arXiv:2301.01519v2 [math.RA] 6 Nov 2023

有限集上的二面体逆幺半群的三个子幺半群

I. Dimitrova、Vıtor H. Fernandes、J. Koppitz 和 T.M. Quinteiro。

2023年11月7日

摘要

本文考察二面体逆幺半群 $\mathcal{DI}_n$ 的三个子幺半群，即分别由所有保向、单调和保序变换构成的子幺半群 $\mathcal{OPDI}_n$、 $\mathcal{MDI}_n$ 和 $\mathcal{ODI}_n$ 。对于这三个幺半群中的每一个，我们计算其基数，给出格林关系的描述，并确定其秩。

2020年数学主题分类：20M10、20M20、05C12、05C25。关键词：二面体逆幺半群、变换、方向、单调性、部分等距变换、圈图、秩。

1 引言与预备知识

设 Ω 为一个集合，且 $A \subseteq \Omega$。映射 $\alpha : A \to \Omega$ 称为 Ω 上的部分变换。分别用 $\mathrm{Dom}(\alpha)$ 和 $\mathrm{Im}(\alpha)$ 表示 α 的定义域和值域（像）。自然数 $\mathrm{rank}(\alpha) = |\mathrm{Im}(\alpha)|$称为 α 的秩。显然， $A = \mathrm{Dom}(\alpha)$。若 $A = \Omega$，则 α 称为全变换。若 $A = \emptyset$ ，则 α 称为空变换，记为 $\emptyset$。给定部分变换 α 和 β，复合 $\alpha\beta$ 是由 $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ 定义的部分变换，其中对所有 $x \in \mathrm{Dom}(\alpha\beta) = (\mathrm{Im}(\alpha) \cap \mathrm{Dom}(\beta))\alpha^{-1} = \{x \in \mathrm{Dom}(\alpha) \mid x\alpha \in \mathrm{Dom}(\beta)\}$ 均成立。注意，$\mathrm{Im}(\alpha\beta) = (\mathrm{Im}(\alpha) \cap \mathrm{Dom}(\beta))\beta$。用 $\mathcal{PT}(\Omega)$ 表示 Ω 上所有部分变换在复合运算下构成的幺半群；用 $\mathcal{T}(\Omega)$ 表示 $\mathcal{PT}(\Omega)$ 的子幺半群，它由 Ω 上所有全变换组成；用 $\mathcal{I}(\Omega)$ 表示 Ω 上的对称逆幺半群，即 $\mathcal{PT}(\Omega)$ 的逆子幺半群，它由 Ω 上所有部分置换组成；用 $\mathcal{S}(\Omega)$ 表示 Ω 上的对称群，即 $\mathcal{PT}(\Omega)$ 的子群，它由 Ω 上所有置换组成。回顾一下，若半群 S 对每个 $s \in S$ 都存在唯一的 $s' \in S$，满足 $s = ss's$ 和 $s' = s'ss'$ （s' 称为 s 的逆元），则称 S 为逆半群。若 Ω 是一个含有 n 个元素的有限集（$n \in \mathbb{N}$），比如 $\Omega = \Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}$，按照惯例，我们分别用 $\mathcal{PT}_n$、 $\mathcal{T}_n$、 $\mathcal{I}_n$ 和 $\mathcal{S}_n$ 简记 $\mathcal{PT}(\Omega)$、 $\mathcal{T}(\Omega)$、 $\mathcal{I}(\Omega)$ 和 $\mathcal{S}(\Omega)$。属于 $\mathcal{PT}(\Omega)$ 且满足 $\mathrm{Dom}(\alpha) = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 的元素 α 可写成如下形式

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ a_1\alpha & a_2\alpha & \cdots & a_k\alpha \end{pmatrix}.$$

例 1.1 设 α、 $\beta \in \mathcal{PT}_6$ 是以下部分变换：

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \beta = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

那么，对复合 $\alpha\beta$ 和 $\beta\alpha$，我们得到

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \beta\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

现在，设 $G = (V, E)$ 是一个有限简单连通图。 G中两个顶点 x 和 y 之间的（测地）距离，记作 $\mathrm{d}_G(x, y)$，是 x 和 y 之间一条最短路径的长度，也就是 x 和 y 之间一条最短路径所含的边数。

令 $\alpha \in \mathcal{PT}(V)$。我们称 t hat α 是 G 的部分等距变换，或保距部分变换，当且仅当

$$\mathrm{d}_G(x\alpha, y\alpha) = \mathrm{d}_G(x, y),$$

对所有 $x, y \in \in \mathrm{Dom}(\alpha)$ 均成立。记 $\mathcal{DP}(G)$ 为 $\mathcal{PT}(V)$ 中由 G 的所有部分等距变换构成的子集。显然， $\mathcal{DP}(G)$ 是 $\mathcal{PT}(V)$ 的子幺半群。由性质 $\mathrm{d}_G(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$ 对所有 $x, y \in V$ 均成立，可立即推出 $\mathcal{DP}(G) \subseteq \mathcal{I}(V)$。此外， $\mathcal{DP}(G)$ 是 $\mathcal{I}(V)$ 的逆子幺半群（见 [16]）。

注意，若 $G = (V, E)$ 是完全图，即 $E = \{\{x, y\} \mid x, y \in V, x \neq y\}$，则 $\mathcal{DP}(G) = \mathcal{I}(V)$。

对于 $n \in \mathbb{N}$，考虑具有 n 个顶点的无向路径 P_n，即

$$P_n = (\{1, 2, \ldots, n\}, \{\{i, i+1\} \mid i = 1, 2, \ldots, n-1\}).$$

那么，显然， $\mathcal{DP}(P_n)$ 与幺半群

$$\mathcal{DP}_n = \{\alpha \in \mathcal{I}_n \mid |i\alpha - j\alpha| = |i - j|, \text{for all } i, j \in \mathrm{Dom}(\alpha)\}$$

Ω_n上所有部分等距变换。Al-Kharousi 等人 [1, 2] 开始研究 Ω_n 上的部分等距变换。前述两篇论文中的第一篇致力于研究幺半群 $\mathcal{DP}_n$及其子幺半群 $\mathcal{ODP}_n$ （即所有保序（以 $\mathbb{N}$的通常序为准）部分等距变换）的若干组合性质，尤其是它们的基数。第二篇论文研究了它们的一些代数性质，即格林结构和秩。Fernandes 和 Quinteiro 在 [19] 中给出了幺半群 $\mathcal{DP}_n$ 和 $\mathcal{ODP}_n$ 的表示，而 Dimitrova 在 [5]中刻画了 $\mathcal{ODP}_n$ 的极大子半群。

Fernandes 和 Paulista 在 [16]中研究了星图 S_n 上顶点数为 n （$n \geqslant 1$）的所有部分等距变换构成的幺半群 $\mathcal{DP}(S_n)$。他们确定了 $\mathcal{DP}(S_n)$ 的秩和大小，并描述了其格林关系。 $\mathcal{DP}(S_n)$ 的一个表示也在 [16]中给出。

接下来，对于 $n \geqslant 3$，考虑圈图

$$C_n = (\{1, 2, \ldots, n\}, \{\{i, i+1\} \mid i = 1, 2, \ldots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\})$$

，它有 n 个顶点。请注意，圈图和圈子图在图论中发挥着基础性作用。Fernandes 和 Paulista 在 [17] 中研究了由圈图 C_n 的所有部分等距变换构成的幺半群 $\mathcal{DP}(C_n)$。他们证明了 $\mathcal{DP}(C_n)$ 是由 n 个元素组成的链上的所有定向部分置换构成的幺半群的一个逆子幺半群；此外，它与 $\mathcal{I}_n$ 的逆子幺半群相同，后者由 $\mathcal{S}_n$ 中阶为 $2n$ 的二面体子群的所有限制构成。因此，在 [17] 中， $\mathcal{DP}(C_n)$ 被称为 Ω_n 上的二面体逆幺半群；本文中，我们今后用更恰当的记号 $\mathcal{DI}_n$ 表示 $\mathcal{DP}(C_n)$。还请回顾，在 [17] 中，人们确定了 $\mathcal{DI}_n$ 的基数和秩，并描述了它的格林关系；此外，该文还给出了 $\mathcal{DI}_n$ 的表示。

接下来，假设 Ω_n 是一条链，例如 $\Omega_n = \{1 < 2 < \cdots < n\}$。若对于所有 x、$y \in \in \mathrm{Dom}(\alpha)$， $x \leqslant y$ 蕴含 $x\alpha \leqslant y\alpha$ $[x\alpha \geqslant y\alpha]$，则称部分变换 $\alpha \in \mathcal{PT}_n$ 为保序 [保序反转]。若一个部分变换是保序或保序反转的，则称其为单调变换。显然，两个保序变换或两个保序反转变换的乘积是保序的，而一个保序变换与一个保序反转变换的乘积（无论顺序如何）是保序反转的。我们用 $\mathcal{PO}_n$ 表示 $\mathcal{PT}_n$ 中所有保序变换构成的子幺半群，用 $\mathcal{POD}_n$ 表示$\mathcal{PT}_n$ 中所有单调变换构成的子幺半群。另设 $\mathcal{POI}_n = \mathcal{PO}_n \cap \mathcal{I}_n$ 为 Ω_n 上所有保序部分置换构成的幺半群， $\mathcal{PODI}_n = \mathcal{POD}_n \cap \mathcal{I}_n$ 为 Ω_n 上所有单调部分置换构成的幺半群；它们都是 $\mathcal{PT}_n$ 的逆子幺半群。

设 $s = (a_1, a_2, \ldots, a_t)$ 是由链 Ω_n 中的 $t\,(t \geqslant 0)$ 个元素组成的序列。如果不存在多于一个指标 $i \in \{1, \ldots, t\}$ 使得 $a_i > a_{i+1}$ $[a_i < a_{i+1}]$，其中 a_{t+1} 表示 a_1，则称 s 为循环[反循环]。如果 s 是循环的，或者 s 是反循环的（见 [4, 25, 26]），则也称 s 为定向。给定一个部分变换 $\alpha \in \mathcal{PT}_n$，使得 $\mathrm{Dom}(\alpha) = \{a_1 < \cdots < a_t\}$，且 $t \geqslant 0$，如果其像序列 $(a_1\alpha, \ldots, a_t\alpha)$ 是循环的 [反循环的，则称 α 为保向 [反向、定向]，

定向]。容易证明，两个保向变换或两个反向变换的乘积是保向变换，而保向变换与反向变换的乘积（无论顺序如何）是反向变换。我们用 $\mathcal{POP}_n$ 表示 $\mathcal{PT}_n$ 中所有保向变换构成的子幺半群，用 $\mathcal{POR}_n$ 表示 $\mathcal{PT}_n$ 中所有定向变换构成的子幺半群。此外，考虑 $\mathcal{PT}_n$ 上所有保向部分置换构成的逆子幺半群 $\mathcal{POPI}_n = \mathcal{POP}_n \cap \mathcal{I}_n$，以及所有定向部分置换构成的逆子幺半群 $\mathcal{PORI}_n = \mathcal{POR}_n \cap \mathcal{I}_n$。

注意，根据定义， $n \geq 3$、 $\mathcal{POI}_n \subsetneq \mathcal{PODI}_n \subsetneq \mathcal{PORI}_n$ 和 $\mathcal{POI}_n \subsetneq \mathcal{POPI}_n \subsetneq \mathcal{PORI}_n$, 。

例1.2 考虑 $\mathcal{I}_5$上的以下变换:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

于是，我们有 $\alpha_1 \in \mathcal{POI}_5$、 $\alpha_2 \in \mathcal{PODI}_5 \setminus \mathcal{POI}_5$、 $\alpha_3 \in \mathcal{POPI}_5 \setminus \mathcal{POI}_5$ 和 $\alpha_4 \in \mathcal{PORI}_5 \setminus \mathcal{POPI}_5$。

现在，考虑Ω_n 上的以下置换，它们的阶分别为 n 和2:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

显然， g、 $h \in \mathcal{DI}_n$。此外，对于 $n \geqslant 3$， g 与 h 生成了众所周知的、阶为 $2n$ 的二面体群$\mathcal{D}_{2n}$ （将其视为 $\mathcal{S}_n$ 的子群）。事实上，对于 $n \geqslant 3$,

$$\mathcal{D}_{2n} = \langle g, h \mid g^n = 1, h^2 = 1, hg = g^{n-1}h \rangle = \{\mathrm{id}, g, g^2, \ldots, g^{n-1}, h, hg, hg^2, \ldots, hg^{n-1}\},$$

其中，id表示Ω_n上的恒等变换，并且我们有

$$g^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-k & n-k+1 & \cdots & n \\ 1+k & 2+k & \cdots & n & 1 & \cdots & k \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.} \quad ig^k = \begin{cases} i+k & \text{if } 1 \leqslant i \leqslant n-k \\ i+k-n & \text{if } n-k+1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

and

$$hg^k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ k & \cdots & 1 & n & \cdots & k+1 \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.} \quad ihg^k = \begin{cases} k-i+1 & \text{if } 1 \leqslant i \leqslant k \\ n+k-i+1 & \text{if } k+1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

对于 $0 \leqslant k \leqslant n-1$。另记由 g生成的 n 阶循环群为 $\mathcal{C}_n$，即

$$\mathcal{C}_n = \langle g \mid g^n = 1 \rangle = \{\mathrm{id}, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}.$$

在本文余下部分，我们将考虑 $n \geqslant 3$。

对于 C_n 的任意两个顶点 x 和 y，现在将距离 $\mathrm{d}_{C_n}(x, y)$ 简记为 $\mathrm{d}(x, y)$。注意，我们有

$$\mathrm{d}(x, y) = \min\{|x-y|, n-|x-y|\} = \begin{cases} |x-y| & \text{if } |x-y| \leqslant \frac{n}{2} \\ n-|x-y| & \text{if } |x-y| > \frac{n}{2} \end{cases}$$

因此，对于所有 x、 $y \in \{1, 2, \ldots, n\}$，均有 $0 \leqslant \mathrm{d}(x, y) \leqslant \frac{n}{2}$。还可注意到

$$\mathrm{d}(x, y) = \frac{n}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |x-y| = \frac{n}{2} \quad \Leftrightarrow \quad n-|x-y| = \frac{n}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |x-y| = n-|x-y|,$$

在这种情况下， n 是偶数。

回顾一下， $\mathcal{DI}_n$ 是幺半群 $\mathcal{PORI}_n$ 的子幺半群，其元素恰为阶为 $2n$ 的二面体群 $\mathcal{D}_{2n}$ 的所有限制。令 $\alpha \in \mathcal{PT}_n$，并令 $A \subset \mathrm{Dom}(\alpha)$。我们将 α 在 A 上的限制记为 $\alpha|_A$。此外，每个 $\mathcal{DI}_n$ 在 $\mathcal{D}_{2n}$ 中有多少个扩张也是已知的:

引理 1.3（[17, 引理 1.1]）设 $\alpha \in \mathcal{PT}_n$。那么， $\alpha \in \mathcal{DI}_n$ 当且仅当存在 $\sigma \in \mathcal{D}_{2n}$ 使得 $\alpha = \sigma|_{\mathrm{Dom}(\alpha)}$。此外，对于 $\alpha \in \mathcal{DI}_n$，有:

1. 若 $|$定义域(α)$| = 1$ 或 $|$定义域(α)$| = 2$，且 d(min 定义域(α), max 定义域(α)) $= \frac{n}{2}$（此时 n 为偶数），则恰好存在两个（不同的）置换 σ、$\sigma' \in \mathcal{D}_{2n}$，使得 $\alpha = \sigma|_{\mathrm{Dom}(\alpha)} = \sigma'|_{\mathrm{Dom}(\alpha)}$;

2. 如果 $|\mathrm{Dom}(\alpha)| = 2$ 且 $\mathrm{d}(\min \mathrm{Dom}(\alpha), \max \mathrm{Dom}(\alpha)) \neq \frac{n}{2}$，或者 $|\mathrm{Dom}(\alpha)| \geqslant 3$，那么恰好存在一个置换 $\sigma \in \mathcal{D}_{2n}$，使得 $\alpha = \sigma|_{\mathrm{Dom}(\alpha)}$。

注意，对于偶数 n，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 &= \{\alpha \in \mathcal{DI}_n \mid |\mathrm{Dom}(\alpha)| = 2 \text{ and } \mathrm{d}(\min \mathrm{Dom}(\alpha), \max \mathrm{Dom}(\alpha)) = \tfrac{n}{2}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} i & i+\frac{n}{2} \\ j & j+\frac{n}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & i+\frac{n}{2} \\ j+\frac{n}{2} & j \end{pmatrix} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant \tfrac{n}{2} \right\}\end{aligned}$$

因此 $|\mathcal{B}_2| = 2(\frac{n}{2})^2 = \frac{1}{2}n^2$。

本文研究 $\mathcal{DI}_n$ 的三个子幺半群，即 $\mathcal{OPDI}_n = \mathcal{DI}_n \cap \mathcal{POPI}_n$，由 C_n 的所有保向部分等距变换构成的幺半群；$\mathcal{MDI}_n = \mathcal{DI}_n \cap \mathcal{PODI}_n$，由 C_n 的所有单调部分等距变换构成的幺半群；以及 $\mathcal{ODI}_n = \mathcal{DI}_n \cap \mathcal{POI}_n$，由 C_n 的所有保序部分等距变换构成的幺半群。注意，$\mathcal{DI}_n$、$\mathcal{OPDI}_n$、$\mathcal{MDI}_n$ 和 $\mathcal{ODI}_n$ 都是对称逆幺半群 $\mathcal{I}_n$、$\mathcal{ODI}_n \subseteq \mathcal{MDI}_n$ 和 $\mathcal{ODI}_n \subseteq \mathcal{OPDI}_n$ 的逆子幺半群。此外，注意 $\mathcal{OPDI}_3 = \mathcal{POPI}_3$、$\mathcal{MDI}_3 = \mathcal{PODI}_3$ 和 $\mathcal{ODI}_3 = \mathcal{POI}_3$。

例 1.4 设我们考察 $\mathcal{DI}_5$ 的以下变换:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

于是，我们得到 $\alpha_1 \in \mathcal{ODI}_5$、$\alpha_2 \in \mathcal{MDI}_5 \setminus \mathcal{ODI}_5$ 和 $\alpha_3 \in \mathcal{OPDI}_5 \setminus \mathcal{ODI}_5$。

本文研究幺半群 $\mathcal{ODI}_n$、$\mathcal{MDI}_n$ 和 $\mathcal{OPDI}_n$ 各自的代数性质、组合性质和秩性质。具体而言，我们确定其基数（第 2 节，定理 2.1），描述格林关系 $\mathcal{J}$（第 3 节，定理 3.3），并计算这些幺半群各自的秩。本文的主要结果在第 4 节中给出，该节致力于建立生成集（命题 4.1），并确定这三个幺半群的秩（定理 4.3）。

Re称对于幺半群 M，格林关系 $\mathcal{L}$、$\mathcal{R}$、$\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{H}$ 定义如下:

- $a\mathcal{L}b$ 当且仅当对于 a、$b \in M$，有 $Ma = Mb$,
- $a\mathcal{R}b$ 当且仅当 $aM = bM$对于 $a, b \in M$,
- $a\mathcal{J}b$当且仅当 $MaM = MbM$对于 $a, b \in M$, 以及
- $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$。

格林关系是研究半群/幺半群时非常有用的工具。它们帮助我们更深入地理解半群的内部结构：我们可以识别子半群，研究幂等元，并探索半群中的同余性质。总的来说，格林关系在半群理论中的重要性在于，它们提供了一种系统的方法来研究和分类半群中的元素，从而深入了解其代数性质。

秩或维数这一概念主要属于线性代数。在半群中，我们通常将半群 S 的秩定义为其生成集 S的最小大小，即使 $\{|X| \mid X \subseteq S$ 和 X 生成 $S\}$的集合中元素个数的最小值。关于有限半群中的秩性质及其他可能的定义，参见 [24]。秩能够提供有关半群复杂性和代数性质的信息。它有助于我们了解半群中元素的多样性，因为秩较高的半群往往呈现出更复杂的行为，并具有更丰富多样的元素。

众所周知，对于 $n \geqslant 3$， $\mathcal{S}_n$ 的秩为 2（无论将其视为半群、幺半群还是群），而 $\mathcal{T}_n$、 $\mathcal{I}_n$ 和 $\mathcal{PT}_n$的秩分别为 3、3 和 4。综述 [12] 介绍了这些结果，以及其他变换幺半群类的类似结果，特别是保序变换幺半群及其某些扩张的结果。例如，广受研究的、由链上所有保序变换构成的幺半群（该链含有 n个元素）的秩为 n，这一结果由 Gomes 和 Howie 于 1992年 证明 [22] 。近来，例如，论文 [3, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 18, 20] 致力于计算某些类变换半群或幺半群的秩。

关于一般背景 以及半群理论和标准记号，请参阅 Howie 的著作 [23].
我们想指出的是，我们大量使用了计算工具，即 GAP [21]。

2 基数

本文从一些组合考量开始。研究变换半群时，自然会出现本质上具有组合性质的枚举问题。本节的主要目标是分别为 $|\mathcal{ODI}_n|$、 $|\mathcal{MDI}_n|$ 和 $|\mathcal{OPDI}_n|$找到一个公式。

通过应用引理 1.3，并计算来自 $\mathcal{D}_{2n}$ 的置换的所有可能的不同保向和保序限制，我们得到:

定理 2.1 有

$$|\mathcal{ODI}_n| = 3 \cdot 2^n + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} - \frac{1+(-1)^n}{8}n^2 - 2n - 2$$

and

$$|\mathcal{OPDI}_n| = n2^n + \frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{1+(-1)^n}{4}n^2 - n + 1.$$

证明。设 $\mathcal{A} = \{\alpha \in \mathcal{DI}_n \mid |\text{定义域}(\alpha)| \leqslant 1\}$。显然， $\mathcal{A} = \{\alpha \in \mathcal{OPDI}_n \mid |\text{定义域}(\alpha)| \leqslant 1\} = \{\alpha \in \mathcal{ODI}_n \mid |\text{定义域}(\alpha)| \leqslant 1\}$。同样显然， $|\mathcal{A}| = 1 + n^2$。因此，根据引理 1.3，要确定$\mathcal{ODI}_n$ 和 $\mathcal{OPDI}_n$的大小，只需分别统计秩大于或等于 2 的 $\mathcal{D}_{2n}$ 的置换中，有多少种不同的限制是保序且保向的。

首先，我们确定集合 $\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathcal{ODI}_n \mid |\text{定义域}(\alpha)| \geqslant 2\}$的基数。设 $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$。显然， hg^k 中秩大于或等于 2 的保序限制只有$hg^k|_{\{i<j\}}$这种形式，其中 $1 \leqslant i \leqslant k$ 和 $k+1 \leqslant j \leqslant n$。因此， hg^k中秩大于或等于 2 的保序限制有 $k \times (n-k)$ 个。

另一方面， g^k的任意保序限制的定义域都包含于 $\{1, \ldots, n-k\}$ 或$\{n-k+1, \ldots, n\}$中，因此 g^k 有 $\sum_{i=2}^{n-k}\binom{n-k}{i} + \sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}$ 个秩大于或等于 2 的保序限制。

注意，若 n 为偶数，则

$$\mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} i & i+\frac{n}{2} \\ j & j+\frac{n}{2} \end{pmatrix} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant \frac{n}{2} \right\},$$

因此，在 $\mathcal{B}$ 中有 $|\mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}| = (\frac{n}{2})^2 = \frac{1}{4}n^2$ 个元素在 $\mathcal{D}_{2n}$ 中恰有两个扩张，而其余元素只有一个扩张。反之，当 n 为奇数时， $\mathcal{B}$ 中的所有元素在 $\mathcal{D}_{2n}$ 中都恰有一个扩张。因此

$$|\mathcal{B}| = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k \times (n-k)) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=2}^{n-k}\binom{n-k}{i} + \sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}\right) & \text{if } n \text{ is odd} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k \times (n-k)) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=2}^{n-k}\binom{n-k}{i} + \sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}\right) - \frac{1}{4}n^2 & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

现在，由于

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k\times(n-k))=\sum_{k=1}^{n-1}(k\times(n-k))=n\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}k^2=$$
$$n\frac{1+(n-1)}{2}(n-1)-\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6}=\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

and

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=2}^{n-k}\binom{n-k}{i}+\sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\Big((2^{n-k}-n+k-1)+(2^k-k-1)\Big)=\sum_{k=1}^{n}2^k+\sum_{k=0}^{n-1}2^k-\sum_{k=0}^{n-1}(n+2)=$$
$$(2^{n+1}-1-1)+(2^n-1)-n(n+2)=3\cdot 2^n-n^2-2n-3,$$

关于 $|\mathcal{ODI}_n|=|\mathcal{A}|+|\mathcal{B}|$ 的结果立即得出。

接下来，我们确定集合 $\mathcal{C}=\{\alpha\in\mathcal{OPDI}_n\mid|\mathrm{Dom}(\alpha)|\geqslant 2\}$的基数。令 $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$。 hg^k中秩大于或等于 2 的保向限制，恰好是它的所有保序限制（如上所见，这些限制的秩必为 2），以及它的所有秩为 2 的反序限制。因此，我们有 $k\times(n-k)+\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}$ hg^k 中秩大于或等于 2 的保向限制。由于 g^k 的所有限制都是保向的，并且对于偶数 n，当 $|\mathcal{B}_2|=\frac{1}{2}n^2$时有 $\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{C}$

$$|\mathcal{C}|=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(k\times(n-k)+\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i} & \text{if } n \text{ is odd}\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(k\times(n-k)+\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}-\frac{1}{2}n^2 & \text{if } n \text{ is even.}\end{cases}$$

现在，由

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(k\times(n-k)+\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}\right)=\frac{(n+1)n(n-1)}{6}+2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{2}+\binom{n}{2}=$$
$$\frac{(n+1)n(n-1)}{6}+2\binom{n}{3}+\binom{n}{2}=\frac{n^2(n-1)}{2}$$

and

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}=\sum_{k=0}^{n-1}(2^n-n-1)=n(2^n-n-1)=n2^n-n^2-n,$$

关于 $|\mathcal{OPDI}_n|=|\mathcal{A}|+|\mathcal{C}|$ 的结果也随之得出。 ■

接下来，我们通过计算 $\mathcal{ODI}_4$的基数来举例说明前面的证明。

例2.2 设 $\mathcal{A}=\{\alpha\in\mathcal{ODI}_4\mid|\mathrm{Dom}(\alpha)|\leqslant 1\}$。显然， $\emptyset\in\mathcal{A}$，且若 $\alpha\in\mathcal{A}$ 满足 $|\mathrm{Dom}(\alpha)|=1$，则 $\alpha\in\left\{\binom{i}{j}\mid 1\leqslant i,j\leqslant 4\right\}$。因此，我们有 $|\mathcal{A}|=1+4^2=17$。

因此，根据引理 1.3，要确定 $|\mathcal{ODI}_4|$，只需统计 $\mathcal{D}_{2\cdot 4}=\{$id g、g^2、g^3、h、hg、hg^2、$hg^3\}$的所有秩大于或等于2的置换中，有多少种不同的限制是保序的。

令 $\mathcal{B}=\{\alpha\in\mathcal{ODI}_4\mid|$定义域$(\alpha)|\geqslant 2\}$。显然，对于 $k\in\{0,1,2,3\}$，hg^k 的秩大于或等于 2 的唯一保序限制具有 $hg^k|_{\{i<j\}}$ 的形式，其中 $1\leqslant i\leqslant k$ 和 $k+1\leqslant j\leqslant 4$。回忆 $g=\binom{1\,2\,3\,4}{2\,3\,4\,1}$ 以及 $h=\binom{1\,2\,3\,4}{4\,3\,2\,1}$。令 $\alpha=hg^k|_{\{i<j\}}\in\mathcal{B}$。于是

$$\alpha\in\left\{\tbinom{1\,2}{1\,4}=hg|_{\{1,2\}},\tbinom{1\,3}{1\,3}=hg|_{\{1,3\}},\tbinom{1\,4}{1\,2}=hg|_{\{1,4\}},\tbinom{1\,3}{2\,4}=hg^2|_{\{1,3\}},\tbinom{1\,4}{2\,3}=hg^2|_{\{1,4\}},\right.$$
$$\left.\tbinom{2\,3}{1\,4}=hg^2|_{\{2,3\}},\tbinom{2\,4}{1\,3}=hg^2|_{\{2,4\}},\tbinom{1\,4}{3\,4}=hg^3|_{\{1,4\}},\tbinom{2\,4}{2\,4}=hg^3|_{\{2,4\}},\tbinom{3\,4}{1\,4}=hg^3|_{\{3,4\}}\right\}.$$

因此，我们有 $k\times(4-k)$ 个秩大于或等于 2 的 hg^k 的保序限制。总共，我们有 $(1\times 3)+(2\times 2)+(3\times 1)=10$ 个这样的保序变换。

另一方面，对于 $k\in\{0,1,2,3\}$，g^k 的任意保序限制，其定义域都包含于 $\{1,\ldots,4-k\}$ 或 $\{5-k,\ldots,4\}$ 中。因此，对于满足 $\mathrm{Dom}(\alpha)\subseteq\{1,\ldots,4-k\}$ 或 $\mathrm{Dom}(\alpha)\subseteq\{5-k,\ldots,4\}$ 的 $\alpha=g^k|_{\mathrm{Dom}(\alpha)}\in\mathcal{B}$，我们有

$$\begin{aligned}\alpha\in\big\{&\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{smallmatrix}\right)=\mathrm{id}|_{\{1,2,3,4\}},\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)=\mathrm{id}|_{\{1,2,3\}},\left(\begin{smallmatrix}1&2&4\\1&2&4\end{smallmatrix}\right)=\mathrm{id}|_{\{1,2,4\}},\left(\begin{smallmatrix}1&3&4\\1&3&4\end{smallmatrix}\right)=\mathrm{id}|_{\{1,3,4\}},\\&\left(\begin{smallmatrix}2&3&4\\2&3&4\end{smallmatrix}\right)=\mathrm{id}|_{\{2,3,4\}},\left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&2\end{smallmatrix}\right)=\mathrm{id}|_{\{1,2\}},\left(\begin{smallmatrix}1&3\\1&3\end{smallmatrix}\right)=\mathrm{id}|_{\{1,3\}},\left(\begin{smallmatrix}1&4\\1&4\end{smallmatrix}\right)=\mathrm{id}|_{\{1,4\}},\left(\begin{smallmatrix}2&3\\2&3\end{smallmatrix}\right)=\mathrm{id}|_{\{2,3\}},\left(\begin{smallmatrix}2&4\\2&4\end{smallmatrix}\right)=\mathrm{id}|_{\{2,4\}},\\&\left(\begin{smallmatrix}3&4\\3&4\end{smallmatrix}\right)=\mathrm{id}|_{\{3,4\}},\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{smallmatrix}\right)=g|_{\{1,2,3\}},\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&3\end{smallmatrix}\right)=g|_{\{1,2\}},\left(\begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix}\right)=g|_{\{1,3\}},\left(\begin{smallmatrix}2&3\\3&4\end{smallmatrix}\right)=g|_{\{2,3\}},\left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right)=g^2|_{\{1,2\}},\\&\left(\begin{smallmatrix}3&4\\1&2\end{smallmatrix}\right)=g^2|_{\{3,4\}},\left(\begin{smallmatrix}2&3&4\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)=g^3|_{\{2,3,4\}},\left(\begin{smallmatrix}2&3\\1&2\end{smallmatrix}\right)=g^3|_{\{2,3\}},\left(\begin{smallmatrix}2&4\\1&3\end{smallmatrix}\right)=g^3|_{\{2,4\}},\left(\begin{smallmatrix}3&4\\2&3\end{smallmatrix}\right)=g^3|_{\{3,4\}}\big\}.\end{aligned}$$

因此，g^k 有 $\sum_{i=2}^{4-k}\binom{4-k}{i}+\sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}=16+5=21$ 个秩大于或等于 2 的保序限制。

注意，若 $\alpha\in\mathcal{B}_2=\{\alpha\in\mathcal{ODI}_4\mid|\mathrm{Dom}(\alpha)|=2$，且 $\mathrm{d}(\min\mathrm{Dom}(\alpha),\max\mathrm{Dom}(\alpha))=2\}\subseteq\mathcal{B}$，则

$$\begin{aligned}\alpha\in\big\{&\left(\begin{smallmatrix}1&3\\1&3\end{smallmatrix}\right)=\mathrm{id}|_{\{1,3\}}=hg|_{\{1,3\}},\left(\begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix}\right)=g|_{\{1,3\}}=hg^2|_{\{1,3\}},\left(\begin{smallmatrix}2&4\\2&4\end{smallmatrix}\right)=\mathrm{id}|_{\{2,4\}}=hg^3|_{\{2,4\}},\\&\left(\begin{smallmatrix}2&4\\1&3\end{smallmatrix}\right)=g^3|_{\{2,4\}}=hg^2|_{\{2,4\}}\big\},\end{aligned}$$

由此可知，$\mathcal{B}$ 中有 $|\mathcal{B}_2\cap\mathcal{B}|=4$ 个元素在 $\mathcal{D}_{2\cdot4}$ 中恰有两个扩张。其余元素在 $\mathcal{D}_{2\cdot4}$ 中只有一个扩张。因此，我们有 $|\mathcal{B}|=10+21-4=27$。

因此，我们得到 $|\mathcal{ODI}_4|=|\mathcal{A}|+|\mathcal{B}|=17+27=44$。

前述方法也可用于计算 $\mathcal{MDI}_n$ 的元素个数。然而，由于 $\mathcal{MDI}_n$ 中所有秩小于或等于 1 的 n^2+1 元素都是保序的，并且映射

$$\begin{array}{ccc}\{\alpha\in\mathcal{ODI}_n\mid|\operatorname{Im}(\alpha)|\geqslant 2\}&\longrightarrow&\{\alpha\in\mathcal{MDI}_n\setminus\mathcal{ODI}_n\mid|\operatorname{Im}(\alpha)|\geqslant 2\}\\ \alpha&\longmapsto&\alpha h\end{array}$$

是一个双射（注意，对于所有 $\alpha\in\mathcal{PT}_n$，$\alpha=\alpha h^2$），那么 $|\mathcal{MDI}_n|=2|\mathcal{ODI}_n|-n^2-1$。因此，作为定理 2.1 的直接推论，我们得到以下结果。

定理 2.3 有

$$|\mathcal{MDI}_n|=3\cdot 2^{n+1}+\frac{(n+1)n(n-1)}{3}-\frac{5+(-1)^n}{4}n^2-4n-5.$$

3 Green 关系 $\mathcal{J}$

本节的主要结果是描述幺半群 $\mathcal{ODI}_n$、$\mathcal{MDI}_n$ 和 $\mathcal{OPDI}_n$ 各自的 $\mathcal{J}$-关系。

给定 $\mathcal{I}_n$ 的一个逆子幺半群 M，众所周知，M 的格林关系 $\mathcal{L}$、$\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{H}$ 可描述如下：对于 α、$\beta\in M$，

- $\alpha\mathcal{L}\beta$ 当且仅当 $\mathrm{Im}(\alpha)=\mathrm{Im}(\beta)$，
- $\alpha\mathcal{R}\beta$ 当且仅当 $\mathrm{Dom}(\alpha)=\mathrm{Dom}(\beta)$，并且
- $\alpha\mathcal{H}\beta$ 当且仅当 $\mathrm{Im}(\alpha)=\mathrm{Im}(\beta)$ 且 $\mathrm{Dom}(\alpha)=\mathrm{Dom}(\beta)$。

在 $\mathcal{I}_n$ 中，我们还有

- $\alpha\mathcal{J}\beta$ 当且仅当 |定义域(α)| = |定义域(β)| (当且仅当 |像(α)| = |像(β)|)。

注意，对于有限幺半群，我们总有 $\mathcal{J} = \mathcal{D}(= \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L})$。

由于幺半群 $\mathcal{ODI}_n$、 $\mathcal{MDI}_n$ 和 $\mathcal{OPDI}_n$ 是 $\mathcal{I}_n$ 的逆子幺半群，本节的主要目标是描述这些幺半群上的格林关系 $\mathcal{J}$。

为了更清晰、更易于理解地讨论格林关系 $\mathcal{J}$，我们将其分成若干引理。引理 3.1 刻画了 $\mathcal{DI}_n$，见 [27, 命题4.1.12，第 67-81] 页。这将有助于证明引理 3.2。随后，我们在定理 3.3 的证明中应用引理 3.2。

由于原证明复杂且冗长，我们为引理 3.1 给出了一个简化而精炼的证明。

引理 3.1 设 $\alpha \in \mathcal{PORI}_n$ 满足 $\mathrm{Dom}(\alpha) = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$，其中 $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$。那么，$\alpha \in \mathcal{DI}_n$ 当且仅当对 $p = 1, 2, \ldots, k-1$，有 $\mathrm{d}(i_1, i_k) = \mathrm{d}(i_1\alpha, i_k\alpha)$ 且 $\mathrm{d}(i_p, i_{p+1}) = \mathrm{d}(i_p\alpha, i_{p+1}\alpha)$。

证明。若 $\alpha \in \mathcal{DI}_n$，则根据定义，对于 $p = 1, 2, \ldots, k-1$，有 $\mathrm{d}(i_1, i_k) = \mathrm{d}(i_1\alpha, i_k\alpha)$，且 $\mathrm{d}(i_p, i_{p+1}) = \mathrm{d}(i_p\alpha, i_{p+1}\alpha)$。

反过来，假设对于 $p = 1, 2, \ldots, k-1$，有 $\mathrm{d}(i_1, i_k) = \mathrm{d}(i_1\alpha, i_k\alpha)$，且 $\mathrm{d}(i_p, i_{p+1}) = \mathrm{d}(i_p\alpha, i_{p+1}\alpha)$。显然，若 $k = 2$ 或 $k = 3$，结论显然成立。因此，我们可以假设 $k \geqslant 3$。

若 $\alpha \in \mathcal{POPI}_n$，则根据命题 3.1]，，存在 $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 和 $\beta \in \mathcal{POI}_n$，使得 $\alpha = g^i\beta$。另一方面，若 $\alpha \notin \mathcal{POPI}_n$，则 $h\alpha \in \mathcal{POPI}_n$，因此也存在 $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 和 $\beta \in \mathcal{POI}_n$，使得 $h\alpha = g^i\beta$，从而 $\alpha = hg^i\beta$。因此，两种情况下都存在 $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$、$j \in \{0, 1\}$ 和 $\beta \in \mathcal{POI}_n$，使得 $\alpha = h^j g^i \beta$。注意，我们还有 $\beta = g^{n-i}h^j\alpha$。

设 $\mathrm{Dom}(\beta) = \{i'_1 < i'_2 < \cdots < i'_k\}$，并令 $t \in \{0, 1, \ldots, k\}$ 满足 $i'_t \leqslant i$ 和 $i'_{t+1} \geqslant i+1$（$t = 0$ 和 $t = k$ 的含义显而易见）。那么

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \begin{cases} (i'_{t+1}g^{n-i}, \ldots, i'_k g^{n-i}, i'_1 g^{n-i}, \ldots, i'_t g^{n-i}) & \text{if } j = 0 \\ (i'_t g^{n-i}h, \ldots, i'_1 g^{n-i}h, i'_k g^{n-i}h, \ldots, i'_{t+1} g^{n-i}h) & \text{if } j = 1, \end{cases}$$

由此，通过常规步骤可得 $\mathrm{d}(i'_1, i'_k) = \mathrm{d}(i'_1\beta, i'_k\beta)$，且 $\mathrm{d}(i'_p, i'_{p+1}) = \mathrm{d}(i'_p\beta, i'_{p+1}\beta)$，其中 $p = 1, 2, \ldots, k-1$，因为 $g, h \in \mathcal{DI}_n$。

因此，我们可以将证明归结为保序变换，并可假设 $\alpha \in \mathcal{POI}_n$。令 $j_p = i_p\alpha$，其中 $p = 1, 2, \ldots, k$。那么 $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$。

首先，我们证明，对于 $p = 1$、2、.....、$k-1$，$i_{p+1} - i_p = j_{p+1} - j_p$。注意到 $\sum_{p=1}^{k-1}(i_{p+1} - i_p) = i_k - i_1 < n$，因此至多存在一个指标 $r \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ 使得 $i_{r+1} - i_r \geqslant \frac{n}{2}$。同理，至多存在一个指标 $s \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ 使得 $j_{s+1} - j_s \geqslant \frac{n}{2}$。还需注意，对于所有 $p \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$，$i_{p+1} - i_p = \frac{n}{2}$ 或 $j_{p+1} - j_p = \frac{n}{2}$ 都蕴含 $i_{p+1} - i_p = \frac{n}{2} = j_{p+1} - j_p$。

为了导出矛盾，假设存在 $\ell \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ 使得 $i_{\ell+1} - i_\ell \neq j_{\ell+1} - j_\ell$。令 r 为满足条件的最小指标。由于 $\mathrm{d}(i_r, i_{r+1}) = \mathrm{d}(j_r, j_{r+1})$，我们得到

$$\mathrm{d}(i_r, i_{r+1}) = i_{r+1} - i_r = n - j_{r+1} + j_r \quad \text{or} \quad \mathrm{d}(i_r, i_{r+1}) = j_{r+1} - j_r = n - i_{r+1} + i_r.$$

通过考虑 α^{-1} 而非 α，不失一般性，我们可以假设 $\mathrm{d}(i_r, i_{r+1}) = j_{r+1} - j_r$。因此 $i_{r+1} - i_r > \frac{n}{2}$ 且 $j_{r+1} - j_r < \frac{n}{2}$。此外，$r$ 是 $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ 中唯一满足 $i_{r+1} - i_r \geqslant \frac{n}{2}$ 的指标。

我们首先假设，对于 $p = 1, 2, \ldots, k-1$，$j_{p+1} - j_p < \frac{n}{2}$。由于对于所有 $p \in \{1, 2, \ldots, k-1\} \setminus \{r\}$，$i_{p+1} - i_p < \frac{n}{2}$，因此

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}(i_p, i_{p+1}) = \mathrm{d}(j_p, j_{p+1}), \text{ for } p = 1, 2, \ldots, k-1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{p=1}^{k-1} \mathrm{d}(i_p, i_{p+1}) = \sum_{p=1}^{k-1} \mathrm{d}(j_p, j_{p+1}) \\ \Longrightarrow \quad & \sum_{p=1}^{r-1}(i_{p+1} - i_p) + (n - i_{r+1} + i_r) + \sum_{p=r+1}^{k-1}(i_{p+1} - i_p) = \sum_{p=1}^{k-1}(j_{p+1} - j_p) \\ \Longrightarrow \quad & (i_r - i_1) + (n - i_{r+1} + i_r) + (i_k - i_{r+1}) = j_k - j_1 \\ \Longrightarrow \quad & (i_k - i_1) + (n - i_{r+1} + i_r) + (i_r - i_{r+1}) = j_k - j_1. \end{aligned}$$

另一方面，由于 $\mathrm{d}(j_1, j_k) = \mathrm{d}(i_1, i_k)$，因此 $j_k - j_1 = i_k - i_1$ 或 $j_k - j_1 = n - i_k + i_1$。若 $j_k - j_1 = i_k - i_1$，则 $n - i_{r+1} + i_r = i_{r+1} - i_r > \frac{n}{2}$，这与假设矛盾。因此 $j_k - j_1 = n - i_k + i_1$，由此可得 $2(i_k - i_1 + i_r - i_{r+1}) = 0$，于是 $i_k - i_1 = i_{r+1} - i_r$，这再次导致矛盾（因为 $k \geqslant 3$）。

因此，存在 $s \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ 使得 $j_{s+1} - j_s \geqslant \frac{n}{2}$，这是满足这些条件的唯一指标。此外，$j_{s+1} - j_s > \frac{n}{2}$ 且 $s > r$。于是，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(i_p, i_{p+1}) = \mathrm{d}(j_p, j_{p+1}),\ \text{for } p = 1, 2, \ldots, k-1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{p=1}^{k-1} \mathrm{d}(i_p, i_{p+1}) = \sum_{p=1}^{k-1} \mathrm{d}(j_p, j_{p+1}) \\
\Longrightarrow \quad &\sum_{p=1}^{r-1} (i_{p+1} - i_p) + (n - i_{r+1} + i_r) + \sum_{p=r+1}^{k-1} (i_{p+1} - i_p) = \sum_{p=1}^{s-1} (j_{p+1} - j_p) + (n - j_{s+1} + j_s) + \sum_{p=s+1}^{k-1} (j_{p+1} - j_p) \\
\Longrightarrow \quad &(i_r - i_1) + (n - i_{r+1} + i_r) + (i_k - i_{r+1}) = (j_s - j_1) + (n - j_{s+1} + j_s) + (j_k - j_{s+1}) \\
\Longrightarrow \quad &(n + i_k - i_1) + 2(i_r - i_{r+1}) = (n + j_k - j_1) + 2(j_s - j_{s+1}).
\end{aligned}$$

接下来，由于 $i_k - i_1 \geqslant i_{r+1} - i_r > \frac{n}{2}$ 且 $j_k - j_1 \geqslant j_{s+1} - j_s > \frac{n}{2}$，我们有

$$n - i_k + i_1 = \mathrm{d}(i_1, i_k) = \mathrm{d}(j_1, j_k) = n - j_k + j_1$$

因此 $i_{r+1} - i_r = j_{s+1} - j_s$。另一方面，由于 $i_{s+1} - i_s < \frac{n}{2}$ 且 $j_{s+1} - j_s > \frac{n}{2}$，我们有

$$i_{s+1} - i_s = \mathrm{d}(i_s, i_{s+1}) = \mathrm{d}(j_s, j_{s+1}) = n - j_{s+1} + j_s,$$

由此 $i_{r+1} - i_r = n - i_{s+1} + i_s$，因此 $n - 1 \geqslant i_{s+1} - i_r = n + i_s - i_{r+1} \geqslant n$，这再次构成矛盾。因此，我们证明了对所有 $p \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$，$i_{p+1} - i_p = j_{p+1} - j_p$。

现在，令 $1 \leqslant p < q \leqslant k$。于是我们有 $i_q - i_p = \sum_{t=p}^{q-1} (i_{t+1} - i_t) = \sum_{t=p}^{q-1} (j_{t+1} - j_t) = j_q - j_p$，由此也可得 $n - i_q + i_p = n - j_q + j_p$。因此

$$\mathrm{d}(i_p, i_q) = \begin{cases} i_q - i_p & \text{if } i_q - i_p \leqslant \frac{n}{2} \\ n - i_q + i_p & \text{if } i_q - i_p > \frac{n}{2} \end{cases} = \begin{cases} j_q - j_p & \text{if } j_q - j_p \leqslant \frac{n}{2} \\ n - j_q + j_p & \text{if } j_q - j_p > \frac{n}{2} \end{cases} = \mathrm{d}(j_p, j_q).$$

因此 $\alpha \in \mathcal{DI}_n$，证毕。 ■

回顾一下，id 表示 Ω_n 上的恒等变换。对于 $X \subseteq \Omega_n$，我们用 id_X 表示定义域为 X 的部分恒等变换，即变换 id 在集合 X 上的限制 $\mathrm{id}|_X$。

现在，对于满足 $2 \leqslant k \leqslant n$ 的 $A = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\} \subseteq \Omega_n$，定义

$$\mathrm{d}(A) = (d_1, d_2, \ldots, d_k),$$

其中 $d_p = \mathrm{d}(i_p, i_{p+1})$，对 $p = 1, \ldots, k-1$，且 $d_k = \mathrm{d}(i_1, i_k)$。再取 $B = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_k\} \subseteq \Omega_n$，并定义 $\delta_{A,B}$ 为从 A 到 B 的唯一保序变换，即

$$\delta_{A,B} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}.$$

那么，我们有：

引理 3.2 设 $A = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\} \subseteq \Omega_n$ 且 $B = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_k\} \subseteq \Omega_n$，其中 $2 \leqslant k \leqslant n$。则：

1. 当且仅当存在从 A 到 B 的保序偏等距映射时，$\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(B)$（即当且仅当 $\delta_{A,\ B} \in \mathcal{ODI}_n$）；

2. $\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(\ Bh)$ 当且仅当存在一个从 A 到.....上的反序偏等距映射 B;

3. 对某个 $0 \leqslant s \leqslant n-1$，$\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(Bg^{-s})$ 当且仅当存在一个从 A到 B上的保向部分等距映射。

证明。为证明 1，首先假设 $\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(B)$。那么，对于 $1 \leqslant p \leqslant k-1$，有 $\mathrm{d}(i_p, i_{p+1}) = \mathrm{d}(j_p, j_{p+1}) = \mathrm{d}(i_p\delta_{A,\ B}, i_{p+1}\delta_{A,\ B})$，且 $\mathrm{d}(i_1, i_k) = \mathrm{d}(j_1, j_k) = \mathrm{d}(i_1\delta_{A,\ B}, i_k\delta_{A,\ B})$，由此得到 $\delta_{A,\ B} \in \mathcal{DI}_n$，根据引理 3.1，进而有$\delta_{A,\ B} \in \mathcal{ODI}_n$。

反过来，假设 $\delta_{A,\ B} \in \mathcal{ODI}_n$。那么，特别地，对于 $1 \leqslant p \leqslant k-1$，有 $\mathrm{d}(i_p, i_{p+1}) = \mathrm{d}(i_p\delta_{A,\ B}, i_{p+1}\delta_{A,\ B}) = \mathrm{d}(j_p, j_{p+1})$，且 $\mathrm{d}(i_1, i_k) = \mathrm{d}(i_1\delta_{A,\ B}, i_k\delta_{A,\ B}) = \mathrm{d}(j_1, j_k)$，由此得到 $\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(B)$。

接下来，我们证明 2。若 $\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(Bh)$，则由 1，$\delta_{A,\ Bh} \in \mathcal{ODI}_n$；因此，鉴于 $k \geqslant 2$ 和 $h|_{Bh}$ 是从 Bh 到 B 的保序反转偏等距映射，可得 $\delta_{A,\ Bh}h|_{Bh}$ 是从 A 到B的保序反转偏等距映射。

反过来，假设存在一个从 A 到 B 的保序反转偏等距映射 ξ。那么

$$\xi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_k & j_{k-1} & \cdots & j_1 \end{pmatrix}$$

以及 $Bh = \{n - j_k + 1 < n - j_{k-1} + 1 < \cdots < n - j_1 + 1\}$，由此

$$\delta_{A,Bh} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ n - j_k + 1 & n - j_{k-1} + 1 & \cdots & n - j_1 + 1 \end{pmatrix} = \xi h|_B \in \mathcal{ODI}_n$$

因此，由 1，$\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(Bh)$。

最后，我们证明 3。首先，假设对某个 $0 \leqslant s \leqslant n-1$，有 $\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(Bg^{-s})$。那么，由 1，我们有$\delta_{A,\ Bg^{-s}} \in \mathcal{ODI}_n$。由于 $g^s|_{Bg^{-s}}$ 是从 Bg^{-s} 到 B 的保向部分等距映射，因此$\delta_{A,\ Bg^{-s}}g^s|_{Bg^{-s}}$ 是从 A 到 B 的保向部分等距映射。

反之，假设存在一个从 A 到 B 的保向部分等距映射 ξ。若 $k = 2$，则

$$\xi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} = \delta_{A,B} \quad \text{or} \quad \xi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_2 & j_1 \end{pmatrix}$$

因此，在这两种情况下，我们都得到 $\delta_{A,\ B} \in \mathcal{ODI}_n$，由此根据 1，有 $\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(B) (= \mathrm{d}(Bg^{-s})$，其中 $s = 0$)。于是，假设 $k > 2$。那么，由于保向的反向置换限制的秩必须小于或等于二（参见定理 2.1 的证明），存在 $0 \leqslant s \leqslant n-1$ 使得 $\xi = g^s|_A$。因此，$A = Bg^{-s}$，从而 $\delta_{A,\ Bg^{-s}} = \delta_{A,\ A} = \mathrm{id}_A \in \mathcal{ODI}_n$，因为任何部分恒等变换都是保序偏等距映射。因此，根据 1，得到 $\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(Bg^{-s})$，即得所需结论。 ■

定理 3.3 设 $M \in \{\mathcal{ODI}_n, \mathcal{MDI}_n, \mathcal{OPDI}_n\}$，且令 α、$\beta \in M$。那么，$\alpha \mathcal{J} \beta$ 当且仅当满足以下性质之一：

1. |定义域(α)| = |定义域(β)| $\leqslant 1$;
2. |定义域(α)| = |定义域(β)| $\geqslant 2$ 且

$$\mathrm{d}(\mathrm{Dom}(\alpha)) = \begin{cases} \mathrm{d}(\mathrm{Dom}(\beta)) & \text{if } M = \mathcal{ODI}_n \\ \mathrm{d}(\mathrm{Dom}(\beta)) \text{ or } \mathrm{d}(\mathrm{Dom}(h\beta)) & \text{if } M = \mathcal{MDI}_n \\ \mathrm{d}(\mathrm{Dom}(g^s\beta)) \text{ for some } 0 \leqslant s \leqslant n-1 & \text{if } M = \mathcal{OPDI}_n. \end{cases}$$

证明。首先，假设 $\alpha \mathcal{J} \beta$（属于 M）。那么 $\alpha \mathcal{J} \beta$属于 $\mathcal{I}_n$，因此 |定义域(α)| = |定义域(β)|。若 |定义域(α)| $\neq$ 定义域(β)| $\leqslant 1$，则无需再证明。

因此，设 |定义域(α)| = |定义域(β)| $\geqslant 2$，并令 γ、$\lambda \in M$满足 $\alpha = \gamma\beta\lambda$。不失一般性地（如有必要，考虑 $\gamma|_{\mathrm{Dom}(\alpha)}$ 而不是 γ），我们可以假设定义域(γ) =定义域(α)。因此，像(γ) = 定义域(β)。于是，当 $M = \mathcal{ODI}_n$、γ时，γ 是从定义域(α)到定义域(β)上的保序部分等距映射，

当 $M = \mathcal{MDI}_n$时，是从定义域(α)到定义域(β)上的保序或反序偏等距映射；当 $M = \mathcal{OPDI}_n$时， γ 是从定义域(α)到定义域(β)上的保向部分等距映射。因此，根据引理 3.2，我们有

$$\mathrm{d}(\mathrm{Dom}(\alpha)) = \mathrm{d}(\mathrm{Dom}(\beta)), \text{ if } M = \mathcal{ODI}_n,$$

$\mathrm{d}(\mathrm{Dom}(\alpha)) = \mathrm{d}(\mathrm{Dom}(\beta))$ 或 $\mathrm{d}(\mathrm{Dom}(\alpha)) = \mathrm{d}(\mathrm{Dom}(\beta)h) = d(\mathrm{Dom}(\beta)h^{-1}) = \mathrm{d}(\mathrm{Dom}(h\beta))$，如果 $M = \mathcal{MDI}_n$, and

$$\mathrm{d}(\mathrm{Dom}(\alpha)) = \mathrm{d}(\mathrm{Dom}(\beta)g^{-s}) = \mathrm{d}(\mathrm{Dom}(g^s\beta)), \text{ for some } 0 \leqslant s \leqslant n-1, \text{ if } M = \mathcal{OPDI}_n.$$

反过来，假设条件 1 或 2 成立。若 $|\mathrm{Dom}(\alpha)| = |\mathrm{Dom}(\beta)| \leqslant 1$ ，那么，由于 M 包含所有秩小于或等于一的部分置换，显然有 $\alpha \mathcal{J} \beta$。因此，假设条件 2 成立。由于对所有 $0 \leqslant s \leqslant n-1$, $\mathrm{Dom}(h\beta) = \mathrm{Dom}(\beta)h$ 且 $\mathrm{Dom}(g^s\beta) = \mathrm{Dom}(\beta)g^{-s}$，由引理 3.2 可得， M拥有一个从 $\mathrm{Dom}(\alpha)$ 映到 $\mathrm{Dom}(\beta)$ 的部分变换 γ。再取 $\lambda = \beta^{-1}\gamma^{-1}\alpha \in M$。因此，由于 $\gamma\beta\beta^{-1}\gamma^{-1}$和 $\gamma^{-1}\alpha\alpha^{-1}\gamma$ 是幂等元，我们有

$$\gamma\beta\lambda = \gamma\beta\beta^{-1}\gamma^{-1}\alpha = \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}(\alpha)}\alpha = \alpha \quad \text{and} \quad \gamma^{-1}\alpha\lambda^{-1} = \gamma^{-1}\alpha\alpha^{-1}\gamma\beta = \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}(\beta)}\beta = \beta$$

因此 $\alpha \mathcal{J} \beta$，正如所需。 ■

4 生成元与秩

本节将介绍本文的主要结果。我们将为每个幺半群 $\mathcal{ODI}_n$、 $\mathcal{MDI}_n$ 和 $\mathcal{OPDI}_n$ 确定一个最小大小的生成集。

Let

$$e_i = \mathrm{id}_{\Omega_n \setminus \{i\}} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathcal{DI}_n,$$

对于 $1 \leqslant i \leqslant n$。显然，对于 $1 \leqslant i$、 $j \leqslant n$，我们有 $e_i^2 = e_i$ 和 $e_i e_j = \mathrm{id}_{\Omega_n \setminus \{i,j\}} = e_j e_i$。更一般地，对于任意$X \subseteq \Omega_n$，我们得到 $\Pi_{i \in X} e_i = \mathrm{id}_{\Omega_n \setminus X}$。

现在，取 $\alpha \in \mathcal{DI}_n$。那么，由于 $\mathcal{DI}_n$ 的元素恰好是 $\mathcal{D}_{2n}$ 的限制，我们有$\alpha = h^j g^i|_{\mathrm{Dom}(\alpha)}$，其中某些 $j \in \{0,1\}$ 和 $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ 满足条件。因此 $\alpha = h^j g^i \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}(\alpha)} = h^j g^i \Pi_{k \in \Omega_n \setminus \text{定义域}(\alpha)} e_k$。所以 $\{g, h, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 是 $\mathcal{DI}_n$ 的生成集。此外，由于对于所有 $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ 都有 $e_i = g^{n-i} e_n g^i$，可知 $\{g, h, e_n\}$ 也是 $\mathcal{DI}_n$ 的生成集。事实上，由于 $g^n = \mathrm{id}$，我们还有 $e_n = g^i e_i g^{n-i}$，因此每个满足 $1 \leqslant i \leqslant n$ 的集合 $\{g, h, e_i\}$ 都生成 $\mathcal{DI}_n$（见 [17]）。

注意， e_1、 e_2、.....、 e_n是 $\mathcal{ODI}_n$、 $\mathcal{MDI}_n$和 $\mathcal{OPDI}_n$的元素。考虑以下元素

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad y = x^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

秩为 $n-1$ 的 $\mathcal{ODI}_n$ 元素，以及以下元素

$$x_i = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1 & n-i+1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad y_i = x_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & n-i+1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix},$$

对于 $1 \leqslant i \leqslant \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$，属于 $\mathcal{OD}$秩为 2 的$\mathcal{I}_n$。注意，对于 $1 \leqslant i \leqslant \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$，$\mathrm{d}(1, 1+i) = i$，且 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor < \frac{n}{2}$.

命题 4.1 幺半群 $\mathcal{ODI}_n$、 $\mathcal{MDI}_n$ 和 $\mathcal{OPDI}_n$ 由以下元素生成

$$\{x, y, e_2, \ldots, e_{n-1}, x_1, x_2, \ldots, x_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}, y_1, y_2, \ldots, y_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\},$$

$$\{h, x, e_2, \ldots, e_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, x_1, x_2, \ldots, x_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}, y_1, y_2, \ldots, y_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\}$$

and

$$\{g, e_i, x_1, x_2, \ldots, x_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\}, \quad \textit{with } 1 \leqslant i \leqslant n,$$

分别。

证明。 首先，我们需要 现在证明 $\{x, y, e_2, \ldots, e_{n-1}, x_1, x_2, \ldots, x_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}, y_1, y_2, \ldots, y_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\}$ 生成 $\mathcal{ODI}_n$.

设 M是由$\{x, y, e_2, \ldots, e_{n-1}, x_1, x_2, \ldots, x_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}, y_1, y_2, \ldots, y_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\} \subseteq \mathcal{ODI}_n$生成的幺半群。则$M$ 包含于 $\mathcal{ODI}_n$中。为证明反向包含，首先注意到 $e_1 = yx$ 和 $e_n = xy$，由此得到e_1、 e_2、.....、 $e_n \in M$，因此 M包含其每个元素的所有限制。

接下来，由于 $\mathcal{DI}_n$ 的元素是 $\mathcal{D}_{2n}$的限制，因此 $\mathcal{ODI}_n$ 的元素是 g^k 和 hg^k 的保序限制，其中 $0 \leqslant k \leqslant n-1$; 而它们又是以下对象的限制:

$$g^k|_{\{1,2,\ldots,n-k\}}, \quad g^k|_{\{n-k+1,\ldots,n\}} \quad \text{and} \quad hg^k|_{\{i,j\}},$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant k$ 和 $k+1 \leqslant j \leqslant n$。因此，只需证明这些元素属于 M。

注意，若 $k = 0$ ，则 $g^k|_{\{1,2,\ldots,n-k\}}$ 和 $g^k|_{\{n-k+1,\ldots,n\}}$ 分别是恒等变换和空变换，因此二者都属于 M。所以，令 $1 \leqslant k \leqslant n-1$。于是我们有 $g^k|_{\{1,2,\ldots,n-k\}} = x^k \in M$ 和 $g^k|_{\{n-k+1,\ldots,n\}} = y^{n-k} \in M$。另一方面，对于 $1 \leqslant i \leqslant k$ 和 $k+1 \leqslant j \leqslant n$，我们得到

$$hg^k|_{\{i,j\}} = \begin{cases} \prod_{\ell \in \Omega_n \setminus \{i,j\}} e_\ell & \text{if } i = \frac{k+1}{2} \\ \prod_{\ell \in \Omega_n \setminus \{i,j\}} e_\ell x^{k-2i+1} & \text{if } i < \frac{k+1}{2} \\ \prod_{\ell \in \Omega_n \setminus \{i,j\}} e_\ell y^{2i-k-1} & \text{if } i > \frac{k+1}{2}, \end{cases}$$

若 $j - i = \frac{n}{2}$，且

$$hg^k|_{\{i,j\}} = \begin{cases} y^{i-1} x_{j-i} x^{k-i} & \text{if } j - i \leqslant \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \\ y^{i-1} y_{n-j+i} x^{k-i} & \text{if } j - i > \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \end{cases}$$

若 $j - i \neq \frac{n}{2}$ （照常记 $x^0 = y^0 =$ 为 id），则 $hg^k|_{\{i,j\}} \in M$。

因此，我们证明了 $M = \mathcal{ODI}_n$。

接下来，关于幺半群 $\mathcal{MDI}_n$，我们有 $\alpha = (\alpha h)h$，并且对所有 $\alpha \in \mathcal{MDI}_n \setminus \mathcal{ODI}_n$都有 $\alpha h \in \mathcal{ODI}_n$，由此可推得 $\mathcal{MDI}_n$由 $\mathcal{ODI}_n \cup \{h\}$生成。另一方面，对所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，我们有 $y = hxh$ 和 $he_ih = e_{n-i+1}$。因此，我们得出结论： $\{h, x, e_2, \ldots, e_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, x_1, x_2, \ldots, x_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}, y_1, y_2, \ldots, y_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\}$生成 $\mathcal{MDI}_n$。

最后，我们来考察幺半群 $\mathcal{OPDI}_n$。设 $\alpha \in \mathcal{OPDI}_n$。则有 $\alpha \in \mathcal{POPI}_n$，因此根据命题 3.1], , 存在 $0 \leqslant k \leqslant n-1$ 和 $\beta \in \mathcal{POI}_n$，使得 $\alpha = g^k\beta$。由于 $\beta = g^{n-k}\alpha \in \mathcal{DI}_n$，我们得到$\beta \in \mathcal{ODI}_n$。于是， $\alpha = g^k\beta$，其中 $\beta \in \mathcal{ODI}_n$。因此，$\mathcal{OPDI}_n$由 $\mathcal{ODI}_n \cup \{g\}$生成。另一方面，对所有 $1 \leqslant j \leqslant n$，我们有 $e_j = g^{n-j}e_ng^j$；对所有 $1 \leqslant \ell \leqslant \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$，我们有 $g^\ell x_\ell g^\ell = y_\ell$；此外，还有 $x = e_ng$和 $y = g^{n-1}e_n$。所以，$\mathcal{OPDI}_n$由 $\{g, e_n, x_1, x_2, \ldots, x_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\}$生成。

设 $1 \leqslant i \leqslant n$。由于 $e_n = g^i e_i g^{n-i}$，因此 $\{g, e_i, x_1, x_2, \ldots, x_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\}$ 也生成 $\mathcal{OPDI}_n$，如所需。 ■

为了确定这些幺半群的秩，我们首先证明以下引理:

引理 4.2 设 $1 \leqslant i \leqslant \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$，并设 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell$ 是 $\mathcal{DI}_n$ 中满足 $x_i = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_k$ 和 $y_i = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_\ell$ 的 $k + \ell (k, \ell \geqslant 1)$ 元素。

1. 若 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell \in \mathcal{MDI}_n$，则存在 $1 \leqslant p \leqslant k$, $1 \leqslant q \leqslant \ell$, $1 \leqslant a < b \leqslant n$ 和 $1 \leqslant c < d \leqslant n$，使得 $\mathrm{Dom}(\gamma_p) = \{a, b\}$, $\mathrm{Dom}(\lambda_q) = \{c, d\}$, $b - a = i$ 且 $d - c = n - i$。
2. 若 γ_1、 γ_2、 ...、 $\gamma_k \in \mathcal{OPDI}_n$，则存在 $1 \leqslant p \leqslant k$ 和 $1 \leqslant a < b \leqslant n$，使得定义域$(\gamma_p) = \{a, b\}$ 且 $b - a \in \{i, n-i\}$。

因此， $\mathcal{ODI}_n$、 $\mathcal{MDI}_n$ 和 $\mathcal{OPDI}_n$ 的任意生成集分别至少包含 $2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$、 $2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 和 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 个秩为二的变换。

证明。首先，注意到该引理的最后一个结论可直接由条件 1（注意 $\mathcal{ODI}_n \subseteq \mathcal{MDI}_n$）和条件 2，以及 $\{1,2,\ldots,\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor\}\cap\{n-i \mid 1\leqslant i\leqslant\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor\}=\emptyset$这一事实得出。我们先对 $\mathcal{MDI}_n$的元素作一些考察。

设 ξ 为 $\mathcal{MDI}_n$ 中秩大于或等于 2 的元素，并取 $0\leqslant t\leqslant n-1$，使得 $\xi=g^t|_{\mathrm{Dom}(\xi)}$ 或 $\xi=hg^t|_{\mathrm{Dom}(\xi)}$。

如果 ξ 是保序反转的且 $\xi=g^t|_{\mathrm{Dom}(\xi)}$，或者 ξ 是保序的且 $\xi=hg^t|_{\mathrm{Dom}(\xi)}$，那么 ξ 的秩必为 2：在第一种情况下，定义域(ξ) $=\{a<b\}$，且 $1\leqslant a\leqslant n-t<b\leqslant n$；在后一种情况下，$1\leqslant a\leqslant t<b\leqslant n$。我们称 $\mathcal{MDI}_n$ 中的这类元素 ξ 为反转的。

另一方面，如果 ξ 是保序的且 $\xi=g^t|_{\mathrm{Dom}(\xi)}$，或者 ξ 是保序反转的且 $\xi=hg^t|_{\mathrm{Dom}(\xi)}$，那么对于所有 a、$b\in$ ∈定义域(ξ)，都有

$$|a\xi-b\xi|=|a-b|. \tag{1}$$

注意，若 $a,b\in$Dom(ξ) 满足 $a<b$，则在第一种情况下，$1\leqslant a<b\leqslant n-t$ 或 $n+t+1\leqslant a<b\leqslant n$；在第二种情况下，$1\leqslant a<b\leqslant t$ 或 $t+1\leqslant a<b\leqslant n$。我们称 $\mathcal{MDI}_n$ 中的这类元素 ξ 为非反转的。

接下来，设 $\mathcal{MDI}_n$ 中的 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r$ 是 $r(\ r\geqslant 1)$ 个非反转元素，且 rank(ξ1ξ2 ··· ξr) $\geqslant 2$。那么，对所有 a, $b\in$Dom(ξ1ξ2 ··· ξr)，依次将 (1) 应用于 $\xi_r,\xi_{r-1},\ldots,\xi_1$，可得

$$|a\xi_1\xi_2\cdots\xi_r-b\xi_1\xi_2\cdots\xi_r|=|a-b|. \tag{2}$$

现在，为了证明 1，假设 $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_k,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\ell\in\mathcal{MDI}_n$（请记住，$\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_k=x_i$ 且 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_\ell=y_i$）。

如果 $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_k$ 都是 $\mathcal{MDI}_n$ 的非反转元素，那么由 (2) 可得

$$n-i=|1-(n-1+i)|=|1x_i-(1+i)x_i|=|1\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_k-(1+i)\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_k|=|1-(1+i)|=i,$$

这就产生了矛盾。因此，$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_k$ 中至少有一个元素是反转的。令 $1\leqslant p\leqslant k$ 为使 γ_p 反转的最小指标。于是，γ_p 的秩为 2，并且由于 $1\gamma_1\cdots\gamma_{p-1}$，$(1+i)\gamma_1\cdots\gamma_{p-1}\in$Dom(γp)，我们有 Dom(γp) $=\{1\gamma_1\cdots\gamma_{p-1},(1+i)\gamma_1\cdots\gamma_{p-1}\}$，由 (2) 可得，

$$|1\gamma_1\cdots\gamma_{p-1}-(1+i)\gamma_1\cdots\gamma_{p-1}|=|1-(1+i)|=i.$$

类似　地，如果 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\ell$ 都是 $\mathcal{MDI}_n$ 的非反转元素，那么由 (2) 可得

$$i=|1-(1+i)|=|1y_i-(n-1+i)y_i|=|1\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_\ell-(n-1+i)\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_\ell|=|1-(n-i+1)|=n-i,$$

这也产生了矛盾。因此，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\ell$ 中至少有一个元素是反转的，我们可以取使 λ_q 反转的最小指标 $1\leqslant q\leqslant\ell$。由于 $1\lambda_1\cdots\lambda_{q-1}$，$(n+i-1)\lambda_1\cdots\lambda_{q-1}\in$Dom(λq)，且 λ_q 的秩为 2，我们有 Dom(λq) $=\{1\lambda_1\cdots\lambda_{q-1},(n-i+1)\lambda_1\cdots\lambda_{q-1}\}$，由 (2) 可得，

$$|1\lambda_1\cdots\lambda_{q-1}-(n-i+1)\lambda_1\cdots\lambda_{q-1}|=|1-(n-i+1)|=n-i.$$

因此，我们证明了 1。

为证明 2，假设 $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_k\in\mathcal{OPDI}_n$(请记住我们有 $\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_k=x_i$)。我们首先注意到 $x_i=hg|_{\{1,1+i\}}$。由于 d(1,1 + i) $=i<\frac{n}{2}$，根据引理 1.3，hg是 $\mathcal{D}_{2n}$中 x_i的唯一扩张。若对所有 $1\leqslant j\leqslant k$，都存在 $0\leqslant t_j\leqslant n-1$使得 $\gamma_j=g^{t_j}|_{\mathrm{Dom}\,\gamma_j}$，那么 $x_i=g^{\sum_{j=1}^k t_j}|_{\{1,1+i\}}$，这与前面的结论矛盾。因此，存在 $1\leqslant p\leqslant k$使得 $\gamma_p=hg^t|_{\mathrm{Dom}(\gamma_p)}$，其中$0\leqslant t\leqslant n-1$。我们假设在这些条件下，指标 p 最小。由于 γ_p 保持方向，因此 Dom(γp) $=\{a,b\}$，其中 $1\leqslant a\leqslant t<b\leqslant n$。由于 $1\gamma_1\cdots\gamma_{p-1}$，$(1+i)\gamma_1\cdots\gamma_{p-1}\in$Dom(γp)，可得 Dom(γp) $=\{1\gamma_1\cdots\gamma_{p-1},(1+i)\gamma_1\cdots\gamma_{p-1}\}$。

另一方面，根据 p 的极小性，对于某个 $0\leqslant s\leqslant n-1$，我们有 $\gamma_1\cdots\gamma_{p-1}=g^s|_{\mathrm{Dom}(\gamma_1\cdots\gamma_{p-1})}$。因此

$$|1\gamma_1\cdots\gamma_{p-1}-(1+i)\gamma_1\cdots\gamma_{p-1}|=|1g^s-(1+i)g^s|\in\{i,n-i\},$$

如所要求。 ■

回顾一下，$\mathcal{ODI}_3 = \mathcal{POI}_3$、$\mathcal{MDI}_3 = \mathcal{PODI}_3$ 和 $\mathcal{OPDI}_3 = \mathcal{POPI}_3$。那么，幺半群 $\mathcal{ODI}_3$、$\mathcal{MDI}_3$和 $\mathcal{OPDI}_3$ 的秩分别为 3、3 和 2（见 [10, 11, 13]）。当 n 大于 3 时，我们有：

定理 4.3 对于 $n \geqslant 4$，幺半群 $\mathcal{ODI}_n$、$\mathcal{MDI}_n$ 和 $\mathcal{OPDI}_n$ 的秩分别为 $n + 2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$、$2 + 3\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ 和 $2 + \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$。

证明。令 $M \in \{\mathcal{ODI}_n, \mathcal{MDI}_n, \mathcal{OPDI}_n\}$，并设 G 是幺半群 M 的一个生成集。注意，部分恒等变换 e_1、.....、e_n 属于 M。

假设 $M = \mathcal{ODI}_n$。那么，M 的唯一置换是恒等变换，因此，对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，有 $e_i = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_k$，其中某个 γ_1、γ_2、.....、$\gamma_k \in G \setminus \{\mathrm{id}\}\,(k \geqslant 1)$，所以 $\mathrm{Im}(\gamma_k) = \mathrm{Im}(e_i) = \Omega_n \setminus \{i\}$。因此，$G$ 至少含有 n 个秩为 $n-1$ 的元素。于是，结合引理 4.2，可得 $|G| \geqslant n + 2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$。

接下来，假设 $M = \mathcal{MDI}_n$。回想一下，M 只有两种置换：恒等变换和 h。因此，特别地，我们必有 $h \in G$。令 $1 \leqslant i \leqslant n$。那么，存在 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in G \setminus \{\mathrm{id}\}\,(k \geqslant 1)$，使得 $e_i = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_k$ 且：$\gamma_k \neq h$；或者 $k \geqslant 2$，$\gamma_k = h$ 且 $\gamma_{k-1} \neq h$。因此，$\mathrm{Im}(\gamma_k) = \mathrm{Im}(e_i) = \Omega_n \setminus \{i\}$，或者 $\mathrm{Im}(\gamma_{k-1}) = \mathrm{Im}(e_i)h = \Omega_n \setminus \{n-i+1\}$。由此可得，$G$至少有 $\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$ 个秩为 $n-1$ 的元素。因此，根据引理 4.2，我们得到 $|G| \geqslant 1 + \lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor + 2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor = 2 + 3\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$。

最后，假设 $M = \mathcal{OPDI}_n$。由于 $\mathcal{OPDI}_n$ 包含置换 g 和一个秩为 $n-1$的部分恒等变换，因此可以得出，G至少包含一个置换和一个秩为 $n-1$的变换。因此，结合引理 4.2，可得$|G| \geqslant 2 + \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$。

由于命题 4.1 给出了 $\mathcal{ODI}_n$、$\mathcal{MDI}_n$和 $\mathcal{OPDI}_n$的生成集，分别包含 $n + 2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$、$2 + 3\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$和 $2 + \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$个元素，因此定理得证。 ■

致谢

我们感谢匿名审稿人提出的宝贵建议。

作者谨 感谢 Eden Santos 帮助审阅本文的英文。

第二位和第四位作者感谢葡萄牙科学技术基金会（FCT - Funda.c˜ao para a Ciˆencia e a Tecnologia, I.P.）在项目 UIDB/00297/2020 和 UIDP/00297/2020（NovaMath—数学与应用中心）范围内提供的资助。

声明与披露

利益冲突：作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] F. Al-Kharousi、R. Kehinde 和 A. Umar，《有限链上某些部分等距变换半群的组合结果》，《Australas. J. Combin.》58（2014年），365–375.[2] F. Al-Kharousi、R. Kehinde和 A. Umar，《关于有限链的部分等距变换半群》，《Commun. Algebra》44（2016年），639–647.[3] J. Ara´ujo、W. Bentz、J.D. Mitchell 和 C. Schneider，《稳定有限集划分的变换半群的秩》，《Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.》159（2015年），339–353.[4] P.M. Catarino 和 P.M. Higgins，《链上的保向映射幺半群》，《Semigroup Forum》58（1999年），190–206.[5] I. Dimitrova，《所有部分保序等距变换的半群的极大子半群》，《第五届 FMNS-2013 国际科学会议论文集》，第1卷（2013年），95–101。

[6] I. Dimitrova、V.H. Fernandes、J. Koppitz 和 T.M. Quinteiro，《有限无向路径上自同态幺半群的秩》，马来西亚数学科学学会公报 43（2020年），1623–1645.[7] I. Dimitrova、V.H. Fernandes、J. Koppitz 和 T.M. Quinteiro，《有限无向路径的部分自同构与单射部分自同态》，《Semigroup Forum》103（2021年），87–105.[8] I. Dimitrova 和 J. Koppitz，《关于有限集上所有保栅栏的部分单射构成的半群》，《代数及其应用杂志》16（2017年），1750223.[9] I. Dimitrova、J. Koppitz 和 L. Lohapan，《保持自然数集上之字形序的部分变换半群的生成集》，《纯粹与应用数学国际杂志》117（2017年），279–289.[10] V.H. Fernandes，《有限链上所有单射保向部分变换构成的幺半群》，《Commun. Algebra》28（2000年），3401–3426.[11] V.H. Fernandes，《有限链上所有单射保序部分变换构成的幺半群》，《Semigroup Forum》62（2001年），178-204.[12] V.H. Fernandes，《有限链上某些部分变换幺半群的表示：综述》，´《半群、算法、自动机与语言》，编者：Gracinda M. S. Gomes、Jean-Eric Pin 和 Pedro V. Silva，世界科学出版社（2002年），363–378.[13] V.H. Fernandes、G.M.S. Gomes 和 M.M. Jesus，《有限链上某些单射部分变换幺半群的表示》，《东南亚数学公报》28（2004年），903–918.[14] V.H. Fernandes、P. Honyam、T.M. Quinteiro 和 B. Singha，《关于值域受限的链的自同态半群》，《Semigroup Forum》89（2014年），77–104.[15] V.H. Fernandes、J. Koppitz 和 T. Musunthia，《有限栅栏上所有保序变换构成的半群的秩》，马来西亚数学科学学会公报 42（2019年），2191–2211.[16] V.H. Fernandes 和 T. Paulista，《关于有限星图的部分等距变换幺半群》，《Commun. Algebra》51(3)（2023年），1028–1048.[17] V.H. Fernandes 和 T. Paulista，《关于圈图的部分等距变换幺半群》，《土耳其数学杂志》（待刊）。[18] V.H. Fernandes 和 T.M. Quinteiro，《关于保持均匀划分的某些变换幺半群的秩》，《Commun. Algebra》42（2014年），615–636.[19] V.H. Fernandes 和 T.M. Quinteiro，《有限部分等距变换幺半群的表示》，《Semigroup Forum》93（2016年），97–110.[20] V.H. Fernandes 和 J. Sanwong，《关于有限集上值域受限的变换半群的秩》，《代数研讨会》21（2014年），497–510.[21] GAP 团队，GAP——群、算法与编程，4.11.1版；2021年。（https://www.gap-system.org）[22] G.M.S. Gomes 和 J.M. Howie，《关于某些保序变换半群的秩》，《Semigroup Forum》45（1992年），272–282.[23] J.M. Howie，《半群理论基础》，牛津：牛津大学出版社，1995年.[24] J.M. Howie 和 M.I.M. Ribeiro，《有限半群中的秩性质》，《Commun. Algebra》27（1999年），5333–5347。

[25] P.M. Higgins 和 A. Vernitski，《保向与反向映射：一种新的描述》，《半群论坛》104（2022），509–514。

[26] D. McAlister，《由群和幂等元生成的半群》，《Commun. Algebra》26（1998），515–547。

[27] T. Paulista，《若干单连通图的部分等距变换》，硕士论文，里斯本新大学科学与技术学院，2022。

Ilinka Dimitrova，数学系，数学与自然科学学院，西南大学“Neofit Rilski”，保加利亚布拉戈耶夫格勒 2700；电子邮件：ilinka dimitrova@swu.bg。

Vítor H. Fernandes，数学与应用中心（NovaMath）及数学系，FCT NOVA，里斯本新大学科学与技术学院，卡帕里卡山，葡萄牙卡帕里卡 2829-516；电子邮件：vhf@fct.unl.pt。

Jörg Koppitz，保加利亚科学院数学与信息学研究所，保加利亚索非亚 1113；电子邮件：koppitz@math.bas.bg。

Teresa M. Quinteiro，里斯本高等工程学院，葡萄牙里斯本 1950-062。此外：数学与应用中心（NovaMath）、里斯本新大学科学与技术学院，葡萄牙卡帕里卡山卡帕里卡 2829-516；电子邮件：tmelo@adm.isel.pt。