无嫉妒动态定价方案

Krist´of B´erczi[1],Laura Codazzi[2],Julian Golak[2],和 Alexander Grigoriev[3]

[1]MTA-ELTE 动量拟阵优化研究组和 MTA-ELTE Egerv´ary 研究组，运筹学系，E¨otv¨os Lor´and 大学，布达佩斯，匈牙利。电子邮箱：kristof.berczi@ttk.elte.hu。[2]汉堡工业大学算法与复杂性研究所，汉堡，德国。电子邮箱：laura.codazzi@tuhh.de，julian.golak@tuhh.de。[3]马斯特里赫特大学数据分析与数字化系，马斯特里赫特，荷兰。电子邮箱：a.grigoriev@maastrichtuniversity.nl。

arXiv:2301.01529v1 [cs.GT] 4 Jan 2023

摘要

组合市场由一组不可分割物品和一组代理人构成，其中每位代理人都有一个估值函数，用于指定每个物品子集对该代理人的价值。从优化角度来看，目标通常是确定一组定价和物品分配方案，以实现资源的有效分配，即最大化社会福利；或者尽可能提高卖方的盈利，即最大化收入。为克服采用静态价格的机制所存在的不足，近期的研究转而关注动态定价方案。在这一模型中，代理人以未指定的顺序依次到达，且价格可在两次代理人到达之间更新。尽管动态情境在多种情况下能够实现社会福利最大化，但代理人依次到达这一假设排除了公平性的标准概念。

本文研究单位需求市场中满足公平性约束的最优动态价格是否存在。我们提出四种强度不同的无嫉妒性定义，具体取决于代理人与他人进行比较的时间范围：整个时间范围、仅过去、仅未来或仅当前。对于社会福利最大化，第一种定义导向瓦尔拉斯均衡；对于其余三种情形，我们给出能够始终找到无嫉妒最优动态价格的多项式时间算法。相比之下，对于收入最大化，我们证明，若代理人排序固定，相应问题是 APX-困难的。另一方面，对于卖方可以选择代理人到达顺序的情形，我们给出多项式时间算法。

关键词：算法、动态定价方案、无嫉妒分配、收入最大化、社会福利最大化

1 引言

调查和市场调研的大量普及，使卖方能够预测顾客对不同产品的兴趣，从而为采用用户特定定价流程创造了可能。虽然这有助于顾客做出购买决策，却也让卖方的定价过程更具挑战性。在此背景下，一些简单的经济规律显而易见：低价格通常能吸引更多顾客，但每件商品收入较低；而高价格

能带来更高的每件商品收入，却只能吸引较少顾客。卖方力求在提高收入的同时保持顾客满意度，因此对有效定价策略的需求日益增长。

我们研究组合市场，其中一组不可分割物品需要分配给一组代理人。每位代理人对每个物品子集都有一个估值，用以衡量获得该物品组合对代理人的价值。分配是指为每位代理人分配一组物品，并确保每件物品至多分配给一位代理人。在标价机制中，卖方可以为每件物品单独定价；代理人对某一给定物品组合的效用，等于该代理人对该物品组合的估值减去其中所有物品的总价格。因此，效用衡量的是代理人按给定价格购买该物品组合中的所有物品时的满意程度。如果没有代理人更愿意获得不同的物品组合，则该分配被称为无嫉妒。

本文从两个角度研究动态环境中的资源分配问题。首先，我们关注如何设定价格，使市场均衡能够最大化整体社会福利，即代理人估值之和。其次，我们研究如何设定价格以使卖方利润最大化。据我们所知，本研究首次将无嫉妒性的概念拓展至动态情境。

前人工作。 长期以来，通过简单机制实现最优社会福利一直备受关注，这得益于其广泛的应用。特别是，标价机制成为分配资源的关键方法，因此，在组合市场中寻找最优定价方案是一个基本问题。如果所有物品都被分配给某人，并且每个代理人获得的物品组合都能最大化其效用，那么这对定价与分配就被称为瓦尔拉斯均衡——该定义自动意味着相应的分配能够最大化社会福利。瓦尔拉斯均衡的思想早在19世纪末就已提出 [16] ，Kelso and Crawford 证明了总替代估值下此类均衡的存在性 [14]。然而，Cohen-Addad 等人指出 [8]，Hsu 等人也独立地指出，[13]瓦尔拉斯分配的存在性在很大程度上取决于平局处理过程，而这一过程通常由中央协调者执行。如果代理人依次到达，并任意选择一个能最大化其效用的物品组合，那么缺乏平局处理规则可能导致社会福利次优的分配。为克服这些困难，Cohen-Addad 等人 [8] 引入了动态价格的概念，事实证明，这一概念是设计无需中央平局处理协调者的市场的有力工具。在所提出的模型中，代理人按照未指定的顺序依次到达，并且可以在下一位代理人到达之前更新物品价格。他们的主要结果是在单位需求市场中给出一种能够实现最优社会福利的多项式时间动态定价方案。这项工作开启了对动态定价方案的研究；随后，Berger、Eden 和 Feldman 解决了具有多重需求估值的三位代理人情形下最优动态价格的存在性 [5]，对于双重需求估值则由 B´erczi、B´erczi-Kov´acs 和 Sz¨ogi [3], 解决；对于具有某些拟阵秩估值的两位代理人情形，则由 B´erczi、Kakimura 和 Kobayashi [4], 解决；最近，Pashkovich 和 Xie 又解决了具有多重需求估值的四位代理人情形 [15]。

市场出清条件可能导致卖方获得收入较低的瓦尔拉斯均衡，即使价格已经尽可能高。在 Guruswami 等人的开创性工作中， [12], 嫉妒无关定价被提出，作为放宽瓦尔拉斯均衡的一种方式：取消市场出清要求，但保留相同的公平性条件。在他们的模型中，每个代理人对每种物品组合都有需求和估值，且每种物品的供给有限；目标是在此情况下最大化收入。作者证明，即使对于单位需求市场，最大化收入也已是 APX-困难问题；并针对单位需求和单参数情形，给出了关于客户数量的对数近似。一项类似的困难性结果

由 Aggarawal 等人独立证明。 [1]随后，研究表明该问题的若干变体具有多对数级不可近似性，例如 Briest [6]以及 Chalmersook、Laekhanukit 和 Nanogkai [7]。Bansal 等人 [2]将嫉妒无关的概念用于跨时定价方案。在他们的模型中，有一种供给无限的单一物品，每个代理人对应一个时间区间，在此期间她会考虑购买该物品的一件复制品，同时还对应一个她愿意支付的最高金额。卖方的目标是在每个时间单位设定价格，从而最大化整个时间段内出售该物品复制品所获得的收入。

我们的结果。动态定价方案最初旨在将打破平局的过程从中央协调者转移给顾客，因为在现实中，顾客选择物品组合时并不考虑社会最优。如上述结果所示，动态情境确实能够在无需中央协调者的情况下最大化社会福利。另一方面，这种做法会影响最终分配的公平性，而这一点通常未被强调。该模型假设，顾客唯一的目标是根据其到达时可用的价格，选择能使自身效用最大化的物品组合；他们并不关心更早和／或更晚时段的价格。这意味着，无嫉妒性只在局部得到保证，而最终分配以及物品的购买价格未必能在整个时间范围内构成一个无嫉妒解。

我们的首项贡献是开启了全局公平约束下动态定价方案的研究。我们将无嫉妒性的概念扩展到单位需求市场中的动态情境，并提出四种强度各异的可能定义，具体取决于代理人关注的是整个时间范围内的价格、仅过去的价格、仅未来的价格，还是仅其到达时的价格。请注意，最后一种情况对应于动态定价问题的标准情境。我们证明，尽管在整个时间范围内确保无嫉妒性基本上会使问题回到静态价格的情形，但在其余情况下，可以通过无嫉妒的动态价格实现最优社会福利。

在收入最大化方面，关于最优利润的多对数级不可近似性的结果促使我们寻求新的方法。鉴于动态定价方案在社会福利最大化中的成功，一个自然的想法是将动态模型与收入最大化结合起来。Bansal 等人的工作 [2]提出了一种与这一想法相似的设定。然而，他们的模型只有一种物品，且供给无限；在顾客的出价区间内，物品以最低价格售予代理人，因此得到的分配仍然只有局部无嫉妒。

我们的第二项贡献是在动态情境下分析收入最大化问题，其中公平性采用上述四种定义之一。我们证明，与社会福利最大化不同，动态价格的灵活性在此并无助益，因此大多数问题都是 APX-困难的。

以往关于动态定价方案的大多数研究都假设顾客依照未指定的顺序依次到达。除这一标准情形外，我们还在上述所有情境中考虑另外两种可能：顾客按预定顺序到达，以及卖方有机会决定顾客的到达顺序。

现实动机。本文讨论的每一种无嫉妒性概念，都代表着一种自然的公平性观念，这种观念在日常生活中随处可见。在某些市场中，晚到的代理人不会认为此前设定的价格不公平。在这种情况下，卖方会设法确保代理人不会因到得太早而受到不利影响。在其他情况下，随时间推移降低价格是确保市场出清的常见策略。在这类市场中，

代理人更愿意接受整体库存较低时价格也较低这一事实，因此不会认为定价过程不公平。这些关于顾客行为的假设是合理的；当代理人分别只关注未来和过去的价格时，我们的无嫉妒性概念便体现了这些假设。

在各种市场情境中，顾客必须登记其到达时间以及对特定物品的兴趣。根据买方登记的是空闲时段，还是由卖方为其分配时段，这些情形还可以进一步区分。因此，关于代理人到达情况所提出的假设，反映了卖方所面临的现实问题。

本文其余部分安排如下。第2节介绍基本符号和定义。第3节讨论社会福利最大化。本文的主要结果见第3.2 节和3.3节，分别给出使用事后和事前无嫉妒动态价格实现社会福利最大化的多项式时间算法。第4节讨论收入最大化的相关结果。最后，第5 节总结本文，并列出有待未来研究解决的开放问题。

2 预备知识

基本符号。我们用 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}_+$分别表示实数集和非负实数集。对于正整数 t，我们用 $[t]$ 表示集合 $\{1,\dots,t\}$。设 $\mathcal{I}$为一个基集。对于两个子集 X，$Y \subseteq \mathcal{I}$，它们的对称差为 $X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$。当 Y只包含一个元素 y时，差集 $X \setminus \{y\}$ 和并集 $X \cup \{y\}$ 分别简写为 $X - y$和 $X + y$。对于函数 $f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$，其在 X上的取值总和记为 $f(X) := \sum_{s \in X} f(s)$。对于 $X = \emptyset$，定义 $f(\emptyset) = 0$。

图。我们用 $G = (\mathcal{I}, \mathcal{A}; E)$ 表示一个二分图，其中 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{A}$ 是顶点类，E 是边集。所谓边权，是指一个函数 $w\colon E \to \mathbb{R}_+$。对于子集 $X \subseteq \mathcal{I} \cup \mathcal{A}$，由 X导出的 X 子图是从 G 中删除所有不包含在 X 中的顶点及与其关联的边后得到的图。我们用 ai 表示连接 $a \in \mathcal{A}$ 和 $i \in \mathcal{I}$ 的一条边。

通过对二分图的边进行定向，我们得到一个有向图 $D = (\mathcal{I}, \mathcal{A}; F)$，其中 F 是弧集。如果有向图中的每个顶点都可以通过一条有向路径从其他任一顶点到达，则称该有向图强连通。有向图的一个强连通分量是一个具有强连通性且关于此性质为极大的子图。将有向图的每个强连通分量收缩为一个顶点，可以得到一个有向无环图。因此，这些强连通分量具有所谓的拓扑序，其中连接不同分量的每条弧都从较早的分量指向较晚的分量。

市场模型。组合市场由一组 $\mathcal{I}$ 不可分割物品 和一组 $\mathcal{A}$代理人构成。本文中，我们分别用 $m := |\mathcal{I}|$ 和 $n := |\mathcal{A}|$ 表示物品数量和代理人数量。分配 $\mathbf{X}$ 为每位代理人 a 分配一组 X_a 物品，使每件物品最多只分配给一位代理人。

在单位需求市场中，每个代理人 $a \in \mathcal{A}$ 都有一个估值 $v_a\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}_+$ 针对各个物品，并且她只需要一个商品；也就是说，我们考虑满足$\mathbf{X}$ $|X_a| \le 1$的分配（对于 $a \in \mathcal{A}$ ）——在这种情况下，我们将代理人 a 获得的物品记为 x_a。我们始终假设代理人的估值是预先已知的。此外，我们假设对于所有代理人 $a \in \mathcal{A}$，$v_a(\emptyset) = 0$ 。给定每件物品 $i \in \mathcal{I}$的价格 $p(i)$，代理人 a 对物品 i 的效用为

$u_a(i) := v_a(i) - p(i)$。与该分配对应的社会福利为 $\sum_{a \in \mathcal{A}} v_a(x_a)$，而卖方的收入为 $\sum_{a \in \mathcal{A}} p(x_a)$。

在静态定价方案中，卖方预先设定每件物品 $i \in \mathcal{I}$ 的价格 $p(i)$。组合市场中的两个基本问题是，寻找一对定价向量 $p: \mathcal{I} \to \mathbb{R}_+$ 和分配 $\mathbf{X}$，使社会福利或收入最大化。相比之下，在动态定价方案中，代理人依次到达，卖方可以根据剩余的物品集合和代理人集合，在他们到达之间更新价格。代理人的到达顺序由一个双射 $\sigma: \mathcal{A} \to [n]$ 表示。第 t 个代理人到达之前可用的代理人、物品和价格集合分别记为 $\mathcal{A}_t$、$\mathcal{I}_t$ 和 p_t。因此，代理人 a 在时间步 t 对物品 i 的效用定义为 $u_{a,t}(i) := v_a(i) - p_t(i)$。下一位代理人总是选择使其效用最大的物品。最后一位买方离开后，定价方案终止，并产生定价向量 $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ 和分配 $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)$，其中 p_t 是第 t 个代理人到达时可用的价格向量，x_t 是分配给该代理人的物品。注意，如果代理人对 $\mathcal{I}_t$ 中每件物品的效用都非正，则 x_t 可能是空集。如果无论代理人的到达顺序如何，最终分配都能使目标（即社会福利或收入）最大化，我们就称该动态定价方案为最优。

接下来，我们定义模型的不同变体。根据物品之间的平局由卖方还是代理人打破，我们区分两种情况：

(C1) 卖方选择。 如果有多个物品能使当前代理人的效用最大化，则由卖方决定分配给她哪件物品。(C2) 代理人选择。 如果有多个物品能使当前代理人的效用最大化，则由她决定选取哪件物品。

就寻找最优定价而言，问题 (C1) 更容易。事实上，给定问题 (C2) 的一个最优定价，卖方总能决定分配代理人所选的物品。

以往的研究通常假设代理人以未指定的顺序到达。除此之外，我们还根据对到达过程的控制和掌握的信息，考虑另外两种变体：

(O1) 未指定。 代理人按固定顺序到达，但卖方对此一无所知 on.

(O2) 预先确定。 代理人按固定顺序到达，且卖方事先知道该顺序 .

(O3) 可更改。 代理人的顺序由卖方决定。

我们的模型与以往模型的主要区别在于，我们旨在寻找满足公平性约束的最优定价方案。在静态情形中，一组价格 p 和分配 $\mathbf{x}$ 若满足以下条件，则称为无嫉妒：$x_a \in \arg\max\{u_a(i) \mid i \in \mathcal{I}\}$ 对每个代理人 $a \in \mathcal{A}$ 均成立。动态情境自然引出了若干变体，其中无嫉妒性是在部分时间步上定义的。令每个代理人 $a \in \mathcal{A}$ 对应的时间步子集为 $T_a \subseteq [n]$。那么，价格向量 $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ 和分配 $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ 构成无嫉妒分配，当且仅当 $x_a \in \arg\max\{u_{a,t}(i) \mid t \in T_a, i \in \mathcal{I}_t\}$ 对每个代理人 $a \in \mathcal{A}$ 均成立。根据代理人相互比较的时间段，我们提出了四种强度不同的无嫉妒性定义：

(F1) 强无嫉妒。 代理人会考虑整个时间范围内的价格，即 $T_a = \{1, \ldots, n\}$ for $a \in \mathcal{A}$。(F2) 事后无嫉妒。 代理人会考虑其到达之后及到达时可用的价格，即 $T_a = \{\sigma(a) \ldots, n\}$ for $a \in \mathcal{A}$。(F3) 事前无嫉妒。 代理人会考虑其到达之前及到达时可用的价格，即 $T_a = \{1, \ldots, \sigma(a)\}$ for $a \in \mathcal{A}$。

表1：单位需求市场中公平性约束下社会福利最大化和收入最大化的复杂性全景。算法结果（绿色单元格）在代理人选择情形下也成立，而困难性结果（红色单元格）在卖方选择情形下已经成立。每一行中，浅色单元格的复杂性由深色单元格所蕴含。

	Ties	社会福利最大化			收入最大化		
		未指定	预先确定	可更改	未指定	预先确定	可更改
Strong	代理人	不存在	不存在	不存在 注：1	不存在	不存在	不存在 注。1
	卖方	P [14, 16]	P	P	APX-困难	APX-困难	APX-困难 定理。19
Ex-post		P 定理。9	P	P	APX-困难	APX-困难 定理 20	P 定理 21
Ex-ante		P 定理 14	P	P	APX-困难	APX-困难 定理 20	P 定理 22
Weak		P [8,定理 3.1]	P	P	Open	P 定理 23	P

(F4) 弱无嫉妒。 代理人会考虑其到达时的价格，即 $T_a = \{\sigma(a)\}$ for $a \in \mathcal{A}$。

采用这一术语，在 [3–5,8,15]中讨论的最优动态定价方案提供弱嫉妒自由解。值得一提的是，尽管乍看之下它们似乎具有对称性，但事后情形和事前情形的表现却截然不同。

至于目标函数，我们考虑社会福利 $W(\mathbf{X}) = \sum_{a\in\mathcal{A}} v_a(x_a)$，或所有售出商品的收入 $R(\mathbf{p},\mathbf{X}) = \sum_{a\in\mathcal{A}} p_{\sigma(a)}(x_a)$。

这些变体及论文中的结果汇总于表 1中。表格按所考虑的无嫉妒性类型横向划分，各列则按代理人排序的类型编排。算法结果不受代理人如何打破平局的影响，而困难性结果即使在由卖方打破平局时也成立。值得注意的是，Guruswami 等人提出的 $O(\log(n))$-近似算法 [12]可推广至所有以最大化收入为目标的无嫉妒定价变体。

注1. 在强无嫉妒定价模型中，若由代理人打破平局，则以社会福利或收入为目标进行优化可能会产生非确定性解。在这种情况下，定价方案的“最优性”并没有明确定义。Cohen-Addad 等人提出的经典例子很好地说明了这一点：有三个物品 [8] 、 i_1, i_2, i_3 和三个代理人 a_1, a_2, a_3 ，其估值为 $v_{a_j}(i_j) = v_{a_j}(i_{j+1}) = 1$ $v_{a_j}(i_{j+2}) = 0$，其中下标按循环顺序排列。由于每件物品对其中两位代理人的价值相同，强无嫉妒性意味着卖方应对所有物品设定相同价格，且无法调整这些价格。假设$p(i_1) = p(i_2) = p(i_3) = 1$ ，并且代理人 j_3 首先到达并选择物品 i_3。如果 j_1 随后到达，她在 i_1 和 i_2之间无差异，但最终实现的社会福利或收入会很大程度上取决于她的选择。为克服这些困难，可以考虑不同的目标函数，例如最坏情况下或平均的社会福利或收入。不过，这超出了本文的范围，我们将其留作未来研究的课题。

加权覆盖。 单位需求组合市场可以表示为完全边加权二分图 $G = (\mathcal{I}, \mathcal{A}; E)$，其中顶点类 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{A}$ 分别对应物品集和代理人集。对于任意物品 $i \in \mathcal{I}$ 和代理人 $a \in \mathcal{A}$，边的权重

为 ai 是 $w(ia) := v_a(i)$。于是，最大化社会福利的分配与 G的最大权匹配之间存在一一对应关系。此外，匹配的最大权重显然是任何定价机制所能实现的最大收入的上界。这些观察促使我们从最大权匹配的角度研究动态定价方案。

我们将 G的顶点集记为 $V := \mathcal{I} \cup \mathcal{A}$。如果对每条边 $ia \in E$，都有 $\pi(i) + \pi(a) \geq w(ia)$，则称函数 $\pi\colon V \to \mathbb{R}$为加权覆盖。该覆盖的总值为 $\pi(V) = \sum_{v \in V} \pi(v)$。总值最小的加权覆盖称为最优加权覆盖。图优化的一项基石性成果由 Egerv´ary [9] 提出，他为二分图中匹配的最大权重给出了极大极小刻画。

定理 2 (Egerv´ary [9])。设 $G = (\mathcal{I}, \mathcal{A}; E)$ 是一个二分图，$w\colon E \to \mathbb{R}$ 是定义在边集上的权重函数。那么，匹配的最大权重等于 π 的非负加权覆盖的最小总值。

给定一个加权覆盖 π、物品 $i \in \mathcal{I}$ 和代理人 $a \in \mathcal{A}$，如果边 ai 满足 $\pi(i) + \pi(a) = w(ia)$，则称其相对于 π 是紧的。紧边构成的子图 记作$G_\pi = (\mathcal{I}, \mathcal{A}; E_\pi)$。如果存在一个包含边 $ia \in E$的最大权匹配，则称该边为合法 边；此时，我们称 i 对于 a是合法 的。已知合法边相对于任意最优加权覆盖始终是紧边，而反过来则不一定成立，也就是说，紧边未必合法。然而，[3, 引理 5] 表明，谨慎选择 π 可以确保紧边集与合法边集重合。

引理 3 (B´erczi, B´erczi-Kov´acsand Sz¨ogi [3])。达到定理 π 中最小值的最优 *2* 可以选择为满足以下条件的形式

(a) 边 ai 相对于 π 是紧的，当且仅当它是合法的；并且

(b) $\pi(v) = 0$ 对某个 $v \in V$ 成立，当且仅当存在一个最大权匹配 M，使得$d_M = 0$。

此外，可以在多项式时间内确定这样的 π 。

最后，我们将使用以下技术引理，参见 [3, 引理 1]。

引理 4。给定一个与单位需求组合市场对应的二分图 $G = (\mathcal{I}, \mathcal{A}; E)$，我们可以假设，$G$的每个最大权匹配都覆盖所有物品。

3 最大化社会福利

由于瓦尔拉斯均衡能够最大化社会福利，同时确保无嫉妒性，因此，当平局由卖方打破时，公平性约束下最优动态定价方案的存在性问题便得到了解决。Cohen-Addad 等人的开创性论文 [8] 开启了对代理人选择情形的研究，并提出了一种算法，用于确定单位需求市场中的弱无嫉妒解。

B´erczi、B´erczi-Kov´acs 和 Sz¨ogi [3]后来给出了同一结果的另一种证明。他们的算法从表示市场的边加权二分图中，由引理3 提供的最小权加权覆盖开始，并根据覆盖值设定初始价格。因此，第一个代理人 a 会选择物品 i，使得 ai 是紧的，因此 i 对 a是合法的。基于此，似乎只要始终保持价格不变，最终得到的分配就会是最大权匹配。然而，在物品 i 被取走后，之前合法的一条边可能变得不再合法。为了解决这个问题，必须在每个时间步更新剩余图中的加权覆盖

因此，每个时间步都需要在剩余图中更新加权覆盖，这会导致物品的价格随时间波动。正因如此，该算法无法推广到事后无嫉妒和事前无嫉妒的情形。

为避免价格波动，我们不会在每个时间步都从头重新计算加权覆盖。相反，我们在一开始就固定一个加权覆盖，之后始终对其稍作调整，以此控制代理人的选择，使得

(A) 无论接下来哪位代理人到达，如果她被当前图中的每个最大权匹配所覆盖，那么她会选择对她而言合法的物品；否则，她要么选择对她而言合法的物品，要么不拿取任何物品；并且
(B) 从时间步 $t-1$ 到 t 的价格变化，在事后情形中仅限于不增加，在事前情形中仅限于不减少。

第一项性质意味着最终分配对应于G的一个最大权匹配，因此使社会福利最大化。第二项性质确保所得分配满足事后或事前无嫉妒性的要求。

3.1 准备工作

考虑表示该市场的边加权二分图 $G=(\mathcal{I},\ \mathcal{A};\ E)$。根据引理 4，我们可以假设所有物品都被 G的每个最大权匹配所覆盖。取一个由引理 3给出的加权覆盖 π 。在本节中，边的紧性始终是相对于 π而言的。回想一下， G_π 表示由紧边构成的子图。

在时间步 t，剩余代理人与物品的集合分别记为 $\mathcal{A}_t$ 和 $\mathcal{I}_t$。我们将由顶点 $\mathcal{I}_t \cup \mathcal{A}_t$ 诱导的 G_π 的子图记为 $G_t=(V_t,\ E_t)$。对于 G_t的一个最大权匹配 M_t ，令 x_a^t 表示在 M_t 中与 a 匹配的物品（如果存在这样的物品），否则定义 x_a^t 为空集。注意，边 ax_a^t 显然在G_t中是合法的。

给定这样一个匹配 M_t，我们按如下方式构造一个有向图 D_t 。我们将 M_t 中的每条边再添加一个副本到 G_t 中，并将其称为虚拟边。然后，我们将 M_t 中的原始边从 $\mathcal{I}_t$ 指向 $\mathcal{A}_t$，并将所有其余边（包括虚拟边）从 $\mathcal{A}_t$ 指向 $\mathcal{I}_t$。我们将所得有向图的强连通分量记为 C_1^t、……、$C_{q_t}^t$，并按照拓扑序进行编号，示例见图1 。

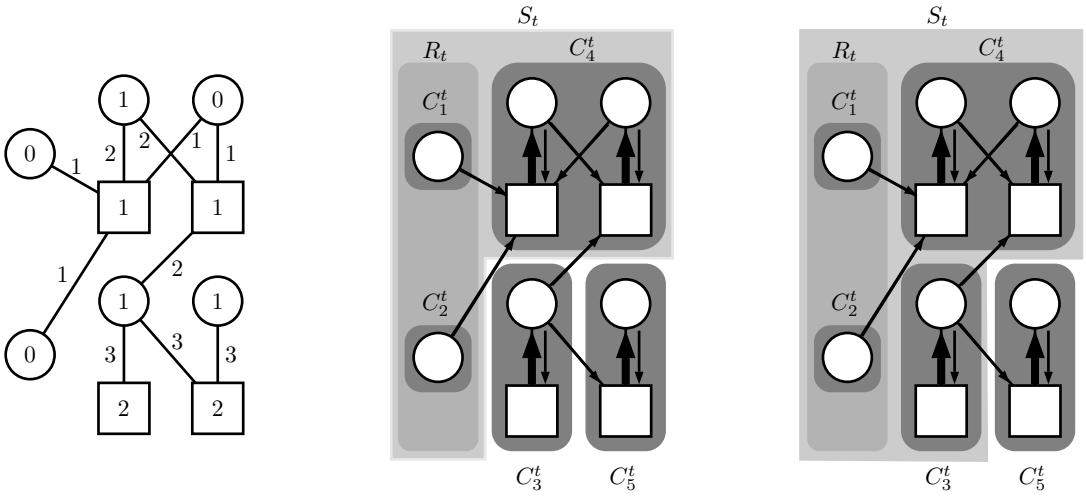
以下技术性断言将在后文中使用。

断言 5. 设 $a\in\mathcal{A}_t$ 和 $i\in\mathcal{I}_t$ 属于 D_t 的同一个强连通分量，且 ai 是紧的。那么， i 对于 G_t中的 a 是合法的。

证明。 如果这条边的方向是从 i 指向 a，那么 $ia\in M_t$ ，结论显然成立。否则，这条边的方向是从 a 指向 i。由于强连通有向图的每条弧都包含在一个有向环中，只需证明任意有向环 C 仅由合法边组成。由 G_t 的所有边都是紧的这一事实可知这一点，因此 $M_t\triangle C$ 也是 G_t 的一个最大权匹配，这意味着它由合法边组成。 □

在事后和事前情形中，我们的证明都基于以下思路。不难验证，若将每件物品的价格设为其 π 价值，那么代理人会严格偏好通过紧边与其相连的物品，而非对应边不紧的物品，见引理 6。然而，随着时间推移，紧边不再必然合法。为了防止下一位代理人选择这样的边，我们将根据具体情形稍微调整价格。为此，设 $\delta>0$ 为满足以下条件的常数

$$\delta<\frac{1}{2}\min\big\{\min\{\pi(a)+\pi(i)-v_a(i)\mid ia\in E \text{ is not tight}\},\ \min\{\pi(i)\mid i\in\mathcal{I}\}\big\}.$$



(a) G_t 带边权以及 (b) 集合的定义 S_t 在 (c) 集合的定义 S_t 在加权覆盖值。定理 21的证明。定理 22的证明。

图1：事后和事前情形构造的示意图。圆形和方形分别对应代理人和物品。粗边表示最大权匹配M_t，而 C_1^t、.....、C_5^t是有向图 D_t的强连通分量。

注意，根据引理 δ，这样的3(b) 和 4存在。我们还选取一个较小的常数 $0 < \varepsilon < \delta/(n2^n)$，稍后将用到。下面的断言表明，紧边带来的效用高于非紧边。

断言 6。设 $a \in \mathcal{A}_t$ 和 $i, i' \in \mathcal{I}_t$ 满足：ai 是紧的，ai' 不是紧的。如果 $p_t(i) \leq \pi(i) + \delta$且 $p_t(i') \geq \pi(i') - \delta$，那么 a 严格偏好 i 而非 i'。

证明。假设 $p_t(i) \leq \pi(i) + \delta$ 且 $p_t(i') \geq \pi(i') - \delta$。由于 ai 是紧的而 ai' 不是紧的，根据 δ的定义，我们有 $v_a(i) = \pi(a) + \pi(i)$ 以及 $v_a(i') + 2\delta < \pi(a) + \pi(i')$。因此得到

$$\begin{aligned} u_{a,t}(i') &\leq v_a(i') - (\pi(i') - \delta) \\ &< \pi(a) - \delta \\ &= v_a(i) - (\pi(i) + \delta) \\ &\leq u_{a,t}(i). \end{aligned}$$

因此，a 对物品 i 的效用严格大于对物品 i'的效用，证明完毕。 □

最后，以下两个技术性命题可由定义轻易得出。

命题 7。设 $a \in \mathcal{A}_t$ 和 $i \in \mathcal{I}_t$ 满足 ai 并非紧。若 $p_t(i) \geq \pi(i) - \delta$，则$u_{a,t}(i) < \pi(a)$。

证明。由于 ai 并非紧，根据 δ的定义可得 $u_{a,t}(i) = v_a(i) - p_t(i) < (\pi(a) + \pi(i) - \delta) - (\pi(i) - \delta) = \pi(a)$，如所述。 □

命题 8。设 $a \in \mathcal{A}_t$ 和 $i \in \mathcal{I}_t$ 满足 ai 是紧的。若对于某个实数 ω，有 $p_t(i) = \pi(i) + \omega$，则 $u_{a,t}(i) = \pi(a) - \omega$。

证明。由于 ai 是紧的，我们得到$u_{a,t}(i) = v_a(i) - p_t(i) = (\pi(a) + \pi(i)) - (\pi(i) + \omega) = \pi(a) - \omega$ 如前所述。 □

在 M_t 中未匹配的代理人集合记为 $R_t := \{a \in \mathcal{A}_t \mid x_a^t = \emptyset\}$。注意，$\pi(a) = 0$ 对每个 $a \in R_1$ 根据引理3(b)，事实上，我们将在整个定价过程中对每个集合R_t 都保持这一性质。

从这里开始，我们分别讨论事后和事前情形，因为两者的证明不同，必须采用不同的价格设定方式。

3.2 事后无嫉妒定价

单位需求情形的算法 [3] 在每个时间步，使用剩余图中的任意加权覆盖来更新价格。为了将类似的思路用于事后情形，我们以受控的方式进行操作，从而确保价格不会随时间上涨。

定理 9。 即使由代理人打破平局，单位需求事后无嫉妒定价问题仍存在福利最大化动态定价方案。此外，可以在多项式时间内确定最优价格。

证明。 在整个算法中，我们维护一个最大权匹配 M_t ，该匹配位于图G_t 中，图由剩余代理人和物品构成。回想一下， R_t 表示未被匹配 M_t覆盖的代理人集合。初始时， $\pi(a) = 0$ 对于 $a \in R_1$ 由引理 3(b) 可知，并且我们将在整个过程中对每个 $a \in R_t$ 维持这一性质。

我们描述定价过程的一个一般阶段 $t \in [n]$ 。我们定义集合

$$S_t := \{v \in V_t \mid \text{存在一条从代理人 } a \in R_t \text{到 } v \text{ 的有向路径}\},$$

示例见图 1b 。特别地， $R_t \subseteq S_t$。注意，对于每个强连通分量 C_j^t， D_t， $C_j^t \subseteq S_t$ 或 $C_j^t \cap S_t = \emptyset$ 必有其一。随后按如下方式更新价格：

$$p_t(i) = \begin{cases} \pi(i) + \delta/2^t + j\varepsilon & \text{if } i \in C_j^t \text{ such that } C_j^t \subseteq S_t, \\ \pi(i) - \delta(1 - 1/2^t) + j\varepsilon & \text{if } i \in C_j^t \text{ such that } C_j^t \cap S_t = \emptyset. \end{cases}$$

根据 δ 和 ε的选择，价格非负。令 $a \in \mathcal{A}_t$ 表示在时间步 t到达的代理人。接下来的三个断言共同表明，价格满足性质(A)。

断言 10。如果 $a \in V_t \setminus S_t$，或者 $a \in S_t \setminus R_t$ 和 $\pi(a) > 0$，那么她会选择在 G_t 中对她合法的物品。

证明。由于 $a \in V_t \setminus R_t$，匹配 M_t 覆盖了 a ，因此 x_a 非空。任取一个不同于 x_a的物品 $i \in \mathcal{I}_t$ 。如果 ai 不紧，那么根据断言 6，代理人严格偏好 x_a 而非 i。如果 ai 是紧的，但 i 和 a属于不同的强连通分量，那么 i 所在分量的编号严格大于 a所在分量的编号。此外，根据集合 S_t的定义，它们要么都属于 S_t ，要么分别属于 $a \notin S_t$ 和 $i \in S_t$。由此可得$p_t(x_a) - \pi(x_a) < p_t(i) - \pi(i)$，因此根据命题 8，代理人严格偏好 x_a 而非 i 。最后，如果ai 是紧的，且 i 与 a属于同一个强连通分量，那么根据断言 5， ai 是合法的。根据 δ 的选择以及关于 a 的假设，这类物品的效用 a 非负，因此断言得证。

□

命题 11。 如果 $a \in S_t \setminus R_t$ 和 $\pi(a) = 0$，那么她一件物品都不会拿，并且存在一个 G_t 中的最大权匹配，该匹配不覆盖 a。

证明。令 $i \in \mathcal{I}_t$ 为任意物品。如果 ai 不是紧的，那么根据命题 7， a 对 i 的效用为负。如果 ai 是紧的，那么根据集合 S_t的定义， $i \in S_t$ 。这意味着根据价格的定义， $p_t(i) > \pi(i)$，因此根据命题 8， a 对 i 的效用为负。然而，在这种情况下，从代理人 $a' \in R_t$存在一条有向路径 P至 a 。由于 P由紧边组成，且 $\pi(a) = \pi(a') = 0$ ，这意味着 $M_t \triangle P$ 也是 G_t中的最大权匹配。 □

命题 12。 如果 $a \in R_t$，那么她不会拿取任何物品。

证明。 根据假设，我们有 $\pi(a) = 0$。令 $i \in \mathcal{I}_t$ 为任意一个物品。如果 ai 不紧，那么根据命题 a 对 i 的效用为负，依据命题 7。如果 ai 是紧的，那么根据集合 $i \in S_t$ 的定义， S_t。这意味着 $p_t(i) > \pi(i)$，根据价格的定义，因此 a 对 i的效用为负，依据命题 8。 □

匹配 M_t（以及隐含的集合 R_t）按如下方式更新。如果 $a \in V_t \setminus S_t$，或 $a \in S_t \setminus R_t$且 $\pi(a) > 0$，那么 a 从她所在的强连通分量中取出一个物品 i 。如果 $ai \in M_t$，则令集合 $M_{t+1} \coloneqq M_t \setminus \{ai\}$。否则，令 C 为包含弧 ai 的 D_t 的一个有向环，并设 $M_{t+1} \coloneqq (M_t \triangle C) \setminus \{ai\}$。此时，我们有 $R_{t+1} = R_t$。如果 $a \in S_t$且 $\pi(a) = 0$，则考虑从代理人 $a' \in R_t$到 a 的有向路径 P，并设 $M_{t+1} \coloneqq (M_t \triangle P) \setminus \{ai\}$，由此得到$R_{t+1} = R_t \setminus \{a'\}$。最后，如果 $a \in R_t$，则 $M_{t+1} \coloneqq M_t$，因此 $R_{t+1} = R_t$。

接下来只需验证该定价方案满足性质 (B)，这由以下命题给出。

命题 13。 任何物品的价格都不会随时间上涨。

证明。 在算法的每个阶段，物品 i 的价格都是通过平移其原始加权覆盖值而得到的。尽管有向图 D_t 的结构，以及因此包含 i 的强连通分量的编号，可能会随阶段变化，但对 ε 的选择确保了 $\pi(i) + \delta/2^t > \pi(i) + \delta/2^{t+1} + n\varepsilon$ 且 $\pi(i) - \delta(1 - 1/2^t) > \pi(i) - \delta(1 - 1/2^{t+1}) + n\varepsilon$。因此，为了证明该命题，只需证明 $S_{t+1} \subseteq S_t$。

注意， M_{t+1}的选取方式保证了 D_{t+1}中没有弧离开集合 $S_t \cap \mathcal{I}_{t+1}$。事实上，$D_{t+1}$ 是由 D_t 得到的：可能对完全位于 S_t中的一个有向环或有向路径重新定向，然后删除一个代理人和可能的一个物品。这些步骤不会产生离开 $S_t \cap \mathcal{I}_{t+1}$的有向弧，由此可得 $S_{t+1} \subseteq S_t$。 □

根据引理10-12，如果下一个代理人被匹配覆盖 M_t ，那么她要么选择一个对她合法的物品，要么 M_{t+1} 也是 G_t的最大权匹配。否则，她不会拿取任何物品。这意味着最终的分配对应于 G 的最大权匹配，因此实现了社会福利最大化。根据引理13，价格不会随时间上涨。这意味着该解是事后无嫉妒的，从而完成了定理的证明。

□

3.3 事前无嫉妒定价

为了给出事前情形的算法，我们采用定理9的证明方法。不过，为确保最终的价格和分配构成事前无嫉妒解，必须以不同方式更新价格。

定理 14。 即使由代理人打破平局，单位需求事前无嫉妒定价问题仍存在福利最大化动态定价方案。此外，最优价格可在多项式时间内确定。

证明。 与事后情形类似，我们维护剩余代理人与物品的图 M_t 中的最大权匹配G_t ，并将未被该匹配覆盖的代理人集合记为 R_t M_t。初始时， $\pi(a) = 0$ 对于 $a \in R_1$ ，由引理 3(b) 可知成立；此后我们将始终对每个 $a \in R_t$ 维持这一性质。

我们描述定价过程的一般阶段 $t \in [n]$ 。定义集合

$$S_t \coloneqq \{v \in V_t \mid \text{存在一条从 } v \text{ 到代理人 } a \in \mathcal{A}_t \setminus R_t \text{ 的有向路径，且 } \pi(a) = 0 \quad \},$$

例子见图 1c 。注意，对于每个强连通分量 $C_j^t \subseteq S_t$ 或 $C_j^t \cap S_t = \emptyset$ ，C_j^t 满足 D_t。随后按如下方式更新价格：

$$p_t(i) = \begin{cases} \pi(i) - \delta/2^t + j\varepsilon & \text{if } i \in C_j^t \text{ such that } C_j^t \subseteq S_t, \\ \pi(i) + \delta(1 - 1/2^t) + j\varepsilon & \text{if } i \in C_j^t \text{ such that } C_j^t \cap S_t = \emptyset. \end{cases}$$

根据 δ 和 ε的选择，价格均为非负。令 $a \in \mathcal{A}_t$ 表示在时间步 t到达的代理人。接下来的三个断言共同表明，价格满足性质(A)。

断言 15。 如果 $a \in V_t \setminus R_t$，那么她会选择在 G_t 中对她合法的物品。

证明。由于 $a \in V_t \setminus R_t$，匹配 M_t 覆盖了 a ，因此 x_a 非空。设 $i \in \mathcal{I}_t$ 是任意一个不同于 x_a 的物品。如果 ai 不紧，根据断言 6，代理人严格偏好 x_a 而非 i。如果 ai 是紧的，但 i 与 a属于不同的强连通分量，那么 i 所在分量的编号严格大于 a所在分量的编号。此外，根据集合 S_t的定义，它们要么都包含在 S_t中，要么都不包含在其中。由此可得$p_t(x_a) - \pi(x_a) < p_t(i) - \pi(i)$，因此根据命题 8，代理人严格偏好 x_a 而非 i 。最后，如果ai 是紧的，且 i 与 a属于同一个强连通分量，那么根据断言 5， ai 是合法的。根据 δ的选择，对于这类物品， a 的效用非负，因此结论成立。 □

断言 16。 如果 $a \in R_t \setminus S_t$，那么她不拿任何物品。

证明。 根据假设，我们有 $\pi(a) = 0$。令 $i \in \mathcal{I}_t$ 为任意一个物品。如果 ai 不紧，那么根据命题 a ， i 的效用为负 7。如果 ai 是紧的，那么根据集合 $i \notin S_t$ 的定义，有 S_t。由此可得 $p_t(i) > \pi(i)$，根据价格的定义，因此根据命题 a ， i的效用为负 8。 □

断言 17。 如果 $a \in R_t \cap S_t$，那么她要么选择一件在 G_t 中对她合法的物品，要么不拿任何物品。

证明。根据假设，我们有 $\pi(a) = 0$。令 $i \in \mathcal{I}_t$ 为任意一个物品。如果 ai 不紧，那么根据命题 7， a 对 i 的效用为负。如果 ai 是紧的，但 $i \notin S_t$，那么根据价格的定义， $p_t(i) > \pi(i)$，因此根据命题 8， a 对 i 的效用为负。如果 ai 是紧的且$i \in S_t$，那么存在一条有向路径 P，从 a 到 D_t 中的代理人 a' ，该路径由 M_t覆盖，且 $\pi(a') = 0$。由于 P 由紧边组成，且 $\pi(a) = \pi(a') = 0$ ，可知 $M_t \triangle P$ 也是 G_t中的最大权匹配，因此 i 对 a合法。 □

匹配 M_t，以及隐含的集合 R_t，按如下方式更新。如果 $a \in V_t \setminus R_t$，则 a从其强连通分量中取走一件物品 i。如果 $ai \in M_t$，则令 $M_{t+1} \coloneqq M_t \setminus \{ai\}$。否则，令 C 为包含弧 ai的 D_t 的有向环，并令 $M_{t+1} \coloneqq (M_t \triangle C) \setminus \{ai\}$。此时，我们有 $R_{t+1} = R_t$。如果 $a \in R_t \setminus S_t$ 或 $a \in R_t \cap S_t$ ，但 a 没有取走物品，则令$M_{t+1} \coloneqq M_t$，这意味着 $R_{t+1} = R_t \setminus \{a\}$。最后，如果 $a \in R_t \cap S_t$ 且 a 取走一件物品 i，则考虑从 a 到代理人 a' 的有向路径 P，该路径被 M_t 覆盖，并且 $\pi(a') = 0$，然后令 $M_{t+1} \coloneqq (M_t \triangle P) \setminus \{ai\}$。由于我们有 $R_{t+1} = R_t \setminus \{a\} \cup \{a'\}$ 和 $\pi(a) = 0$，因此 R_{t+1} 中的每个代理人的 π 价值均为 0 这一性质成立。

接下来需要验证该定价方案满足性质 (B)，这由以下命题给出。

断言18。 任何物品的价格都不会随时间降低。

证明。 在算法的每个阶段，物品 i 的价格都是通过平移其原始加权覆盖值 D_t 得到的。尽管有向图 i 的结构，以及包含 ε 的强连通分量的索引可能会随阶段而变化，但对 π的选择确保了 i $(-\delta/2^t+n\varepsilon<\pi)i(-\delta/2^{t+1})$ π以及 $i(+\delta)1-1/2^t(+n\varepsilon<\pi)i(+\delta)1-1/2^{t+1}($ $S_{t+1}\subseteq S_t)$。因此，为了验证该断言，只需证明 即可。

注意， M_{t+1} 的选择方式确保了 D_{t+1} 的任何弧都不会进入集合 $S_t\cap\mathcal{I}_{t+1}$。事实上，D_{t+1} 由 D_t 得到：可能重新定向完全位于 S_t中的一个有向环或有向路径，然后删除一个代理人以及可能的一个物品。这些步骤不会导致有向弧进入 $S_t\cap\mathcal{I}_{t+1}$，从而得到 $S_{t+1}\subseteq S_t$。 □

根据主张15-17，如果下一个代理人被匹配 M_t 覆盖，那么她会选择对她合法的物品。否则，她要么选择对她合法的物品，要么不取走任何物品。这意味着最终的分配对应于 G 的最大权匹配，因此实现了社会福利最大化。根据主张18，价格不会随时间下降。这意味着该解是事前无嫉妒的，从而完成了定理的证明。

□

4 收入最大化

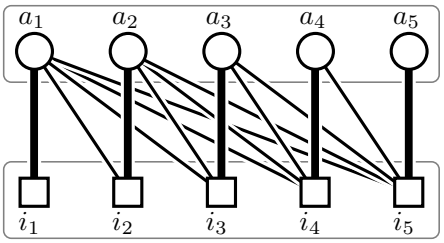
在静态情形下实现收入最大化，不仅难以求解，而且难以在合理的近似比内求得近似解；其困难源于缺乏有力的上界。显然，匹配的最大权重是通过定价机制可实现的总收入的上界，但最优收入与匹配的最大权重之间的差距可能达到 $O(\log(n))$。具体而言，考虑一个包含物品 $\mathcal{I}=\{i_1,\ldots,i_n\}$ 和代理人 $\mathcal{A}=\{a_1,\ldots,a_n\}$的市场。设估值定义为 $v_{a_j}(i_k):=1/j$，其中 $1\le j\le n$ 和 $j\le k\le m$，其他情况下为 0，示意图见图2。于是，代理人与物品之间存在唯一的最大权匹配，该匹配由边 i_ja_j 组成，其中$1\le j\le n$，总权重为 $\sum_{j=1}^{n}1/j$。对于任意一对无嫉妒静态定价与分配，如果代理人 a_j 以某个价格 $p(i_k)$获得物品 i_k，那么为确保代理人 a_j 不嫉妒，所有其他物品的价格都必须至少为 $p(i_k)$。另一方面，价格 $p(i_k)$不能高于 $1/j$，否则代理人 a_j 对物品 i_k 的效用将为负。这些观察共同表明，每件售出物品的价格至多为 $1/j$，其中 j 是代理人 a_j 获得物品的最大索引。因此，总收入至多为 $j\cdot1/j=1$，由此可得如上所述的 $O(\log(n))$ 差距。

接下来，我们将关注带有公平性约束的动态环境中的收入最大化问题。

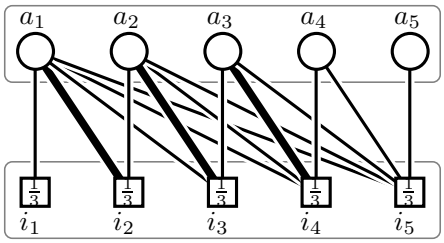
4.1 困难性结果

当要求解满足强无嫉妒时，动态情境与静态情境相比并无不同，正如下面的定理所示。

定理19。 即使由卖方选择代理人排序并打破平局，最大化单位需求强无嫉妒动态定价问题的收入仍是 *APX*-困难。



(a) 边 $a_j i_k$ 的权重为 $1/j$，而缺失的边权重为 0。粗边对应总权重为 $\sum_{j=1}^{n} 1/j$的唯一最大权匹配。



(b) 物品上的数值和粗边分别对应一对无嫉妒定价与分配。收入始终小于或等于 1。

图2：说明在无嫉妒静态定价的情况下，最优收入与匹配的最大权重之间存在 $O(\log(n))$ 的差距。

证明。 设 σ 为代理人排序， p_1、……、 p_n 为价格，$\mathbf{x}$ 为使收入最大化的分配。回顾一下，x_a 表示代理人 $a \in \mathcal{A}$ 获得的物品（如果存在），否则 x_a 表示空集。我们证明，存在静态价格和无嫉妒分配，使其产生相同的收入。反过来总是成立，即，在静态定价下，任何无嫉妒分配都可以视为动态情境中的强无嫉妒解，因此这就证明了该定理。

我们如下定义静态定价：对于每个满足 $x_a \neq \emptyset$的代理人 $a \in \mathcal{A}$，设 $p(x_a) := p_{\sigma(a)}(x_a)$，也就是说，我们将已分配物品的价格设为其售出时的价格。对于其余物品，将价格设为 $+\infty$。我们声称，分配 $\mathbf{x}$ 相对于静态定价 p是无嫉妒的，因此其收入与动态解相同。事实上，根据强无嫉妒的定义可得此结论，因为 $x_a \in \arg\max\{v_a(i) - p_t(i) \mid t \in [n],\ i \in \mathcal{I}\}$且 $p(x_a) = p_{\sigma(a)}(x_a)$ 推出，对于每个 $a \in \mathcal{A}$，均有 $x_a \in \arg\max\{v_a(i) - p(i) \mid i \in \mathcal{I}\}$。 □

遗憾的是，对于较弱的无嫉妒性概念，这个问题仍然是困难的。我们的证明遵循 Guruswami 等人证明 [12] 收入最大化问题具有 APX 困难性的主要思路。

定理20. 在单位需求的事后无嫉妒和事前无嫉妒动态定价问题中，即使代理排序预先已知且平局由卖方打破，收入最大化问题仍是 *APX*-困难的。

证明. 该证明通过从 Vertex Cover 3-正则图中的问题进行归约得出。给定一个 3-正则图 $G = (V, E)$，Vertex Cover 要求找出一个最小顶点集合，使其至少包含图中每条边的一个端点。 [10]表明该问题是 APX-困难的。

设 $G = (V, E)$ 是一个含有 n 个顶点和 m 条边的 3-正则图。我们构造一个定价实例，其物品集合为 $\mathcal{I}$，代理人集合为 $\mathcal{A}$，分别包含 $4n$ 个物品和 $m+n$ 个代理人。对于每个顶点 $z \in V$，我们向 $\mathcal{I}$ 添加四个顶点物品 z_1, z_2, z_3, z_4，并向 $\mathcal{A}$ 添加一个顶点代理人；滥用记号，我们也将其记为 z。该代理人的估值定义为$v_z(z_i) = 2$，当 $i \in [4]$ 时取此值，对任何其他物品的估值均为 0。此外，对于每条边 $e = zw \in E$，我们向 $\mathcal{A}$ 添加一个边代理人 e，其估值为 $v_e(z_i) = v_e(w_i) = 1$，当 $i \in [4]$ 时取此值，对任何其他物品的估值均为 0；示例见图3。

我们首先考虑事后情形。假设代理人的排序为：边代理人先到，随后是顶点代理人。我们声称，对于这样的排序，存在一种事后无嫉妒定价方案和分配，使总收入达到 $m + 2n - k$，当且仅当 G 中存在大小为 k 的顶点覆盖。由于 $m = 3n/2$ 且最小

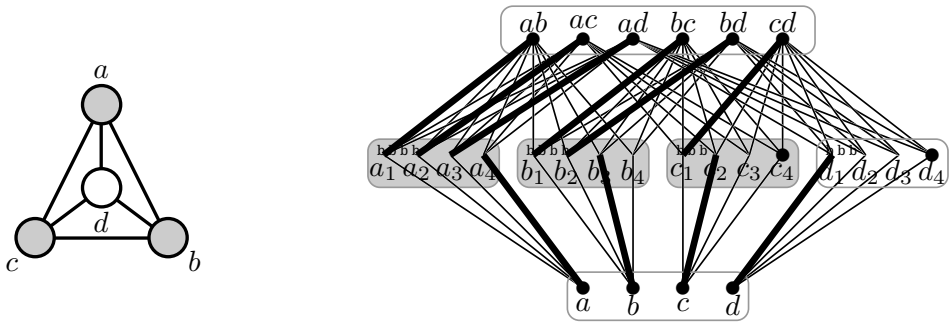


图3：一个含有 G 、 $n=4$ 和 $m=6$ 的 3-正则图，其中灰色顶点构成大小为 $k=3$ 的最小顶点覆盖。在相应的定价实例中，与顶点代理人和边代理人相邻的边的权重分别为 2 和 1。当边代理人先到达时，将灰色物品的价格设为 1，其余物品的价格设为 2，并按粗边分配物品，由此得到收入为 $11=m+2n-k$ 的事后无嫉妒解。

顶点覆盖的大小至少为 $m/3=n/2$，顶点覆盖大小上的常数因子间隙会转化为该定价实例最优利润上的常数因子间隙，从而得到所需的 APX-困难性结果。

为证明“如果”方向，设 $C\subseteq V$ 是 G 的一个大小为 k 的顶点覆盖。对于每个顶点 $z\in V$，令 $p_t(z_i):=1$ （若 $z\in C$），并令 $p_t(z_i):=2$ （否则），其中 $i\in[4]$ 和 $t\in[n]$ ——注意，价格不会随时间变化，因此最终解是事后无嫉妒的。按照给定的排序，边代理人先到达，他们每人以 1 的价格取走一个与其某个端点对应、且该端点位于 C 中的顶点物品。随后顶点代理人到达，并以 2 的价格取走与自己对应的一份顶点物品。注意，由于该图是 3-正则图，且为每个顶点添加了四份顶点物品，因此每个代理人都能获得一件物品，总收入为 $m+2n-k$。

为证明“仅当”方向，考虑动态价格 p_1、……、p_n 以及一个事后无嫉妒分配$\mathbf{x}$，该分配在所考虑的排序下使收入最大化。不难验证，可以假设定价向量只取 1 和 2。设 $e=zw$ 是第一个未获得任何物品的边代理人（如果存在）。也就是说，在z_1、……、z_4、w_1、……、w_4到达时，所有剩余的顶点物品价格均为 2。如果我们降低其中一个物品的价格，例如 z_i，那么为了确保从顶点代理人 z的角度来看仍满足事后无嫉妒性，就必须对与 z 对应的所有剩余顶点物品以及后续所有时间步进行相同的修改。这样，我们会损失来自顶点代理人z的 1 单位收入，但可通过从边代理人 e那里获得 1 单位利润弥补这一损失。由此可知，我们可以假设，对于每个顶点 $z\in V$和时间步 $t\in[n+m]$，要么 $p_t(z_i)=1$对 $i\in[4]$成立，要么 $p_t(z_i)=2$ 对 $i\in[4]$成立，并且属于前一类的顶点构成G的一个顶点覆盖。这意味着收入至多为 $m+2n-k$。

如果代理人的排序是顶点代理先到达，随后是边代理，那么类似的论证表明，事前情形也具有难度。 □

4.2 算法

在上一节中，我们证明了，如果卖方无法控制代理人的到达顺序，那么即便采用看似更加灵活的动态定价框架，也不足以在事后无嫉妒和事前无嫉妒设置中实现收入最大化。好的一面是，如果卖方可以选择排序，那么就能高效地确定一个最优定价方案

。接下来，我们将给出多项式时间算法，用于确定代理人排序和价格向量，使最终分配满足事后无嫉妒或事前无嫉妒，并且无论代理人如何打破平局，都能实现收入最大化。在这两种情况下，我们都会将所得解与相应边加权二分图中匹配的最大权重进行比较；显然，该最大权重是收入的上界。

请注意，在代理人选择情形中，代理人可以决定不拿取对她而言效用为 0 的物品。为使算法的描述简单明了，我们假设在此类情形下，代理人会决定拿取该物品。因此，在一般情形下，每一步都可以将物品的价格降低一个很小的 $\varepsilon > 0$，从而使收入任意接近匹配的最大权重。

首先，我们考虑事后情形。

定理 21. 如果代理人排序可以由卖方选择，那么即使平局由代理人打破，单位需求事后无嫉妒定价问题也存在收入最大化动态定价方案。此外，可以在多项式时间内确定最优排序和价格。

证明。考虑表示该市场的边加权二分图 $G = (\mathcal{I}, \mathcal{A}; E)$，其中边 ai 的权重为 $v_a(i)$，对 $i \in \mathcal{I}$, $a \in \mathcal{A}$ 成立。根据引理 4，我们可以假设每个最大权匹配都覆盖了所有物品。令 $M \subseteq E$ 为任意一个最大权匹配；对于每个代理人 a，令 x_a 表示在 M 中与 a 匹配的物品（如果存在这样的物品），否则定义 x_a 为空集。此外，取引理 3 给出的加权覆盖 π。请注意， M 由紧边组成。

我们定义代理人的排序 σ 如下：未被 M 覆盖的代理人先到达，随后其余代理人按其 π 值递减的顺序到达，平局时任意打破。

现在我们描述如何在每个时间步设定价格。在所有未被 M 覆盖的代理人离开之前，将价格设为 $+\infty$。然后，在每个时间步，考虑下一位代理人a，并将所有剩余物品的价格设为 $+\infty$，但 x_a 除外；我们将其价格设为$v_a(x_a)$。显然，该代理人会选择物品 x_a，因此所得分配对应于M，且总收入等于匹配的最大权重。

还需验证由此得到的定价和分配构成一个事后无嫉妒解。为此，考虑代理人 $a \in \mathcal{A}$ 到达时的情况。到目前为止，除定价为 $v_a(x_a)$ 的 x_a 外，所有剩余物品的价格均为 $+\infty$，因此只需证明 a 不会嫉妒她到达前已被取走的物品。这些物品的价格也一直为 $+\infty$，只有在对应代理人取走它们的那个时间步例外。设 a' 是一位在 a 之前到达并取走物品 $x_{a'}$ 的代理人，即 $x_{a'} \neq \emptyset$。由于 π 是一个加权覆盖， M 由紧边组成，并且 $\pi(a') \geq \pi(a)$，我们得到

$$\begin{aligned} u_{a,\sigma(a')}(x_{a'}) &= v_a(x_{a'}) - p_{\sigma(a')}(x_{a'}) \\ &= v_a(x_{a'}) - v_{a'}(x_{a'}) \\ &\leq (\pi(a) + \pi(x_{a'})) - (\pi(a') + \pi(x_{a'})) \\ &= \pi(a) - \pi(a') \\ &\leq 0 \\ &= v_a(x_a) - v_a(x_a) \\ &= u_{a,\sigma(a)}(x_a), \end{aligned}$$

这意味着代理人 a 不嫉妒物品 $x_{a'}$。 □

事前设定下也可以采用类似的证明。不过，这个证明稍微复杂一些，因为维持事前无嫉妒性需要谨慎选择价格。因此，最终分配的收入并不恰好等于相应二分图中某个匹配的最大权重，但可以任意接近该值。为简单起见，我们在定理陈述中仍将这种定价称为“最优”。

定理 22。 如果卖方可以选择代理人排序，那么即使由代理人打破平局，对于单位需求的事前无嫉妒定价问题，也存在一个收入最大化动态定价方案。此外，最优排序和价格可以在多项式时间内确定。

证明。考虑边加权二分图 $G = (\mathcal{I}, \mathcal{A}; E)$、最大权匹配$M$，$x_a$ （针对 $a \in \mathcal{A}$）以及加权覆盖 π ，如定理 21 的证明中所述。令 $0 < \delta < \min\{\min\{\pi(a) + \pi(i) - v_a(i) \mid ia \in E \text{不紧}\}, \min\{\pi(i) \mid i \in \mathcal{I}\}\}$。注意，根据引理 3 以及每个物品都被 G 的每个最大权匹配覆盖这一假设，这样的δ 存在。此外，令 $0 < \varepsilon < \delta/2^n$。

我们将代理人按如下方式排序：被 M 覆盖的代理人先到达，并按其 π 值递增排列，平局时任意排序；其后是其余代理人。

现在我们说明如何在每个时间步设定价格。如果代理人 a 到达且满足 $x_a \neq \emptyset$，则对每件物品 $i \in \mathcal{I}$，将其价格设为 $\pi(a) + \pi(i) - \delta/2^{\sigma(a)} + \varepsilon$，但 x_a 除外；我们将 x_a 的价格设为 $\pi(a) + \pi(x_a) - \delta/2^{\sigma(a)}$。如果 $x_a = \emptyset$，则将价格设为 $+\infty$。根据排序的定义以及数值 δ 和 ε，价格始终非负且随时间推移不会下降，因此所得分配自动满足事前无嫉妒。

只需证明每个代理人 a 在到达时会选择 x_a 。事实上，若这一点成立，则由此获得的利润为 $\pi(a) + \pi(x_a) - \delta/2^{\sigma(a)} \geq v_a(x_a) - \delta$，这里用到了边 $x_a a$ 根据引理 3(a) 是紧的这一事实。通过将 δ 设得足够小，最终分配的总收入可以任意接近 M的权重。考虑任意其他物品 i，且它不同于 x_a。由于 π 是一个加权覆盖，且 $x_a a$ 是紧的，因此我们得到

$$\begin{aligned} u_{a,\sigma(a)}(i) &= v_a(i) - p_{\sigma(a)}(i) \\ &= v_a(i) - (\pi(a) + \pi(i) - \delta/2^{\sigma(a)} + \varepsilon) \\ &< \delta/2^{\sigma(a)} \\ &= v_a(x_a) - (\pi(a) + \pi(x_a) - \delta/2^{\sigma(a)}) \\ &= u_{a,\sigma(a)}(x_a). \end{aligned}$$

这意味着，在时间步 $\sigma(a)$， x_a 是 a 效用的唯一最大化者，且对 a具有正效用，因此代理人 a 会按所述选择 x_a 。 □

最后，我们解决了代理人排序固定且预先已知时，弱嫉妒自由解的存在性问题。

定理 23。 如果代理人排序预先已知，那么即使由代理人打破平局，单位需求弱嫉妒自由定价问题也存在一个收入最大的动态定价方案。此外，可以在多项式时间内确定最优价格。

证明。 设 σ 表示代理人的固定排序。定义边加权二分图$G = (\mathcal{I}, \mathcal{A}; E$、最大权匹配 $M \subseteq E$以及 x_a对于 $a \in \mathcal{A}$，均如定理 21的证明中所述。当代理人 a到达时，将所有剩余物品的价格设为 $+\infty$ ，但x_a除外；对于该物品，我们将价格设为 $v_a(x_a)$ 。代理人显然会以可能的最高价格购买 x_a ，因此所得的分配和定价均为最优。 □

5 结论

本文研究了单位需求市场中公平性约束下最优动态价格的存在性。我们根据代理人与他人进行比较的时间段，提出了四种可能的无嫉妒性概念，并确定了各种情形下最优动态价格的存在性。

本文最后提及一些开放问题。虽然我们专注于社会福利和收入最大化问题，但一个自然的问题是考虑其他目标函数，例如平均社会福利或最大最小社会福利和收入。除了这些函数本身很有趣之外，它们还可以用来克服备注 1 中提到的困难。

最近有一条研究方向考察了如何在市场中平衡公平性与效率的问题，例如参见 [11]。研究动态无嫉妒定价在此类目标函数下的表现将会很有趣。

最后，顺序未指定时的弱无嫉妒收入最大化问题的复杂性仍然是一个开放问题。这一变体尤其值得关注，因为它自然地将收入最大化与近年来广受关注的动态定价方案研究方向联系起来。

致谢。 本研究得到 DAAD 资助，资金来自德国联邦教育与研究部（BMBF）、匈牙利科学院 Lend¨ulet 计划（资助编号 LP2021-1/2021），以及匈牙利国家研究、发展与创新办公室（NKFIH，资助编号 FK128673）。

参考文献

[1] G. Aggarwal、T. Feder、R. Motwani 和 A. Zhu。多产品定价算法。载于自动机、语言与编程国际研讨会，第 72–83 页。施普林格，2004 年。[2] N. Bansal、N. Chen、N. Cherniavsky、A. Rurda、B. Schieber 和 M. Sviridenko。面向无耐心投标者的动态定价。*ACM Transactions on Algorithms (TALG)*，6(2):1–21，2010 年。[3] K. B´erczi、E. R. B´erczi-Kov´acs 和 E. Sz¨ogi。多需求市场动态定价的对偶方法。*arXiv* 预印本 *arXiv:2107.05131*，2021 年。[4] K. B´erczi、N. Kakimura 和 Y. Kobayashi。拟阵秩估值的市场定价。*SIAM* 离散数学杂志，35(4):2662–2678，2021 年。[5] B. Berger、A. Eden 和 M. Feldman。论组合市场动态定价的能力与局限。载于网络与互联网经济学国际会议，第 206–219 页。施普林格，2020 年。[6] P. Briest。统一预算与无嫉妒定价问题。载于自动机、语言与编程国际研讨会，第 808–819 页。施普林格，2008 年。[7] P. Chalermsook、B. Laekhanukit 和 D. Nanongkai。独立集、诱导匹配与定价：联系及紧（次指数时间）近似困难性。载于*2013 IEEE* 第*54*届计算机科学基础年会，第 370–379 页。IEEE，2013 年。

[8] V. Cohen-Addad、A. Eden、M. Feldman 和 A. Fiat。动态市场定价的无形之手。载于*2016*年 *ACM*经济学与计算会议论文集，第 383–400 页，2016 年。[9] J. Egerv´ary。矩阵的组合性质。*Matematikai ´es Fizikai Lapok*，38(1931):16–28，1931 年。[10] H. Fleischner、G. Sabidussi 和 V. I. Sarvanov。3-正则和4-正则哈密顿图中的最大独立集。《离散数学》，310(20):2742–2749，2010 年。[11] J. Garg、E. Husi´c 和 L. A. V´egh。Rado 估值下纳什社会福利的近似。载于第*53*届 *ACM SIGACT* 计算理论年度研讨会论文集，第 1412–1425 页，2021 年。[12] V. Guruswami、J. D. Hartline、A. R. Karlin、D. Kempe、C. Kenyon 和 F. McSherry。论利润最大化的无嫉妒定价。载于第十六届 *ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集，第 5 卷，第 1164–1173 页，2005 年。[13] J. Hsu、J. Morgenstern、R. Rogers、A. Roth 和 R. Vohra。价格能协调市场吗？载于第*48*届 *ACM*计算理论研讨会论文集，第 440–453 页，2016 年。[14] A. S. Kelso Jr 和 V. P. Crawford。工作匹配、联盟形成与总替代性。《计量经济学》：计量经济学会期刊，第 1483–1504 页，1982 年。[15] K. Pashkovich 和 X. Xie。多需求组合市场中最优动态定价的两步方法。*arXiv* 预印本 *arXiv:2201.12869*，2022 年。[16] L. Walras 和 E. d. P. Pure。洛桑：L. *Corbaz & Cie*，1874 年。