arXiv:2301.01506v1 [math.OC] 4 Jan 2023

条件 McKean-Vlasov 跳扩散的脉冲控制

Nacira Agram[1], Giulia Pucci[1] & Bernt Øksendal[2]

2023年1月5日

摘要

本文为涉及条件 McKean-Vlasov 跳扩散的脉冲控制问题建立了一个验证定理。我们将问题的状态方程与描述状态条件概率律的随机福克–普朗克方程相结合，得到一个马尔可夫系统。我们推导出若干充分的变分不等式，以判定某个函数是否为脉冲控制问题的价值函数，以及某个脉冲控制是否为最优控制。我们将这些结果应用于带交易成本的最优股息流研究，以此加以说明。通过求出满足验证定理的函数及其相应的脉冲控制，我们显式地得到了解。

关键词：跳扩散；脉冲控制；共同噪声；条件 McKean-Vlasov 微分方程；随机福克–普朗克方程；拟变分不等式。

1 引言

考虑一个滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}\}_{t\geq 0})$，其上给定一个$d$维布朗运动 $B = (B_1, B_2, \ldots, B_d)$，以及一个 k维补偿~泊松随机测度 $N(dt, d\zeta)$，使得

$$\widetilde{N}(dt, d\zeta) = N(dt, d\zeta) - \nu(d\zeta)dt,$$

[1]瑞典皇家理工学院数学系，瑞典斯德哥尔摩 100 44。电子邮箱：nacira@kth.se, pucci@kth.se。研究工作受瑞典研究理事会项目资助（2020-04697）。[2]奥斯陆大学数学系，挪威。电子邮箱：oksendal@math.uio.no。

其中 $N(dt, d\zeta)$ 是泊松随机测度， $\nu(d\zeta)$ 是 N 的 L´évy 测度；另有一个与 $\mathbb{F}$ 独立的随机变量 $Z \in L^2(P)$。我们用 $L^2(P)$ 表示所有满足 $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ 的 $\mathcal{F}$-可测 $d-$维随机变量 X 的集合，其中 $\mathbb{E}$ 表示关于 P 的期望。我们考虑状态过程$X(t) \in \mathbb{R}^d$ ，它由下述条件 McKean-Vlasov 跳跃方程的解给出

$$X(t) = Z + \int_0^t \alpha(s, X(s), \mu_s)dt + \beta(s, X(s), \mu_s)dB(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(s, X(s^-), \mu_{s^-}, \zeta)\widetilde{N}(ds, d\zeta), \tag{1.1}$$

其中，我们用 $\mu_t = \mathcal{L}(X(t)|\mathcal{F}_t^{(1)})$ 表示在由第一分量 $B_1(u)$ 生成的滤过 $\mathcal{F}_t^{(1)}$ 下，给定 t 时 $X(t)$ 的条件概率分布； $u \leq t$ 表示截至时间 t 的布朗运动。粗略地说，上述方程描述了一个受所谓“共同噪声”影响的 McKean-Vlasov 动力学，该共同噪声来自布朗运动 $B_1(t)$，它是可观测的，并会影响系统的动力学。

如此定义的 μ_t 对所有 $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$ 都是 $\mathbb{R}^d$ 上的博雷尔概率测度。特别地，$\mu_t \in \mathbb{M}_0$，其中 $\mathbb{M}_0$ 是确定性拉东测度的集合，即在紧集上有限、在所有博雷尔集上外正则且在所有开集上内正则的博雷尔测度。注意， $\mathbb{R}^d$ 上的所有博雷尔概率测度都是拉东测度。从现在起，我们用 $\mathbb{M}$ 表示随机测度 $\lambda(dx, \omega)$ 的集合，这些随机测度对于每个 ω 都是关于 x 的拉东测度。更多信息请参见 [9]。

我们假设，对于所有x, μ, ζ， $\alpha(t, x, \mu)$: $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{M} \to \mathbb{R}^d$、 $\beta(t, x, \mu)$: $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{M} \to \mathbb{R}^{d\times m}$以及$\gamma(t, x, \mu, \zeta)$: $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{M} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times k}$均为有界过程且是 $\mathbb{F}$-可预测的；此外，对于所有 μ, ζ，它们关于 t 和 x 连续。

容易看出，在满足利普希茨连续性和至多线性增长的假设下，对于所有 $t \in [0, T]$，方程（1.1）存在唯一解。

本文旨在研究条件 McKean–Vlasov 跳扩散的脉冲控制问题。具体而言，我们将定义一个性能准则，并尝试在可容许的脉冲策略中找到使性能最大化的策略。通过采用验证定理方法，我们建立拟变分不等式的一般形式，并确定导出最优函数的充分条件。具体表述见下文。标准脉冲控制问题可利用 Dynkin公式求解。连续情形可参见 Bensoussan & Lions [4] ，跳扩散情形可参见 Øksendal 和 Sulem [12] 。

脉冲控制问题自然出现在许多具体应用中，尤其是操作者因干预成本而决定仅在离散时刻通过干预来控制系统，并选择干预幅度时：操作者选择一列停时（$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, \ldots$）进行干预并实施控制。在玩家第 k 次干预的时刻 τ_k，玩家选择幅度为 ζ_k 的干预。脉冲控制

由序列 $\{(\tau_k, \zeta_k)\}_{k\geq 1}$ 构成。
脉冲控制在金融领域及其他领域引起了广泛关注。例如， [10] 探讨了其在投资组合理论中的应用， [2] 研究了其在能源市场中的应用，而 [6]则关注其在保险领域中的应用。这些研究均基于拟变分不等式，并采用验证方法。

尽管脉冲控制能够适用于更贴近现实的金融模型，但鲜有论文研究带有脉冲控制的平均场问题。关于一种更特殊的脉冲类型，我们可参阅 [3] ；其中，脉冲的唯一形式是向系统中添加某种内容。这是一个平均场博弈（MFG），其中平均场（仅指经验均值）是对多人博弈的近似。作者采用光滑拟合原理（与本文所用方法相同），显式求解了一个特定的MFG。

关于一种平均场博弈的脉冲控制方法，我们也可参阅 [7] 。具体而言，该文研究了自然资源管理中的最优捕捞问题。
[11] 研究了平均场跳扩散过程的状态切换控制问题的最大值原理，但该文所考虑的问题实际上并非脉冲控制问题，因为干预时刻是预先固定的。

在我们的设定中，我们不考虑上述文献中的均值场博弈（MFG）框架，而只考虑由一位决策者选择控制以优化某种收益的情形。此外，平均场以条件概率分布的形式出现；为克服马尔可夫性质的缺失，我们引入了测度方程，该方程属于随机福克-普朗克型。

在 [8]，中，作者能够处理非马尔可夫动力学。然而，脉冲控制采用特定的紧凑形式，且只允许给定数量的冲击。他们使用斯涅尔包络方法以及相关的反射倒向随机微分方程。

下一节中，我们将介绍一些记号并给出若干预备结果。作为第 3 节的一部分，我们将陈述最优控制问题并证明验证定理。在第 4 节中，我们将应用前述结果，在交易成本下求解一个关于最优股息流的具体问题。

2 预备知识

由 (1.1) 给出的过程 $X(t)$ 本身并非马尔可夫性过程，因此，为了能够使用 Dynkin公式，我们将系统扩展为过程 Y，其定义如下：

$$Y(t) = (s + t, X(t), \mu_t); \quad t \geq 0; \quad Y(0) = (s, Z, \mu_0) =: y,$$

对于任意起始时刻 $s \geq 0$，其状态动力学由 $X(t)$ 给出，状态的条件分布由 μ_t 给出，且 $X(0) = Z$，$\mu_0 = \mathcal{L}(X(0))$。根据 [1] 中证明的条件分布 μ_t 满足的以下福克-普朗克方程，该系统具有马尔可夫性。

定理 2.1（条件随机福克-普朗克方程）设 $X(t)$ 如 (1.1) 所示，并设 $\mu_t = \mu_t(dx, \omega)$ 是在给定 $\mathcal{F}_t^{(1)}$ 的条件下 $X(t)$ 的正则条件分布。则 μ_t 满足以下随机偏积分微分方程（以广义函数的意义）：

$$d\mu_t = A_0^*\mu_t dt + A_1^*\mu_t dB_1(t); \quad \mu_0 = \mathcal{L}(X(0)), \tag{2.1}$$

其中， A_0^* 是积分微分算子

$$\begin{aligned} A_0^*\mu = &-\sum_{j=1}^{d} D_j[\alpha_j\mu] + \frac{1}{2}\sum_{n,j=1}^{d} D_{n,j}[(\beta\beta^{(T)})_{n,j}\mu] \\ &+ \sum_{\ell=1}^{k}\int_{\mathbb{R}} \left\{\mu^{(\gamma^{(\ell)})} - \mu + \sum_{j=1}^{d} D_j[\gamma_j^{(\ell)}(s,\cdot,\zeta)\mu]\right\}\nu_\ell\,(d\zeta)\,, \end{aligned}$$

且 A_1^* 是微分算子

$$A_1^*\mu = -\sum_{j=1}^{d} D_j[\beta_{1,j}\mu],$$

其中， $\beta^{(T)}$ 表示 $d \times m$ -矩阵 $\beta = \left[\beta_{j,k}\right]_{1\le j\le d,\ 1\le k\le m}$ 的转置，且 $\gamma^{(\ell)}$ 是矩阵 γ 的第 ℓ 列。

为简化记号，我们用 D_j、 $D_{n,j}$ 表示广义函数意义下的 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 和 $\frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_j}$。

我们还使用了以下记号，该记号引自 [1]。
对于固定的 t、 μ、 ζ 和 $\ell = 1, 2, \ldots k$，为简便起见，我们用 $\gamma^{(\ell)} = \gamma^{(\ell)}(t, x, \mu, \zeta)$ 表示 $d \times k$-矩阵 γ 的第 ℓ 列。然后， ν_ℓ 表示对所有 ℓ 而言 N_ℓ 的 Lévy 测度。注意，对于给定的 $\mu \in \mathbb{M}$ ，映射

$$g \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} g(x + \gamma^{(\ell)})\mu(dx)$$

是 $C_0(\mathbb{R}^d)$ 上的有界线性映射，其中 $C_0(\mathbb{R}^d)$ 定义为紧支集连续函数空间 $C_c(\mathbb{R}^d)$ 的一致闭包。因此，由于 $\mathbb{M}$ 是 $C_0(\mathbb{R}^d)$ 的对偶空间，存在唯一测度 $\mu^{(\gamma^{(\ell)})} \in \mathbb{M}$ ，使得

$$\langle \mu^{(\gamma^{(\ell)})}, g\rangle := \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\mu^{(\gamma^{(\ell)})}(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x + \gamma^{(\ell)})\mu(dx), \text{ for all } g \in C_0(\mathbb{R}^d),$$

其中 $\langle \mu^{(\gamma^{(\ell)})} g\rangle$ 表示测度 $\mu^{(\gamma^{(\ell)})}$ 对 g 的作用。我们称 $\mu^{(\gamma^{(\ell)})}$ 为 μ 的 $\gamma^{(\ell)}$-平移。注意， $\mu^{(\gamma^{(\ell)})}$ 相对于 μ 是正且绝对连续的。

3 一般表述与验证定理

如上所述，借助福克-普朗克方程 (2.1)，我们可以通过定义以下取值于 $[0,\infty)\times L^2(P)\times\mathbb{M}$ 的过程 $Y(t):=(s+t,X(t)\ \mu_t)$，将系统 (1.1) 扩展为一个马尔可夫系统：

$$\begin{aligned} dY(t) &= F(Y(t))dt + G(Y(t))dB(t) + \int_{\mathbb{R}^k} H(Y(t^-),z)\widetilde{N}(dt,dz) \\ &:= \begin{bmatrix} dt \\ dX(t) \\ d\mu_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha(Y(t)) \\ A_0^*\mu_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0_{1\times m} \\ \beta(Y(t)) \\ A_1^*\mu_t, 0, 0..., 0 \end{bmatrix} dB(t) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \begin{bmatrix} 0_{1\times k} \\ \gamma(Y(t^-),\zeta) \\ 0_{1\times k} \end{bmatrix} \widetilde{N}(dt,d\zeta), \quad s\le t\le T, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中， $X(t)$ 和 μ_t 分别满足方程 (1.1) 和 (2.1)。此外，我们使用简记

$$\begin{aligned} \alpha(Y(t)) &= \alpha(s+t,X(t),\mu(t)) \\ \beta(Y(t)) &= \beta(s+t,X(t),\mu(t)) \\ \gamma(Y(t^-),\zeta) &= \gamma(s+t,X(t^-),\mu(t^-),\zeta). \end{aligned}$$

过程 $Y(t)$ 从 $y=(s,Z,\mu)$ 开始。在不致混淆时，我们用 μ 表示初始概率分布 $\mathcal{L}(X(0))$，或条件分布 $\mu_t:=\mathcal{L}(X(t)|\mathcal{F}_t^{(1)})$ 的一般取值。类似地，我们使用以下记号：

记号 3.1 我们用

- x 表示点 $X(t,\omega)\in\mathbb{R}^d$ 的一般取值，并且
- X 表示随机变量 $X(t,\cdot)\in L^2(P)$ 的一般取值。
- 当上下文含义明确时，我们在 x两种情形中都使用 $s.$

脉冲控制的概念简单而直观：主体可以随时对系统进行干预 ζ。由于每次干预都有成本，主体只能在离散时刻 τ_1、τ_2、.....进行干预。脉冲问题旨在找出何时进行干预最优，以及相应的最优干预幅度。现在，我们将精确表述条件 McKean-Vlasov 跳扩散的脉冲控制问题。

假设在没有任何干预的情况下，$[0,\infty)\times L^2(P)\times\mathbb{M}$ 值过程$Y(t)=(s+t,X(t)\ \mu_t)$ 是由 (3.1) 给出的条件 McKean–Vlasov 跳扩散。

假设在任意时刻 t、任意状态 $y=(s,X,\mu)$ 下，我们都可以自由地进行干预，并对状态 X 施加冲击 $\zeta\in\mathcal{Z}\subset\mathbb{R}^d$，其中 $\mathcal{Z}$ 是给定集合（可容许冲击值集合）。假设对状态 X 施加冲击 ζ 的结果是，状态立即从 X 跳变为 $\Gamma(X,\zeta)$，其中 $\Gamma(X,\zeta):\ L^2(P)\times\mathcal{Z}\to L^2(P)$ 是给定函数。在许多应用中，过程会因简单平移而发生变化，即 $\Gamma(y,\zeta)=y+\zeta$。

同时，条件分布从 $\mu_t=\mathcal{L}(X|\mathcal{F}_t^{(1)})$ 跳变为

$$\mu_t^{\Gamma(X,\zeta)}:=\mathcal{L}(\Gamma(X,\zeta)|\mathcal{F}_t^{(1)}). \tag{3.2}$$

该系统的脉冲控制是一对（可能有限的）序列

$$v=(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_j,\ldots;\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_j,\ldots)_{j\le M},\quad M\le\infty,$$

其中 $0\le\tau_1\le\tau_2\le\cdots$ 是 $\mathcal{F}_t$-停时（干预时刻），而 ζ_1、ζ_2 等则是这些时刻对应的冲击。从数学上说，我们假设 τ_j 是相对于适当滤过 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$ 的停时，且 $\tau_{j+1}\ge\tau_j$，并且对所有 j，ζ_j 都是 $\mathcal{F}_{\tau_j}$-可测的。我们用 $\mathcal{V}$ 表示所有脉冲控制构成的集合。

若 $v=(\tau_1,\tau_2,\ldots;\zeta_1,\zeta_2,\ldots)\in\mathcal{V}$，则相应的状态过程 $Y_{(v)}(t)$ 定义为

$$Y^{(v)}(0^-)=y\quad\text{and}\quad Y^{(v)}(t)=Y(t);\quad 0<t\le\tau_1, \tag{3.3}$$

$$Y^{(v)}(\tau_j)=\Big(\tau_j,\Gamma[\check{X}^{(v)}(\tau_j^-),\zeta_j],\mathcal{L}(\Gamma[\check{X}^{(v)}(\tau_j^-),\zeta_j]|\mathcal{F}_t^1)\Big),\quad j=1,2,\ldots \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y^{(v)}(t)&=F(Y^{(v)}(t))\mathrm{d}t+G(Y^{(v)}(t))\mathrm{d}B(t)\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^k}H(Y^{(v)}(t^-),z)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)\quad\text{for }\tau_j<t<\tau_{j+1}\wedge\tau^*,\end{aligned} \tag{3.5}$$

这里我们使用记号

$$\check{X}^{(v)}(\tau_j^-)=X^{(v)}(\tau_j^-)+\Delta_N X(\tau_j),$$

$\Delta_N X^{(v)}(t)$ 表示由随机测度 $N(t,\cdot)$ 的跳跃引起的 $X^{(v)}$ 的跳跃。请注意，我们区分由随机测度 N 引起的 $X^{(v)}(\tau_j)$ 的（可能发生的）跳跃（记为 $\Delta_N X^{(v)}(\tau_j)$），以及由干预 v 引起的跳跃，后者表示为

$$\Delta_v X^{(v)}(\tau_j):=\Gamma(\check{X}^{(v)}(\tau_j^-),\zeta)-\check{X}^{(v)}(\tau_j^-).$$

因此，在时刻 $t=\tau_j$，$X^{(v)}(t)$ 从 $\check{X}^{(v)}(\tau_j^-)$ 跳至 $\Gamma[\check{X}^{(v)}(\tau_j^-)\ \zeta_j]$，而 $\mu_{\tau_j^-}$ 跳至

$$\mu_{\tau_j}=\mathcal{L}(\Gamma[\check{X}^{(v)}(\tau_j^-),\zeta_j]|\mathcal{F}_{\tau_j}^1).$$

考虑一个固定的开集（称为偿付能力区域） $\mathcal{S} \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$。它表示博弈进行的区域，因为受控过程一旦离开$\mathcal{S}$，博弈就会结束。例如，在投资组合优化问题中，破产时博弈便会结束，这可以通过将 $\mathcal{S}$ 设为资本高于某个阈值的状态集合来建模。定义

$$\tau_{\mathcal{S}} = \inf\{t \in (0,\infty); Y^{(v)}(t) \notin \mathcal{S}\},$$

and

$$\mathcal{T} = \{\tau \text{ ; stopping time}, 0 \le \tau \le \tau_{\mathcal{S}}\}.$$

设给定连续利润函数 $f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ 以及连续遗赠函数 $g : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$。此外，设当状态为 y 时，采用冲击 $\zeta \in \mathcal{Z}$ 进行干预所产生的利润/效用为 $K(y,\zeta)$，其中 $K\colon \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ 是给定的连续函数。

假设给定一组容许脉冲控制 $\mathcal{V}$，它包含于集合 $v = (\tau_1, \tau_2, \ldots; \zeta_1, \zeta_2, \ldots)$ 中，使得对所有 $v \in \mathcal{V}$，方程 (3.3)–(3.5) 都存在唯一解 $Y_{(v)}$，并且满足以下附加性质，从而保证下文的绩效泛函定义良好：

$$E^y\Big[\int_0^{\tau_{\mathcal{S}}} f^-(Y^{(v)}(s))ds\Big] < \infty, \quad \text{for all } y \in \mathcal{S}, v \in \mathcal{V},$$

$$E^y\left[g^-(Y^{(v)}(\tau_{\mathcal{S}}))_{\mathbb{I}[\tau_{\mathcal{S}}<\infty]}\right] < \infty, \quad \text{for all } y \in \mathcal{S}, v \in \mathcal{V},$$

and

$$E^y\left[\sum_{\tau_j \le \tau_{\mathcal{S}}} K^-(\check{Y}^{(v)}(\tau_j^-), \zeta_j)\right] < \infty, \quad \text{for all } y \in \mathcal{S}, v \in \mathcal{V},$$

其中 E^y 表示在给定 $Y(0) = y$ 的条件下的期望。
现在我们定义性能准则，它由三部分组成： $[0, \tau_{\mathcal{S}}]$中的连续时间持续利润、游戏结束时的终端遗赠价值，以及离散时间干预利润，即

$$J^{(v)}(y) = E^y\left[\int_0^{\tau_{\mathcal{S}}} f(Y^{(v)}(t))\mathrm{d}t + g(Y^{(v)}(\tau_{\mathcal{S}}))_{\mathbb{I}[\tau_{\mathcal{S}}<\infty]} + \sum_{\tau_j \le \tau_{\mathcal{S}}} K(\check{Y}^{(v)}(\tau_j^-), \zeta_j)\right].$$

我们考虑以下脉冲控制问题：

问题 3.2 求 $\Phi(y)$ 和 $v^* \in \mathcal{V}$，使得

$$\Phi(y) = \sup\{J^{(v)}(y); v \in \mathcal{V}\} = J^{(v^*)}(y), \quad y \in \mathcal{S}.$$

T函数 $\Phi(y)$ 称为价值函数，而 v^* 称为最优控制 *l.*

以下概念对于解决这个问题至关重要。

定义 3.3 令 $\mathcal{H}$ 为所有可测函数 $h: \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ 组成的空间。干预算子 $\mathcal{M}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 定义为

$$\mathcal{M}h(s,X,\mu) = \sup_{\zeta\in\mathcal{Z}}\{h(s,\Gamma(X,\zeta),\mu^{\Gamma(X,\zeta)}) + K(y,\zeta), \zeta \in \mathcal{Z} \text{ and } (s,\Gamma(X,\zeta),\mu^{\Gamma(X,\zeta)}) \in \mathcal{S}\}, \tag{3.6}$$

其中， $\mu^{\Gamma(X,\zeta)}$ 由 (3.2) 给出。

令 $\mathcal{C}^{(1,2,2)}(\mathcal{S})$ 表示函数族 $\varphi(s,x,\mu): \mathcal{S} \to \mathbb{R}$，其中这些函数关于 s 连续可微，且关于 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $\mu \in \mathbb{M}$ 二次连续 Fr´echet 可微。我们令 $\nabla_\mu\varphi \in L(\mathbb{M},\mathbb{R})$（ $\mathbb{M}$ 上有界线性泛函的集合）表示 φ 关于 $\mu \in \mathbb{M}$ 的 Fr´echet 导数（梯度）。类似地， $D^2_\mu\varphi$ 表示 φ 关于 μ 的二阶导数，且属于 $L(\mathbb{M}\times\mathbb{M},\mathbb{R})$（更多细节参见附录）。

马尔可夫跳扩散过程 $Y(t)$ 的无穷小生成元 $\mathcal{G}$ 定义在函数 $\varphi \in \mathcal{C}^{(1,2,2)}(\mathcal{S})$ 上，定义如下

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial s} + \sum_{j=1}^{d}\alpha_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \langle\nabla_\mu\varphi, A_0^*\mu\rangle + \tfrac{1}{2}\sum_{j,n=1}^{d}(\beta\beta^T)_{j,n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_n} \\
&+ \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\beta_{j,1}\frac{\partial}{\partial x_j}\langle\nabla_\mu\varphi, A_1^*\mu\rangle + \tfrac{1}{2}\langle A_1^*\mu, \langle D^2_\mu\varphi, A_1^*\mu\rangle\rangle \\
&+ \sum_{\ell=1}^{k}\int_{\mathbb{R}}\{\varphi(s,X+\gamma^{(\ell)},\mu)) - \varphi(s,X,\mu) - \sum_{j=1}^{d}\gamma_j^{(\ell)}\tfrac{\partial}{\partial x_j}\varphi(s,X,\mu)\}\nu_\ell(d\zeta),
\end{aligned}$$

其中，与前文一样， A_0^* 是积分微分算子

$$\begin{aligned}
A_0^*\mu = &-\sum_{j=1}^{d}D_j[\alpha_j\mu] + \frac{1}{2}\sum_{n,j=1}^{d}D_{n,j}[(\beta\beta^{(T)})_{n,j}\mu] \\
&+\sum_{\ell=1}^{k}\int_{\mathbb{R}}\left\{\mu^{(\gamma^{(\ell)})} - \mu + \sum_{j=1}^{d}D_j[\gamma_j^{(\ell)}(s,\cdot,\zeta)\mu]\right\}\nu_\ell(d\zeta),
\end{aligned}$$

and

$$A_1^*\mu = -\sum_{j=1}^{d}D_j[\beta_{1,j}\mu].$$

现在我们可以给出条件 McKean-Vlasov 脉冲控制问题的验证定理，提供充分条件，以判定给定函数是价值函数，并

判定给定的脉冲控制是最优的。该验证定理将脉冲控制问题与一个恰当的拟变分不等式系统联系起来。
由于过程 $Y(t)$ 具有马尔可夫性，我们可以在适当修改后，采用 [12] 中第9章的方法。

为简化记号，以下我们将写作

$$\overline{\Gamma}(y,\zeta) = (s, \Gamma(x,\zeta), \mu^{\Gamma(x,\zeta)}), \text{ when } y = (s,x,\mu) \in [0,\infty) \times L^2(P) \times \mathbb{M}.$$

定理 3.4 条件麦基恩-弗拉索夫脉冲控制的变分不等式

(a) 假设我们可以找到 $\phi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ 使得

(i) $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}) \cap \mathcal{C}(\bar{\mathcal{S}})$。(ii) $\phi \geq \mathcal{M}\phi$ 在 $\mathcal{S}$ 上。定义

$$D = \{y \in \mathcal{S}; \phi(y) > \mathcal{M}\phi(y)\} \quad \textit{(the continuation region).}$$

(iii) 假设 $E^y\left[\int_0^{\tau_{\mathcal{S}}} Y^{(v)}(t)\mathbb{I}^{\partial D}\mathrm{d}t\right] = 0$ 对所有 $y \in \mathcal{S}$, $v \in \mathcal{V}$成立。

(iv) ∂D 是利普希茨曲面。(v) $\phi \in \mathcal{C}^{(1,2,2)}(\mathcal{S} \setminus \partial D)$在 ∂D附近具有局部有界导数。(vi) $\mathcal{G}\phi + f \leq 0$ 在 $\mathcal{S} \setminus \partial D$上。(vii) $\phi(y) = g(y)$对所有 $y \notin \mathcal{S}$成立。

(viii) $\{\phi^-(Y_{(v)}(\tau)); \text{对所有 } y \in \mathcal{S}, v \in \mathcal{V}, \tau \in \mathcal{T}\}$ 一致可积。

(ix) $E^y\left[|\phi(Y^{(v)}(\tau))| + \int_0^{\tau_{\mathcal{S}}} |\mathcal{G}\phi(Y^{(v)}(t))|\mathrm{d}t\right] < \infty$ *for all* $\tau \in \mathcal{T}, v \in \mathcal{V}, y \in \mathcal{S}$.

Then

$$\phi(y) \geq \Phi(y) \quad \textit{for all } y \in \mathcal{S}.$$

(b) 另外，假设

(x) $\mathcal{G}\phi + f = 0$ 属于 D。(xi) $\zeta(y) \in \text{Argmax}\{\phi(\overline{\Gamma}(y,\cdot)) + K(y,\cdot)\} \in \mathcal{Z}$对所有 $y \in \mathcal{S}$均存在，且 $\zeta(\cdot)$ 是一个博雷尔可测选择。

Put $\hat{\tau}_0 = 0$ *and define* $\hat{v} = (\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \ldots; \hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \ldots)$ *inductively by*
$\hat{\tau}_{j+1} = \inf\{t > \hat{\tau}_j; Y^{(\hat{v}_j)}(t) \notin D\} \wedge \tau_{\mathcal{S}}$ *and* $\hat{\zeta}_{j+1} = \hat{\zeta}(Y^{(\hat{v}_j)}(\hat{\tau}_{j+1}^-))$
if $\hat{\tau}_{j+1} < \tau_{\mathcal{S}}$, *where* $Y^{(\hat{v}_j)}$ *is the result of applying*
$\hat{v}_j := (\hat{\tau}_1, \ldots, \hat{\tau}_j; \hat{\zeta}_1, \ldots, \hat{\zeta}_j)$ *to* Y. *Suppose*

(xii) $\hat{v} \in \mathcal{V}$ *and* $\{\phi(Y^{(\hat{v})}(\tau)); \tau \in \mathcal{T}\}$ *is uniformly integrable.*

Then

$$\phi(y) = \Phi(y) \quad \textit{and} \quad \hat{v} \ \textit{is an optimal impulse control.}$$

注 3.5 我们给出式 (3.6) 中干预算子的直观含义：

$$\mathcal{M}\Phi(y) = \sup_{\zeta \in \mathcal{Z}} \{\Phi(\overline{\Gamma}(y,\zeta)) + K(y,\zeta),\ \zeta \in \mathcal{Z} \ \textit{and}\ \overline{\Gamma}(y,\zeta) \in \mathcal{S}\}, \tag{3.7}$$

假设价值函数 Φ 已知。如果 $y=(s,x,\mu)$ 是过程的当前状态，且主体实施大小为 ζ 的冲击，则产生的价值可表示为 $\Phi(\overline{\Gamma}(y,\zeta))+K(y,\zeta)$，它由新状态 $\overline{\Gamma}(y,\zeta)$ 下的 Φ 的价值与干预成本 K 之和构成。因此，如果主体决定在 y 时进行干预，则 $\mathcal{M}\Phi(y)$ 表示最优新价值。

注意，根据 (ii)，在 $\mathcal{S}$ 上 $\Phi \geq \mathcal{M}\Phi$ ，因此干预并非总是最优的。在时刻 $\hat{\tau}_j$，当受控过程离开延续区域时，操作者应实施冲击 ζ_j ，也就是说，当 $\Phi(Y^{\hat{v}_j}) \leq \mathcal{M}\Phi(Y^{\hat{v}_j})$ 时。

证明。(a) 通过逼近论证（例如，参见 [12]中的定理 3.1）以及 (iii)–(v)，我们可以假设 $\phi \in C^2(\mathcal{S}) \cap C(\bar{\mathcal{S}})$。选取 $v=(\tau_1,\tau_2,\ldots;\zeta_1,\zeta_2,\ldots) \in \mathcal{V}$并令 $\tau_0 = 0$。通过另一个逼近论证，我们可以假设能够对停时 τ_j应用 Dynkin公式。于是，对于 $j = 0,1,2,\ldots$，其中 $Y = Y(v)$

$$E^y[\phi(Y(\tau_j))] - E^y[\phi(\check{Y}(\tau_{j+1}^-))] = -E^y\left[\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathcal{G}\phi(Y(t))\mathrm{d}t\right],$$

其中 $\check{Y}(\tau_{j+1}^-) = Y(\tau_{j+1}^-) + \Delta_N Y(\tau_{j+1})$，与前文相同。将此式从 $j=0$ 加到 $j=m$，得到

$$\begin{aligned}
&\phi(y) + \sum_{j=1}^{m} E^y[\phi(Y(\tau_j)) - \phi(\check{Y}(\tau_j^-))] - E^y[\phi(\check{Y}(\tau_{m+1}^-))] \\
&\quad = -E^y\left[\int_0^{\tau_{m+1}} \mathcal{G}\phi(Y(t))\mathrm{d}t\right] \geq E^y\left[\int_0^{\tau_{m+1}} f(Y(t))\mathrm{d}t\right].
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Now

$$\begin{aligned}
\phi(Y(\tau_j)) &= \phi(\Gamma(\check{Y}(\tau_j^-), \zeta_j)) \\
&\leq \mathcal{M}\phi(\check{Y}(\tau_j^-)) - K(\check{Y}(\tau_j^-), \zeta_j) \quad \text{if } \tau_j < \tau_{\mathcal{S}} \text{ by (3.6)}
\end{aligned}$$

and

$$\phi(Y(\tau_j)) = \phi(\check{Y}(\tau_j^-)) \quad \text{if } \tau_j = \tau_{\mathcal{S}} \text{ by (vii).}$$

因此

$$\mathcal{M}\phi(\check{Y}(\tau_j^-)) - \phi(\check{Y}(\tau_j^-)) \geq \phi(Y(\tau_j)) - \phi(\check{Y}(\tau_j^-)) + K(\check{Y}(\tau_j^-), \zeta_j),$$

and

$$\begin{aligned}\phi(y) + \sum_{j=1}^{m} E^y[\{\mathcal{M}\phi(\check{Y}(\tau_j^-)) - \phi(\check{Y}(\tau_j^-))\}_{\mathbb{I}[\tau_j<\tau_{\mathcal{S}}]}] \\ \geq E^y\left[\int_0^{\tau_{m+1}} f(Y(t))\mathrm{d}t + \phi(\check{Y}(\tau_{m+1}^-)) + \sum_{j=1}^{m} K(\check{Y}(\tau_j^-), \zeta_j)\right].\end{aligned}$$

令 $m \to M$，并利用 $Y(\cdot)$ 的拟左连续性，我们得到

$$\phi(y) \geq E^y\left[\int_0^{\tau_{\mathcal{S}}} f(Y(t))\mathrm{d}t + g(Y(\tau_{\mathcal{S}}))_{\mathbb{I}[\tau_{\mathcal{S}}<\infty]} + \sum_{j=1}^{M} K(\check{Y}(\tau_j^-), \zeta_j)\right] = J^{(v)}(y). \tag{3.9}$$

因此 $\phi(y) \geq \Phi(y)$。

^ ^ (b) 接下来，假设 (x)–(xii) 也成立。将上述论证应用于 ^v = (^τ_1, ^τ_2,... ; ζ_1, ζ_2,...)。^ 由 (x) 可得 (3.8) 中等号成立；根据我们对 $\zeta_j = \zeta_j$ 的选择，(3.9) 中等号也成立。因此

$$\phi(y) = J^{(\hat{v})}(y),$$

结合 (a) 即完成证明。

□

4 例：交易成本下的最优股息流

在本节中，我们将显式求解存在交易成本时的最优股息流。为此，对于满足 $\zeta_i \in \mathbb{R}_+$ 的 $v = (\tau_1, \tau_2, \ldots; \zeta_1, \zeta_2, \ldots)$，我们定义$Y_{(v)}(t) = (s + t, X^{(v)}(t)\ \mu_t^{(v)})$ 为

$$\begin{aligned}
&dX(t) = E\left[X(t) \mid \mathcal{F}_t^{(1)}\right]\left(\alpha_0 dt + \sigma_1 dB_1(t) + \sigma_2 dB_2(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_0(\zeta)\widetilde{N}(dt, d\zeta)\right), \qquad (4.1)\\
&\mu_t^{(v)} = \mathcal{L}(X^{(v)}(t)|\mathcal{F}_t^{(1)}); \quad \tau_i < t < \tau_{i+1},\\
&X^{(v)}(\tau_{i+1}) = \check{X}^{(v)}(\tau_{i+1}^-) - (1+\lambda)\zeta_{i+1} - c,\\
&\mu_{\tau_{i+1}}^{(v)} = \mathcal{L}(X^{(v)}(\tau_{i+1})|\mathcal{F}_{\tau_{i+1}}^{(1)}); \quad i = 0, 1, 2, \ldots,\\
&X^{(v)}(0^-) = x > 0; \text{ a.s.},
\end{aligned}$$

wh其中， α_0、 $\sigma_1 \neq 0$、 $\sigma_2 \neq 0$、 $\lambda \geq 0$ 和 $c > 0$ 为常数，且 $-1 \leq \gamma_0(z)$ a.s. ν。
这里， $X(t)$ 表示现金流在时间 t 可用的金额。我们假设它满足式 (4.1) 中的 McKean-Vlasov 方程。注意，在任意时间 τ_i, $i = 0,1,2,\ldots,$ 系统都会从 $\check{}X^{(v)}(\tau_i^-)$ 跳至

$$X^{(v)}(\tau_i) = \Gamma[\check{X}^{(v)}(\tau_i^-), \zeta_i] = \check{X}^{(v)}(\tau_i^-) - (1+\lambda)\zeta_i - c,$$

其中， $c + \lambda\zeta_i$ 表示交易成本，包括固定部分 c 和比例部分 $\lambda\zeta_i$； ζ_i 则是在时间 τ_i 我们决定取出的金额。同时， $^{\mu}{}_{\tau_i^-}$ 跳至

$$\mu_{\tau_i} = \mathcal{L}(\check{X}^{(v)}(\tau_i^-)|\mathcal{F}^1_{\tau_i}).$$

问题 4.1 我们希望找到 Φ 和 $v^* \in \mathcal{V}$，使得

$$\Phi(s,x,\mu) = \sup_v J^{(v)}(s,x,\mu) = J^{(v^*)}(s,x,\mu),$$

其中

$$J^{(v)}(s,x,\mu) = J^{(v)}(y) = E^y\left[\sum_{\tau_k<\tau_{\mathcal{S}}} \mathrm{e}^{-\rho(s+\tau_k)}\zeta_k\right] \qquad (\rho > 0 \ \textit{constant})$$

是截至时间 $\tau_{\mathcal{S}}$ 的预期折现总股息，其中

$$\tau_{\mathcal{S}} = \tau_{\mathcal{S}}(\omega) = \inf\{t > 0; P^y[E^y[X^{(v)}(t)|\mathcal{F}^{(1)}_t] \leq 0] > 0\}$$

是破产时间。

为了将这个问题置于上述背景中，我们定义

$$Y^{(v)}(t) = \begin{bmatrix} s+t \\ X^{(v)}(t) \\ \mu_t^{(v)} \end{bmatrix}, \quad Y^{(v)}(0^-) = \begin{bmatrix} s \\ x \\ \mu \end{bmatrix} = y,$$
$$\Gamma(y,\zeta) = \Gamma(s,x,\mu) = (s, x-c-(1+\lambda)\zeta, \mathcal{L}(x-c-(1+\lambda)\zeta)|\mathcal{F}^{(1)}), \quad x \in L^2(P),$$
$$K(y,\zeta) = \mathrm{e}^{-\rho s}\zeta,$$
$$f \equiv g \equiv 0,$$
$$\mathcal{S} = \{(s,x,\mu) : x > 0 \text{ a.s. }\}.$$

比较 结合我们的定理，我们可以看到，在这种情况下有 $d = 1$、 $m = 2$、 $k = 1$ 以及

$$\alpha_1 = \alpha_0 \langle \mu, q \rangle, \beta_1 = \sigma_1 \langle \mu, q \rangle, \beta_2 = \sigma_2 \langle \mu, q \rangle, \gamma(s,x,\mu,\zeta) = \gamma_0(t,\zeta) \langle \mu, q \rangle,$$

其中我们令 $q(x) = x$，使得 $\langle \mu_t, q \rangle = E\left[X(t) \mid \mathcal{F}_t^{(1)}\right]$。因此，操作者 $\mathcal{G}$ 的形式为

$$\begin{aligned}\mathcal{G}\varphi(s,x,\mu) &= \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \alpha_0 \langle \mu, q \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \langle \nabla_\mu \varphi, A_0^* \mu \rangle \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \langle \mu, q \rangle^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\sigma_1 \langle \mu, q \rangle \frac{\partial}{\partial x} \langle \nabla_\mu \varphi, A_1^* \mu \rangle \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \left\langle A_1^* \mu, \left\langle D_\mu^2 \varphi, A_1^* \mu \right\rangle \right\rangle \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left\{ \varphi(s, x + \gamma_0 \langle \mu, q \rangle, \mu) - \varphi(s,x,\mu) - \gamma_0 \langle \mu, q \rangle \frac{\partial}{\partial x} \varphi(s,x,\mu) \right\} \nu(d\zeta),\end{aligned}$$

其中

$$A_0^* \mu = -D[\alpha_0 \langle \mu, q \rangle \mu] + \tfrac{1}{2} D^2[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \langle \mu, q \rangle^2 \mu],$$

and

$$A_1^* \mu = -D[\sigma_1 \langle \mu, q \rangle \mu].$$

最后两个算子的伴随算子为

$$A_0 \mu = \alpha_0 \langle \mu, q \rangle D\mu + \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \langle \mu, q \rangle^2 D^2 \mu,$$

and

$$A_1 \mu = \sigma_1 \langle \mu, q \rangle D\mu.$$

在这种情况下，干预算子具有如下形式

$$\mathcal{M}h(s,x,\mu) = \sup \left\{ h(s, x - c - (1+\lambda)\zeta, \mu^{x-c-(1+\lambda)\zeta}) + e^{-\rho t}\zeta; \quad 0 \le \zeta \le \frac{x-c}{1+\lambda} \right\}.$$

请注意，关于 ζ 的条件源于冲击必须为正，且 $x - c - (1+\lambda)\zeta$ 必须属于 $\mathcal{S}$ 这一事实。我们区分以下两种情况：

1. $\alpha_0 > \rho$。在这种情况下，假设我们等到某个时刻 t_1，然后取出

$$\zeta_1 = \frac{X(t_1) - c}{1+\lambda}.$$

注意到，对于 $t < t_1$，$E^y|X(t)] = x\exp(\alpha_0 t)$，我们可得相应的性能指标为

$$\begin{aligned}J^{(v_1)}(s,x,\mu) &= E^y\left[\frac{\mathrm{e}^{-\rho(t_1+s)}}{1+\lambda}(X(t_1) - c)\right] \\ &= E^x\left[\frac{1}{1+\lambda}\left(x\mathrm{e}^{-\rho s}\mathrm{e}^{(\alpha_0-\rho)t_1} - c\ \mathrm{e}^{-\rho(s+t_1)}\right)\right] \\ &\to \infty \text{ as } t_1 \to \infty.\end{aligned}$$

因此，在这种情况下，我们得到 $\Phi(s,x,\mu) = +\infty$。
2. $\alpha_0 < \rho$. 我们利用定理 3.4 的结果来求解。
我们猜想延续区域具有如下形式

$$D = \{(s,x,\mu) : 0 < \langle \mu, q\rangle < \bar{x}\}$$

fo某个 $\bar{x} > 0$ （待确定），并且在 D 中，我们尝试取如下形式的价值函数

$$\varphi(s,x,\mu) = e^{-\rho s}\psi(\langle \mu, q\rangle).$$

由此得到
$\mathcal{G}\phi(s,x,\mu) = e^{-\rho s}\mathcal{G}_0\psi(\langle \mu, q\rangle)$，其中

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_0\psi(x,\mu) = &-\rho\psi(\langle \mu, q\rangle) + \langle \nabla_\mu \psi, A_0^*\mu\rangle + \frac{1}{2}\sigma_1 \langle \mu, q\rangle \frac{\partial}{\partial x}\langle \nabla_\mu \psi, A_1^*\mu\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\left\langle A_1^*\mu, \left\langle D_\mu^2\psi, A_1^*\mu\right\rangle\right\rangle \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \left\{\psi(x + \gamma_0 \langle \mu, q\rangle, \mu) - \psi(x,\mu) - \gamma_0 \langle \mu, q\rangle \frac{\partial}{\partial x}\psi(x,\mu)\right\}\nu(d\zeta).\end{aligned}$$

根据 Fr´echet 导数的链式法则（见附录），我们有

$$\nabla_\mu \psi(h) = \psi'(\langle \mu, q\rangle)\langle h, q\rangle \text{ and } D_\mu^2\psi(h,k) = \psi''(\langle \mu, q\rangle)\langle h, q\rangle\langle k, q\rangle.$$

因此，

$$\langle \nabla_\mu \psi, A_0^*\mu\rangle = \psi'(\langle \mu, q\rangle)\langle A_0^*\mu, q\rangle = \psi'(\langle \mu, q\rangle)\langle \mu, A_0 q\rangle = \psi'(\langle \mu, q\rangle)\alpha_0\langle \mu, q\rangle,$$

类似地，

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\langle A_1^*\mu, \langle D_\mu^2\psi, A_1^*\mu\rangle\rangle &= \tfrac{1}{2}\psi''(\langle \mu, q\rangle\langle A_1^*\mu, q\rangle\langle A_1^*\mu, q\rangle = \tfrac{1}{2}\psi''(\langle \mu, q\rangle)\langle \mu, A_1 q\rangle\langle \mu, A_1 q\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\psi''(\langle \mu, q\rangle)\sigma_1^2\langle \mu, q\rangle^2.\end{aligned}$$

此外，由于 ψ 不依赖于 x，我们可知

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{\phi(s, x + \gamma_0 \langle \mu, q\rangle, \mu) - \phi(s,x,\mu) - \gamma_0 \langle \mu, q\rangle \frac{\partial \phi}{\partial x}(s,x,\mu)\right\}\nu(d\zeta) = 0.$$

将其代入 $\mathcal{G}_0\psi$ 的表达式，得到：当 $u = \langle \mu、\ q\rangle$ 时，

$$\mathcal{G}_0\psi(u) = -\rho\psi(u) + \alpha_0 u\psi'(u) + \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 u^2\psi''(u).$$

根据条件 (x)，我们要求对于所有 $u \in (0, \bar{x})$，$\mathcal{G}_0\psi(u) = 0$，该方程的一般解为

$$\psi(u) = C_1 u^{\gamma_1} + C_2 u^{\gamma_2}, \quad u \in (0, \bar{x}),$$

其中 $\gamma_1 > 1$、$\gamma_2 < 0$ 和 C_1、C_2 均为常数。由于我们预期 ϕ 在 0 附近有界，因此猜测 $C_2 = 0$。

我们猜想，最优策略是等待，直到 $u = \langle \mu_t, q \rangle = E^y[X(t)|\mathcal{F}_t^{(1)}]$ 达到或超过某个值 $u = \bar{u} > c$，然后尽可能多地提取，即将 $E^y[X(t)|\mathcal{F}_t^{(1)}]$ 降至 0。考虑到交易成本，这意味着我们应提取

$$\hat{\zeta}(u) = \frac{u-c}{1+\lambda} \text{ for } u \geq \bar{u}.$$

因此我们提出，$\psi(u)$具有如下形式

$$\psi(u) = \begin{cases} C_1 u^{\gamma_1} \text{for } 0 < u < \bar{u} \\ \dfrac{u-c}{1+\lambda} \text{ for } u \geq \bar{u}. \end{cases}$$

$\psi(u)$在 $u = \bar{u}$ 处的连续性和可微性给出以下方程

$$C_1 \bar{u}^{\gamma_1} = \frac{\bar{u}-c}{1+\lambda},$$

and

$$C_1 \gamma_1 \bar{u}^{\gamma_1 - 1} = \frac{1}{1+\lambda}.$$

将这些结果结合起来，我们得到

$$\bar{u} = \frac{\gamma_1 c}{\gamma_1 - 1} \quad \text{and} \quad C_1 = \frac{\bar{u}-c}{1+\lambda} \bar{u}^{-\gamma_1}.$$

取 $\bar{u}$ 和 C_1的这些值后，我们必须验证 ψ 满足定理 3.4 的所有要求。我们检查其中一些:

(ii) $\phi \geq \mathcal{M}\phi$ 在 $\mathcal{S}$上。
在我们的 情形中，我们有 $\Gamma(s, X, \mu) = (s, X - c - (1+\lambda)\zeta, \mu^{X-c-(1+\lambda)\zeta})$，因此得到

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\phi(s, X, \mu) &= \sup_{\zeta} \left\{ \phi(s, X - c - (1+\lambda)\zeta), \mu^{X-c-(1+\lambda)\zeta}) + e^{-\rho s}\zeta;\ 0 \leq \zeta \leq \frac{\bar{u}-c}{1+\lambda} \right\} \\ &= e^{-\rho s} \sup_{\zeta} \left\{ C_1 \langle \mu^{X-c-(1+\lambda)\zeta}, q \rangle^{\gamma_1} + \zeta;\ 0 \leq \zeta \leq \frac{\bar{u}-c}{1+\lambda} \right\} \\ &= e^{-\rho s} \sup_{\zeta} \left\{ C_1 (\langle \mu, q(x) - c - (1+\lambda)\zeta \rangle^{\gamma_1} + \zeta;\ 0 \leq \zeta \leq \frac{\bar{u}-c}{1+\lambda} \right\} \\ &= e^{-\rho s} \sup_{\zeta} \left\{ C_1 (\langle \mu, q \rangle - c - (1+\lambda)\zeta)^{\gamma_1} + \zeta;\ 0 \leq \zeta \leq \frac{\bar{u}-c}{1+\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

若 $u - c - (1+\lambda)\zeta \geq \bar{u}$，则

$$\psi(u - c - (1+\lambda)\zeta) + \zeta = \frac{u-2c}{1+\lambda} < \frac{u-c}{1+\lambda} = \psi(u)$$

且若 $u-c-(1+\lambda)\zeta<\bar{u}$，则

$$h(\zeta):=\psi(u-c-(1+\lambda)\zeta)+\zeta=C_1(u-c-(1+\lambda)\zeta)^{\gamma_1}+\zeta.$$

由于

$$h'\left(\frac{u-c}{1+\lambda}\right)=1 \text{ and } h''(\zeta)>0,$$

我们看到，$h(\zeta);\ 0\le\zeta\le\dfrac{u-c}{1+\lambda}$ 的最大值在 $\zeta=\hat{\zeta}(u)=\dfrac{u-c}{1+\lambda}$ 处取得。因此

$$\mathcal{M}\psi(u)=\max\left(\frac{x-2c}{1+\lambda},\frac{u-c}{1+\lambda}\right)=\frac{u-c}{1+\lambda} \text{ for all } u>c.$$

因此，对于 $u\ge\bar{u}$，$\mathcal{M}\psi(u)=\psi(u)$。
对于 $0<u<\bar{u}$，考虑

$$k(u):=C_1u^{\gamma_1}-\frac{u-c}{1+\lambda}.$$

由于

$$k(\bar{u})=k'(\bar{u})=0 \quad \text{and} \quad k''(u)>0 \text{ for all } u,$$

我们得出

$$k(u)>0 \quad \text{for } 0<u<\bar{u}.$$

因此

$$\psi(u)>\mathcal{M}\psi(u) \quad \text{for } 0<u<\bar{u}.$$

(vi) $A_0\psi(u)\le 0$ 当 $u\in\mathcal{S}\backslash D$，即当 $u>\bar{u}$ 时。对于 $u>\bar{u}$，我们有

$$\begin{aligned}A_0\psi(u)&=-\rho\frac{u-c}{1+\lambda}+\alpha_0u\ \frac{1}{1+\lambda}\\&\quad+\int_{u+\gamma uz<\bar{u}}\left\{C_1(u+\gamma uz)^{\gamma_1}-\frac{u+\gamma uz-c}{1+\lambda}\right\}\nu(\mathrm{d}z)\\&\le(1+\lambda)^{-1}[(\mu-\rho)u+(\rho+\|\nu\|)c].\end{aligned}$$

因此，我们可以看到

$$\begin{aligned} A_0\psi(u) \le 0 \text{ for all } u > \bar{u} \\ &\Leftrightarrow (\alpha_0 - \rho)u + (\rho + \|\nu\|)c \le 0 \text{ for all } u > \bar{u} \\ &\Leftrightarrow (\alpha_0 - \rho)\bar{u} + (\rho + \|\nu\|)c \le 0 \\ &\Leftrightarrow \bar{u} \ge \frac{(\rho + \|\nu\|)c}{\rho - \alpha_0} \\ &\Leftrightarrow \frac{\gamma_1 c}{\gamma_1 - 1} \ge \frac{(\rho + \|\nu\|)c}{\rho - \alpha_0} \\ &\Leftrightarrow \gamma_1 \le \frac{\rho + \|\nu\|}{\alpha_0 + \|\nu\|}. \end{aligned}$$

由于

$$F\left(\frac{\rho}{\mu}\right) \ge -\rho + \alpha_0\frac{\rho}{\alpha_0} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\rho}{\alpha_0}\left(\frac{\rho}{\alpha_0} - 1\right) > 0,$$

且 $F(\gamma_1) = 0$, $\gamma_1 > 1$ ，我们得出 $\gamma_1 < \frac{\rho}{\alpha_0}$ ，因此当 $\|\nu\|$ 足够小时（例如 $\|\nu\| \le K$），(vi) 成立。
因此，我们得到以下结果。

定理 4.2 假设 $\|\nu\| \le K$。那么问题 4.1 的价值函数为

$$\Phi(s, x, \mu) = \begin{cases} e^{-\rho s}C_1 u^{\gamma_1} for\ 0 < u < \bar{u} \\ e^{-\rho s}\dfrac{u - c}{1 + \lambda}\ for\ u \ge \bar{u}. \end{cases}$$

其中 $u = \langle \mu, q \rangle = E[X(t)|\mathcal{F}_t^{(1)}]$，且

$$\bar{u} = \frac{\gamma_1 c}{\gamma_1 - 1} \quad and \quad C_1 = \frac{\bar{u} - c}{1 + \lambda}\bar{u}^{-\gamma_1}.$$

且 $\gamma = \gamma_1 > 1$ 是方程的正解

$$-\rho + \alpha_0\gamma + \tfrac{1}{2}\sigma_1^2\gamma(\gamma - 1) = 0.$$

最优脉冲控制是在 $u = E[X(t)|\mathcal{F}_t^{(1)}] < \bar{u}$ 时什么也不做，并立即取出

$$\hat{\zeta}(u) = \frac{u - c}{1 + \lambda}\ when\ u \ge \bar{u}.$$

这使 $E[X(t)|\mathcal{F}_t^{(1)}]$ 降为 0，系统随之停止。因此，最优冲击至多包含一次干预。

5 附录：二阶 Fr´echet 导数

本节回顾我们所用的关于函数 $f\colon V \mapsto W$ 的 Fr´echet 导数的一些基本事实，其中 V、W 是给定的巴拿赫空间。

定义 5.1 若存在一个有界线性映射 $A\colon V \mapsto W$，使得

$$\lim_{h\to 0} \frac{||f(x+h) - f(x) - A(h)||_W}{||h||_V} = 0.$$

则称 A 在 x 处的 Fr´echet 导数为 f，记作 $Df(x) = A$。

注意，对每个 x，$Df(x) \in L(V, W)$（从 V 到 W 的有界线性函数空间）。

定义 5.2 若存在一个有界双线性映射 $A(h,k)\colon V \times V \mapsto W$，使得

$$\lim_{k\to 0} \frac{||Df(x+k)(h) - Df(x)(h) - A(h,k)||_W}{||h||_V} = 0.$$

例 5.3 • 设 $f : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{R}$ 定义为

$$f(\mu) = \langle \mu, q\rangle^2, \ \textit{where } q(x) = x.$$

Then

$$\begin{aligned} f(\mu+h) - f(\mu) &= \langle \mu+h, q\rangle^2 - \langle \mu, q\rangle^2 \\ &= 2\langle \mu, q\rangle\langle h, q\rangle + \langle h, q\rangle^2, \end{aligned}$$

因此我们看到

$$Df(\mu)(h) = 2\langle \mu, q\rangle\langle h, q\rangle.$$

为求二阶导数，我们考虑

$$\begin{aligned} &Df(\mu+k)(h) - Df(\mu)(h) \\ &= 2\langle \mu+k, q\rangle\langle h, q\rangle - 2\langle \mu, q\rangle\langle h, q\rangle \\ &= 2\langle k, q\rangle\langle h, q\rangle, \end{aligned}$$

由此我们得出

$$D^2 f(\mu)(h,k) = 2\langle k, q\rangle\langle h, q\rangle.$$

• 接下来假设 $g\colon \mathbb{M} \mapsto \mathbb{R}$ 由 $g(\mu) = \langle \mu, q\rangle$ 给出。然后，按照上述步骤，我们得到

$$\begin{aligned} Dg(\mu)(h) &= \langle h, q\rangle \ \textit{(independent of } \mu) \\ &\textit{and} \\ D^2 g(\mu) &= 0. \end{aligned}$$

参考文献

[1] Agram, N., & Øksendal, B. (2021). 条件 McKean-Vlasov 跳扩散的随机福克-普朗克偏积分微分方程及其在最优控制中的应用。arXiv 预印本 arXiv:2110.02193v3。[2] Basei, M. (2019). 零售能源市场中的最优价格管理：一个带渐近估计的脉冲控制问题。《运筹研究方法》，89(3), 355-383。[3] Basei, M., Cao, H., & Guo, X. (2022). 带脉冲控制的非零和随机博弈与平均场博弈。《运筹学数学》，47(1), 341-366。[4] Bensoussan, A. (1984). 脉冲控制与拟变分不等式。[5] Bertucci, C. (2020). 跳跃粒子的福克-普朗克方程与脉冲控制平均场博弈。《亨利·庞加莱研究所年刊 C》，37(5), 1211-1244。[6] Cadenillas, A., Choulli, T., Taksar, M., & Zhang, L. (2006). 保险公司股息与风险策略优化的经典随机控制与脉冲随机控制。《数理金融：数学、统计学与金融经济学国际期刊》，16(1), 181-202。芝加哥[7] Christensen, S., Neumann, B. A., & Sohr, T. (2021). 竞争与合作：一类可解的平均场脉冲控制问题。《工业与应用数学学会控制与优化杂志》，59(5), 3946-3972。[8] Djehiche, B., Hamadene, S., & Hdhiri, I. (2010). 非马尔可夫过程的随机脉冲控制。《应用数学与优化》，61(1), 1-26。[9] Folland, G.B. (1984). 实分析：现代技术及其应用。威利。[10] Korn, R. (1999). 脉冲控制在数理金融中的若干应用。《运筹研究方法》，50(3), 493-518。[11] Li, C., Liu, Z., Wu, J., & Huang, X. (2020). 涉及脉冲控制的跳扩散平均场模型的随机最大值原理及其在金融中的应用。《系统科学与复杂性杂志》，33(1), 26-42。芝加哥[12] Øksendal, B. & Sulem, A. (2019). 《跳扩散的应用随机控制》。第3版。施普林格。