arXiv:2301.01513v2 [hep-th] 3 Feb 2023

HU-EP-23/01

关于分段光滑曲线和威尔逊环的共形不变量的评述

Harald Dorn [1]

物理研究所与 IRIS Adlershof，柏林洪堡大学，Zum Großen Windkanal 6，D-12489柏林，德国

摘要

这篇短文是对我们关于带圆弧边的类多边形轮廓上的威尔逊环的论文 [1, 2] 所作的一些显而易见的数学补充。借助密切球和圆的方法，我们确定了刻画三维空间中一般分段光滑曲线折角（尖点）的共形不变量。

[1] dorn@physik.hu-berlin.de

1 引言

欧几里得 D 维空间中光滑曲线的度量不变量是长度、曲率以及沿曲线变化的（$D-2$）挠率参数。对于带有尖点[2]的分段光滑曲线，此外，每个尖点还由欧拉角刻画，这些角度指定了使尖点两侧的弗雷内-塞雷标架相互重合所需的正交变换。

关于共形不变量，已有大量针对光滑曲线的数学论文。类比于度量不变量——长度 s、曲率 κ 和挠率 τ ——对于三维曲线，可以找到共形长度 ω,[3]和共形曲率 s，以及共形挠率 s，参见例如 [3],

$$d\omega \;=\; \sqrt{\nu}ds, \qquad \nu \;=\; \sqrt{(\kappa')^2+\kappa^2\tau^2}\,, \tag{1}$$

共形曲率 Q

$$Q \;=\; \frac{4(\nu''-\kappa^2\nu)\nu-5(\nu')^2}{8\nu^3}\,, \tag{2}$$

以及共形挠率 T

$$T \;=\; \frac{2(\kappa')^2\tau+\kappa^2\tau^3+\kappa\kappa'\tau'-\kappa\kappa''\tau}{\nu^{\frac{5}{2}}}\,. \tag{3}$$

在物理学文献中，人们已利用这些不变量，通过波尔迈耶约化来刻画反德西特空间中极小曲面的边界条件 [4]。

然而，关于如何将其推广到分段光滑曲线，我们没有在数学文献中找到相关论文。因此，我们决定整理一下，将针对光滑情形所采用的各种方法之一直接应用于此时会得到什么：密切球运动学，参见例如 [5–8]及其中的参考文献。

本文安排如下。下一节中，我们将找出公式，用曲线的度量不变量表示由一般光滑曲线段构成的尖点的共形不变量。随后在第 3 节中，我们将讨论我们论文 [1,2], 中研究的非常特殊的曲线，即带有圆弧边的类多边形曲线。这些曲线需要单独讨论，因为沿着圆弧边，所有共形不变量 (1)、(2)、(3) 都为零或未定义。

2 一般尖点的共形不变量

在三维空间中，光滑曲线在一般点 x 处的密切圆（球面）是与曲线在 x处有二阶（三阶）接触的圆（球面）。由于接触阶数在共形变换下保持不变，曲线上给定点处的密切圆（球面）会映射为其像曲线上的对应密切圆（球面），该映射由

[2]我们沿用威尔逊环文献中的说法，将具有非零张角的折角称为尖点。[3]撇号表示对 s 的导数。

一个保角映射给出。设 $\vec{t}$、$\vec{n}$、$\vec{b}$ 分别表示 x处的单位切向量、法向量和副法向量。那么密切圆 S^1 的圆心 a由下式给出:

$$a \;=\; x \;+\; \frac{1}{\kappa}\,\vec{n} \tag{4}$$

以及密切球 S^2 的中心 c 由

$$c \;=\; x \;+\; \frac{1}{\kappa}\,\vec{n} \;-\; \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\,\vec{b}\,. \tag{5}$$

现在我们转向 x 为不连续点的情形，也就是说，它是尖点的顶端。此时，尖点由两个密切圆 S^1_-、S^1_+ 和两个密切球 S^2_-、S^2_+来刻画。下标“$\pm$”表示分别沿尖点两侧趋近 x时得到的极限。

我们先来计算尖点可能具有的共形不变量数量。这里有 9 个度量不变量： $\kappa_\pm$、$\kappa'_\pm$、 $\tau_\pm$ ， 以及从弗雷内标架 $\{\vec{t}_-,\vec{n}_-,\vec{b}_-\}$ 到 $\{\vec{t}_+,\vec{n}_+,\vec{b}_+\}$的旋转所对应的 3 个欧拉角。三维共形群与等距变换群的参数数量之差为 4。因此，预期会有 $9-4=5$ 个共形参数。当然，其中两个是共形长度微分（1）在相应方向上的极限。因此，真正归属于尖点的共形参数还剩 3 个。

为了求得它们的显式公式，我们从同维或不同维球对（S^m, S^n）的共形不变量入手。参考文献 [9] 对任意维数情形作了严谨的数学处理。应用到我们的情形，这意味着每一对（S^1_-, S^1_+）、（S^1_-, S^2_+）、（S^2_-, S^1_+）、（S^2_-, S^2_+）都恰好对应一个共形参数。接下来，我们先研究这四个不变量，之后将证明它们中只有三个彼此独立。

（S^1_-, S^1_+）密切圆的切线与曲线的切线重合。因此，相关的共形不变量为

$$A_{11} \;=\; \vec{t}_-\vec{t}_+ \;=\; -\cos\,\alpha\,. \tag{6}$$

这里， α 是尖点角（理解为张角，即光滑情形下的 $\alpha=\pi$ ）。

（S^2_-, S^2_+）此时，共形不变量由所谓的反演积给出，参见例如 [5, 9]

$$A_{22} \;=\; \frac{R_-^2+R_+^2-(c_--c_+)^2}{2R_-R_+} \;=\; \frac{(c_--x)(c_+-x)}{R_-R_+}\,. \tag{7}$$

R_- 和 R_+ 分别是 S^2_- 和 S^2_+的半径。显然， A_{22} 是从 x 指向两个密切球球心的向量之间夹角的余弦。严格来说，只有它的绝对值是不变量，因为当无穷远点的原像位于其中一个球内部而不在另一个球内部时， A_{22} 会在这些特殊保角变换下改变符号。下文的 A_{12} 和 A_{21} 也适用同样的说明。

(S^2_-, S^1_+) 和 (S^1_-, S^2_+) 对于球体和一条相交的圆，其共形不变量

是从 x 指向球心的单位向量与该圆的单位切向量的标量积

$$A_{12} \;=\; \frac{\vec{t}_-(c_+ - x)}{R_+}, \quad A_{21} \;=\; \frac{(c_- - x)\;\vec{t}_+}{R_-}\;. \tag{8}$$

对尖点的两侧均应用 (4)、(5)，由 (7) 和 (8) 得到

$$A_{22} \;=\; \frac{\kappa_-\tau_-\kappa_+\tau_+\;\vec{n}_-\vec{n}_+ + \kappa'_-\kappa'_+\;\vec{b}_-\vec{b}_+ - \kappa_-\tau_-\kappa'_+\;\vec{n}_-\vec{b}_+ - \kappa_+\tau_+\kappa'_-\;\vec{b}_-\vec{n}_+}{\sqrt{\kappa_-^2\tau_-^2+\kappa_-'^2}\;\sqrt{\kappa_+^2\tau_+^2+\kappa_+'^2}}\;, \tag{9}$$

$$A_{12} \;=\; \frac{\kappa_+\tau_+\;\vec{t}_-\vec{n}_+ - \kappa'_+\;\vec{t}_-\vec{b}_+}{\sqrt{\kappa_+^2\tau_+^2+\kappa_+'^2}}\;, \tag{10}$$

$$A_{21} \;=\; \frac{\kappa_-\tau_-\;\vec{t}_+\vec{n}_- - \kappa'_-\;\vec{t}_+\vec{b}_-}{\sqrt{\kappa_-^2\tau_-^2+\kappa_-'^2}}\;. \tag{11}$$

上述公式中的所有标量积都可以用三个欧拉角 φ、ϑ、ψ 表示，这三个角用于将弗雷内标架 $\{n_-, b_-, t_-\}$ 旋转至 $\{n_+, b_+, t_+\}$，即

$$\vec{t}_-\vec{t}_+ = \cos\vartheta, \quad \vec{t}_-\vec{b}_+ = \cos\varphi\sin\vartheta, \quad \vec{b}_-\vec{t}_+ = -\cos\psi\sin\vartheta\;. \tag{12}$$

于是得到

$$A_{11} \;=\; \vec{t}_-\vec{t}_+ \;=\; \cos\vartheta\;, \qquad \text{i.e. } \vartheta = \pi - \alpha\;, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} A_{22} \;=\; & \frac{1}{\sqrt{\kappa_-^2\tau_-^2+\kappa_-'^2}\;\sqrt{\kappa_+^2\tau_+^2+\kappa_+'^2}}\Big(\kappa_-\tau_-\kappa_+\tau_+\;(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \\ & + \kappa'_-\kappa'_+(\cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\psi) + \kappa_-\tau_-\kappa'_+\;(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \\ & - \kappa_+\tau_+\kappa'_-\;(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta)\Big)\;, \end{aligned} \tag{14}$$

$$A_{12} \;=\; \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\kappa_+^2\tau_+^2+\kappa_+'^2}}\;\big(\kappa_+\tau_+\;\sin\varphi - \kappa'_+\;\cos\varphi\big)\;, \tag{15}$$

$$A_{21} \;=\; \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\kappa_-^2\tau_-^2+\kappa_-'^2}}\;\big(\kappa_-\tau_-\;\sin\psi + \kappa'_-\;\cos\psi\big)\;. \tag{16}$$

A_{22} 中含有因子 $\cos\vartheta$ 的部分显然与 A_{12} 和 A_{21}的乘积有关。更仔细地考察可得，整个 A_{22}为

$$A_{22}(\varphi,\vartheta,\psi) \;=\; \frac{1}{\sin^2\vartheta}\Big(A_{12}(\varphi+\frac{\pi}{2})\;A_{21}(\psi+\frac{\pi}{2}) - \cos\vartheta\;A_{12}(\varphi)A_{21}(\psi)\Big)\;. \tag{17}$$

现在 A_{12} 以及对于平移了 $\frac{\pi}{2}$ 的 A_{21} 并非彼此独立，而是存在如下关系

$$\big(A_{12}(\varphi)\big)^2 + \big(A_{12}(\varphi+\frac{\pi}{2})\big)^2 \;=\; \big(A_{21}(\psi)\big)^2 + \big(A_{21}(\psi+\frac{\pi}{2})\big)^2 \;=\; \sin^2\vartheta\;. \tag{18}$$

这意味着，归属于该尖点的一组完备独立共形不变量由三个参数 [4] 给出

$$\boxed{\alpha\ ,\quad B_{12}=\frac{\kappa_+\tau_+\ \sin\varphi-\kappa'_+\ \cos\varphi}{\sqrt{\kappa_+^2\tau_+^2+\kappa_+'^2}}\ ,\quad B_{21}=\frac{\kappa_-\tau_-\ \sin\psi+\kappa'_-\ \cos\psi}{\sqrt{\kappa_-^2\tau_-^2+\kappa_-'^2}}\ .} \tag{19}$$

让我们补充一个警告。若将 $\varphi=\psi=0$ 强行代入 B_{12} 和 B_{21}，可能会得出错误结论，认为 $\frac{\kappa'}{\sqrt{\kappa^2\tau^2+\kappa'^2}}$ 是光滑曲线的不变量。但由于令 φ 或 ψ 为零并非共形不变量意义上的陈述，因此不能得出这一结论，而且很容易证明它是错误的。

求不变量 B_{12} 和 B_{21}还有另一种方法。通过共形变换，每条光滑曲线都可以映射为相对于曲线上某个选定点的标准形。随后，该点的像位于某个笛卡尔坐标系的原点处，而曲线可写成 [3, 4, 7]

$$\begin{aligned} x_1(u) &= u\ , \\ x_2(u) &= \frac{u^3}{3!}\ +\ (2Q-T^2)\,\frac{u^5}{5!}\ +\ \mathcal{O}(u^6)\ , \\ x_3(u) &= T\,\frac{u^4}{4!}\ +\ \frac{1}{\sqrt{\nu}}\,\frac{dT}{ds}\,\frac{u^5}{5!}\ +\ \mathcal{O}(u^6)\ , \end{aligned} \tag{20}$$

其中 Q 和 T 分别是所考虑点处的共形曲率和挠率。 x(0)处相关的度量不变量为

$$\kappa^{(N)}\ =\ 0\ ,\quad \kappa'^{(N)}\ =\ 1\ ,\quad \tau^{(N)}\ =\ \frac{T}{2}\ . \tag{21}$$

现在，若仅相对于尖点顶端，带有尖点的曲线的标准形是什么？有两种。第一种是将尖点之前的部分映射为形式 (20)，并以 Q_-, T_-替换 Q, T 而得到。第二种标准形则是将尖点之后的部分映射为形式 (20)，并使用 Q_+, T_+得到。当然，在这两种情况下，尖点的另一支都不具有形式 (20)。现在，分别在第一种标准形中计算 B_{21}，并在第二种标准形中计算 B_{12}；对 $\pm$ 版本使用 (21)，得到

$$\begin{aligned} B_{21} &= \cos\psi^{(N1)}\ , \\ B_{12} &= -\cos\varphi^{(N2)}\ . \end{aligned} \tag{22}$$

$\psi^{(N1)}$ 一个 d $\varphi^{(N2)}$ 分别是第一和第二标准形中的欧拉角 .

我们继续随意谈谈四维空间中的共形不变量。要确定光滑点处从 S^1 到 S^3 的所有密切球，需要κ、 κ'、 κ''、 τ_1、 τ_1'、 τ_2。对于尖点两侧的极限情况，再加上四维空间中旋转弗雷内标架所需的 6 个欧拉角，共有 18 个度量参数。共形变换群与等距变换群的参数个数之差为

[4]请记住 φ, ϑ, ψ 欧拉角， $\alpha=\pi-\vartheta$ 尖点的张角。

现在为 5，因此我们暂且得到 13 个共形参数。现在，尖点两侧的共形长度的微分和第一共形挠率的极限[5] 都与尖点无关。因此我们可以认为，有 $13-4=9$ 个共形参数确实应归属于尖点。

另一方面，在九对密切球（S^i_-, S^j_+） $i,j=1$（2、3）中，(S^2_-, S^2_+)、(S^2_-, S^1_+)、(S^1_-, S^2_+)这几对具有两个不变量，其余各对都只有一个 [9]。由此得到 12 个共形参数。我们仍将以下问题留待探讨：是否确实存在三维类型的关系式 (17)、(18)，从而达到上一段中所见的最小数量——9 个独立参数。

本节最后，我们谈谈威尔逊环的尖点反常维数。人们普遍认为它只依赖于尖点角 α，因此相关计算一直采用直边。虽然在场论微扰论中，可以通过对相应费曼积分进行幂次计数来证明这一点，但对于强耦合下的一般情形，目前仍缺乏严格证明。我们已在 [10] 中针对边通常为曲线的平面情形给出了证明。对于三维中的一般情形，仍缺乏证明其独立于 B_{12} 和 B_{21}。

3 关于带圆弧边的类多边形曲线上的威尔逊环的评论

相关威尔逊环已在我们的论文 $[1,2]$, 中研究过的带圆弧边的类多边形曲线，并不属于上一节所述一般曲线的范畴。沿着这些边，曲率恒定 κ且挠率为零 τ，因此共形长度为零 (1)，而共形曲率和挠率未定义。从数学角度来说，这些边是共形顶点。[6]

尽管这样的单条边不携带共形数据，但将它们组合成多边形则不同[7] 它仍然无法按照共形长度的意义进行延拓，但显然，多边形的每个尖点处都有尖点角；若尖点多于 3 个，则还存在相应的交比。此外，与一般曲线一样，这些多边形也可以蜿蜒出平面，并呈现挠率。在我们的论文 [1] 中，我们通过引入挠角 β_j来参数化这一问题；挠角定义在给定的尖点处 x_j，其定义如下：

$$\beta_j \;=\; \measuredangle(\{x_j, x_{j+1}\}, cc_j)\,, \tag{23}$$

其中，$\{x_j, x_{j+1}\}$表示 x_j与 x_{j+1}之间的圆形边，cc_j表示由三个尖点 x_{j-1}、x_j、x_{j+1}确定的圆。

然而，与一般曲线尖点的 B_{12} 和 B_{21} 不同，这些挠角并非由相应尖点处的局部性质决定。只需在式 (23) 中，沿着包含边 $\{x_j, x_{j+1}\}$ 的圆移动相邻的尖点 x_{j+1}，即可看出这一点。此时，边在 x_j 处的切线保持不变

[5]在三维中，共形挠率（3）无法由确定尖点处所有密切球所需的度量参数构成。但在四维中，密切 S^3 继承了所有信息。[6]例如参见 [3,5,6]。[7]从某种意义上说，可以将其称为具有内部共形子结构的共形顶点。

，但圆 cc_j 及其在 x_j 处的切线会发生变化。通过这一操作， β_j也会改变，尽管 x_j 处尖点的局部情况仍与之前相同。

最后，我们对分段光滑曲线上威尔逊环的一种情形作些说明：它介于第 2 节所讨论的完全一般情形与 [1] 中具有圆弧边的多边形之间。在共形不变规范场论中，例如 $\mathcal{N} = 4$ SYM，会存在一种反常共形 Ward 恒等式，其形式如 [1]，中推导的那样。该恒等式要求威尔逊环具有如下结构：一个取决于尖点尖端之间距离的共形协变因子，乘以一个共形不变余因子。在一般情形下，这个余因子是由尖点和第 2 节中确定的共形尖点参数所构成的交比的函数；此外，它还是沿各边变化的共形不变量的泛函。对于具有圆弧边的多边形，余因子仅是有限个共形参数的函数。

若要使一条曲线由有限个共形参数刻画，同时又具有非零共形长度，可以考虑边由具有恒定共形曲率和挠率的曲线段构成的多边形。这类曲线已在 [11] 中得到分类，其中包括旋转曲面上的斜航线。

致谢
感谢洪堡大学量子场论与弦理论组的热情接待。

参考文献

[1]H. Dorn,《关于类多边形轮廓（带圆弧边）上威尔逊环的反常共形 Ward 恒等式》，JHEP 03 (2020), 166 doi:10.1007/JHEP03(2020)166 [arXiv:2001.03391 [hep-th]].[2] H. Dorn,《带圆弧边的三角形轮廓上的威尔逊环》，J. Phys. A 54 (2021) no.22, 225402 doi:10.1088/1751-8121/abe311 [arXiv:2010.14822 [hep-th]].[3] G. Cairns、R. Sharpe 和 L. Webb，《三维空间形式中曲线与曲面的共形不变量》，Rocky Mountain J. Math. 第 24 卷，第 3 期（1994），933-959。[4] Y. He、C. Huang 和 M. Kruczenski，《 AdS_{n+1}中的极小面积曲面与威尔逊环》，JHEP 02 (2018), 027 doi:10.1007/JHEP02(2018)027[arXiv:1712.06269 [hep-th]].[5]M.C. Romero-Fuster 和 E. Sanabria-Codesal，《 $\mathbb{R}^{n+1}$中曲线的广义渐伸线、顶点与共形不变量》，Indag. Mathem., N.S., 10 (2), 297-305[6] A. Montesinos Amilibia'、M.C. Romero Fuster 和 E. Sanabria -Codesal，《 $\mathbb{R}^{n+1}$中曲线的共形曲率》，lndag. Mathem., N.S., 12 (3) 369-382[7] R. Langevin、J. O'Hara 和 S. Sakata，《子球面空间与曲线的共形不变量》arXiv:1102.0344 [math.DG[8] R. Langevin、J O'Hara、S Sakata，《子球面空间在曲线共形不变量与管状曲面中的应用》，Annales Polonici Mathematici，2013 年 1 月，doi: 10.4064/ap108-2-1[9] R. Sulanke，《莫比乌斯空间¨中球对（S_1^m, S_2^l）的莫比乌斯不变量》，Contributions to Algebra and Geometry, Vol. 41 (2000), No.1, 233-246[10] H. Dorn，《尖点曲线轮廓在强耦合下的威尔逊环》，J. Phys. A 49 (2016) no.14, 145402 doi:10.1088/1751-8113/49/14/145402[arXiv:1509.00222 [hep-th]].[11] R. Sulanke，《莫比乌斯空间的子流形 II：弗雷内公式与常曲率曲线。》Mathematische Nachrichten 100.1 (1981): 235-247。