解方法适用于多项式系统，而高斯消元方法仅适用于线性系统。更多详情请参阅[30, 16, 12, 29] 。

定理1. 模型*2*至多有两个稳定均衡。具体而言，如果

$$R_1 < 0, R_2 > 0 \ or \ R_1 > 0, R_2 < 0,$$

并且当……时，存在两个稳定平衡点

$$R_1 < 0, R_2 < 0, R_3 > 0, R_4 < 0.$$

此外，当……时，存在倍周期分岔

$$R_2 = 0, \ R_5 > 0,$$

当……时，还存在叉形分岔

$$R_1 = 0, \ R_2 > 0, \ R_6 > 0 \ or \ R_1 = 0, \ R_2 > 0, \ R_4 < 0, \ R_6 > 0,$$

其中

$$R_6 = 48abd^2 - 18ac^2d - 8b^2cd + 3bc^3.$$

注1. 据我们所知，定理1中关于参数 a, b, c, d, K的稳定性结果是新的，尽管特殊情形 $a = 3.6$, $b = 2.4$, $c = 0.6$, $d = 0.05$ 已在 [22]中讨论过。实际上，参数 K, a 比其他参数发挥着更重要的作用，因为K 控制垄断者调整产量的速度，而 a 是无供给时市场的初始产品价格与无生产时企业的初始边际成本之间的差值。固定 $b = 2.4$, $c = 0.6$ 和 $d = 0.05$后，我们在图2中绘制了(a, K)参数平面，其中存在一个稳定平衡点的区域以黄色标示，存在两个稳定平衡点的区域以蓝灰色标示。模型2的表现不同于典型的采用梯度机制的寡头垄断。如图2所示，例如，即使调整速度 K 相当大，也总存在一些 a 的取值，使模型2保持稳定。此外，当 K 固定为大约大于1.7的值时，随着参数 a 从低到高变化，模型2会经历两次由不稳定到稳定、再回到不稳定的转变。

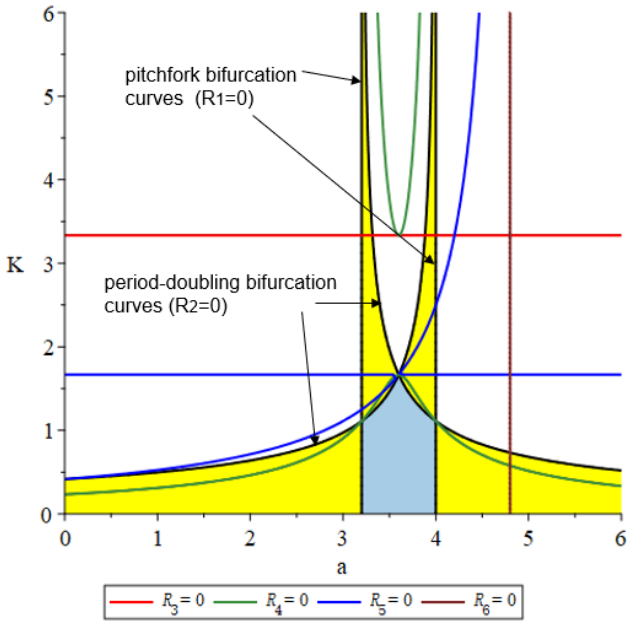


图2：模型2的二维（a, K）参数平面，其中其他参数固定为：$b = 2.4$、 $c = 0.6$和 $d = 0.05$。存在一个稳定平衡点的区域以黄色标示，而存在两个稳定平衡点的区域以蓝灰色标示。

4 周期解

从经济学角度来看，假设有限理性企业在发生周期动力学时无法了解产量和利润背后的规律，是符合现实的。因此，本节研究阶数相对较低的周期解的存在性与稳定性。

设 I 是一个实数区间，且 $F: I \to \mathcal{R}$ 是一个函数。若 $x \in I$，假设$F^0(x)$表示 x，而 $F^{n+1}(x)$ 表示 $F(F^n(x))$，其中 $n \in \{0, 1, \ldots\}$。若点 $p \in I$满足 $p = F^n(p)$，且对任意 $1 \le k < n$都有 $p \neq F^k(p)$，则称其为周期为 n 或阶为 n 的周期点。若 p 是一个周期为 n的点，则称 $p \mapsto F^1(p) \mapsto \cdots \mapsto F^n(p) = p$为一个 n-周期轨道。此外，若存在 δ使得对所有$x \in (y-\delta, y+\delta)$，都有 $|F^k(x) - y| < |x - y|$，则称周期为 k的点 $y \in I$渐近稳定。

以下引理见于 [15], ，它提供了一个代数判据，用于验证非周期点的稳定性。

引理 3. 假设 $y \in I$ 是 F 的一个周期为 k的周期点。如果 F 在点$y, F(y) \ldots, F^{k-1}(y)$处可微，则当满足以下条件时， y渐近稳定：

$$\left| \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(y_i) \right| < 1, \quad where\ y_i = F^i(y).$$

4.1 模型1

我们首先考虑周期为二的周期轨道是否存在。假设存在一个2-周期轨道 $x \mapsto y \mapsto x$，其中 $\mapsto$ 表示迭代映射 (2)。因此，我们有

$$y = x + f(e - x^3), \quad x = y + f(e - y^3). \tag{14}$$

显然，必须保证 $x \neq y$ 。否则， $x \mapsto y \mapsto x$ 将退化为一个平衡点。于是，确定2周期是否存在的问题转化为确定以下方程是否存在实解的问题

$$\begin{cases} y = x + f(e - x^3), \\ x = y + f(e - y^3), \\ x \neq y, \\ x > 0,\ y > 0,\ e > 0,\ f > 0. \end{cases} \tag{15}$$

由于上述方程组涉及两个变量 x 和 y，因此第3节所采用的方法（仅适用于单变量方程组）可能无法直接用于此处。

注 2. 不过，我们可以基于三角分解，将方程组 (15) 等价地转化为单变量方程组。具体而言，三角分解方法可以将方程部分 (14) 分解为以下两个三角集。

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}_{11} = [y - x, x^3 - e], \\ &\mathcal{T}_{12} = [y + fx^3 - x - ef, f^3x^6 - 3f^2x^4 - 2ef^3x^3 + 3fx^2 + 3ef^2x + e^2f^3 - 2]. \end{aligned}$$

由于 $\mathcal{T}_{11}$ 中的第一个多项式是 $y - x$，这意味着 $x = y$。因此， $\mathcal{T}_{11}$ 的零点与我们无关。我们只关注 $\mathcal{T}_{12}$，其中第一个多项式 $y + fx^3 - x - ef$ 关于 y的次数为一。因此，可以直接求解 $y = -fx^3 + x + ef$，并将其代入方程组 (15) 中相应的不等式。简言之，方程组 (15) 可以等价地转化为以下单变量系统。

$$\begin{cases} f^3x^6 - 3f^2x^4 - 2ef^3x^3 + 3fx^2 + 3ef^2x + e^2f^3 - 2 = 0, \\ -fx^3 + x + ef > 0, \\ x > 0,\ e > 0,\ f > 0. \end{cases}$$

之后，可以应用第3节中的方法。结果表明，当且仅当 $8/27 < e^2f^3 < 2$ 时，上述方程组有两个实解。显然，这两个实解属于

同一个2-周期轨道，因为 x， y 是对称的，可以互相替换。因此，模型1中至多存在一个2-周期轨道。

根据引理 3，为了确定所发现的 2-周期是否稳定，我们结合条件考察式 (15)

$$\left|\frac{\mathrm{d}(x+f(e-x^3))}{\mathrm{d}x}\times\frac{\mathrm{d}(y+f(e-y^3))}{\mathrm{d}y}\right|<1,$$

即，

$$\left|(1-3fx^2)(1-3fy^2)\right|<1.$$

要将方程组转化为单变量方程，需要使用备注2中介绍的方法。根据我们的计算，唯一的 2-周期轨道稳定，当且仅当 $729e^4f^6-3294e^2f^3+1664>0$，或者等价地， $8/27<e^2f^3<(61-11\sqrt{17})/27$。我们将上述结果归纳为以下定理。

定理 2。模型*1*至多存在一个 *2*-周期轨道，其存在条件为

$$8/27<e^2f^3<2.$$

此外，该唯一的 *2*-周期稳定的条件为

$$8/27<e^2f^3<\frac{61-11\sqrt{17}}{27},$$

或近似为

$$0.2962962963<e^2f^3<0.5794754859.$$

周期轨道幅度的测量在经济学上很有意义，因为它刻画了动态经济中的波动大小。对于一个 n-周期轨道 $p_1\mapsto p_2\mapsto\cdots p_n\mapsto p_1$，幅度度量的直接定义为

$$d=|p_1-p_2|+|p_2-p_3|+\cdots+|p_{n-1}-p_n|+|p_n-p_1|.$$

然而，为了获得更好的数学性质，我们将每一项平方，并将幅度度量定义为

$$d=(p_1-p_2)^2+(p_2-p_3)^2+\cdots+(p_{n-1}-p_n)^2+(p_n-p_1)^2.$$

对于模型1中的一个2-周期轨道 $x\mapsto y\mapsto x$，幅度度量变为 $d=(x-y)^2+(y-x)^2$。因此，我们有

$$\begin{cases}d-(x-y)^2-(y-x)^2=0,\\ -y+x+f(e-x^3)=0,\\ -x+y+f(e-y^3)=0.\end{cases}$$

利用三角分解方法，我们将上述方程组的解分解为以下两个三角集的零点。

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{21}&=[\,y-x,x^3-e,d\,],\\ \mathcal{T}_{22}&=[\,y+x^3f-ef-x,\\ &\quad (d^2f^3+4df^2+4f)x^2+(-6def^3-12ef^2)x+36e^2f^3-2f^2d^2-8fd-8,\\ &\quad f^3d^3-12f^2d^2-60fd+216e^2f^3-64\,].\end{aligned}$$

第一个多项式 $y-x$ 在 $\mathcal{T}_{21}$ 中意味着 $x=y$。因此，无需关注 $\mathcal{T}_{21}$，因为它对应的是平衡点，而不是 2-周期轨道。我们重点关注 $f^3d^3-12f^2d^2-60fd+216e^2f^3-64$ 在 $\mathcal{T}_{22}$中的最后一个多项式。通过求解该多项式中的 d，我们得到三个解:

$$d_1=\frac{2}{f}\left(\frac{3H}{2}+\frac{6}{H}+2\right),\quad d_2,d_3=\frac{2}{f}\left(-\frac{3H}{4}-\frac{3}{H}+2\pm\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\Big(\frac{3H}{2}-\frac{6}{H}\Big)\right),$$

其中

$$H = \sqrt[3]{8 - 4e^2f^3 + 4(e^4f^6 - 4e^2f^3)^{1/2}}.$$

这里，只有实解 d_1 有意义。因此，模型1中唯一的2-周期轨道的幅度度量可表示为

$$d = \frac{2}{f}\left(\frac{3\sqrt[3]{8 - 4e^2f^3 + 4(e^4f^6 - 4e^2f^3)^{1/2}}}{2} + \frac{6}{\sqrt[3]{8 - 4e^2f^3 + 4(e^4f^6 - 4e^2f^3)^{1/2}}} + 2\right).$$

在本节余下部分，我们将重复上述类似的计算。由于篇幅限制，省略这些计算细节。关于模型1中的3周期轨道，我们需要计算以下方程的实解数量：

$$\begin{cases} y = x + f(e - x^3), \\ z = y + f(e - y^3), \\ x = z + f(e - z^3), \\ x \neq y,\ x \neq z, \\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ e > 0,\ f > 0. \end{cases}$$

经过一系列计算，我们得出以下定理。

定理 3。对于所有满足 $e, f > 0$ 的可能参数值，模型*1*均不存在*3*周期轨道。

对于4周期轨道 $x \mapsto y \mapsto z \mapsto w \mapsto x$，我们有以下方程组：

$$\begin{cases} y = x + f(e - x^3), \\ z = y + f(e - y^3), \\ w = z + f(e - z^3), \\ x = w + f(e - w^3), \\ x \neq y,\ x \neq z,\ x \neq w, \\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ e > 0,\ f > 0. \end{cases}$$

此外，要保证所考虑的4周期稳定，还需要满足以下条件。

$$\left|\frac{\mathrm{d}(x + f(e - x^3))}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}(y + f(e - y^3))}{\mathrm{d}y} \times \frac{\mathrm{d}(z + f(e - z^3))}{\mathrm{d}z} \times \frac{\mathrm{d}(w + f(e - w^3))}{\mathrm{d}w}\right| < 1,$$

即，

$$\left|(1 - 3fx^2)(1 - 3fy^2)(1 - 3fz^2)(1 - 3fw^2)\right| < 1.$$

由于4周期轨道存在与稳定性条件中涉及的多项式极为复杂，我们以近似形式报告所得结果。

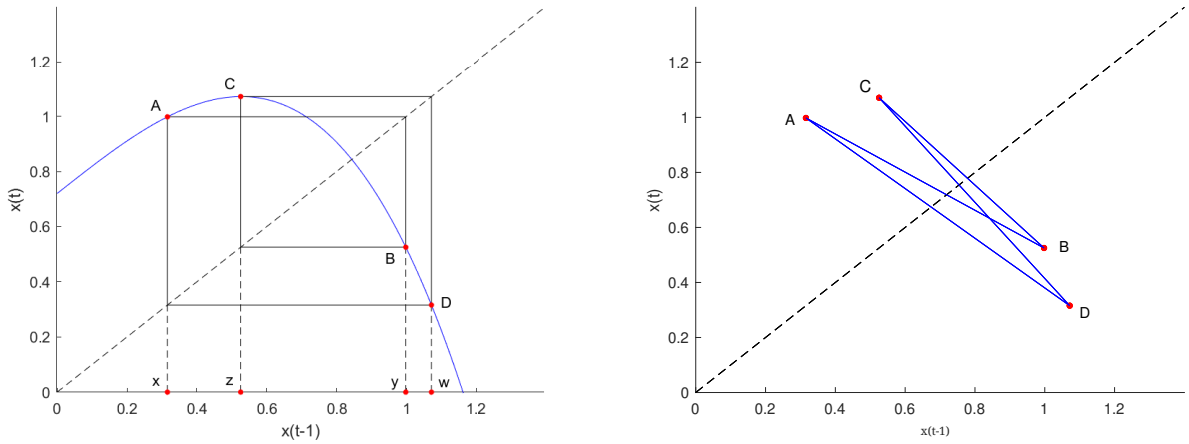
定理 4。模型*1*至多有一个*4*周期轨道，且当以下条件成立时，该轨道存在：

$$0.5794754859 < e^2f^3 < 1.237575627.$$

此外，当以下条件成立时，这个唯一的*4*周期轨道是稳定的：

$$0.5794754859 < e^2f^3 < 0.6673871142.$$

图3 (a) 描绘了模型1中具有 $e = 0.6$ 和 $f = 1.2$的唯一4周期的相图。由于 $e^2f^3 = 0.62208 \in (0.5794754859, 0.6673871142)$，根据定理4，模型1中的这一唯一4周期是渐近稳定的。事实上， A, B, C, D的横坐标，即 x, y, z, w，是4-周期轨道中的四个点。为简化起见，我们用线连接 A, B, C, D，并采用简化后的相图（图3 (b)）来展示本文其余部分中的周期解。



(a) 相图。 (b) 简化相图。

图3：模型1中唯一的稳定4周期，其参数为 $e = 0.6$ 和 $f = 1.2$。

此外，采用与计算2-周期轨道幅度相同的方法，我们得出：若模型1中存在4周期 $x \mapsto y \mapsto z \mapsto w \mapsto x$，则其幅度度量等于

$$d = \frac{4}{f}\left(\frac{3\sqrt[3]{8 - 4e^2f^3 + 4(e^4f^6 - 4e^2f^3)^{1/2}}}{2} + \frac{6}{\sqrt[3]{8 - 4e^2f^3 + 4(e^4f^6 - 4e^2f^3)^{1/2}}} + 2\right),$$

其大小是2-周期轨道的两倍。

模型1的参数平面如图4所示。可以看出，唯一平衡点（2-周期或4-周期轨道）稳定性的参数区域构成一个连通集。此外，平衡点、2-周期和4周期稳定性的三个区域彼此相邻，中间没有间隙。在下一小节中可以看到，模型2参数空间的拓扑结构比模型1复杂得多。

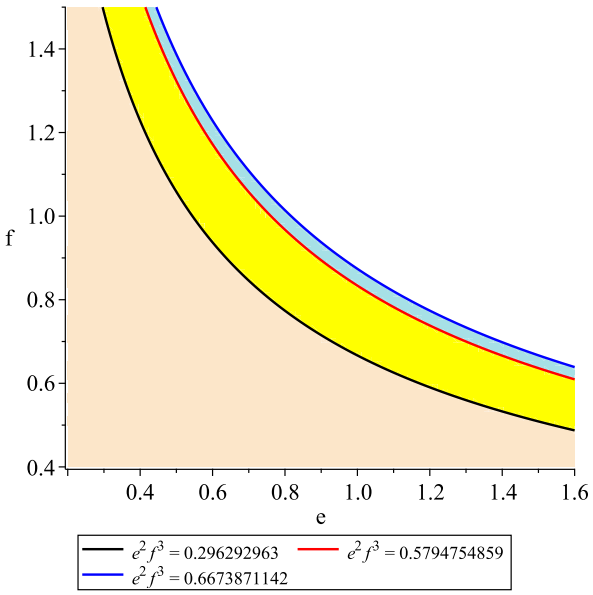


图4：模型1的参数平面。浅蓝色、黄色和浅橙色区域分别是4-周期轨道、2-周期轨道和平衡点稳定性的参数区域。

图5展示了模型1在 $(e,\ f) \in [0.6, 1.6]\times[0.6, 1.6]$ 下的二维分岔图。有关二维分岔图的更多信息，请参阅 [13]。

在图5的数值模拟中，我们将初始状态设为 $x(0) = 1.0$。对应于不同周期的周期轨道的参数点用不同颜色标记。例如，周期为1（平衡点）的参数点标为深红色，而周期大于或等于24（复杂轨迹）的参数点标为黑色。当周期大于24时，黑色点可视为发生混沌等复杂动力学现象时对应的参数值。此外，我们还用黑色标记轨迹发散至 ∞的参数点。可以看出，图5证实了图4中给出的理论结果。

图5中也可以观察到不同类型周期轨道之间的转变。可以看到，随着 e 或 f 的值增加，平衡点通过一系列倍周期分岔而失去稳定性。例如，沿着 $e = 1.0$所在的直线，唯一的稳定平衡点在 $f = 0.6665$处分岔为稳定的2-周期轨道，随后在 $f = 0.8339$处分岔为4-周期轨道。当 $f \in$（0.8744,0.8826）时，存在一个稳定的八周期轨道。最后，当 f 的值足够大时，系统会出现混沌动力学。更多细节可见图6所示的一维分岔图，其中固定 $e = 1.0$，并选择 $x(0) = 1.1$ 作为迭代的初始状态。

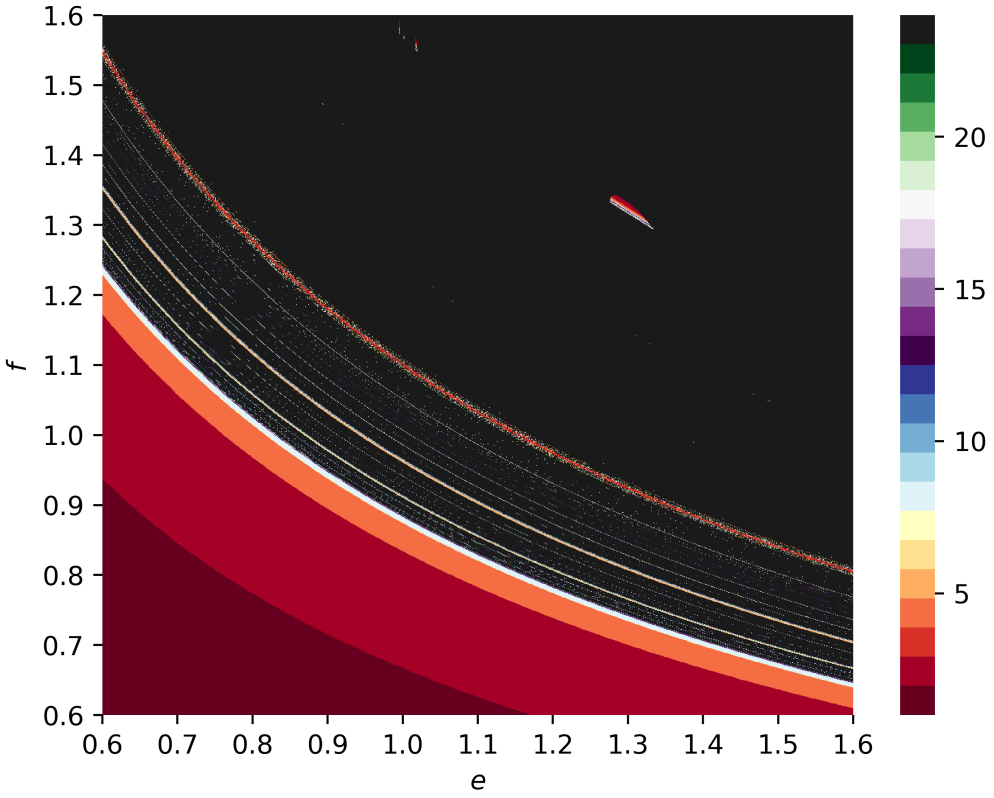


图5：模型1的二维分岔图，其中$(e, f) \in [0.6, 1.6] \times [0.6, 1.6]$。我们选择 $x(0) = 1.0$ 作为迭代的初始状态。

4.2 模型2

模型2的公式（3）涉及五个参数，这可能会使搜索周期解的符号计算尤为复杂。下文中，我们仅将 K 作为参数，并假设 $a = 3.6$、 $b = 2.4$和 $c = 0.6$以及 $d = 0.05$。这一设定具有实际意义，已有多位经济学家对此进行讨论，例如 Puu [26], Al-Hdaibat 等人 [1], Matsumoto 和 Szidarovszky [22]。

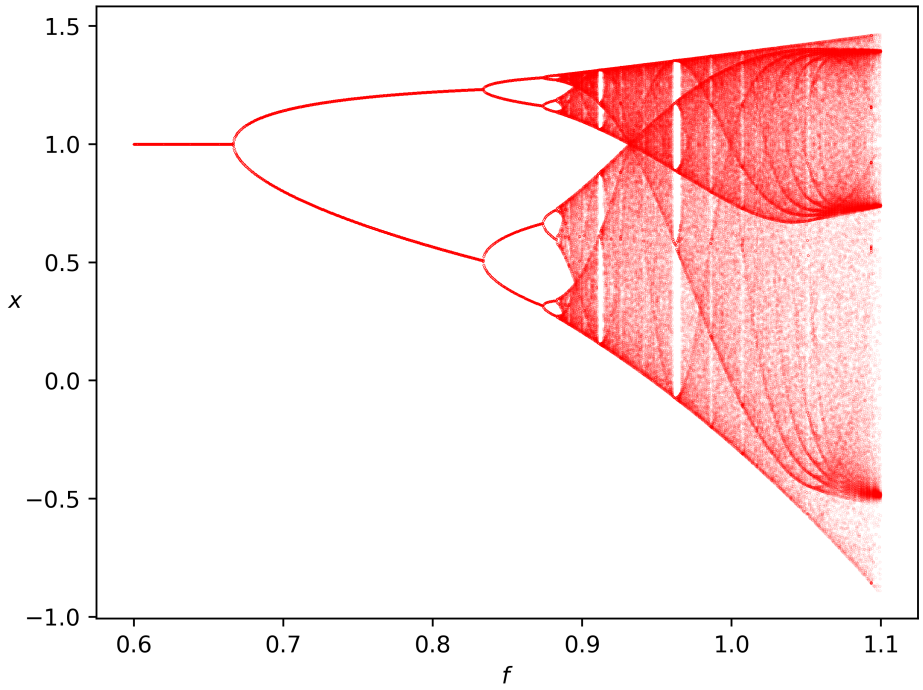


图6：固定 $e = 1.0$ 时，模型1关于 f 的一维分岔图。我们选择 $x(0) = 1.1$ 作为迭代的初始状态。

设 $x \mapsto y \mapsto x$ 为一个2-周期轨道。因此，我们有

$$\begin{cases} y = x + K(3.6 - 4.8x + 1.8x^2 - 0.2x^3), \\ x = y + K(3.6 - 4.8y + 1.8y^2 - 0.2y^3), \\ x \neq y, \\ x > 0,\ y > 0,\ K > 0. \end{cases} \tag{16}$$

此外，若考虑 2-周期轨道的稳定性，则还需要满足以下条件。

$$|S(x) \cdot S(y)| < 1,$$

其中

$$S(x) = \frac{\mathrm{d}(x + K(3.6 - 4.8x + 1.8x^2 - 0.2x^3)}{\mathrm{d}x} = 1 - K(4.8 - 3.6x + 0.6x^2). \tag{17}$$

根据我们的计算，得到以下定理。

定理 5。在模型*2*中，*2*-周期轨道的可能数量为零（方程组 (16) 无实解）或三个（方程组 (16) 有六个实解）。当 $K > 5/3$ 时，存在三个 *2*-周期轨道。此外，其中两个是稳定的，如果

$$5/3 < K < (5\sqrt{5} - 5)/3,$$

或近似为

$$1.666666667 < K < 2.060113296.$$

为了测量 2-周期轨道 $x \mapsto y \mapsto x$ 的幅度，我们还使用 $d = (x - y)^2 + (y - x)^2$。三角分解方法使我们能够将以下方程的解分解为

$$\begin{cases} d = (x - y)^2 + (y - x)^2, \\ y = x + K(3.6 - 4.8x + 1.8x^2 - 0.2x^3), \\ x = y + K(3.6 - 4.8y + 1.8y^2 - 0.2y^3) \end{cases}$$

以下三角系统的零点。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{31} &= [\,y-3, x-3, d\,],\\
\mathcal{T}_{32} &= [\,y-x, x^2-6x+6, d\,],\\
\mathcal{T}_{33} &= [\,y+x-6, Kx^2-6Kx+6K-10, Kd-24K-80\,],\\
\mathcal{T}_{34} &= [\,5y+x^3K-9Kx^2+(24K-5)x-18K,\\
&\qquad K^2x^4-12K^2x^3+(51K^2-5K)x^2+(-90K^2+30K)x+54K^2-45K+25,\\
&\qquad Kd-6K+10\,],
\end{aligned}
$$

其中，最后两个多项式 $Kd-24K-80$ 和 $Kd-6K+10$ 在 $\mathcal{T}_{33}$ 和 $\mathcal{T}_{34}$ 中是我们关注的对象。我们得出 $d=(24K+80)/K$ 或 $d=(6K-10)/K$。可以看出，三个 2-周期轨道中有两个具有相同的幅度。

对于 3-周期轨道 $x\mapsto y\mapsto z\mapsto x$，我们考虑方程组

$$
\begin{cases}
y = x + K(3.6 - 4.8x + 1.8x^2 - 0.2x^3),\\
z = y + K(3.6 - 4.8y + 1.8y^2 - 0.2y^3),\\
x = z + K(3.6 - 4.8z + 1.8z^2 - 0.2z^3),\\
x \neq y,\ x \neq z,\\
x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ K > 0,
\end{cases}
\tag{18}
$$

以及稳定性条件

$$
|S(x)\cdot S(y)\cdot S(z)| < 1, \tag{19}
$$

其中 $S(x)$由式 (17) 给出。经过一系列计算，我们得到以下定理。

定理 6。在模型*2*中，*(*稳定*) 3*-周期轨道数量的所有可能情况列于表 *2*，其中

$$
m_1 \approx 2.417401607,\ m_2 \approx 2.434714456,\ m_3 \approx 3.302953127,\ m_4 \approx 3.303122765.
$$

读者可参阅注释 *3*，了解这些 m_i 是如何得到的。

表 2：模型2中的（稳定）3周期轨道数量

$K\in$	$(0,\ m_1)$	$(m_1,\ m_2)$	$(m_2,\ m_3)$	$(m_3,\ m_4)$	$(m_4,\ +\infty)$
3-周期	0	4	4	8	8
稳定3-周期	0	2	0	2	0

备注 3。 如前所述，边界多项式发挥着重要作用。然而，可以推导出，若使用边界多项式的无平方因子部分，引理2中报告的边界多项式性质仍然成立。方程 (18)+(19) 的边界多项式的无平方因子部分 SP 更为简单，见附录。在定理6中，m_1、.....、m_4是 SP 的实根。定理6的一种严谨表述方式是用 SP 中的因子来表示这些条件，但这样做相当繁琐。由于 SP 中只涉及一个参数，即 K，由 SP 的零点划分出的区域实际上是区间，因此可以像定理 6 那样近似描述。不过需要注意的是，如果需要，m_1、.....、m_4 的取值可以任意精确，因为 SP 的精确表达式已经得到。

图7描绘了模型2中所有的3周期轨道，其中 $K=3.303\in(m_3,\ m_4)$，6个不稳定周期以红色标记，2个稳定周期以蓝色标记。值得注意的是，红色标记的两个不稳定3周期轨道几乎与蓝色标记的稳定周期重合，但二者并不相同。需要强调的是，这一通过符号计算推导出的动态现象可能过于细微，难以通过数值模拟观察到。

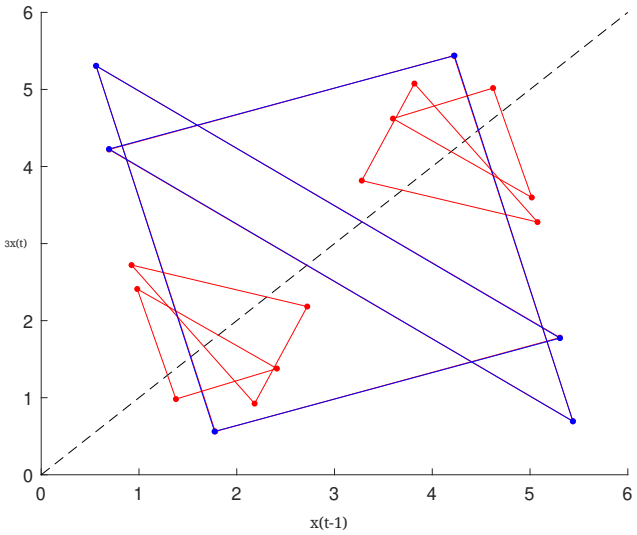


图7：模型2中含有 $K = 3.303$ 的3周期轨道。6个不稳定周期用红色标记，2个稳定周期用蓝色标记。

此外，如果测量3周期轨道 $x \mapsto y \mapsto z \mapsto x$ with $d = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$，的幅度，则有

$$\begin{aligned} &K^4d^4 + (-54K^4 - 90K^3)d^3 + (972K^4 + 2700K^3 + 1800K^2)d^2 \\ &\quad + (-6696K^4 - 19440K^3 - 5400K^2 + 27000K)d \\ &\quad + 15552K^4 + 38880K^3 - 32400K^2 - 162000K + 270000 = 0. \end{aligned}$$

关于 K 和 d 的上述条件绘于图8中。

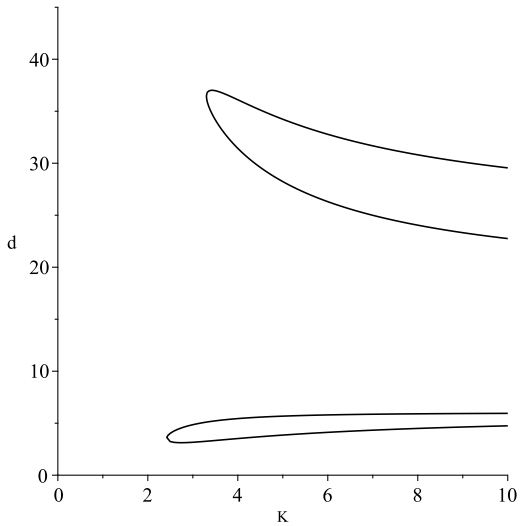


图8：模型2中可能出现的3周期轨道的幅度 d 随 K 的变化情况。

同样，我们分析模型2中的4周期和5周期轨道，并在下文报告所得结果。

定理 7。模型*2*中，所有可能的（稳定）*4*周期轨道数量情形均列于表 *3*，其中

$m_1 \approx 2.060113296$, $m_2 \approx 2.146719591$, $m_3 \approx 2.579725065$, $m_4 \approx 2.581385365$, $m_5 \approx 3.062775154$, $m_6 \approx 3.070194019$, $m_7 \approx 3.279225134$, $m_8 \approx 3.279260335$, $m_9 \approx 3.319881360$, $m_{10} \approx 3.319889702$.

读者可参阅注释 *3*，了解这些 m_i 是如何得出的。

表 3：模型2中的（稳定）4周期轨道数量

$K \in$	$(0, m_1)$	$(m_1,\ m_2)$	$(m_2,\ m_3)$	$(m_3,\ m_4)$	$(m_4,\ m_5)$	$(m_5,\ m_6)$
4-周期	0	2	2	6	6	10
稳定 4-循环	0	2	0	2	0	2
$K \in$	$(m_6,\ m_7)$	$(m_7,\ m_8)$	$(m_8,\ m_9)$	$(m_9,\ m_{10})$	$(m_{10},\ +\infty)$	
4-周期	10	14	14	18	18	
稳定 4-循环	0	2	0	2	0	

在图9中，我们展示了模型2中所有的 4周期轨道，其中 $K = 3.319885 \in (m_9,\ m_{10})$，16个不稳定周期用红色标记，2个稳定周期用蓝色标记。如果我们用 $d = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-w)^2 + (w-x)^2$, 来测量 4-周期轨道 $x \mapsto y \mapsto z \mapsto w \mapsto x$ 的幅度，那么 d 必须满足以下方程之一。

$$
\begin{aligned}
&Kd - 12K + 20 = 0,\\
&Kd - 48K - 160 = 0,\\
&K^2d^2 + (-36K^2 - 60K)d + 288K^2 + 960K + 1600 = 0,\\
&C_4(K, d) = 0,
\end{aligned}
$$

其中，$C_4(K,\ d)$ 是附录中给出的复多项式。

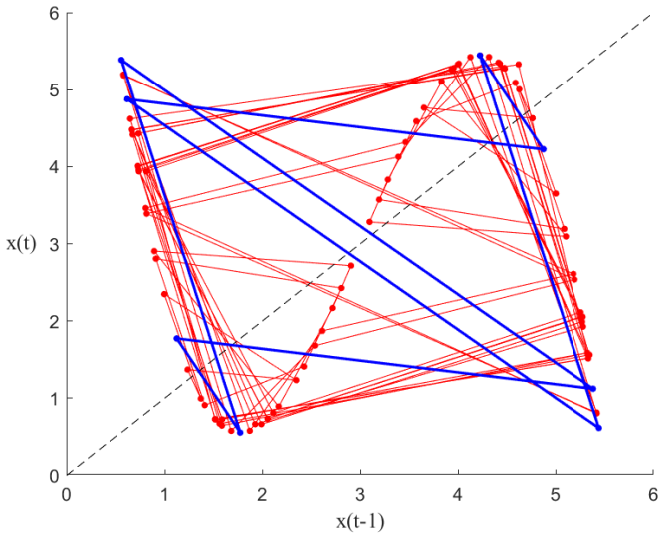


图9：模型2中 $K = 3.319885$ 的4周期轨道。16个不稳定周期用红色标记，2个稳定周期用蓝色标记。

定理 8。在模型*2*中，所有可能的（稳定）*5*周期轨道数量情况均列于表 *4*，其中

$$
\begin{aligned}
&m_1 \approx 2.323208379,\ m_2 \approx 2.326320457,\ m_3 \approx 2.509741151,\ m_4 \approx 2.510528490,\\
&m_5 \approx 2.632885028,\ m_6 \approx 2.633089005,\ m_7 \approx 2.997641294,\ m_8 \approx 2.997736262,\\
&m_9 \approx 3.113029799,\ m_{10} \approx 3.113069634,\ m_{11} \approx 3.197332995,\ m_{12} \approx 3.197354147,\\
&m_{13} \approx 3.219425160,\ m_{14} \approx 3.219440784,\ m_{15} \approx 3.269613400,\ m_{16} \approx 3.269618202,\\
&m_{17} \approx 3.288059620,\ m_{18} \approx 3.288062995,\ m_{19} \approx 3.314977518,\ m_{20} \approx 3.314978815,\\
&m_{21} \approx 3.324008184,\ m_{22} \approx 3.324008826,\ m_{23} \approx 3.332961824,\ m_{24} \approx 3.332961850.
\end{aligned}
$$

读者可参阅注释 *3*，了解这些 m_i 是如何得到的。

表 4：模型2中的（稳定）5周期轨道数量

$K \in$	$(0, m_1)$	(m_1, m_2)	$(m_2,\ m_3)$	$(m_3,\ m_4)$	$(m_4,\ m_5)$
5-循环	0	4	4	8	8
稳定 5-循环	0	2	0	2	0
$K \in$	$(m_5,\ m_6)$	$(m_6,\ m_7)$	$(m_7,\ m_8)$	(m_8, m_9)	$(m_9,\ m_{10})$
5-循环	12	12	16	16	20
稳定 5-循环	2	0	2	0	2
$K \in$	$(m_{10},\ m_{11})$	$(m_{11},\ m_{12})$	$(m_{12},\ m_{13})$	$(m_{13},\ m_{14})$	$(m_{14},\ m_{15})$
5-循环	20	24	24	28	28
稳定 5-循环	0	2	0	2	0
$K \in$	$(m_{15},\ m_{16})$	$(m_{16},\ m_{17})$	$(m_{17},\ m_{18})$	$(m_{18},\ m_{19})$	$(m_{19},\ m_{20})$
5-循环	32	32	36	36	40
稳定 5-循环	2	0	2	0	2
$K \in$	$(m_{20},\ m_{21})$	$(m_{21},\ m_{22})$	$(m_{22},\ m_{23})$	$(m_{23},\ m_{24})$	$(m_{24},\ +\infty)$
5-循环	40	44	44	48	48
稳定 5-循环	0	2	0	2	0

在图10中，我们绘制了模型2中所有可能的5周期轨道，其中 $K = 3.33296183 \in (m_{23}, m_{24})$，46个不稳定周期用红色标记，2个稳定周期用蓝色标记。

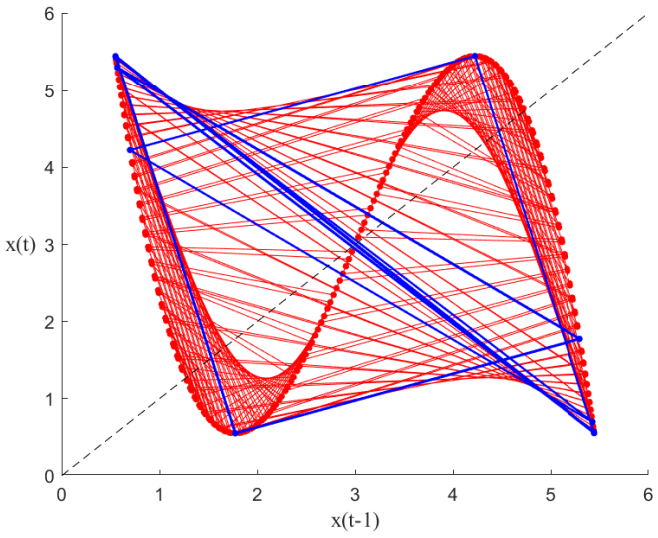


图10：模型2中带有 $K = 3.33296183$ 的5周期轨道。46个不稳定周期轨道以红色标出，2个稳定周期以蓝色标出。

根据定理6、7和8可知，模型2的参数空间与模型1的参数空间有很大不同：3-周期、4-周期和5周期轨道的稳定区域是由许多互不相连的部分组成的非连通集。因此，模型2中稳定周期轨道区域的拓扑结构远比模型1中的复杂。这可能是因为模型2的逆需求函数存在一个拐点。不过，以下关于模型2的观察与模型1相似。定理5表明，2周期的稳定区域是一个连通区间。在模型2中，2周期稳定区域的右边界与4周期稳定区域的左边界相同。当 $a = 3.6$、$b = 2.4$、$c = 0.6$ 和 $d = 0.05$ 时，根据定理1可知，如果 $K \in (0,\ 5/3)$，模型2存在稳定平衡点；该区域与2周期的稳定区域相邻。此外，在模型2中，不同周期的周期轨道的稳定区域可能互不相交，这意味着多稳态可能只会出现在

周期相同的周期轨道之间。

图11展示了模型2在（a, K）$\in [2.5, 5.0] \times [0.0, 3.0]$下的二维分岔图。固定参数 $b = 2.4$、$c = 0.6$、$d = 0.05$，并将初始状态设为 $x(0) = 1.0$。类似地，我们用不同颜色标记对应不同周期轨迹的参数点。如果相应轨道的周期大于24，则将参数点标为黑色。此外，轨迹发散的参数点也标为黑色。可以看出，图11证实了定理1中给出的理论结果。然而，与基于符号计算得到的图2相比，通过数值模拟生成的图11不够精确。

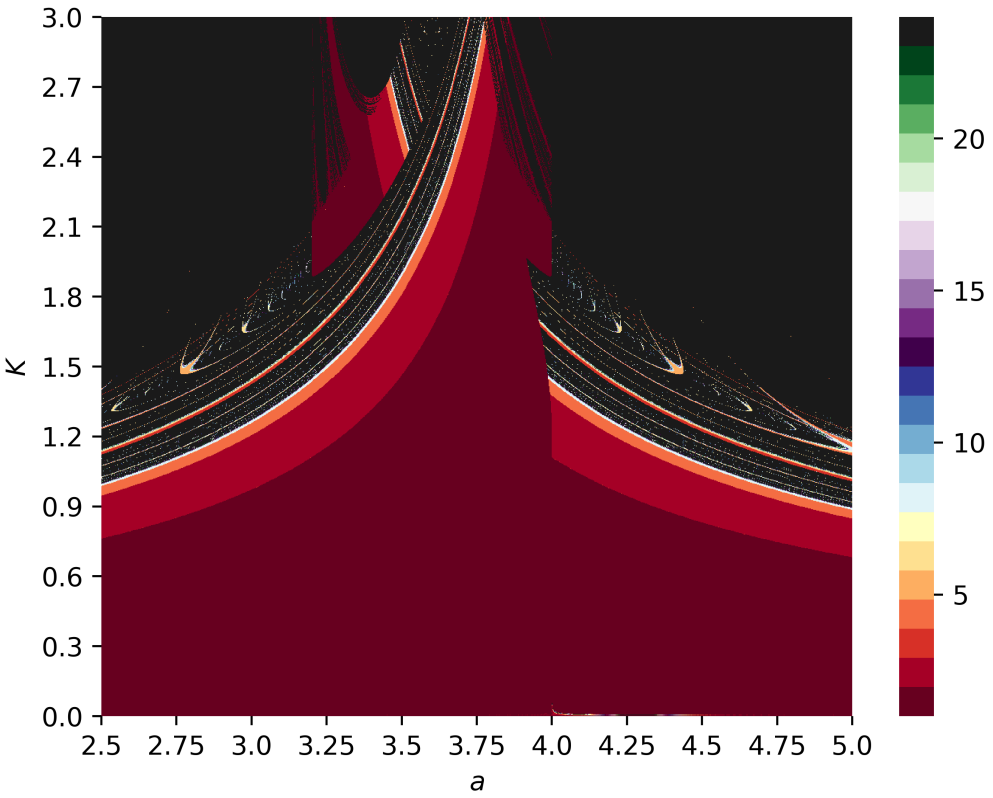
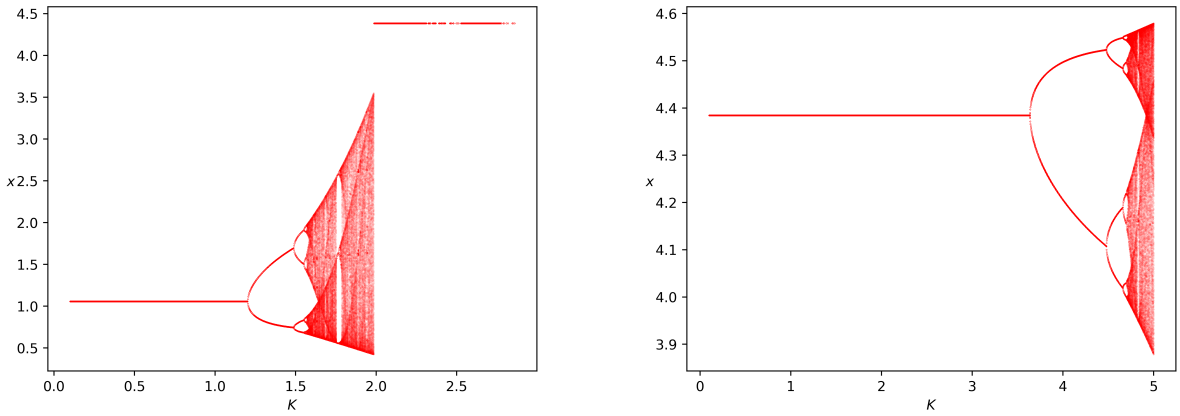


图11：模型2在（a, K）$\in [2.5, 5.0] \times [0.0, 3.0]$下的二维分岔图。固定参数 $b = 2.4$、$c = 0.6$、$d = 0.05$，并选取 $x(0) = 1.0$ 作为迭代的初始状态。

图 12 描绘了模型2关于 K 的一维分岔图，其中固定$a = 3.3$、$b = 2.4$、$c = 0.6$ 和 $d = 0.05$。若选取的迭代初始状态不同，分岔图也会有所不同。例如，在图 12（a）和（b）中，初始状态分别选为 $x(0) = 1.0$ 和 $x(0) = 4.0$。出现这种差异的原因可能是，当 K 相对较小时，存在两个稳定平衡点，而不同的初始状态会趋近于不同的平衡点。如图 12（a）所示，当 $K < 1.1996$ 时，轨迹收敛至 1.058；当 $K > 1.9874$ 时，收敛至 4.384。在图 12 中，还可以观察到倍周期分岔的发生。

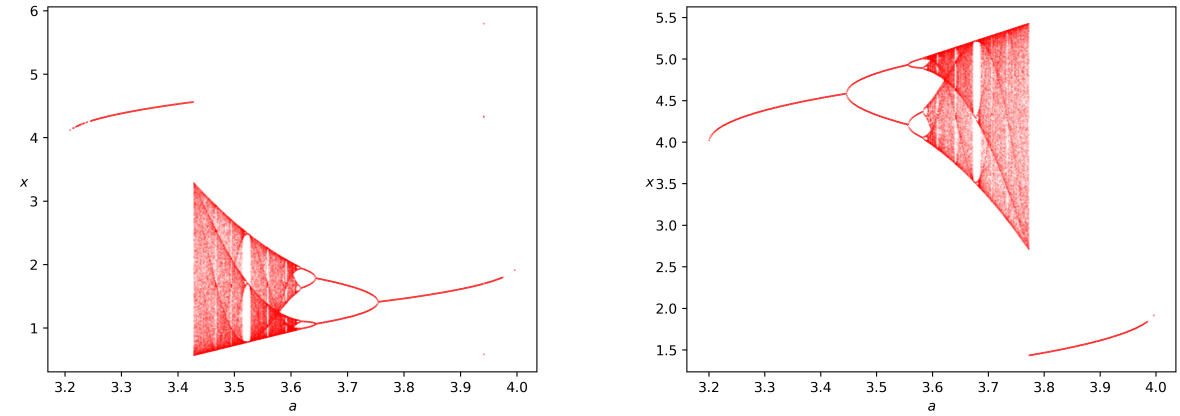
图 13 描绘了模型2关于 a 的一维分岔图，其中固定$K = 2.2$、$b = 2.4$、$c = 0.6$ 和 $d = 0.05$。在图 13（a）和（b）中，迭代的初始状态分别选为 $x(0) = 1.0$ 和 $x(0) = 4.0$。同样，由于选取的初始状态不同，这两幅分岔图也有所不同。此外，在图 13 中可以观察到叉形分岔，此时稳定平衡点的数量从一个变为零。

在模型2中，可能同时存在两个稳定平衡点（见图2中的蓝灰色区域）。均衡选择问题很有意思。迭代的最终结果不仅取决于



(a) $x(0) = 1.0$。　　(b) $x(0) = 4.0$。

图 12：固定 $a = 3.3$、$b = 2.4$、 $c = 0.6$ 和 $d = 0.05$ 时，模型2 关于 K 的一维分岔图。



(a) $x(0) = 1.0$。　　(b) $x(0) = 4.0$。

图 13：固定 $K = 2.2$、$b = 2.4$、 $c = 0.6$ 和 $d = 0.05$ 时，模型2 关于 a 的一维分岔图。

这些参数，以及博弈的初始条件。根据我们对模型2进行的数值模拟，共存平衡点的吸引域具有复杂的结构。例如，固定 $K = 0.5$, $a = 3.5$, $b = 2.4$, $c = 0.6$, $d = 0.05$后，我们有两个稳定平衡点 $E_1 = 1.19$ and$E_2 = 4.64$。 E_1 的吸引域为

$$\mathcal{B}(E_1) = (0, 3.168) \cup (6.518, 7.577) \cup (7.745, 7.781) \cup (7.786, 7.789),$$

而 E_2 的吸引域为

$$\mathcal{B}(E_2) = (3.168, 6.518) \cup (7.577, 7.745) \cup (7.781, 7.786).$$

此外，当初始状态 $x(0) > 7.786$时，轨迹不会收敛到两个稳定平衡点中的任何一个，而是发散至 $+\infty$。再以 $K = 1$ 和 $a = 4$ 为例。若其他参数保持不变，即 $b = 2.4$, $c = 0.6$和 $d = 0.05$，则存在两个稳定平衡点$E_1 = 4.99$ 和 $E_2 = 1.99$。我们的模拟表明，这两个平衡点的吸引域

$$\mathcal{B}(E_1) = (0, 0.807) \cup (2.0, 6.192) \cup (6.431, 6.647) \cup (6.653, 6.659),$$

and

$$\mathcal{B}(E_2) = (0.807, 2.0) \cup (6.192, 6.431) \cup (6.647, 6.653),$$

分别。逃逸集为 $(6.659, +\infty)$，轨迹会在此处发散。简言之，在模型2中，两个稳定平衡点的吸引域是彼此不连通的集合，并具有复杂的拓扑结构。

5 混沌动力学

在分岔图（图 6 和图 12）中，可以观察到，随着调整速度增加，所研究的两个模型的动力学通过倍周期分岔转变为混沌。从经济学角度来看，一旦出现混沌，即使是完全理性的参与者，也几乎不可能掌握产量和利润背后的规律。因此，企业极难应对混沌经济，因为在这种经济中，没有任何市场规则能够被发现并遵循。

本节将严格证明这两个模型中混沌的存在。下面这个著名引理最初由 Li 和 Yorke 提出 [15], ，其数学内涵深刻，有助于探究一维离散动力系统中出现的复杂动力学。

引理4。设 I 是一个实数区间，且 $F : I \to \mathcal{R}$ 是一个连续函数。假设存在一点 $x \in I$ 使得

$$F^3(x) \le x < F(x) < F^2(x) \quad or \quad F^3(x) \ge x > F(x) > F^2(x), \tag{20}$$

则以下两个结论成立。

1. 对每个 $k \in \{1, 2, \ldots\}$，存在一个周期为 k的点 $p_k \in I$，即 $F^k(p_k) = p_k$，且 $F^i(p_k) \ne p_k$，其中 $1 \le i < k$。

2. 存在一个不可数集 $S \subset I$ （其中不包含周期点），满足以下条件：

(a) 对任意 p、 $q \in S$，若 $p \ne q$,

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0, \tag{21}$$

and

$$\liminf_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(q)| = 0; \tag{22}$$

(b) 对每个点 $p \in S$ 和每个周期点 $q \in I$,

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0. \tag{23}$$

注记 4. 式（22）意味着， S 中的每条轨迹都可以任意接近其他任意一条轨迹。然而，根据（21），我们知道，无论 S 中两条不同的轨迹彼此靠得多近，它们最终都必定会逐渐远离。此外，由（23）可知， S 中的每条轨迹都会远离 I 中的任意周期轨道。如果上述引理中的两个陈述都成立，我们就称存在 Li-Yorke 意义下的混沌动力学或混沌。

因此，我们可以得出结论：对于一维离散动力系统，“周期三蕴含混沌”。在第4节中，我们严格推导出模型2在$K > 2.417401607$下存在3周期轨道，这证明从 Li-Yorke 的意义上说，一组不可数的初始状态将导致混沌。

但对于模型1，我们已经证明不存在周期为三的解。然而，不能据此断定不存在混沌轨迹，因为周期三的存在并非混沌的必要条件，而只是充分条件。在 [20], 中，Marotto 指出，对于一般的 n维方程组，回弹排斥子的存在也蕴含混沌。然而，Li 和 Chen[14] 指出，Marotto 对回弹排斥子的原始定义可能不够充分，并提出了 Marotto-Li-Chen定理。因此，我们通过简化 Marotto-Li-Chen定理，给出适用于一维系统的以下引理。更多细节请参阅 [11] 。

引理5。设 I 是一个实数区间，且 $F: I \to \mathcal{R}$ 是可微函数。假设

1. $x \in I$ 是一个平衡点，即 $F(x) = x$;

2. 存在一个闭区间 $S \subset I$ ，使得 x 是 S的内点，并且 F的导数在每个点 $p \in S$处的绝对值都大于1 ，即 $|F'(p)| > 1$;

3. 对某个整数 $m > 1$，存在一点 $y \in S$，使得 $y \neq x$, $F^m(y) = x$，且对所有 $1 \leq k \leq m$， $F'(F^k(y)) \neq 0$ 。

那么，方程组 $x(t+1) = F(x(t))$ 在*Li-Yorke*意义下是混沌的。

对于模型1，我们有 $F(x) = x + f(e - x^3)$，且 $F'(x) = 1 - 3fx^2$。那么， $|F'(x)| > 1$和 $x > 0$ 意味着 $x > \sqrt{\frac{2}{3f}}$。因此，若能找到 x, y，且满足 $x \neq y$，使得 $|F'(x)| > 1$和 $|F'(y)| > 1$均成立，那么必定存在一个闭区间 S ，其内点包含 x, y 。在这种情况下，显然对每个点 $p \in S$，都有 $|F'(p)| > 1$ 。自然地，我们从 $m = 2$ 入手，通过计算下列方程组的实解来验证引理5的条件。

$$\begin{cases} x = x + f(e - x^3), \\ x = F^2(y) = y + f(e - y^3) + f(e - (y + f(e - y^3))^3), \\ |1 - 3fx^2| > 1, \\ |1 - 3fy^2| > 1, \\ |1 - 3f(y + f(e - y^3))^2| \neq 0, \\ x \neq y, \\ x > 0,\ y > 0,\ e > 0,\ f > 0. \end{cases}$$

首先应采用备注2中介绍的技巧，将上述方程组转化为单变量方程。根据我们的计算，上述方程组有至少一个实解，当且仅当 $8/27 < e^2 f^3 < 64/27$。因此，当 $8/27 < e^2 f^3 < 64/27$ 时，我们得出结论：模型1在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

6 结论性评述

众所周知，尽管垄断是最简单的寡头垄断形式，但仍可能呈现周期轨道、混沌等复杂动力学。本研究考察了两个采用梯度机制的垄断模型，其中垄断者是信息充分的企业。这两个模型的主要区别在于

它们的逆需求函数。模型1采用 Naimzada 和 Ricchiuti 的逆需求函数[25], ，而模型2采用 Puu 的逆需求函数 [26]。不同于数值模拟和分岔延拓方法等广泛应用的数值方法，本文采用符号方法分析局部稳定性、周期解乃至混沌动力学。数值方法存在一些缺点，例如计算可能遇到不稳定问题，导致结果完全无用。相比之下，符号计算结果精确，因此在某种意义上，所得结果可用于严格证明经济学定理。

通过重新证明模型1局部稳定性和分岔的已有结果（命题1），我们详细说明了符号方法的工作原理。随后，我们基于这一方法分析了模型2的稳定性和分岔。我们首次获得了模型2局部稳定性和分岔的完整条件（见定理1）。图2显示，模型2的表现与典型的梯度机制寡头垄断模型大不相同。例如，即使调整速度 K 相当大，也始终存在一些 a 值（初始商品价格与初始边际成本之差），使模型2具有稳定平衡点。此外，随着 a 值增大，模型2可能经历两次从不稳定到稳定、再回到不稳定的变化。

从经济学角度看，研究周期解具有实际意义。在有限理性的假设下，若出现周期动力学，企业便无法了解产量和利润背后的规律。对于这两个模型，我们探讨了低周期的周期解及其局部稳定性。我们发现这两个模型存在差异，例如，模型2存在3周期轨道，而模型1中不存在。在模型1中，固定周期的周期解的稳定性参数区域构成一个连通集。然而，在模型2中，3-周期、4周期和5周期轨道的稳定区域由许多互不相连的部分组成，彼此不连通。换言之，模型2中稳定周期轨道区域的拓扑结构比模型1复杂得多。上述差异可能是因为模型2的逆需求函数存在拐点。根据模型2的数值模拟，我们发现两个稳定平衡点的吸引域是不连通的，并且具有复杂的拓扑结构。对于一个 n-周期轨道 $p_1 \mapsto p_2 \mapsto \cdots p_n \mapsto p_1$，我们将幅度度量定义为

$$d = (p_1 - p_2)^2 + (p_2 - p_3)^2 + \cdots + (p_{n-1} - p_n)^2 + (p_n - p_1)^2.$$

对于所研究的两个模型，我们对低阶周期轨道幅度的公式进行了解析研究。

此外，一旦出现混沌，企业就极难驾驭经济。在这种情况下，市场规则无从发现和遵循，即使是完全理性的参与者，也几乎不可能了解产量和利润背后的规律。两个模型的分岔图似乎表明，当调整速度足够大时，就会出现混沌。我们通过解析方法阐明了这一现象。根据“周期三蕴含混沌”这一事实，我们通过证明3周期轨道的存在，推导出模型2在Li-Yorke意义下是混沌的。然而，模型1中不存在3-周期，但我们借助Marotto-Li-Chen定理，通过找出回弹排斥子，证明了混沌的存在。

本文假设参与者具备充分信息，也就是说，企业充分了解逆需求函数，并能随时计算其边际利润。然而，在现实世界中，假设参与者有限理性而非充分知情更为合理。在这种情况下，企业并不知道逆需求函数的形式，只掌握过去各周期的产量和价格值，并用简单的差分公式估算边际利润。对有限理性企业动力学的研究，可能是我们未来研究的一个重要方向。

致谢

作者感谢黄波博士富有益处的讨论，并感谢匿名审稿人提出的宝贵意见。

本研究得到广东省哲学社会科学基金项目（项目编号：GD21CLJ01）、东莞城市学院重大研究与培育项目（项目编号：2021YZDYB04Z和2022YZD05R）、国家自然科学基金项目（项目编号：11601023）以及北京市自然科学基金项目（项目编号：1212005）的资助。

利益冲突声明

作者声明不存在利益冲突。

附录

$$SP = (972K^8 + 19440K^7 + 127575K^6 + 162000K^5 - 1552500K^4 - 6412500K^3 - 5062500K^2 + 23437500K + 67187500)(8503056K^{12} + 191318760K^{11} + 1523464200K^{10} + 3754532250K^9 - 14134854375K^8 - 101982543750K^7 - 146939062500K^6 + 399469218750K^5 + 1522072265625K^4 + 261457031250K^3 - 4576816406250K^2 - 1938867187500K + 13981445312500), C_4(K, d) = K^8d^8 + (-126K^8 - 210K^7)d^7 + (6660K^8 + 21300K^7 + 17800K^6)d^6 + (-192024K^8 - 874800K^7 - 1382400K^6 - 731000K^5)d^5 + (3285360K^8 + 18688320K^7 + 41115600K^6 + 39438000K^5 + 13350000K^4)d^4 + (-33957792K^8 - 221940000K^7 - 588016800K^6 - 728172000K^5 - 379740000K^4 - 45500000K^3)d^3 + (206172864K^8 + 1453101120K^7 + 4191652800K^6 + 5433912000K^5 + 2183760000K^4 - 1105200000K^3 - 478000000K^2)d^2 + (-672686208K^8 - 4870886400K^7 - 14246409600K^6 - 16185744000K^5 + 2054160000K^4 + 13262400000K^3 - 7632000000K^2 - 11520000000K)d + 906992640K + 6500113920K^7 + 18223833600K^6 + 13351392000K^5 - 25284960000K^4 - 27302400000K^3 + 65376000000K^2 + 30720000000K - 102400000000.$$

参考文献

[1] B. Al-Hdaibat、W. Govaerts 和 N. Neirynck。二维垄断模型中的周期行为与混沌行为。《混沌、孤子与分形》，70:27–37，2015年。[2] S. Askar。垄断市场的复杂动力学。《经济建模》，31:586–589，2013年。[3] A. Caravaggio 和 M. Sodini。差异化最终产品与异质市场下的垄断。《混沌、孤子与分形》，130:109429，2020年。[4] F. Cavalli 和 A. Naimzada。梯度调整下垄断中的需求价格弹性影响。《混沌、孤子与分形》，76:47–55，2015年。[5] G. E. Collins 和 H. Hong。用于量词消去的部分柱面代数分解。《符号计算杂志》，12(3):299–328，1991年。[6] G. E. Collins 和 R. Loos。多项式的实零点。载于 B. Buchberger、G. Collins 和 R. Loos 编，《计算机代数：符号与代数计算》，第83–94页。施普林格，纽约，1983年。[7] A. A. Cournot。《财富理论的数学原理研究》´´。L. Hachette，巴黎，1838年。[8] A. Elsadany 和 A. Awad。对数凹需求函数下延迟垄断博弈的动力学分析。《运筹学快报》，44(1):33–38，2016年。

[9] L. Gori、L. Guerrini 和 M. Sodini。垄断中的时间滞后：不同的建模方法。载于《经济动态学论文集》，第81–98页。施普林格，2016年。[10] L. Guerrini、N. Pecora 和 M. Sodini。恒定价格弹性下固定时滞和连续分布时滞对垄断模型的影响。《经济与金融决策》，41(2):239–257，2018年。[11] B. Huang 和 W. Niu。利用符号计算方法分析回弹排斥子。《国际分岔与混沌杂志》，29(04):1950054，2019年。[12] M. Jin、X. Li 和 D. Wang。计算特征集的新算法方案。《符号计算杂志》，50:431–449，2013年。[13] B. Li、H. Liang、L. Shi 和 Q. He。寡头企业之间非对称响应下Kopel模型的复杂动力学。《混沌、孤子与分形》，156:111860，2022年。[14] C. Li 和 G. Chen。关于Marotto–Li–Chen定理及其在多维离散动力系统混沌化中的应用。《混沌、孤子与分形》，18(4):807–817，2003年。[15] T.-Y. Li 和 J. A. Yorke。周期三蕴含混沌。《美国数学月刊》，82(10):985–992，1975年。[16] X. Li、C. Mou 和 D. Wang。将有限域上的多项式集分解为简单集：零维情形。《计算机与应用数学》，60(11):2983–2997，2010年。[17] X. Li 和 L. Su。等弹性需求与规模不经济下的异质双寡头博弈。《分形与分数阶》，6(8):459，2022年。[18] X. Li 和 D. Wang。利用三角分解和实解分类计算半代数经济的平衡点。《数学经济学杂志》，54:48–58，2014年。[19] J. Ma 和 K. Wu。复杂系统与延迟决策对三寡头价格博弈模型稳定性的影响。《非线性动力学》，73(3):1741–1751，2013年。[20] F. R. Marotto。回弹排斥子蕴含混沌，见 R_n。《数学分析与应用杂志》，63(1):199–223，1978年。[21] A. E. Matouk、A. A. Elsadany 和 B. Xin。等弹性需求函数下异质四寡头博弈的Neimark–Sacker分岔分析与复杂非线性动力学。《非线性动力学》，89(4):2533–2552，2017年。[22] A. Matsumoto、Y. Nonaka 和 F. Szidarovszky。两个有限理性垄断模型中的非线性动力学与附加利润。《非线性科学与数值模拟通讯》，116:106868，2022年。[23] A. Matsumoto 和 F. Szidarovszky。具有有限理性的非线性延迟垄断。《混沌、孤子与分形》，45(4):507–519，2012年。[24] B. Mishra。《算法代数》。施普林格出版社，纽约，1993年。[25] A. K. Naimzada 和 G. Ricchiuti。采用经验法则的垄断模型中的复杂动力学。《应用数学与计算》，203(2):921–925，2008年。[26] T. Puu。《混沌垄断者》。《混沌、孤子与分形》，5(1):35–44，1995年。[27] G. Sarafopoulos。一般需求和二次成本函数下垄断市场的复杂性。《经济与金融学术论文集》，19:122–128，2015年。[28] B. Sturmfels。《多项式方程组求解》。美国数学会，普罗维登斯，2002年。

[29] D. Wang。《style id='2'>消元方法。《符号计算丛书与专著》。施普林格，纽约，2001 年。[30] W.-T. Wu。初等几何中机械定理证明的基本原理。《style id='5'>《自动推理杂志》，2(3)：221–252，1986 年。[31] B. Xia 和 X. Hou。计算多项式方程与不等式系统实解数量的完备算法。《style id='8'>《计算机与应用数学》，44(5–6)：633–642，2002 年。[32] L. Yang、X. Hou 和 B. Xia。一类不等式型定理自动发现的完备算法。《style id='11'>《中国科学》F辑，44：33–49，2001 年。