arXiv:2301.01539v1 [math.AP] 4 Jan 2023

受生物学和流行病学启发的一般更新方程

R.M. Colombo[1] M. Garavello[2] F. Marcellini[1] E. Rossi[3]

2023年1月5日

摘要

我们提出了一个统一框架，为一类更新方程初边值问题确保适定性并提供稳定性估计。这类问题涵盖了多种生物学或流行病学模型。通过考虑相当一般的相互作用项（可能是非线性的和/或非局部的），该框架具有广泛的适用性，既允许较低的正则性假设，也适用于带边界或不带边界的独立变量。特别是，这些结果还适用于例如新冠类大流行或其他流行病传播模型。本文所述框架还涵盖了其他应用。

关键词：更新方程的初边值问题；流行病学模型的适定性；流行病建模中的微分方程；年龄和空间结构化 SIR 模型。

1 引言

在各种生物学模型中，不同物种通常用其密度 $u^1, u^2, \dots, u^k$ 来描述；一般而言，每个 u^h 都依赖于时间 $t \in \mathbb{R}_+$、年龄 $a \in \mathbb{R}_+$、$\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 中的空间坐标，还可能依赖于某些结构变量。因此，统一处理这些模型的自然框架是以下一般混合初边值问题（IBVP），其定义在 $\mathcal{X} = \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^n$中

$$\begin{cases} \partial_t u^h + \operatorname{div}_x \left(v^h(t,x)\, u^h \right) = g^h \left(t, x, u(t,x), u(t) \right) & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} \\ u^h(t,\xi) = u^h_b \left(t, \xi, u(t) \right) & (t,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\mathcal{X} \\ u^h(0,x) = u^h_o(x) & x \in \mathcal{X}\,, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $h = 1, \dots, k$。为兼顾较一般的设定与精确估计，且不失一般性，我们将 (1.1) 写成如下形式

$$\begin{cases} \partial_t u^h + \operatorname{div}_x \left(v^h(t,x)\, u^h \right) = p^h \left(t, x, u(t) \right) u^h + q^h \left(t, x, u, u(t) \right) & (t,x) \in I \times \mathcal{X} \\ u^h(t,\xi) = u^h_b \left(t, \xi, u(t) \right) & (t,\xi) \in I \times \partial\mathcal{X} \\ u^h(0,x) = u^h_o(x) & x \in \mathcal{X}\,, \end{cases} \tag{1.2}$$

[1]布雷西亚大学，INdAM 单位及信息工程系，意大利布雷西亚 Branze 街 38 号，邮编 25123。[2]米兰比可卡大学，数学与应用系，意大利米兰 R. Cozzi 街 55 号，邮编 20125。[3]摩德纳与雷焦艾米利亚大学，工程科学与方法系，意大利雷焦艾米利亚 Amendola 街 2 号，邮编 42122。

其中 $h = 1,\dots,k$。注意，(1.1) 中源项 g^h 分解为 p^h 和 q^h，既非唯一，也不会在任何意义上造成限制。

我们强调，在 (1.1) 和 (1.2) 中，出现在右端的项 $u(t)$ 都被理解为一个函数，因此，(1.1) 中的源项和边界项除了具有非线性之外，还包含相当一般的非局部，即泛函依赖关系。

当前文献中有大量众所周知的模型可归入 (1.1)：例如，我们在此回顾 [1, 3, 4, 5, 8, 16, 20, 26, 30],，而将 (1.1) 在其他近期模型或经典模型中的具体方面留待第 3 节说明。特别是，下面的适定性和稳定性定理也适用于模型 (3.1)；据我们所知，该模型并不完全符合文献中的其他适定性结果。与此同时，涉及 (1.1) 特殊情形的文献可以追溯到一些经典里程碑，例如 [12, 17, 21, 25]。此外，各种教材介绍了对符合 (1.1) 的模型进行分析研究的方法，例如参见 [14, 15, 22, 27, 30, 34]。

许多区室模型都具有所选框架 (1.1) 的关键特征：变量的定义域为 $\mathcal{X}$，且局部项与非局部项的形式相当一般。事实上，在采用上述 $\mathcal{X}$ 的选择后，我们也涵盖了有界空间/年龄域 [16],、半直线 [11],、完整向量空间 [20] 及其组合 [4, 8, 29, 32]。在所有这些情形中，沿不同类型的边界都设有相当一般的条件，这些条件适用于 (1.1)，例如出生项 [4, 29, 32]。生物学意义要求这些边界项以及 (1.1) 中的源项都可以包含局部项和非局部项。前者包括死亡项 [5, 8], 等，而后者则可由出生率 [4, 29],、捕食 [10] 或种群间相互作用 [5],（例如感染传播 [8]）来解释。

我们强调，本文的框架并不依赖于扩散的任何正则化效应。这里考虑的一般非局部项不一定具有平滑效应，也可以不存在。由于没有扩散算子，(1.1) 所描述的任何运动或演化都以有限速度传播。特别是，本文的方法与确定性建模相一致，而拉普拉斯算子也可用于描述各种随机效应，参见例如 [2, 19]。

在这一一般框架下，我们首先证明适定性，即 (1.1) 的解局部存在、唯一，并且连续依赖于初始数据。随后，我们给出确保全局存在性以及解对定义 (1.1) 的函数和参数具有稳定性的条件。全文的函数空间设定采用 $\mathbf{L^1}$，解之间的距离始终通过 $\mathbf{L^1}$ 范数来衡量。因此，我们能够处理非光滑解；鉴于控制问题，这是一项必要特性。此外，数据的全变差或 $\mathbf{L^\infty}$ 范数均无需有界。事实上，在更新方程初边值问题的各种解的概念中，我们选择以 [24, 33] 中提出的概念为基础建立框架。该定义不仅以积分不等式的形式表述，更便于进行极限过程，而且显著之处在于它不要求任何迹的概念，因此我们能够处理仅属于 $\mathbf{L^1}$ 的解。

注意到，在 (1.1) 中，源项和边界项都是非线性的。因此，证明中的一项关键工具是巴拿赫压缩映射定理，该定理基于对标量方程的精确估计。仅仅要求某种局部利普希茨正则性，并不能排除有限时间爆破的可能性（无论采用何种范数），下文将通过具体例子说明这一点。因此，我们采用格朗沃尔型论证来获得全局存在性。此外，我们还记录了 (1.1) 一般情形下的一个唯一性结果；与经典的

Kruˇzkov 情形一样，该结果基于对解的一个精心选择的定义，见 § 2.1。

我们还注意到，属于 (1.1) 的方程的某些特例可以通过其他方法研究，例如解析半群理论、广义熵方法或拉普拉斯变换。例如，可参见 [14, 15, 22, 30]。

本文的结果不仅统一了各种模型的处理方式，还为解决基于 (1.1) 的控制/优化问题提供了有用工具。事实上，定理 2.5 中证明的稳定性估计保证，定义在解上的一般积分泛函是关于数据以及表征 (1.1) 的参数的 Lipschitz 连续函数。利用本文结果还可以进一步研究反问题，即给出相应条件，以确保能够选择 (1.1) 中最优的数据和参数，从而尽可能拟合给定的实验数据集合。

本文安排如下。第 2 节给出适定性和稳定性的基本结果。随后，第 3 节专门讨论符合 (1.1) 的具体应用。技术性的解析证明放在最后的第 4 节。

2 假设、定义与结果

全文中，设 $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$,

$$I = \mathbb{R}_+ \quad \text{or} \quad I = [0, T] \quad \text{and} \quad \mathcal{X} = \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

其中 T 为正数。

首先，我们说明方程 (1.1) 的解指什么。为此，我们将 [24, 33], 中的定义推广到当前情形，尤其参见 [31, 定义 3.5]。

定义 2.1. 映射 $u_* \in \mathbf{C^0}(I; \mathbf{L^1}(\mathcal{X}; \mathbb{R}^k))$ 是方程 (1.1) 的一个解，若令 $h = 1, \dots, k$, $t \in I$, $x \in \mathcal{X}$ 和 $\xi \in \partial\mathcal{X}$

$$\mathcal{G}^h(t,x) = g^h\left(t, x, u_*(t,x), u_*(t)\right) \qquad \textit{and} \qquad \mathcal{U}^h_b(t,\xi) = u^h_b\left(t, \xi, u_*(t)\right),$$

对于 $h = 1, \dots, k$，映射 u^h_* 是初边值问题的半熵解

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}_x \left(v^h(t,x)\, u \right) = \mathcal{G}^h(t,x) & (t,x) \in I \times \mathcal{X} \\ u(t,\xi) = \mathcal{U}^h_b(t,\xi) & (t,\xi) \in I \times \partial\mathcal{X} \\ u(0,x) = u^h_o(x) & x \in \mathcal{X}\,. \end{cases}$$

我们在下文的定义 2.6 中回顾半熵解的概念。

主　　本文的主要结果涉及柯西问题 (1.2) 的适定性。　　.

定理 2.2。使用记号 (2.1)，并假设以下条件成立　　:

(V) $v \in (\mathbf{C^1} \cap \mathbf{L}^\infty)(I \times \mathcal{X}; \mathbb{R}^{k\times(n+m)})$, $\operatorname{div}_x v^h \in \mathbf{L^1_{loc}}(I; \mathbf{L}^\infty(\mathcal{X}; \mathbb{R}))$ *for* $h = 1, \dots, k$ *and there exists a positive* V *such that*

$$\Big(v^h(t,x)\Big)_i > V \qquad \forall\, (t,x) \in I \times \partial\mathcal{X} \text{ and for } \begin{array}{l} h = 1, \dots, k\,; \\ i = 1, \dots, m\,. \end{array}$$

(P) 对所有 $w \in \mathbf{L^1}(\mathcal{X};\, \mathbb{R}^k)$，映射 $(t,x) \to p(t,x,w)$ 属于 $\mathbf{C^0}(I \times \mathcal{X};\, \mathbb{R}^k)$，且存在正的 P_1 和 P_2，使得对于 $t \in I$, $x \in \mathcal{X}$, $w, w' \in \mathbf{L^1}(\mathcal{X};\, \mathbb{R}^k)$

$$\begin{aligned} \left\|p(t,x,w)\right\| &\leq P_1 + P_2 \left\|w\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}; \\ \left\|p(t,x,w) - p(t,x,w')\right\| &\leq P_2 \left\|w - w'\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}. \end{aligned}$$

(Q) 对所有 $w \in \mathbf{L^1}(\mathcal{X};\, \mathbb{R}^k)$，映射 $(t,x,u) \to q(t,x,u,w)$ 属于 $\mathbf{C^0}(I \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^k;\, \mathbb{R}^k)$，且存在正的 Q_1 和 Q_3 以及一个函数 $Q_2 \in (\mathbf{L^1} \cap \mathbf{L^\infty})(\mathcal{X};\, \mathbb{R}_+)$，使得对于 $t \in I$, $x \in \mathcal{X}$, $u, u' \in \mathbb{R}^k$, $w, w' \in \mathbf{L^1}(\mathcal{X};\, \mathbb{R}^k)$:

$$\begin{aligned} \left\|q(t,x,u,w)\right\| &\leq Q_1 \left\|u\right\| + Q_2(x) \left\|w\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)} + Q_3 \left\|u\right\| \left\|w\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}; \\ \left\|q(t,x,u,w) - q(t,x,u',w')\right\| &\leq Q_1 \left\|u - u'\right\| + Q_3 \left\|w\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)} \left\|u - u'\right\| \\ &\quad + Q_3 \left\|u'\right\| \left\|w - w'\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}. \end{aligned}$$

(BD) u_b: $\mathbb{R}_+ \times \partial\mathcal{X} \times \mathbf{L^1}(\mathcal{X};\, \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^k$ 满足：对于任意 $w \in \mathbf{L^1}(\partial\mathcal{X};\, \mathbb{R}^k)$，映射 $(t,\xi) \to u_b(t,\xi,w)$ 是可测的。此外，存在一个函数 $B \in (\mathbf{L^1} \cap \mathbf{L^\infty})(\partial\mathcal{X};\, \mathbb{R}_+)$，使得对于每个 $t \in I$, $\xi \in \partial\mathcal{X}$, $w, w' \in \mathbf{L^1}(\mathcal{X};\, \mathbb{R}^k)$,

$$\begin{aligned} \left\|u_b(t,\xi,w)\right\| &\leq B(\xi) \left(1 + \left\|w\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X},\mathbb{R}^k)}\right) \\ \left\|u_b(t,\xi,w) - u_b(t,\xi,w')\right\| &\leq B(\xi) \left\|w - w'\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X},\mathbb{R}^k)}. \end{aligned}$$

(ID) $u_o \in \mathbf{L^1}(\mathcal{X};\, \mathbb{R}^k)$。

那么，

(WP.1) 存在一个正的 $T_* \in I$，使得令 $I_* = [0, T_*]$ 后，该初边值问题在定义 2.1 的 (1.2) 意义下存在一个定义在 I_* 上的解。

(WP.2) 假设 u_1 和 u_2 是 (1.2) 在定义 2.1 意义下的解，且 $u_1, u_2 \in \mathbf{L^\infty}(I \times \mathcal{X};\, \mathbb{R}^k)$。那么，$u_1 = u_2$。

(WP.3) 设 $\hat{u}_o, \check{u}_o \in \mathbf{L^1}(\mathcal{X};\, \mathbb{R}^k)$。若 $\hat{u}$: $\hat{I} \to \mathbb{R}^k$，以及 $\check{u}$: $\check{I} \to \mathbb{R}^k$ 分别是 (1.2) 在定义 2.1 意义下的解，其初始数据分别为 $u_o = \hat{u}_o$ 和 $u_o = \check{u}_o$，则存在函数 $\mathcal{L} \in \mathbf{L^\infty_{loc}}(\hat{I} \cap \check{I};\, \mathbb{R})$，使得对所有 $t \in \hat{I} \cap \check{I}$

$$\left\|\hat{u}(t) - \check{u}(t)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)} \leq \mathcal{L}(t) \left\|\hat{u}_o - \check{u}_o\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}.$$

证明见第 4 节。

在若干应用中，我们希望保证解的每个分量都取非负值。为此，我们给出以下推论。

推论 2.3. 设定理 2.2 的假设成立，并进一步假设对于某个指标 $h \in \{1, \ldots, k\}$

(Q+) 对于 $t \in I$，几乎处处 $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathbb{R}^k_+$, $w \in \mathbf{L^1}(\mathcal{X};\, \mathbb{R}^k_+)$，$q^h(t,x,u,w) \geq 0$。

(BD+) 对于 $t \in I$, $\xi \in \partial\mathcal{X}$ 和 $w \in \mathbf{L^1}(\mathcal{X};\, \mathbb{R}^k)$，$u_b^h(t,\xi,w) \geq 0$。

(ID+) *For a.e.* $x \in \mathcal{X}$, $u_o^h(x) \geq 0$.

那么，方程 (1.2) 的唯一解 u 也满足：对每个 $t \in I_*$ 以及几乎处处的 $x \in \mathcal{X}$。

$$u^h(t,x) \geq 0\,. \tag{2.2}$$

证明推迟到第 4 节。

上述结果具有局部性质，若无进一步假设，则无法将其推广为全局结果，以下例子便说明了这一点。考虑柯西问题 (1.2)，其中 $k=1$, $m=0$, $n=1$, $\mathcal{X}=\mathbb{R}$, $p(t,x,w) = \int_0^1 w(x)\,\mathrm{d}x$, $q \equiv 0$, 由此得到

$$\begin{cases} \partial_t u = u \int_0^1 u(t,x)\,\mathrm{d}x \\ u(0,x) = \chi_{_{[0,1]}}(x) \end{cases} \qquad \text{solved by} \quad u(t,x) = \frac{1}{1-t}\,\chi_{_{[0,1]}}(x)\,.$$

注意，(P) 对 $P_1 = 0$ 和 $P_2 = 1$ 成立。显然，u 在 $t=1$ 处会在任意范数下爆破。

类似地，在 (1.2) 中令 $k=1$, $m=1$, $n=0$, $\mathcal{X}=\mathbb{R}_+$, $p(t,x,w) = \int_{\mathbb{R}_+} w(x)\mathrm{d}x$, $q \equiv 0$, 它满足 (P)，其中 $P_1 = 0$ 和 $P_2 = 1$，由此得到柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u = u \int_{\mathbb{R}_+} u(t,x)\,\mathrm{d}x \\ u(t,0) = 0 \\ u(0,x) = \chi_{_{[0,1]}}(x)\,, \end{cases} \qquad \text{solved by} \quad u(t,x) = \frac{1}{1-t}\,\chi_{_{[t,t+1]}}(x)\,.$$

同样，解在 $t=1$ 处的任意范数下都会爆破。

典型的生物学/流行病学模型具有其他一些性质，能够确保解在全局时间范围内有定义。特别是，§ 3.3 中描述的模型具有与上述例子类似的二次右端，但符号不同。尽管如此，在这个例子中，适定性在全局时间范围内成立。事实上，一般而言，解有一个下界，因为推论 2.3 保证解的各分量取非负值。通过对边界数据施加假设 (BD)，并进一步满足下文的条件 (2.3)，可以得到一个上界，从而避免有限时间爆破；该条件对整体增长作出限制。

推论 2.4. 设 $I = \mathbb{R}_+$。假设推论 2.3 的假设对所有 $h = 1,\dots,k$ 均成立。此外，假设对于适当的 $C_1 \in \mathrm{L}^\infty_{\mathbf{loc}}(\mathbb{R}_+;\, \mathrm{L}^1(\mathcal{X};\, \mathbb{R}))$ 和 $C_2 \in \mathrm{L}^\infty_{\mathbf{loc}}(\mathbb{R}_+;\, \mathbb{R})$,

$$\sum_{h=1}^{k} p^h(t,x,w)\,u^h + q^h(t,x,u,w) \leq C_1(t,x) + C_2(t) \sum_{h=1}^{k} u^h \tag{2.3}$$

对所有 $t \in \mathbb{R}_+$，几乎处处 $x \in \mathcal{X}$, $u, w \in \mathbb{R}^k$。那么，(1.2) 的解对所有 $t \in \mathbb{R}_+$ 均有定义 .

最后，我们给出解决控制问题等所必需的稳定性估计。为此，我们需要稍微具体化 p、q 和 u_b 对 $u(t)$ 的函数依赖关系。由此，我们得到应用定理 2.2 并获得稳定性估计的充分条件。

定理 2.5。设假设 (V) 和 (ID) 成立。假设在 (1.2) 中，对于 $t \in I$、 $x \in \mathcal{X}$、$u \in \mathbb{R}^k$、 $w \in \mathbf{L^1}(\mathcal{X}; \mathbb{R}^k)$,

$$\begin{array}{rcl} p^h(t,x,w) & = & P^h\left(t, x, \int_{\mathcal{X}} \mathcal{K}_p^h(t,x,x')\, w(x')\, \mathrm{d}x'\right) \\ q^h(t,x,u,w) & = & Q^h\left(t, x, u, \int_{\mathcal{X}} \mathcal{K}_q^h(t,x,x')\, w(x')\, \mathrm{d}x'\right) \\ u_b^h(t,\xi,w) & = & U_b^h\left(t, \xi, \int_{\mathcal{X}} \mathcal{K}_u^h(t,\xi,x')\, w(x')\, \mathrm{d}x'\right), \end{array} \tag{2.4}$$

其中上述函数满足:

(P) 存在 $P_1 \geq 0$和 $P_2 \geq 0$，使得对于每个 $h = 1$、.....、 k，函数P^h： $I \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^{k_p} \to \mathbb{R}$ ($k_p \geq 1$) 满足

$$\left|P^h(t,x,\eta)\right| \leq \bar{P}_1 + \bar{P}_2\|\eta\| \quad \textit{and} \quad \left|P^h(t,x,\eta_1) - P^h(t,x,\eta_2)\right| \leq \bar{P}_2\|\eta_1 - \eta_2\|$$

对于每个 $t \in I$、 $x \in \mathcal{X}$、 η、 η_1、 $\eta_2 \in \mathbb{R}^{k_p}$; $\mathcal{K}_p^h \in \mathbf{L}^\infty(I \times \mathcal{X}^2;\ \mathbb{R}^{k_p k})$。

(Q) 存在 $\bar{Q}_1\ \bar{Q}_3 \geq 0 \qquad \bar{Q}_2 \in \left(\ ^{\mathbf{1}} \cap\ ^{\infty}\right)(\mathcal{X}\ \mathbb{R}^+) \qquad h =$ $1\ \ldots\ k \qquad Q^h\ \ I \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k_p} \to \mathbb{R}^+\ \ k_q \geq 1$ 和 L L; 使得对于每个 、 、 , 函数 : ( ) 满足

$$\left|Q^h(t,x,u,\eta)\right| \leq \bar{Q}_1\|u\| + \bar{Q}_2(x)\|\eta\| + \bar{Q}_3\|u\|\|\eta\|$$

$$\left|Q^h(t,x,u_1,\eta_1) - Q^h(t,x,u_2,\eta_2)\right| \leq \bar{Q}_1\|u_1 - u_2\| + \bar{Q}_3\|\eta_1\|\|u_1 - u_2\| + \bar{Q}_3\|u_2\|\|\eta_1 - \eta_2\|$$

for every $t \in I$, $x \in \mathcal{X}$, $u, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^k$, $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^{k_q}$; $\mathcal{K}_q^h \in \mathbf{L}^\infty(I \times \mathcal{X}^2; \mathbb{R}^{k_q k})$.

(BD) 存在 $\bar{B} \in (\mathbf{L^1} \cap \mathbf{L}^\infty)(\partial\mathcal{X};\ \mathbb{R}_+)$，使得对于每个 $h = 1$、.....、 k，函数U_b^h: $I \times \partial\mathcal{X} \times \mathbb{R}^{k_u} \to \mathbb{R}_+$ 满足

$$\left|U_b^h(t,\xi,\eta)\right| \leq \bar{B}(\xi)\left(1 + \|\eta\|\right) \quad \textit{and} \quad \left|U_b^h(t,\xi,\eta_1) - U_b^h(t,\xi,\eta_2)\right| \leq \bar{B}(\xi)\,\|\eta_1 - \eta_2\|$$

对每个 $t \in I$、 $\xi \in \partial\mathcal{X}$ 和 η、 η_1、 $\eta_2 \in \mathbb{R}^{k_u}$; $\mathcal{K}_u^h \in \mathbf{L}^\infty(I \times \partial\mathcal{X} \times \mathcal{X};\ \mathbb{R}^{k_u k})$。

因此，定理 2.2 适用。此外，如果两个系统

$$\begin{cases} \partial_t u^h + \mathrm{div}_x\left(v^h(t,x)\, u^h\right) = \hat{p}^h\left(t,x,u(t)\right) u^h + \hat{q}^h\left(t,x,u,u(t)\right) & (t,x) \in I \times \mathcal{X} \\ u^h(t,\xi) = \hat{u}_b^h\left(t,\xi,u(t)\right) & (t,\xi) \in I \times \partial\mathcal{X} \\ u^h(0,x) = \hat{u}_o^h(x) & x \in \mathcal{X}, \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} \partial_t u^h + \mathrm{div}_x\left(v^h(t,x)\, u^h\right) = \check{p}^h\left(t,x,u(t)\right) u^h + \check{q}^h\left(t,x,u,u(t)\right) & (t,x) \in I \times \mathcal{X} \\ u^h(t,\xi) = \check{u}_b^h\left(t,\xi,u(t)\right) & (t,\xi) \in I \times \partial\mathcal{X} \\ u^h(0,x) = \check{u}_o^h(x) & x \in \mathcal{X}, \end{cases} \tag{2.6}$$

满足上述假设，则以下稳定性估计成立:

$$\begin{array}{rl} & \left\|\hat{u}(t) - \check{u}(t)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)} \\ \leq & \mathcal{O}(1)\left[\left\|\hat{P} - \check{P}\right\|_{\mathbf{L}^\infty\left([0,t]\times\mathcal{X}\times\mathbb{R}^{k_p};\mathbb{R}^k\right)} + \left\|\hat{\mathcal{K}}_p - \check{\mathcal{K}}_p\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X}^2;\mathbb{R}^{k_p k^2})}\right. \end{array}$$

$$+\left\|\hat{Q}-\check{Q}\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k_q};\mathbb{R}^k))}+\left\|\hat{\mathcal{K}}_q-\check{\mathcal{K}}_q\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X}^2;\mathbb{R}^{k_q k^2})}$$
$$+\left\|\hat{U}_b-\check{U}_b\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\partial\mathcal{X};\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^{k_u};\mathbb{R}^k))}+\left\|\hat{\mathcal{K}}_u-\check{\mathcal{K}}_u\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\partial\mathcal{X}\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{k_u k^2})}\Big]e^{\mathcal{O}(1)t}$$

对于每个 t，只要 $\hat{}u$ 和 $\check{}u$ 在 $[0,t]$ 上有定义，且朗道符号 $\mathcal{O}(1)$ 表示一个与初始数据无关的常数。

证明推迟到第 4 节。

最后，我们注意到，(V) 和定义 2.1 使得本节的所有结果都可以立即推广到 $\mathcal{X}=\left(\prod_{i=1}^m I_i\right)\times\mathbb{R}^n$ 的情形，只要 I_1、.....、I_m 是下有界的（非平凡）实区间。特别是，任何一个 I_i 也可以是上有界的。

2.1 半熵解的定义确保唯一性

本段给出了比文献中通常采用的设定更一般的解的定义及由此得出的唯一性结论。特别是，它将 [24, 第 3] 节中的结果推广到了稍一般的无界域 $\mathcal{X}$。事实上，采用记号 (2.1)，考虑完全非线性的初边值问题

$$\begin{cases}\partial_t u+\operatorname{div}_x f(t,x,u)=g(t,x,u) & (t,x)\in I\times\mathcal{X}\\ u(t,\xi)=u_b(t,\xi) & (t,\xi)\in I\times\partial\mathcal{X}\\ u(0,x)=u_o(x) & x\in\mathcal{X}\,.\end{cases}\tag{2.7}$$

以 下定义是对 (2.7) 中 [31,定义 3.5], 的推广，另见 [24, 33] .

定义 2.6. 在实区间 I 上，初边值问题 (2.7) 的半熵解是一个映射$u\in\mathbf{L}^\infty_{\mathbf{loc}}(I;\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R}))$，满足对于任意 $\kappa\in\mathbb{R}$ 以及任意测试函数 $\varphi\in\mathbf{C}^1_{\mathbf{c}}(]-\infty,\sup I[\times\mathbb{R}^{n+m};\mathbb{R}_+)$

$$\begin{aligned}&\int_I\int_{\mathcal{X}}\left(u(t,x)-\kappa\right)^{\pm}\partial_t\varphi(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&+\int_I\int_{\mathcal{X}}\operatorname{sgn}^{\pm}(u(t,x)-\kappa)\left(f(t,x,u)-f(t,x,\kappa)\right)\cdot\operatorname{grad}_x\varphi(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&+\int_I\int_{\mathcal{X}}\operatorname{sgn}^{\pm}(u(t,x)-\kappa)\left[g\left(t,x,u(t,x)\right)-\operatorname{div}_x f(t,x,\kappa)\right]\varphi(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&+\int_{\mathcal{X}}\left(u_o(x)-\kappa\right)^{\pm}\varphi(0,x)\,\mathrm{d}x\\&+\mathbf{Lip}(f)\int_I\int_{\partial\mathcal{X}}\left(u_b(t,\xi)-\kappa\right)^{\pm}\varphi(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t\geq 0\end{aligned}\tag{2.8}$$

其中，Lip(f) 是映射 $u\to f(t,x,u)$ 的一个利普希茨常数，且关于 $(t,x)\in I\times\mathcal{X}$ 一致。

上文中，我们使用记号 $w^+=\max\{w,0\}$ 和 $w^-=\max\{-w,0\}$。

(2.8) 的一个关键特点是它确保了解的唯一性。为便于与现有文献进行比较，我们在下一个命题中详细说明这一点。

命题2.7. 考虑满足以下假设的一般标量初边值问题 (2.7)

(f) $f\in\mathbf{C}^0(I\times\mathcal{X}\times\mathbb{R};\mathbb{R}^{n+m})$ 具有连续导数 $\partial_u f$, $\partial_u\operatorname{grad}_x f$, $D^2_{xx}f\,\mathrm{with}\partial_u f\,\mathrm{and}\,\operatorname{grad}_x f$, 且在 $(t,x)\in I\times\mathbb{R}_+$ locally in $u\in\mathbb{R}$ 中有界； $\partial_u\operatorname{grad}_x f$ 有界。

(g) $g, \partial_u g, \partial_{x_i} g \in \mathrm{C}^0(I \times \mathcal{X} \times \mathbb{R};\, \mathbb{R})$，并且对于所有 $(t,x) \in I \times \mathcal{X}$，$\big|g(t,x,u)\big| \le G(u)$，对于映射 $G \in \mathrm{L}^\infty_{\mathbf{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{R}_+)$，$\partial_u g$ 有界。

(bd) 边界数据满足 $u_b \in \mathrm{L}^\infty(I \times \partial\mathcal{X};\, \mathbb{R})$。

(id) 初始数据满足 $u_o \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{X};\, \mathbb{R})$。

如果 $u_1, u_2 \in \mathrm{L}^\infty(I \times \mathcal{X};\, \mathbb{R})$ 都满足 (2.8)，那么它们相同。

该命题对 [24, 定理 18]作了略微扩展。然而，由于定义域 $\mathcal{X}$目前是无界的，其证明仅需对 [24, 引理 16 和引理 17], 进行技术性修改。非常相似的技巧也用于 [23, § 2.6 和 § 2.7], ，后者专门讨论一个超平面。

3 应用示例

(1.1) 的结构具有足够的灵活性，能够涵盖数学在生物学、尤其是流行病学中的各种应用。上一节中的一般结果可应用于文献中众所周知的模型，例如参见 [1, 5, 7, 30]。在接下来的段落中，我们选取若干应用示例，它们的解析结构各不相同，体现在方程数量、独立变量数量、是否存在（部分）边界，以及非局部项所起的作用等方面。特别是，§ 3.1 讨论一个最近提出的模型，参见 [8], ；随后的几个小节则涉及其他适用于 (1.1) 的经典模型。

3.1 传染病的传播

在传染病传播过程中，我们将人群中的个体区分为易感者、感染者、住院者或康复者，见 [8]。这些人群分别由依赖于时间、年龄和空间的密度描述：$S = S(t,a,y)$、$I = I(t,a,y)$、$H = H(t,a,y)$和 $R = R(t,a,y)$。请注意，I与H 的区别在于，H 个体虽患病，但由于住院或被隔离，不会传染给任何人。 [8, § 2] 中提出的模型以最一般的形式描述这些人群的演变，其表达式为

$$\begin{cases} \partial_t S + \partial_a S + \operatorname{div}_y (v_S\, S) + \mu_S\, S = -(\rho \otimes I) S \\ \partial_t I + \partial_a I + \operatorname{div}_y (v_I\, I) + \mu_I\, I = (\rho \otimes I) S - \kappa\, I - \vartheta\, I \\ \partial_t H + \partial_a H + \mu_H\, H = + \kappa\, I - \eta\, H \\ \partial_t R + \partial_a R + \operatorname{div}_y (v_R\, R) + \mu_R\, R = + \vartheta\, I + \eta\, H \end{cases} \qquad \begin{matrix} t \in \mathbb{R}_+ \\ a \in \mathbb{R}_+ \\ y \in \mathbb{R}^2 \end{matrix} \tag{3.1}$$

其中，感染的传播由以下关系描述

$$\big(\rho \otimes I(t)\big)(a,y) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(a,a',y,y')\, I(t,a',y')\, \mathrm{d}y'\, \mathrm{d}a' \,. \tag{3.2}$$

此处，函数 ρ 发挥着关键作用，用于描述感染者如何感染他人、感染发生的距离，以及这种过程对年龄或时间的依赖性；更多详情请参见 [8] 。在 (3.1) 中，$v_S = v_S(t,a,y)$、$v_I = v_I(t,a,y)$ 和 $v_R = v_R(t,a,y)$ 描述了 S、I 和 R 个体随时间、年龄以及可能的空间变化而发生的迁移，而 $\mu_S = \mu_S(t,a,y)$、$\mu_I = \mu_I(t,a,y)$、

$\mu_H = \mu_H(t,a,y)$ 和 $\mu_R = \mu_R(t,a,y)$ 表示死亡率。项 $\kappa = \kappa(t,a,y)$ 描述感染者被隔离的速度；$\vartheta = \vartheta(t,a,y)$ 和 $\eta = \eta(t,a,y)$ 分别表示感染者和隔离者康复的速度。

系统 (3.1) 还需要补充边界数据和初始数据：

$$\left\{\begin{array}{l} S(t,a=0,y) = S_b(t,y) \\ I(t,a=0,y) = 0 \\ H(t,a=0,y) = 0 \\ R(t,a=0,y) = 0 \end{array}\right. \quad \text{and} \quad \left\{\begin{array}{l} S(t=0,a,y) = S_o(a,y) \\ I(t=0,a,y) = I_o(a,y) \\ H(t=0,a,y) = H_o(a,y) \\ R(t=0,a,y) = R_o(a,y)\,. \end{array}\right. \tag{3.3}$$

请注意，更精确的边界项虽然短期内不便使用，但可以采用如下形式的出生项

$$S(t,a=0,y) = \int_{\mathbb{R}_+} b(t,a',y)\, S(t,a',y)\,\mathrm{d}a'$$

这也符合定理 2.2 和定理 2.5 的框架。请注意，(3.1)–(3.2)–(3.3) 是一个以 (a,y) 为独立变量的系统，其中 a 有下界，而 y 属于 $\mathbb{R}^2$，且不存在二阶微分算子。模型 (3.1)–(3.2)–(3.3) 可按如下形式纳入 (1.2)：取 (2.4) 中的 $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$, $x = (a,y)$、$\xi = (0,y)$ 以及

$$\begin{array}{llll} k=4 & m=1 & n=2 & \\ u^1 = S & u^2 = I & u^3 = H & u^4 = R \\ w^1 = S(t) & w^2 = I(t) & w^3 = H(t) & w^4 = R(t) \\ v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ v_S \end{bmatrix} & v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ v_I \end{bmatrix} & v^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & v^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ v_R \end{bmatrix} \\ u_b^1 = S_b & u_b^2 = 0 & u_b^3 = 0 & u_b^4 = 0 \\ u_o^1 = S_o & u_o^2 = I_o & u_o^3 = H_o & u_o^4 = R_o \end{array}$$

$$\begin{array}{rclrcl} p^1(t,x,\Lambda) &=& -\mu_S - \Lambda & q^1(t,x,u,\Lambda) &=& 0 \\ p^2(t,x,\Lambda) &=& -\mu_I - \kappa - \vartheta & q^2(t,x,u,\Lambda) &=& \Lambda\, u_1 \\ p^3(t,x,\Lambda) &=& -\mu_H - \eta & q^3(t,x,u,\Lambda) &=& \kappa\, u_2 \\ p^4(t,x,\Lambda) &=& -\mu_R & q^4(t,x,u,\Lambda) &=& \vartheta\, u_2 + \eta\, u_3 \end{array}$$

且 $\mathcal{K}_p$ 和 $\mathcal{K}_q$ 中仅有 2 个非零项，其值为 ρ，因此

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\mathcal{X}} \mathcal{K}_p^1\left(t,(a,y),(a',y')\right)\, w(a',y')\,\mathrm{d}a'\,\mathrm{d}y' &=& \big(\rho \otimes I(t)\big)(a,y)\,, \\ \displaystyle\int_{\mathcal{X}} \mathcal{K}_q^2\left(t,(a,y),(a',y')\right)\, w(a',y')\,\mathrm{d}a'\,\mathrm{d}y' &=& \big(\rho \otimes I(t)\big)(a,y)\,. \end{array}$$

命题 3.1。令 $\mathcal{I} = [0,T]$ 或 $\mathcal{I} = \mathbb{R}_+$。设 $v_S, v_I, v_R \in (\mathbf{C^1} \cap \mathbf{L^\infty})(\mathcal{I} \times \mathcal{X};\, \mathbb{R}^2)$，其散度属于 $\mathbf{L^1}(\mathcal{I};\, \mathbf{L^\infty}(\mathcal{X};\, \mathbb{R}))$；$\rho \in \mathbf{L^\infty}(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^4;\, \mathbb{R})$，且 $S_b \in (\mathbf{L^1} \cap \mathbf{L^\infty})(\mathcal{I} \times \mathbb{R}^2;\, \mathbb{R})$。令 μ_S, μ_I, μ_H, μ_R, ϑ, η 和 κ 为正数且属于 $\mathbf{L^\infty}$。固定初始数据 (S_o, I_o, H_o, R_o)，使其属于 $\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\, \mathbb{R}^4)$。则：

1. 问题 (3.1)–(3.2)–(3.3) 符合定理 2.2 和定理 2.5 的条件，因此存在一个解 $(S,I,H,R) \in \mathbf{C^0}\left([0,T_*];\, \mathbf{L^1}(\mathcal{X};\, \mathbb{R}^4)\right)$，其中 $T_* > 0$。

2. 如果初始和边界数据 (S_o, I_o, H_o, R_o) 及 S_b 均非负，如果 $\rho \geq 0$ 且常数 κ, η, θ 均非负，那么推论 2.3 适用，从而保证该解非负：$(S, I, H, R)(t) \in \mathrm{L}^1(\mathcal{X}; \mathbb{R}^4_+)$，对所有 $t \in [0, T_*]$ 均成立。

3. 如果除了第 2 点所要求的条件外，死亡率 $\mu_S, \mu_I, \mu_H, \mu_R$ 还非负，则推论 2.4 适用，因此该解在全局时间范围内有定义。

4. 如果除了第 3 点所要求的条件外，(S_o, I_o, H_o, R_o) 属于 $\mathrm{L}^\infty(\mathcal{X}; \mathbb{R}^4_+)$，则该解局部有界：对于任意有界区间 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$，都有 $(S, I, H, R) \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{J} \times \mathcal{X}; \mathbb{R}^4_+)$。因此，$(S, I, H, R)$ 是依定义 2.1 意义下方程 (3.1) 的唯一解。

证明推迟到第 4 节。

正如式 (3.1) 所指出的，一个自然的控制参数是系数 $\kappa = \kappa(t, a, y)$，它决定感染者被隔离的速度。

通过谨慎选择 κ 来最小化成本，一个自然的首选是时间区间 $[0, T]$ 内的死亡总人数，即

$$\mathcal{D}(\kappa) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^2} \big(\mu_I(t, a, y)\, I(t, a, y) + \mu_H(t, a, y)\, H(t, a, y)\big)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}a\, \mathrm{d}t\ .$$

命题 3.1 确保成本 $\mathcal{D}$ 是关于 κ的连续函数。因此，标准的紧性论证，例如在 κ为常数的情况下，可以确保最优控制的存在。此外，命题 3.1 同样确保了利普希茨连续性，因此可以使用标准优化算法实际求得近似最优控制。

另一种合理的选择是最小化感染者数量的最大值$\|I\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)}$，以尽量减轻医疗卫生系统承受的最大压力。同样，命题 3.1 证明的连续性使我们能够运用魏尔斯特拉斯型论证，证明最优控制的存在；这是因为 L^∞ 范数相对于 L^1 距离具有下半连续性。

3.2 细胞生长与分裂

考虑经典模型 [4, 公式 (2)]，该模型用于描述细胞生长和细胞分裂，并在 [32, 公式 (1.5)–(1.7)] 中得到了扩展：

$$\begin{cases} \partial_t N + \partial_a N + \mathrm{div}_y\,(V(a, y)\, N) = -\lambda(a, y)\, N \\ N(t, 0, y) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^n} \beta\left((a', y'), y, N(t, a', y')\right) \mathrm{d}y'\, \mathrm{d}a' \end{cases} \tag{3.4}$$

其中，$t \in \mathbb{R}_+$ 为时间，$a \in \mathbb{R}_+$ 为年龄，$(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ 是一个由结构变量构成的 n元组，$\lambda = \lambda(a, y)$ 是年龄和状态特异性损失率，$N = N(t, a, y)$ 是种群密度，$V = V(a, y)$ 是单个细胞的（与时间无关的）生长率。因此，令……，(3.4) 便可纳入 (1.2)：

$$k = 1\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \quad m = 1\,, \quad \mathcal{X} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n\,, \quad x = (a, y)\,, \quad \xi = (0, y)\,, \quad u = N\,, \quad w = N(t)\,,$$
$$v\left(t, (a, y)\right) = V(a, y)\,, \quad p\left(t, (a, y), N(t)\right) = -\lambda(a, y)\,, \quad q\left(t, (a, y), N, N(t)\right) = 0\,,$$
$$u_b(t, y, N, N(t)) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}_+} \beta\left((a', y'), y, N(t, a', y')\right) \mathrm{d}a'\, \mathrm{d}y'\ .$$

关于定理 2.2 的假设，只要满足 $V \in (\mathbf{C^1} \cap \mathrm{L}^\infty)(\mathcal{X};\, \mathbb{R}^n)$ 且 $\operatorname{div} V \in \mathrm{L}^1(I;\, \mathrm{L}^\infty(\mathcal{X};\, \mathbb{R}))$，条件 (V) 就成立。只要 $\lambda \in \mathbf{C^0} \cap \mathrm{L}^\infty$，条件 (P) 就满足，其中 $P_1 = \|\lambda\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n;\mathbb{R})}$ 且 $P_2 = 0$。假设 (Q) 显然成立。为满足 (BD)，β 需要关于其第四个自变量是 Lipschitz 连续且次线性的，即对于适当的 $B \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^\infty$，$\beta((a', y')\ y, w) \le B(y)\big(1 + |w|\big)$。在这些假设下，定理 2.2 适用于 (3.4)。

一旦 $\beta \ge 0$ 且初始数据非负，推论 2.3 也适用，从而保证解非负。从生物学角度看，假设$\lambda \ge 0$是合理的，因此推论 2.4 也适用（其中 $C_1 = 0, C_2 = 0$），从而保证解在时间上全局定义。显然，一旦 β 关于其第三个自变量是线性的，也可以应用定理 2.5。

3.3 年龄与表型结构化种群模型

在 一般形式 (1.1) 中，我们也可以得到近期模型 [29, 公式 (1)], name ly

$$\begin{cases} \varepsilon\, \partial_t M_\varepsilon + \partial_a \big(A(a,y)\, M_\varepsilon\big) = -\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n} M_\varepsilon(t,a',y')\,\mathrm{d}a'\,\mathrm{d}y' + d(a,y)\right) M_\varepsilon \\ M_\varepsilon(t, a=0, y) = \dfrac{1}{A(a=0,y)\,\varepsilon^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}\left(\frac{y'-y}{\varepsilon}\right) b(a',y')\, M_\varepsilon(t,a',y')\,\mathrm{d}a'\,\mathrm{d}y' \\ M_\varepsilon(t=0,a,y) = M_\varepsilon^0(a,y)\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

这里，因变量 $M_\varepsilon = M_\varepsilon(t,a,y)$ 描述时间 t、年龄 $a \in \mathbb{R}_+$和性状 $x \in \mathbb{R}^n$下的种群密度，因此 $\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n} M_\varepsilon(t,a,y)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}x$ 即为种群总量。生长函数 $A = A(a,y)$ 描述依赖于年龄和性状的衰老。第一条方程 (3.5) 右端的死亡率既取决于由种内竞争导致的拥挤程度，也取决于给定的死亡率 $d = d(a,y)$。函数 $b = b(a,y)$ 量化出生率，并由突变概率核 $\mathcal{M}$ 调节，两者共同定义沿 $a = 0$ 的边界项，另见 [28]。

请注意，初边值问题 (3.5) 可视为其他各种类似模型的原型方程，例如参见 [26, 公式 (2.8)]。

上述系统 (3.5) 可通过令 $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ and 纳入 (1.2) 中

$$\begin{aligned} &k = 1\,, \quad m = 1\,, \quad n \ge 1\,, \quad x = (a,y)\,, \quad \xi = (0,y)\,, \quad u = M_\varepsilon\,, \quad w = M_\varepsilon(t)\,, \\ &v = \begin{bmatrix} A(a,y)/\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}\,, \qquad p(t,x,w) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} w(x)\,\mathrm{d}x - \frac{d(x)}{\varepsilon}\,, \qquad q(t,x,u,w) = 0\,, \\ &u_b(t,y,w) = \frac{1}{A(a=0,y)\,\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}\left(\frac{y'-y}{\varepsilon}\right) b(a',y')\, w(a',y')\,\mathrm{d}a'\,\mathrm{d}y'\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

命题 3.2. 设 $A \in (\mathbf{C^1} \cap \mathrm{L}^\infty)(\mathcal{X};\, \mathbb{R})$，其中 $\inf A > 0$ 且 $\operatorname{div}_{a,y} A \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{X};\, \mathbb{R})$。设$d \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$、$\mathcal{M} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$，使得对于固定的 $r > 0$，只要 $\|\eta\| \ge r$，就有 $\mathcal{M}(\eta) = 0$。此外，设 $b \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n;\, \mathbb{R})$，使得 $\big|b(a,y)\big| \le \big(1 + \|y\|\big)^{-(n+1)}$。那么，对于任意初始数据 $u_o \in (\mathbf{L^1} \cap \mathrm{L}^\infty)(\mathcal{X};\, \mathbb{R})$，定理 2.2 适用于以数据$u_o$为初始数据的 (3.5) 的柯西问题。此外，若 $u_o \ge 0$，$A(0,y) \ge 0$，$\mathcal{M} \ge 0$ 且 $b \ge 0$，则推论 2.3 和推论 2.4 适用，从而保证解非负，且在整个 $\mathbb{R}_+$ 上有定义。

证明推迟至第 4 节。因此，只要其中的所有假设均成立，上述结果便保证在 $[0, +\infty[$ 上存在解，从而恢复了 [28, 29] 中的适定性结果。

3.4 进一步应用

这里简要回顾文献中符合 (1.1) 的其他模型。对于以下每种情形，我们均参考原始文献，以了解建模环境的详细描述。

用于对白血病发展进行建模的模型见 [20, 公式（5）], ，其形式如下（这里， $i = 2$，...，$M - 1$ 固定于 $M \in \mathbb{N}$， $M \geq 3$）：

$$\begin{cases} \partial_t n_1 = \left(\dfrac{2\, a_1(x)}{1 + K \int_0^1 n_M(t, x')\, \mathrm{d}x'} - 1 \right) p_1(x)\, n_1 \\ \partial_t n_i = 2 \left(1 - \dfrac{a_{i-1}(x)}{1 + K \int_0^1 n_M(t, x')\, \mathrm{d}x'} \right) p_{i-1}(x)\, n_{i-1} + \left(\dfrac{2 a_i(x)}{1 + K \int_0^1 n_M(t, x')\, \mathrm{d}x'} - 1 \right) p_i(x)\, n_i \\ \partial_t n_M = 2 \left(1 - \dfrac{a_{M-1}(x)}{1 + K \int_0^1 n_M(t, x')\, \mathrm{d}x'} \right) p_{M-1}(x)\, n_{M-1} - d\, n_M \\ n_i(0, x) = n_i^o(x)\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

注意，(3.7) 可视为定义在 $[0, 1]$ 上的函数所满足的常微分方程组；或者，也可视为一个通过 x 变量上的非局部依赖耦合的常微分方程组。不过，它符合 (1.1) 的形式：事实上，令 $k = M$、 $m = 0$、 $n = 1$、 $\mathcal{X} = \mathbb{R}$、 $u =$（n_1，...， n_M）、 $v \equiv 0$，其他项显然也可作相应选取。

值得注意的是，近期模型 [3, 公式（13）], 虽然针对完全不同的情形，但在分析上与 (3.7) 类似，也符合第 2 节所形式化的框架。因此，运用定理 2.2 和定理 2.5，可将 [3, 20]中的结果扩展至涵盖 $\mathbf{L^1}$ 解，并给出一整套稳定性估计。

另一个例子是最近在 [16, 公式（1.1）], 中提出的模型，该模型针对一个由时间、年龄和空间相关的密度 $u = u(t, a, y)$ 描述的年龄结构人群：

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_a u = d(J * u(t) - u) + G\left(u(t)\right) \\ u(t, 0, y) = F\left(u(t)\right) \\ u(0, a, y) = \Phi(a, y) \end{cases} \tag{3.8}$$

在 [16] 中，对于 $a \in [0, a^+]$ 和 $y \in \Omega$，考虑该模型，其中 $a^+ \in\,]0, +\infty[$ 和 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 均为给定量。上文中， J 是一个卷积核，而泛函 F 和 G 关于 $\mathbf{L^1}$ 范数是局部 Lipschitz 连续的。模型（3.8）可纳入（1.1）的框架，令 $k = 1$、 $m = 1$、 $n = N$、$\mathcal{X} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$、 $x = (a, y)$、 $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，其余项的选取则是直接的。第 2 节中的结果立即适用，即使年龄区间 $[0, a^+]$ 和空间域是有界的，这得益于对 v所要求的假设具有普适性。这使我们能够获得关于 [16] 中所展示的解对定义（3.8）的各种参数和函数的依赖关系的定性信息。

我们还回顾以下具有年龄结构的竞争种群模型，作为方程组的一个例子。该模型是从最优管理的角度引入并研究的

见 [11, 公式（1.1）]:

$$\begin{cases} \partial_t u^1 + \partial_a u^1 = -\mu_1(a,u^1)\,u^1 - f^1(t,a)\,u^1 - u^1 \displaystyle\int_0^A c_1(a',a)\,u^2(t,a')\,\mathrm{d}a' \\ \partial_t u^2 + \partial_a u^2 = -\mu_2(a,u^2)\,u^2 - f^2(t,a)\,u^2 - u^2 \displaystyle\int_0^A c_2(a',a)\,u^1(t,a')\,\mathrm{d}a' \\ u^1(t,0) = \displaystyle\int_0^A \beta_1(a')\,u^1(t,a')\,\mathrm{d}a' \\ u^2(t,0) = \displaystyle\int_0^A \beta_2(a')\,u^2(t,a')\,\mathrm{d}a' \\ u^1(0,a) = u_o^1(a) \\ u^2(0,a) = u_o^2(a)\,. \end{cases} \tag{3.9}$$

这里，我们有 $k=2$, $m=1$, $n=0$, $\mathcal{X}=\mathbb{R}_+$, $v=1$。在定理 2.2 和定理 2.5 的假设下，我们恢复了利润泛函 [11, 公式 (1.2)] 的连续性

$$J(f) = \int_0^T \int_0^A \Big(K_1(a)\,f^1(t,a)\,u^1(t,a) + K_2(a)\,f^2(t,a)\,u^2(t,a)\Big)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}t\ ,$$

现在也适用于 $\mathbf{L^1}$ 解的情形。

4 解析证明

4.1 标量情形

现在我们详细考察仿射标量情形，即 (2.7)，其中 $f(t,x,u) = v(t,x)\ u$ 和 $g(t,x,u) = p(t,x)\,u + q(t,x)$，也就是说，

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathrm{div}_x\left(v(t,x)u\right) = p(t,x)\,u + q(t,x) & (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathcal{X} \\ u(t,\xi) = u_b(t,\xi) & (t,\xi)\in\mathbb{R}_+\times\partial\mathcal{X} \\ u(0,x) = u_o(x) & x\in\mathcal{X}\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

回顾以下标准记号。(4.1) 的一条特征线是解 $t\to X(t;t_o,x_o)$，它满足以下常微分方程组的柯西问题

$$\begin{cases} \dot{x} = v(t,x) & (t,x)\in I\times\mathcal{X} \\ x(t_o) = x_o\,. & (t_o,x_o)\in I\times\mathcal{X}\,. \end{cases} \tag{4.2}$$

对于 τ、$t\in I$，以及对于 $x\in\mathcal{X}$，定义

$$\mathcal{E}(\tau,t,x) = \exp\left(\int_\tau^t \Big(p\left(s,X(s;t,x)\right) - \mathrm{div}_x\, v\left(s,X(s;t,x)\right)\Big)\,\mathrm{d}s\right) \tag{4.3}$$

并且对于所有 $(t,x)\in I\times\mathcal{X}$，若 $x\in X(t;[0,t[,\partial\mathcal{X})$，我们令

$$T(t,x) = \inf\left\{s\in[0,t[:\ X(s;t,x)\in\mathcal{X}\right\}\ . \tag{4.4}$$

采用上述引入的记号，我们回顾一个众所周知的公式

$$u(t,x)=\begin{cases} u_o\left(X(0;t,x)\right)\mathcal{E}(0,t,x) \\ \qquad\qquad +\displaystyle\int_0^t q\left(\tau,X(\tau;t,x)\right)\,\mathcal{E}(\tau,t,x)\,\mathrm{d}\tau & x\in X(t;0,\mathcal{X}) \\ u_b\left(T(t,x),X\left(T(t,x);t,x\right)\right)\,\mathcal{E}\left(T(t,x),t,x\right) \\ \qquad\qquad +\displaystyle\int_{T(t,x)}^t q\left(\tau,X(\tau;t,x)\right)\,\mathcal{E}(\tau,t,x)\,\mathrm{d}\tau & x\in X(t;[0,t[,\partial\mathcal{X}) \end{cases} \tag{4.5}$$

这是通过沿特征线积分得到的，这种方法至少自经典论文 [12] 以来便已成为一种标准工具。以下关系将在下文中用到，证明可参见例如 [6, 第 3], 章

$$\partial_t X(t;t_o,x_o)=v\left(t,X(t;t_o,x_o)\right) \tag{4.6}$$

$$\partial_{t_o} X(t;t_o,x_o)=-v(t_o,x_o)\,\exp\int_{t_o}^t \mathrm{div}_x\, v\left(s;X(t,t_o,x_o)\right)\mathrm{d}s \tag{4.7}$$

$$D_{x_o}X(t;t_o,x_o)=M(t),\text{ the matrix } M \text{ solves } \begin{cases} \dot{M}=D_x v\left(t,X(t;t_o,x_o)\right)M \\ M(t_o)=\mathbf{Id}\ . \end{cases} \tag{4.8}$$

为了证明 (4.5) 按定义 2.6 的意义解出 (4.1)，并给出适定性的基本估计，需要先引入几个技术性引理。首先引入以下记号：为避免可能产生的误解，我们对导数采用位置记法。例如，对于映射 $(t;t_o,x_o)\to X(t;t_o,x_o)$，我们记

$$\partial_2 X(t;t_o,x_o)=\partial_{t_o}X(t;t_o,x_o)=\lim_{\tau\to 0}\frac{X(t;t_o+\tau,x_o)-X(t;t_o,x_o)}{\tau}\,.$$

我们还设 $X=(X_1,\dots,X_{m+n})$，其中 $X_i=X\cdot e_i$，且 $(e_1,\dots,e_{m+n})$ 是 $\mathbb{R}^{m+n}$ 的标准基。还要回顾一下，对于 $l=1$、2、3 以及 $i=1,\dots,m+n$，有 $\partial_l X_i=\partial_l(X\cdot e_i)=(\partial_l X)\cdot e_i$。

引理 4.1. 在假设 (V) 下，给定 $k=1$，映射 (4.4)

$$\begin{array}{rccc} T:\ \left\{(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathcal{X}\colon x\in X(t;[0,t[\,,\partial\mathcal{X})\right\} & \to & \mathbb{R}_+ \\ (t,x) & \mapsto & \inf\left\{s\in[0,t[\colon X(s;t,x)\in\mathcal{X}\right\} \end{array} \tag{4.9}$$

是良定义的。此外，对于所有 $t\in\mathbb{R}_+$，以及几乎处处的 $x\in\mathcal{X}$，只要 $x\in X(t;[0,t[,\partial\mathcal{X})$，就存在唯一的 $i\in\{1,\dots,m\}$，它依赖于 t 和 x，使得

$$X_i(T(t,x);t,x)=0. \tag{4.10}$$

给定 $t\in\mathbb{R}_+$，对于 $i\in\{1,\dots,m\}$，将满足以下条件的 $x\in\mathcal{X}$ 的集合称为 $\mathbb{X}_i^t$：i 是满足 (4.10) 的唯一指标。于是，映射

$$\begin{array}{rccc} M_i\colon & \mathbb{X}_i^t & \to & \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{n+m-1} \\ & x & \mapsto & \left(T(t,x),\left(X_j(T(t,x),t,x)\right)_{j\neq i}\right) \end{array} \tag{4.11}$$

是一个局部微分同胚。函数 T 的导数为

$$\partial_t T(t,x)=-\frac{\partial_2 X_i(T(t,x);t,x)}{v_i\left(T(t,x),X(T(t,x);t,x)\right)} \tag{4.12}$$

$$\partial_{x_\ell} T(t,x) = -\frac{\partial_{3_\ell} X_i\left(T(t,x);t,x\right)}{v_i\left(T(t,x), X\left(T(t,x);t,x\right)\right)} \qquad \ell = 1,\dots,n+m\,. \tag{4.13}$$

最后，雅可比矩阵 DM_i 在 x 处的行列式的绝对值为

$$\frac{1}{v_i\left(T(t,x), X(T(t,x);t,x\right)} \exp \int_t^{T(t,x)} \sum_{j=1}^{m+n} \partial_{x_j} v_j\left(s, X\left(s;t,x\right)\right) \mathrm{d}s\,. \tag{4.14}$$

证明。根据 (V)，常微分方程系统的常用柯西定理保证，对于所有 $(t_o, x_o) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X}$，柯西问题 (4.2) 存在唯一的解，且该解定义在极大区间 $[T_{(t_o,x_o)} + \infty[$，上，其中 $T_{(t_o,x_o)} \in [0, t_o]$。于是，(4.4) 中定义的映射 T可写为 $T(t,x) = T_{(t,x)}$（当 $T_{(t,x)} > 0$ 时），否则为 $T(t,x) = 0$。因此，映射 (4.9) 定义良好。

一旦 $x \in X(t;\, [0,t[, \partial\mathcal{X})$，显然至少存在一个指标 i 使得该条件成立。唯一性由 $X(t;\cdot,\cdot)$ (4.10)
是一个微分同胚得出。

固定 $t > 0$、 $i \in \{1,\dots,m\}$ 和 $x \in \mathbb{X}_i^t$。在 (t,x) 的局部邻域内，约束 (4.10) 仍然成立。为计算映射 $(t,x) \to T(t,x)$ 的导数，对 (4.10) 关于 t 求导，得到

$$\partial_1 X_i\left(T(t,x);t,x\right)\, \partial_t T(t,x) + \partial_2 X_i\left(T(t,x);t,x\right) = 0$$

因此，利用 (4.6)，

$$v_i\left(T(t,x), X\left(T(t,x);t,x\right)\right) \partial_t T(t,x) + \partial_2 X_i\left(T(t,x);t,x\right) = 0$$

这证明了 (4.12)；而对 x_ℓ ($\ell \in \{1,\dots,m+n\}$) 求导可得

$$\partial_1 X_i\left(T(t,x);t,x\right)\, \partial_{x_\ell} T(t,x) + \partial_{3_\ell} X_i\left(T(t,x);t,x\right) = 0$$

因此，利用 (4.6)，

$$v_i\left(T(t,x), X\left(T(t,x);t,x\right)\right)\, \partial_{x_\ell} T(t,x) + \partial_{3_\ell} X_i\left(T(t,x);t,x\right) = 0,$$

这证明了 (4.13)。

Co考虑 $(n+m) \times (n+m)$ 雅可比矩阵 DM_i。由 (4.13)，第一行是

$$\left(\partial_{x_1} T(t,x), \cdots, \partial_{x_{n+m}} T(t,x)\right) = \left(-\frac{\partial_{3_1} X_i}{v_i}, \cdots, -\frac{\partial_{3_{n+m}} X_i}{v_i}\right),$$

为简洁起见，我们省略了函数 X_i 和 v_i 的自变量。DM_i 中由 $j \in \{1,\dots,n+m\}$、 $j \neq i$ 索引的其余各行为

$$\begin{aligned} &\left(\partial_{x_1} X_j(T(t,x);t,x), \cdots, \partial_{x_{n+m}} X_j(T(t,x);t,x)\right) \\ = \;& \left(-v_j \frac{\partial_{3_1} X_i}{v_i} + \partial_{3_1} X_j, \cdots, -v_j \frac{\partial_{3_{n+m}} X_i}{v_i} + \partial_{3_{n+m}} X_j\right). \end{aligned}$$

我们使用高斯消元法计算 DM_i 的行列式。我们修改除第一行以外的所有行，方法是将第一行的倍数加到每一行上。这样，行列式

DM_i 的行列式等于矩阵的行列式

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial_{3_1} X_i}{v_i} & -\frac{\partial_{3_2} X_i}{v_i} & \cdots & -\frac{\partial_{3_{n+m}} X_i}{v_i} \\ \partial_{3_1} X_1 & \partial_{3_2} X_1 & \cdots & \partial_{3_{n+m}} X_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{3_1} X_{n+m} & \partial_{3_2} X_{n+m} & \cdots & \partial_{3_{n+m}} X_{n+m} \end{pmatrix}$$

在情形 $i \neq 1\ n+m$ | DM_i | = 下，其余情形完全类似。 $\frac{1}{v_i}$ | $D_3 X$ | 4 8 [13, 1 2,], 因此 det ( ) det ( )。利用 (.) 和刘维尔定理（第四章定理 .），我们推得

$$\begin{aligned} \left|\det\left(DM_i(x)\right)\right| &= \frac{1}{v_i\left(T(t,x);X(T(t,x);t,x)\right)} \exp\int_t^{T(t,x)} \operatorname{tr}\left(D_x v\left(s,X\left(s;t,x\right)\right)\right) \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{v_i\left(T(t,x);X(T(t,x);t,x)\right)} \exp\int_t^{T(t,x)} \sum_{j=1}^{m+n} \partial_{x_j} v_j\left(s,X\left(s;t,x\right)\right) \mathrm{d}s \end{aligned}$$

这就证明了 (4.14)。 □

接下来的两个引理给出了关于 (4.1) 的基本先验估计和稳定性估计。

引理 4.2. 设 (V) 成立，且 $k = 1$ hold， $p \in \mathrm{L}^\infty(I \times \mathcal{X};\ \mathbb{R})$、 $q \in \mathrm{L}^1(I \times \mathcal{X};\ \mathbb{R})$、 $u_b \in \mathrm{L}^1(I \times \partial\mathcal{X};\ \mathbb{R})$ 和 $u_o \in \mathrm{L}^1(\mathcal{X};\ \mathbb{R})$。那么，对每个 $t \in I$，由公式 (4.5) 定义的问题 (4.1) 的解满足以下先验估计：

$$\begin{aligned} \left\|u(t)\right\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R})} \leq\ & \left(\|q\|_{\mathbf{L}^1([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})} + \|u_o\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X})}\right) e^{\|p\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})} t} \\ &+ \left(\sum_{i=1}^{m} \iint_{\Gamma_i} \left|u_b(\tau,\xi)\right| v_i(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi\right) e^{\|p\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})} t}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

其中 $\Gamma_i = M_i(\mathbb{X}_i^t)$ 满足 (4.11) 中的条件， M_i ，且 $\mathbb{X}_t^i$ 如引理 4.1 所述。此外，若 $q \in \mathrm{L}^1\left(I;\mathrm{L}^\infty\left(\mathcal{X};\ \mathbb{R}\right)\right)$, $u_o \in \mathrm{L}^\infty\left(\mathcal{X};\ \mathbb{R}\right)$，且 $u_b \in \mathrm{L}^\infty(I \times \partial\mathcal{X};\ \mathbb{R})$，则

$$\begin{aligned} \left\|u(t)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R})} \leq\ & \left(\|u_o\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R})} + \|u_b\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\partial\mathcal{X};\mathbb{R}))} + \|q\|_{\mathbf{L}^1([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))}\right) \\ &\times \exp\left(\int_0^t \left(\left\|p(\tau)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R})} + \left\|\operatorname{div}_x v(\tau)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R})}\right) \mathrm{d}\tau\right). \end{aligned} \tag{4.16}$$

证明。L^∞ 界的证明可直接由

$$\mathcal{E}(\tau,t,x) \leq \exp\left(\|p\|_{\mathbf{L}^1([\tau,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))} + \|\operatorname{div}_x v\|_{\mathbf{L}^1([\tau,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))}\right),$$

以及（4.5）。为了得到 L^1 界，注意到 $\left\|u(t)\right\|_{\mathbf{L}^1\left(\mathcal{X};\ \mathbb{R}\right)} = \left\|u(t)\right\|_{\mathbf{L}^1\left(X\left(t;\ 0,\ \mathcal{X}\right);\ \mathbb{R}\right)} + \left\|u(t)\right\|_{\mathbf{L}^1\left(X\left(t;\ [0,t[,\partial\mathcal{X}\right);\ \mathbb{R}\right)}$。因此，我们考虑两种情形，并进行适当的变量替换。由（4.5），对于 $t \in I$，有

$$\begin{aligned} \int_{X(t;0,\mathcal{X})} \left|u(t,x)\right| \mathrm{d}x \leq\ & \int_{X(t;0,\mathcal{X})} \left|u_o\left(X(0;t,x)\right)\right| \mathcal{E}\left(0,t,x\right) \mathrm{d}x \\ &+ \int_{X(t;0,\mathcal{X})} \int_0^t \left|q\left(\tau,X\left(\tau;t,x\right)\right)\right| \mathcal{E}\left(\tau,t,x\right) \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{4.17}$$

考虑（4.17）右端的第一项。利用刘维尔定理 [13, 定理 1.2, 第四章], 变量替换 $\xi = X(0;t,x)$ 以及关于 p 的假设,

$$\begin{aligned}\int_{X(t;0,\mathcal{X})} \left|u_o\left(X(0;t,x)\right)\right| \mathcal{E}\left(0,t,x\right) \mathrm{d}x &= \int_{\mathcal{X}} \left|u_o(\xi)\right| \exp\left(\int_0^t p\left(s, X\left(s;0,\xi\right)\right) \mathrm{d}s\right) \mathrm{d}\xi \\ &\leq \|u_o\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X})} \, e^{\|p\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})} t}.\end{aligned}$$

考虑 (4.17) 右端的第二项。使用变量替换$\xi = X(\tau;\ t,x)$,

$$\begin{aligned}&\int_{X(t;0,\mathcal{X})} \int_0^t \left|q\left(\tau, X\left(\tau;t,x\right)\right)\right| \mathcal{E}\left(\tau,t,x\right) \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}x \\ =&\int_0^t \int_{X(\tau;0,\mathcal{X})} \left|q(\tau,\xi)\right| \exp\left(\int_\tau^t p\left(s, X(s;\tau,\xi)\right) \mathrm{d}s\right) \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\tau \\ \leq&\|q\|_{\mathbf{L^1}\left(X\left([0,t];0,\mathcal{X}\right);\mathbb{R}\right)} e^{\|p\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})} t}.\end{aligned}$$

因此，利用 (4.17)，对于 $t \in I$，我们推得

$$\int_{X(t;0,\mathcal{X})} \left|u(t,x)\right| \mathrm{d}x \leq \left(\|u_o\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X})} + \|q\|_{\mathbf{L^1}\left(X\left([0,t];0,\mathcal{X}\right);\mathbb{R}\right)}\right) e^{\|p\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})} t}. \tag{4.18}$$

估　　计边界条件相关项时，对于 $t \in I$，使用 (4.　　5):

$$\begin{aligned}\int_{X(t;[0,t[,\partial\mathcal{X})} \left|u(t,x)\right| \mathrm{d}x \quad &= \quad \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{X}_i^t} \left|u(t,x)\right| \mathrm{d}x \\ &\leq \quad \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{X}_i^t} \left|u_b\left(T(t,x), X\left(T(t,x);t,x\right)\right)\right| \mathcal{E}\left(T(t,x),t,x\right) \mathrm{d}x \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{X}_i^t} \int_{T(t,x)}^t \left|q\left(\tau, X\left(\tau;t,x\right)\right)\right| \mathcal{E}\left(\tau,t,x\right) \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

对于 $i \in \{1,\ldots,m\}$，使用 (4.11) 中的微分同胚 M_i 进行变量替换，即 $\tau = T(t,x), \xi = X\left(T(t,x);\ t,x\right)$，并令 $\Gamma_i = M_i(\mathbb{X}_i^t)$。因此，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{X}_i^t} \left|u_b\left(T(t,x), X\left(T(t,x);t,x\right)\right)\right| \mathcal{E}\left(T(t,x),t,x\right) \mathrm{d}x \\ =&\iint_{\Gamma_i} \left|u_b(\tau,\xi)\right| \exp\left(\int_\tau^t p\left(s, X(s;\tau,\xi)\right) \mathrm{d}s\right) v_i(\tau,\xi) \ \mathrm{d}\tau \ \mathrm{d}\xi \\ \leq&e^{\|p\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})} t} \iint_{\Gamma_i} \left|u_b(\tau,\xi)\right| v_i(\tau,\xi) \ \mathrm{d}\tau \ \mathrm{d}\xi\,.\end{aligned}$$

对于 $i \in \{1,\ldots,m\}$，再次使用变量替换 $\xi = X(\tau;\ t,x)$，定义

$$\Xi_t^i = \left\{(\tau,\xi) \in \mathbb{R}^{1+m+n} \colon \tau \in [t, T(t,x)]\,,\ x \in \mathbb{X}_t^i\,,\ \xi = X(\tau;t,x)\right\} \tag{4.20}$$

并且我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{X}_t^i}\int_{T(t,x)}^{t}\Big|q\left(\tau,X\left(\tau;t,x\right)\right)\Big|\,\mathcal{E}\left(\tau,t,x\right)\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}x\\
=\;&\iint_{\Xi_t^i}\big|q(\tau,\xi)\big|\exp\left(\int_{\tau}^{t}p\left(s,X(s;\tau,\xi)\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi\\
\leq\;&\|q\|_{\mathbf{L^1}(\Xi_t^i;\mathbb{R})}\,e^{\|p\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}t}.
\end{aligned}$$

因此，利用 (4.19)，对于 $t\in I$，我们可得

$$\int_{X(t;[0,t[,\partial\mathcal{X})}\big|u(t,x)\big|\,\mathrm{d}x\leq e^{\|p\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}t}\sum_{i=1}^{m}\left[\iint_{\Gamma_i}\big|u_b(\tau,\xi)\big|v_i(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi+\|q\|_{\mathbf{L^1}(\Xi_t^i;\mathbb{R})}\right].$$

证明至此结束。 □

引理 4.3. 固定满足 (V) 且具有 $k=1$ 的 v。设 $p_1,p_2\in\mathrm{L}^\infty(I\times\mathcal{X};\,\mathbb{R})$，$q_1,q_2\in\mathrm{L}^1(I\times\mathcal{X};\,\mathbb{R})$，其中 $u_{b,1}$ 以及 $u_{b,2}$ 如引理 4.2 中所述，并设 $u_{o,1}$,$u_{o,2}$ 满足 (ID)。分别定义 u_1 和 u_2 为下列方程的解

$$\begin{cases}\partial_t u_1+\mathrm{div}_x\left(v\,u_1\right)=p_1\,u_1+q_1\\ u_1(t,\xi)=u_{b,1}(t,\xi)\\ u_1(0,x)=u_{o,1}(x)\end{cases}\qquad and\qquad\begin{cases}\partial_t u_2+\mathrm{div}_x\left(v\,u_2\right)=p_2\,u_2+q_2\\ u_2(t,\xi)=u_{b,2}(t,\xi)\\ u_2(0,x)=u_{o,2}(x).\end{cases}$$

那么，对于任意 $t\in I$，以下稳定性估计成立

$$\begin{aligned}
&\big\|u_1(t)-u_2(t)\big\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})}\\
\leq\;&\mathcal{P}(t)\,\big\|u_{o,1}-u_{o,2}\big\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})}\\
&+\mathcal{P}(t)\,\|v\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})}\,\big\|u_{b,1}-u_{b,2}\big\|_{\mathbf{L^1}(I\times\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\\
&+\mathcal{P}(t)\,\|q_1-q_2\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}\\
&+\mathcal{P}(t)\left(\big\|u_{o,1}\big\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})}+\|v\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})}\big\|u_{b,2}\big\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\right)\|p_1-p_2\|_{\mathbf{L^1}([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))}\\
&+\mathcal{P}(t)\,\|q_2\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}\,\|p_1-p_2\|_{\mathbf{L^1}([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))}\,,
\end{aligned}\tag{4.21}$$

where $\mathcal{P}(t)=\exp\left(t\,\max\left\{\|p_1\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})},\|p_2\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}\right\}\right)$.

证明。考虑 u_1 和 u_2 为两个系统的解，并固定 $t\in I$。对于 $i=1$，定义 ,2

$$\mathcal{E}_i\left(\tau,t,x\right)=\exp\left(\int_{\tau}^{t}\Big(p_i\left(s,X(s;t,x)\right)-\mathrm{div}_x\,v\left(s,X(s;t,x)\right)\Big)\mathrm{d}s\right).$$

我们得到分解

$$\big\|u_1(t)-u_2(t)\big\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})}=\int_{X(t;0,\mathcal{X})}\big|u_1(t)-u_2(t)\big|\,\mathrm{d}x+\int_{X(t;[0,t[,\partial\mathcal{X})}\big|u_1(t)-u_2(t)\big|\,\mathrm{d}x\;.\tag{4.22}$$

我们分别处理（4.22）式右端的两项。第一项利用显式公式（4.5）处理:

$$
\begin{aligned}
&\int_{X(t;0,\mathcal{X})} \left|u_1(t)-u_2(t)\right| \mathrm{d}x \\
\leq &\int_{X(t;0,\mathcal{X})} \left|u_{o,1}\left(X\left(0;t,x\right)\right)\mathcal{E}_1\left(0,t,x\right)-u_{o,2}\left(X\left(0;t,x\right)\right)\mathcal{E}_2\left(0,t,x\right)\right| \mathrm{d}x \\
&+\int_{X(t;0,\mathcal{X})}\int_0^t \left|q_1\left(\tau,X\left(\tau;t,x\right)\right)\mathcal{E}_1\left(\tau,t,x\right)-q_2\left(\tau,X\left(\tau;t,x\right)\right)\mathcal{E}_2\left(\tau,t,x\right)\right| \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}x \\
\leq &\int_{X(t;0,\mathcal{X})} \mathcal{E}_1\left(0,t,x\right)\left|u_{o,1}\left(X\left(0;t,x\right)\right)-u_{o,2}\left(X\left(0;t,x\right)\right)\right| \mathrm{d}x \\
&+\int_{X(t;0,\mathcal{X})} \left|u_{o,2}\left(X\left(0;t,x\right)\right)\right|\left|\mathcal{E}_1\left(0,t,x\right)-\mathcal{E}_2\left(0,t,x\right)\right| \mathrm{d}x \\
&+\int_{X(t;0,\mathcal{X})}\int_0^t \mathcal{E}_1\left(\tau,t,x\right)\left|q_1\left(\tau,X\left(\tau;t,x\right)\right)-q_2\left(\tau,X\left(\tau;t,x\right)\right)\right| \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}x \\
&+\int_{X(t;0,\mathcal{X})}\int_0^t \left|q_2\left(\tau,X\left(\tau;t,x\right)\right)\right|\left|\mathcal{E}_1\left(\tau,t,x\right)-\mathcal{E}_2\left(\tau,t,x\right)\right| \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
$$

使用两个变量代换 $\xi = X(0;\ t,x)$ 和 $\xi = X(\tau;\ t,x)$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{X(t;0,\mathcal{X})} \left|u_1(t)-u_2(t)\right| \mathrm{d}x \\
\leq &\int_{\mathcal{X}} \exp\left(\int_0^t p_1\left(s,X(s;0,\xi)\right)\mathrm{d}s\right)\left|u_{o,1}\left(\xi\right)-u_{o,2}\left(\xi\right)\right| \mathrm{d}\xi \\
&+\int_{\mathcal{X}} \left|u_{o,2}\left(\xi\right)\right|\left|\exp\left(\int_0^t p_1\left(s,X(s;0,\xi)\right)\mathrm{d}s\right)-\exp\left(\int_0^t p_2\left(s,X(s;0,\xi)\right)\mathrm{d}s\right)\right| \mathrm{d}\xi \\
&+\int_0^t\int_{X(\tau;0,\mathcal{X})} \left|q_1\left(\tau,\xi\right)-q_2\left(\tau,\xi\right)\right|\exp\left(\int_\tau^t p_1\left(s,X(s;\tau,\xi)\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\tau \\
&+\int_0^t\int_{X(\tau;0,\mathcal{X})} \left|q_2\left(\tau,\xi\right)\right| \\
&\qquad\times\left|\exp\left(\int_\tau^t p_1\left(s,X(s;\tau,\xi)\right)\mathrm{d}s\right)-\exp\left(\int_\tau^t p_2\left(s,X(s;\tau,\xi)\right)\mathrm{d}s\right)\right| \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \\
\leq &\mathcal{P}(t)\left(\left\|u_{o,1}-u_{o,2}\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})}+\left\|q_1-q_2\right\|_{\mathbf{L^1}\left(X\left([0,t];0,\mathcal{X}\right);\mathbb{R}\right)}\right) \\
&+\mathcal{P}(t)\left\|u_{o,2}\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})}\left\|p_1-p_2\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))} \\
&+\mathcal{P}(t)\left\|q_2\right\|_{\mathbf{L^1}\left(X\left([0,t];0,\mathcal{X}\right);\mathbb{R}\right)}\left\|p_1-p_2\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))}\,,
\end{aligned}
$$

其中我们令

$$
\mathcal{P}(t)=\exp\left(\max\left\{\left\|p_1\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}t\,,\ \left\|p_2\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}t\right\}\right)\,. \tag{4.23}
$$

现在来看式 (4.22) 右端的第二项，将其按式 (4.11) 中定义的不同面 $\mathbb{X}_i^t$ for $i \in \{1, \dots, m\}$ 进行拆分：

$$\int_{X(t;[0,t[,\partial\mathcal{X})} \left|u_1(t) - u_2(t)\right| \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{X}_i^t} \left|u_1(t) - u_2(t)\right| \mathrm{d}x \,.$$

固定 $i \in \{1, \dots, m\}$，也就是说，分别考虑总和中的每一项：

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{X}_i^t} \left|u_1(t) - u_2(t)\right| \mathrm{d}x \\
\leq\ & \int_{\mathbb{X}_i^t} \Big| u_{b,1}\Big(T(t,x), X\left(T(t,x);t,x\right)\Big) \mathcal{E}_1\left(T(t,x),t,x\right) \\
&\qquad - u_{b,2}\Big(T(t,x), X\left(T(t,x);t,x\right)\Big) \mathcal{E}_2\left(T(t,x),t,x\right) \Big| \mathrm{d}x \\
&+ \int_{\mathbb{X}_i^t} \int_{T(t,x)}^{t} \Big| q_1\left(\tau, X\left(\tau;t,x\right)\right) \mathcal{E}_1\left(\tau,t,x\right) - q_2\left(\tau, X\left(\tau;t,x\right)\right) \mathcal{E}_2\left(\tau,t,x\right) \Big| \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}x \\
\leq\ & \int_{\mathbb{X}_i^t} \mathcal{E}_1\left(T(t,x),t,x\right) \\
&\qquad \times \Big| u_{b,1}\Big(T(t,x), X\left(T(t,x);t,x\right)\Big) - u_{b,2}\Big(T(t,x), X\left(T(t,x);t,x\right)\Big) \Big| \mathrm{d}x \\
&+ \int_{\mathbb{X}_i^t} \Big| u_{b,2}\Big(T(t,x), X\left(T(t,x);t,x\right)\Big) \Big| \Big| \mathcal{E}_1\left(T(t,x),t,x\right) - \mathcal{E}_2\left(T(t,x),t,x\right) \Big| \mathrm{d}x \\
&+ \int_{\mathbb{X}_i^t} \int_{T(t,x)}^{t} \mathcal{E}_1\left(\tau,t,x\right) \Big| q_1\left(\tau, X\left(\tau;t,x\right)\right) - q_2\left(\tau, X\left(\tau;t,x\right)\right) \Big| \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}x \\
&+ \int_{\mathbb{X}_i^t} \int_{T(t,x)}^{t} \Big| q_2\left(\tau, X\left(\tau;t,x\right)\right) \Big| \left| \mathcal{E}_1\left(\tau,t,x\right) - \mathcal{E}_2\left(\tau,t,x\right) \right| \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}x \,.
\end{aligned}$$

现在，对于 $i \in \{1, \dots, m\}$，我们使用 (4.11) 中定义的微分同胚 M_i，并使用 (4.20) 中的集合 Ξ_t^i。因此，根据 (4.23)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{X}_i^t} \left|u_1(t,x) - u_2(t,x)\right| \mathrm{d}x \\
\leq\ & \iint_{\Gamma_i} \exp\left(\int_\tau^t p_1\left(s, X(s;\tau,\xi)\right) \mathrm{d}s \right) \left| u_{b,1}(\tau,\xi) - u_{b,2}(\tau,\xi) \right| v_i(\tau,\xi) \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\tau \\
&+ \iint_{\Gamma_i} \left| u_{b,2}(\tau,\xi) \right| \\
&\qquad \times \left| \exp\left(\int_\tau^t p_1\left(s, X(s;\tau,\xi)\right) \mathrm{d}s \right) - \exp\left(\int_\tau^t p_2\left(s, X(s;\tau,\xi)\right) \mathrm{d}s \right) \right| v_i(\tau,\xi) \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\tau \\
&+ \iint_{\Xi_t^i} \exp\left(\int_\tau^t p_1\left(s, X(s;\tau,\xi)\right) \mathrm{d}s \right) \left| q_1(\tau,\xi) - q_2(\tau,\xi) \right| \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}\xi \\
&+ \iint_{\Xi_t^i} \left| q_2(\tau,\xi) \right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \left| \exp\left(\int_\tau^t p_1\left(s, X(s;\tau,\xi)\right) \mathrm{d}s \right) - \exp\left(\int_\tau^t p_2\left(s, X(s;\tau,\xi)\right) \mathrm{d}s \right) \right| \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}\xi \\
&\leq \mathcal{P}(t) \left\| v \right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})} \left\| u_{b,1} - u_{b,2} \right\|_{\mathbf{L}^1(\Gamma_i;\mathbb{R})} \\
&\quad + \mathcal{P}(t) \left\| v \right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})} \left\| u_{b,2} \right\|_{\mathbf{L}^1(\Gamma_i;\mathbb{R})} \left\| p_1 - p_2 \right\|_{\mathbf{L}^1([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))} \\
&\quad + \mathcal{P}(t) \left\| q_1 - q_2 \right\|_{\mathbf{L}^1(\Xi_t^i;\mathbb{R})} \\
&\quad + \mathcal{P}(t) \left\| q_2 \right\|_{\mathbf{L}^1(\Xi_t^i;\mathbb{R})} \left\| p_1 - p_2 \right\|_{\mathbf{L}^1([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))} \\
&\leq \mathcal{P}(t) \left(\left\| v \right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})} \left\| u_{b,1} - u_{b,2} \right\|_{\mathbf{L}^1(\Gamma_i;\mathbb{R})} + \left\| q_1 - q_2 \right\|_{\mathbf{L}^1(\Xi_t^i;\mathbb{R})} \right) \\
&\quad + \mathcal{P}(t) \left\| v \right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})} \left\| u_{b,2} \right\|_{\mathbf{L}^1(\Gamma_i;\mathbb{R})} \left\| p_1 - p_2 \right\|_{\mathbf{L}^1([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))} \\
&\quad + \mathcal{P}(t) \left\| q_2 \right\|_{\mathbf{L}^1(\Xi_t^i;\mathbb{R})} \left\| p_1 - p_2 \right\|_{\mathbf{L}^1([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))} .
\end{aligned}
$$

因此，根据 (4.22)，我们推得

$$
\begin{aligned}
&\left\| u_1(t) - u_2(t) \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R})} \\
\leq\ & \mathcal{P}(t) \left(\left\| u_{o,1} - u_{o,2} \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R})} + \left\| q_1 - q_2 \right\|_{\mathbf{L}^1(X;([0,t];0,\mathcal{X});\mathbb{R})} \right) \\
&+ \mathcal{P}(t) \left\| u_{o,2} \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R})} \left\| p_1 - p_2 \right\|_{\mathbf{L}^1([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))} \\
&+ \mathcal{P}(t) \left\| q_2 \right\|_{\mathbf{L}^1(X;([0,t];0,\mathcal{X});\mathbb{R})} \left\| p_1 - p_2 \right\|_{\mathbf{L}^1([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))} \\
&+ \sum_{i=1}^m \mathcal{P}(t) \left(\left\| v \right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})} \left\| u_{b,1} - u_{b,2} \right\|_{\mathbf{L}^1(\Gamma_i;\mathbb{R})} + \left\| q_1 - q_2 \right\|_{\mathbf{L}^1(\Xi_t^i;\mathbb{R})} \right) \\
&+ \sum_{i=1}^m \mathcal{P}(t) \left\| v \right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})} \left\| u_{b,2} \right\|_{\mathbf{L}^1(\Gamma_i;\mathbb{R})} \left\| p_1 - p_2 \right\|_{\mathbf{L}^1([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))} \\
&+ \sum_{i=1}^m \mathcal{P}(t) \left\| q_2 \right\|_{\mathbf{L}^1(\Xi_t^i;\mathbb{R})} \left\| p_1 - p_2 \right\|_{\mathbf{L}^1([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))} \\
\leq\ & \mathcal{P}(t) \left\| u_{o,1} - u_{o,2} \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R})} \\
&+ \mathcal{P}(t) \left\| v \right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})} \left\| u_{b,1} - u_{b,2} \right\|_{\mathbf{L}^1([0,t]\times\partial\mathcal{X};\mathbb{R})} \\
&+ \mathcal{P}(t) \left\| q_1 - q_2 \right\|_{\mathbf{L}^1([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})} \\
&+ \mathcal{P}(t) \left(\left\| u_o \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)} + \left\| v \right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})} \left\| u_{b,2} \right\|_{\mathbf{L}^1([0,t]\times\partial\mathcal{X};\mathbb{R})} \right) \left\| p_1 - p_2 \right\|_{\mathbf{L}^1([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))} \\
&+ \mathcal{P}(t) \left\| q_2 \right\|_{\mathbf{L}^1([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})} \left\| p_1 - p_2 \right\|_{\mathbf{L}^1([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))} ,
\end{aligned}
$$

证明式 (4.21)。 □

命题 4.4. 设 v 满足 (V)，其中 $k = 1$、$p \in \mathrm{L}^\infty(I \times \mathcal{X};\ \mathbb{R})$、$q \in \mathrm{L}^1(I \times \mathcal{X};\ \mathbb{R})$、$u_b \in \mathrm{L}^1(I \times \partial\mathcal{X};\ \mathbb{R})$，且 u_o 满足 (ID)，其中 $k = 1$。则公式 (4.5) 按照定义 2.6 的意义定义了 (4.1) 的一个解 $u = u(t,x)$。此外，$u \in \mathrm{C}^0(I;\ \mathrm{L}^1(\mathcal{X};\ \mathbb{R}))$。

证明。证明的第一部分是仔细整合文献中已有的各种证明。具体而言，解中依赖于初始数据的部分，完全按照 [10, 引理 2.7] 和 [9, 引理 5.1]处理。依赖于边界数据的部分也以同样的方式处理，并利用引理 4.1 中详细说明的变量替换。

为证明解关于时间的 $\mathbf{C^0}$ 正则性，固定一个 $\bar{t} \in I$ 和一个序列t_h，其中 $t_h \in I$，且该序列收敛于 $\bar{t}$。然后，首先假设 $t_h > t$，我们有

$$\begin{aligned}\left\|u(t_h) - u(\bar{t})\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})} &= \int_{X(t_h;0,\mathcal{X})} \left|u(t_h,x) - u(\bar{t},x)\right| \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\mathcal{X}\setminus(X(t_h;0,\mathcal{X})\cup X(\bar{t};[0,\bar{t}[,\partial\mathcal{X}))} \left|u(t_h,x) - u(\bar{t},x)\right| \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{X(\bar{t};[0,\bar{t}[,\partial\mathcal{X})} \left|u(t_h,x) - u(\bar{t},x)\right| \mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

第二项在 $h \to +\infty$ 时趋于零，因为它是一个有界量在测度趋于零的集合上的积分。现在考虑第一项，第三项可以类似处理。

$$\begin{aligned}&\int_{X(t_h;0,\mathcal{X})} \left|u(t_h,x) - u(\bar{t},x)\right| \mathrm{d}x \\ =\ &\int_{\mathcal{X}} \left|u(t_h,x) - u(\bar{t},x)\right| \chi_{X(t_h;0,\mathcal{X})}(x)\ \mathrm{d}x \\ \le\ &\int_{\mathcal{X}} \left|u_o\left(X(0;t_h,x)\right)\ \mathcal{E}(\tau,t_h,x) - u_o\left(X(0;\bar{t},x)\right)\ \mathcal{E}(\tau,\bar{t},x)\right| \chi_{X(t_h;0,\mathcal{X})}(x)\,\mathrm{d}x \\ +\ &\int_{\mathcal{X}} \left| \int_0^{t_h} q\left(\tau, X(\tau;t_h,x)\right)\ \mathcal{E}\left(\tau,t_h,x\right)\ \mathrm{d}\tau \right. \\ &\qquad \left. - \int_0^{\bar{t}} q\left(\tau, X(\tau;\bar{t},x)\right)\ \mathcal{E}\left(\tau,\bar{t},x\right)\ \mathrm{d}\tau \right| \chi_{X(t_h;0,\mathcal{X})}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

当 $h \to +\infty$ 时，我们有

$$\begin{aligned} u_o\left(X(0;t_h,x)\right)\ \mathcal{E}(\tau,t_h,x) &\to u_o\left(X(0;\bar{t},x)\right)\ \mathcal{E}(\tau,\bar{t},x) \\ \int_0^{t_h} q\left(\tau, X(\tau;t_h,x)\right)\ \mathcal{E}\left(\tau,t_h,x\right)\ \mathrm{d}\tau &\to \int_0^{\bar{t}} q\left(\tau, X(\tau;\bar{t},x)\right)\ \mathcal{E}\left(\tau,\bar{t},x\right)\ \mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

对几乎处处的 $x \in \mathcal{X}$ 成立，因此相应的积分由勒贝格控制收敛定理趋于零；我们可以应用该定理，这要归功于 $\mathbf{L^1}$ 先验估计 (4.15)。 □

4.2 系统的一般情形

下面，在各种估计中，我们使用以下范数：

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)} &= \textstyle\sum_{h=1}^k \int_{\mathcal{X}} \left|u^h(x)\right| \mathrm{d}x \qquad & \|u\|_{\mathbf{L}^\infty(I\times\mathcal{X};\mathbb{R}^k)} &= \textstyle\sum_{h=1}^k \left\|u^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty(I\times\mathcal{X};\mathbb{R})} \\ \|u\|_{\mathbf{L}^\infty(I;\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k))} &= \textstyle\sum_{h=1}^k \left\|u^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty(I;\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}))}\ .\end{aligned}$$

定理 2.2 的证明。证明分为几个步骤。令 $I = [0,T]$，其中 $T > 0$。

算子 $\mathcal{T}$ 的构造。在巴拿赫空间 $\mathbf{C^0}(I;\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k))$ 中，对于

$$M > \|u_o\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)} + 1, \tag{4.24}$$

引入闭子集 X 和范数 $\|\cdot\|_X$:

$$X = \left\{ w \in \mathbf{C^0}(I; \mathbf{L^1}(\mathcal{X}; \mathbb{R}^k)) \colon \|w\|_{\mathbf{L}^\infty(I;\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k))} \leq M \right\}, \tag{4.25}$$

$$\|w\|_X = \sum_{h=1}^{k} \left\| w^h \right\|_{\mathbf{L}^\infty(I;\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}))}. \tag{4.26}$$

定义算子

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{T}: & X & \longrightarrow & X \\ & w & \longmapsto & u \equiv \left(u^1, \dots, u^k\right) \end{array} \tag{4.27}$$

其中，对于每个 $h \in \{1, \dots, k\}$，u^h 满足

$$\begin{cases} \partial_t u^h + \operatorname{div}_x \left(v^h(t,x) u^h \right) = p^h\left(t, x, w(t)\right) u^h & \\ \qquad\qquad + q^h\left(t, x, w(t,x), w(t)\right) & (t,x) \in I \times \mathcal{X} \\ u^h(t,\xi) = u_b^h\left(t, \xi, w(t)\right) & (t,\xi) \in I \times \partial\mathcal{X} \\ u^h(0,x) = u_o^h(x) & x \in \mathcal{X}\,. \end{cases} \tag{4.28}$$

$\mathcal{T}$是良好定义的。我们证明，对于 $w \in X$ 和 $h \in \{1, \dots, k\}$，(4.28) 中的源项

$$\mathcal{G}^h(t,x,u^h) = \mathcal{P}^h(t,x)\, u^h + \mathcal{Q}^h(t,x) \quad \text{where} \quad \begin{array}{l} \mathcal{P}^h(t,x) = p^h\left(t,x,w(t)\right) \\ \mathcal{Q}^h(t,x) = q^h\left(t,x,w(t,x),w(t)\right) \end{array}$$

满足 $\mathcal{P}^h \in \mathrm{L}^\infty(I \times \mathcal{X};\ \mathbb{R})$ 且 $\mathcal{Q}^h \in \mathrm{L}^1(I \times \mathcal{X};\ \mathbb{R})$。

根据 (P)，对于每个 $t \in I$ 和 $x \in \mathcal{X}$，并结合 (4.25)，有

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{P}^h(t,x)\right| &= \left|p^h\left(t,x,w(t)\right)\right| \leq P_1 + P_2 \left\|w(t)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}; \\ \left\|\mathcal{P}^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty(I\times\mathcal{X};\mathbb{R})} &\leq P_1 + P_2\, M, \end{aligned} \tag{4.29}$$

这证明 $(t,x) \mapsto \mathcal{P}^h(t,x)$ 属于 $\mathrm{L}^\infty(I \times \mathcal{X};\ \mathbb{R})$。另一方面，由 (Q) 可知

$$\begin{aligned} & \left\|\mathcal{Q}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,T]\times\mathcal{X};\mathbb{R})} \\ = & \int_0^T \int_{\mathcal{X}} \left|\mathcal{Q}^h(t,x)\right| \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\ = & \int_0^T \int_{\mathcal{X}} \left|q^h\left(t,x,w(t,x),w(t)\right)\right| \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\ \leq & Q_1 \int_0^T \int_{\mathcal{X}} \left\|w(t,x)\right\| \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\ & + \int_0^T \int_{\mathcal{X}} Q_2(x) \left\|w(t)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + Q_3 \int_0^T \int_{\mathcal{X}} \left\|w(t,x)\right\| \left\|w(t)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\ \leq & Q_1 T \|w\|_X + \|Q_2\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})} T \|w\|_X + Q_3 T \|w\|_X^2, \end{aligned} \tag{4.30}$$

证明 $(t,x) \mapsto \mathcal{Q}^h(t,x)$ 属于 $\mathrm{L}^1(I \times \mathcal{X};\ \mathbb{R})$。

现在我们证明，对任意 $w \in X$ 和 $h \in \{1, \ldots, k\}$，式 (4.28) 中的边界项 $\mathcal{U}_b^h(t,\xi) = u_b^h\left(t,\xi,w(t)\right)$ 满足 $\mathcal{U}_b^h \in \mathbf{L^1}(I\times\partial\mathcal{X};\,\mathbb{R})$。由 (BD) 可得

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{U}_b^h\right\|_{\mathbf{L^1}(I\times\partial\mathcal{X};\mathbb{R})} &= \int_0^T\!\!\int_{\partial\mathcal{X}} \left|u_b^h\left(t,\xi,w(t)\right)\right| \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^T\!\!\int_{\partial\mathcal{X}} B(\xi)\left\|w(t)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)} \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t + \int_0^T\!\!\int_{\partial\mathcal{X}} B(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}t \\
&\leq \|B\|_{\mathbf{L^1}(\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\left(\|w\|_X + 1\right) T\,.
\end{aligned}$$

因此，命题 4.4 适用于 (4.28)。为完成这一步，我们需要证明解 $u(t,x) \equiv \Big(u^1(t,x)\ldots, u^k(t,x)\Big)$ 属于 (4.25) 中的 X。根据 (4.15)、(4.29)、(4.30)，且由于 $w \in X$，对于 $t \in I$，

$$\begin{aligned}
\left\|u^h(t)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})} &\leq e^{(P_1+P_2M)t}\left(\left\|\mathcal{Q}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})} + \left\|u_o^h\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})}\right) \\
&\quad + e^{(P_1+P_2M)t}\sum_{i=1}^m \iint_{\Gamma_i} \left|u_b^h\left(\tau,\xi,w(\tau)\right)\right| v_i^h(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi \\
&\leq \Bigg[\left(Q_1 + \|Q_2\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})} + Q_3\,\|w\|_X\right) T\,\|w\|_X + \left\|u_o^h\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})} \\
&\quad + \|B\|_{\mathbf{L^1}(\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\,\|v\|_{\mathbf{L}^\infty(I\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{k\times(n+m)})}\,T\left(\|w\|_X + 1\right)\Bigg] e^{(P_1+P_2M)t} \\
&\leq \Bigg[\left(Q_1 + \|Q_2\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})} + Q_3\,M\right) T\,M + \left\|u_o^h\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})} \\
&\quad + \|B\|_{\mathbf{L^1}(\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\,\|v\|_{\mathbf{L}^\infty(I\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{k\times(n+m)})}\,T(M+1)\Bigg] e^{(P_1+P_2M)t} \\
&\leq \left(\left\|u_o^h\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})} + \frac{1}{2k}\right) e^{(P_1+P_2M)T},
\end{aligned}$$

因此 $\left\|u(t)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)} \leq M$；只要 T足够小，这便成立，这归功于对 M的选择 (4.24)。

$\mathcal{T}$ 是一个 压缩映射。取 X_M 中的 $\hat{}w$ 和 $\check{}w$，并记 $\hat{}u = \mathcal{T}\hat{}w$、$\check{}u = \mathcal{T}\check{}w$。使用记号 n

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{P}}^h(t,x) = p^h\left(t,x,\hat{w}(t)\right), \quad \hat{\mathcal{Q}}^h(t,x) = q^h\left(t,x,\hat{w}(t,x),\hat{w}(t)\right), \quad \hat{\mathcal{U}}_b^h(t,\xi) = u_b^h\left(t,\xi,\hat{w}(t)\right), \\
&\check{\mathcal{P}}^h(t,x) = p^h\left(t,x,\check{w}(t)\right), \quad \check{\mathcal{Q}}^h(t,x) = q^h\left(t,x,\check{w}(t,x),\check{w}(t)\right), \quad \check{\mathcal{U}}_b^h(t,\xi) = u_b^h\left(t,\xi,\check{w}(t)\right).
\end{aligned}$$

因此，根据引理 4.3 和 (4.29)，我们有：

$$\begin{aligned}
&\left\|\hat{u}^h(t) - \check{u}^h(t)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})} \\
&\leq e^{(P_1+P_2M)t}\,\|v\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})}\left\|\hat{\mathcal{U}}_b^h - \check{\mathcal{U}}_b^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\partial\mathcal{X};\mathbb{R})} \\
&\quad + e^{(P_1+P_2M)t}\left\|\hat{\mathcal{Q}}^h - \check{\mathcal{Q}}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})} \\
&\quad + \left(M + \|v\|_{\mathbf{L}^\infty(I\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{k\times(n+m)})}\left\|\check{\mathcal{U}}_b^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\partial\mathcal{X};\mathbb{R})} + \left\|\check{\mathcal{Q}}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}\right) \\
&\qquad \times e^{(P_1+P_2M)t}\left\|\hat{\mathcal{P}}^h - \check{\mathcal{P}}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

根据 (P)，我们有：

$$\begin{aligned}\left\|\hat{\mathcal{P}}^h-\check{\mathcal{P}}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))} &\leq \int_0^t \left\|\hat{\mathcal{P}}^h(s)-\check{\mathcal{P}}^h(s)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R})}\mathrm{d}s\\ &\leq P_2\int_0^t \left\|\hat{w}(s)-\check{w}(s)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\mathrm{d}s\\ &\leq P_2\left\|\hat{w}-\check{w}\right\|_X T\,. \end{aligned} \tag{4.32}$$

由 (Q) 可得：

$$\begin{aligned}&\left\|\hat{\mathcal{Q}}^h-\check{\mathcal{Q}}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}\\ \leq\;& Q_1\left\|\hat{w}-\check{w}\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}+Q_3\left\|\hat{w}\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t];\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k))}\left\|\hat{w}-\check{w}\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\\ &+Q_3\left\|\check{w}\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t];\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k))}\left\|\hat{w}-\check{w}\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\\ \leq\;& (Q_1+2\,M\,Q_3)\left\|\hat{w}-\check{w}\right\|_X T\,. \end{aligned} \tag{4.33}$$

同理，由 (BD) 可得：

$$\left\|\hat{\mathcal{U}}_b^h-\check{\mathcal{U}}_b^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\leq\|B\|_{\mathbf{L^1}(\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\left\|\hat{w}-\check{w}\right\|_X T\,. \tag{4.34}$$

因此，只要 T 足够小，$\mathcal{T}$ 就是压缩映射。

小时间解的存在性。证明 $\mathcal{T}$ 的唯一不动点是定义 2.1 意义下 (1.1) 的解，等价于在积分不等式 (2.8) 中取极限。由于在 X 中选取范数时采用了 (4.26)，从而保证了强收敛，因此可以取极限。(WP.1) 的证明至此完成。

唯一性。假设 (1.2) 存在定义 2.1 意义下的解 $\hat{}u$ 和 $\check{}u$。那么，它们的差 $\delta=\hat{}u-\check{}u$ 满足

$$\begin{cases}\partial_t\delta^h+\mathrm{div}\left(v^h(t,x)\,\delta^h\right)=\hat{\mathcal{G}}^h(t,x)-\check{\mathcal{G}}^h(t,x)\\ \delta^h(t,\xi)=\hat{\mathcal{U}}_b^h(t,\xi)-\check{\mathcal{U}}_b^h(t,\xi)\\ \delta^h(0,x)=0\end{cases}$$

在定义 2.1 的意义下，其中

$$\begin{aligned}&\hat{\mathcal{G}}^h(t,x)=p^h\left(t,x,\hat{u}(t)\right)\hat{u}^h+q^h\left(t,x,\hat{u},\hat{u}(t)\right);\qquad \hat{\mathcal{U}}_b^h(t,\xi)=\hat{u}_b^h\left(t,\xi,\hat{u}(t)\right);\\ &\check{\mathcal{G}}^h(t,x)=p^h\left(t,x,\check{u}(t)\right)\check{u}^h+q^h\left(t,x,\check{u},\check{u}(t)\right);\qquad \check{\mathcal{U}}_b^h(t,\xi)=\check{u}_b^h\left(t,\xi,\check{u}(t)\right).\end{aligned}$$

直接应用经典变量加倍法 [18]，参见 [24,引理 16、引理 17]，[23，定理 7.28]，以及 [10，命题 2.8]，，即可得到稳定性估计

$$\begin{aligned}\left\|\delta^h(t)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})} \leq\;& \int_0^t\left\|\hat{\mathcal{G}}^h(\tau)-\check{\mathcal{G}}^h(\tau)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})}\mathrm{d}\tau\\ &+\left\|v^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty(I\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})}\int_0^t\left\|\hat{\mathcal{U}}_b^h(\tau)-\check{\mathcal{U}}_b^h(\tau)\right\|_{\mathbf{L^1}(\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\mathrm{d}\tau\,.\end{aligned}$$

现在可以利用假设 (P) 和 (Q) 应用格朗沃尔引理，从而证明 $\delta\equiv 0$。

对初始数据的连续依赖。采用 (WP.3) 中的记号，定义

$$\begin{array}{lll}\hat{\mathcal{P}}^h(t,x)=p^h\left(t,x,\hat{u}(t)\right), & \hat{\mathcal{Q}}^h(t,x)=q^h\left(t,x,\hat{u}(t,x),\hat{u}(t)\right), & \hat{\mathcal{U}}_b^h(t,\xi)=u_b^h\left(t,\xi,\hat{u}(t)\right),\\ \check{\mathcal{P}}^h(t,x)=p^h\left(t,x,\check{u}(t)\right), & \check{\mathcal{Q}}^h(t,x)=q^h\left(t,x,\check{u}(t,x),\check{u}(t)\right), & \check{\mathcal{U}}_b^h(t,\xi)=u_b^h\left(t,\xi,\check{u}(t)\right),\end{array}$$

对于 $t\in I$和 $h\in\{1,\dots,k\}$。进一步应用引理 4.3，可以估计解 $\hat{u}$ 和 $\check{u}$之间的差异。

$$\begin{aligned}&\left\|\hat{u}^h(t)-\check{u}^h(t)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})}\\ &\le e^{(P_1+P_2M)t}\left(\left\|\hat{u}_{o,h}-\check{u}_{o,h}\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})}+\|v\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})}\left\|\hat{\mathcal{U}}^h-\check{\mathcal{U}}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\right) \qquad (4.35)\\ &\quad+e^{(P_1+P_2M)t}\left(\left\|\hat{\mathcal{Q}}^h-\check{\mathcal{Q}}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}+K\left\|\hat{\mathcal{P}}^h-\check{\mathcal{P}}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))}\right),\end{aligned}$$

其中，由 (Q) 和 (BD) 可得，

$$\begin{aligned}K&=\left\|\hat{u}_{o,h}\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})}+\|v\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})}\left\|\check{\mathcal{U}}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}+\left\|\check{\mathcal{Q}}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}\\ &\le M+\|v\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})}\|B\|_{\mathbf{L^1}(\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\left(M+1\right)T+Q_1TM+\|Q_2\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})}TM+Q_3TM^2.\end{aligned}$$

利用 (BD)、(Q) 和 (P)，我们得到：

$$\begin{aligned}\left\|\hat{\mathcal{U}}^h-\check{\mathcal{U}}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}&\le\|B\|_{\mathbf{L^1}(\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\|\hat{u}-\check{u}\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^k)},\\ \left\|\hat{\mathcal{Q}}^h-\check{\mathcal{Q}}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}&\le Q_1\left\|\hat{u}^h-\check{u}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}\\ &\quad+Q_3\left(\|\hat{u}\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t];\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k))}+\|\check{u}\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t];\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k))}\right)\\ &\quad\times\|\hat{u}-\check{u}\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\\ &\le Q_1\left\|\hat{u}^h-\check{u}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}+2MQ_3\|\hat{u}-\check{u}\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^k)},\\ \left\|\hat{\mathcal{P}}^h-\check{\mathcal{P}}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))}&\le\int_0^t\left\|\hat{\mathcal{P}}^h(s)-\check{\mathcal{P}}^h(s)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R})}\mathrm{d}s\\ &\le\int_0^t\left\|p^h\left(s,\cdot,\hat{u}(s)\right)-p^h\left(s,\cdot,\check{u}(s)\right)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R})}\mathrm{d}s\\ &\le P_2\int_0^t\left\|\hat{u}(s)-\check{u}(s)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\mathrm{d}s\\ &=P_2\|\hat{u}-\check{u}\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}.\end{aligned}$$

将这些估计代入 (4.35)，可推出

$$\begin{aligned}&\left\|\hat{u}^h(t)-\check{u}^h(t)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R})}\\ &\le e^{(P_1+P_2M)t}\|\hat{u}_o-\check{u}_o\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\\ &\quad+e^{(P_1+P_2M)t}\Big(\|v\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})}\|B\|_{\mathbf{L^1}(\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}+Q_1+2MQ_3+KP_2\Big)\|\hat{u}-\check{u}\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}.\end{aligned}$$

对 $h=1$、.....、 k 求和，并使用格朗沃尔引理证明 (WP.3)，从而完成证明。□

推论 2.3 的证明。对于每个 $w \in X$，令 X 如 (4.25) 中所示，并将 $u = \mathcal{T}w$ 定义为 w 在算子 $\mathcal{T}$ 下的像，其中该算子定义于 (4.27)。由 (4.5)，可推出对于几乎处处的 $x \in \mathcal{X}$，$u^h(t,x) \geq 0$。这也意味着算子 $\mathcal{T}$ 的唯一不动点具有相同性质，因此 (2.2) 成立。□

推论 2.4 的证明。由定理 2.2 可知，存在一个解 $u \in \mathbf{C^0}([0,T];\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k))$，且只要 $\|u(T)\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}$ 有界，该解就可以在时间 T 之后唯一延拓。由推论 2.3，$\|u(t)\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)} = \sum_{h=1}^k \int_{\mathcal{X}} u^h(t,x)\,\mathrm{d}x$。利用 (1.2)、散度定理和 (BD)，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{h=1}^k \int_{\mathcal{X}} u^h(t,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{h=1}^k \int_{\mathcal{X}} \left(p^h\left(t,x,u(t)\right)u(t) + q^h\left(t,x,u(t,x),u(t)\right)\right)\mathrm{d}x + \sum_{h=1}^k \int_{\partial\mathcal{X}} u_b^h\left(t,\xi,u(t)\right)\mathrm{d}\xi \\
&\leq \int_{\mathcal{X}} \left(C_1(t,x) + C_2(t)\sum_{h=1}^k u^h(t,x)\right)\mathrm{d}x + \int_{\partial\mathcal{X}} B(\xi)\left(k + \|u(t)\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\right)\mathrm{d}\xi \\
&= \left(\|C_1\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t];\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}))} + k\,\|B\|_{\mathbf{L^1}(\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\right) + \left(\|C_2\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t];\mathbb{R})} + \|B\|_{\mathbf{L^1}(\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\right)\|u(t)\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}
\end{aligned}
$$

而常微分方程估计通常可保证 $\|u(t)\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}$ 在有界区间上有界。 □

定理 2.5 的证明。我们将证明分为几个步骤。

定理 2.2 适用。我们首先检查定理 2.2 的假设是否成立。(P) 成立。固定 $h \in \{1,\ldots,k\}$、$t \in I$ 和 $x \in \mathcal{X}$。如果 $w \in \mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)$，那么

$$
\begin{aligned}
\left|p^h\left(t,x,w\right)\right| &\leq \bar{P}_1 + \bar{P}_2\left\|\int_{\mathcal{X}} \mathcal{K}_p^h\left(t,x,x'\right)w(x')\,\mathrm{d}x'\right\| \\
&\leq \bar{P}_1 + \bar{P}_2\left\|\mathcal{K}_p^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X}^2;\mathbb{R}^{k_p k})}\|w\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}.
\end{aligned}
$$

如果 w_1、$w_2 \in \mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)$，那么

$$
\begin{aligned}
\left|p^h\left(t,x,w_1\right) - p^h\left(t,x,w_2\right)\right| &\leq \bar{P}_2\left\|\int_{\mathcal{X}} \left|\mathcal{K}_p^h\left(t,x,x'\right)\right|\left|w_1(x') - w_2(x')\right|\mathrm{d}x'\right\| \\
&\leq \bar{P}_2\left\|\mathcal{K}_p^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X}^2;\mathbb{R}^{k_p k})}\|w_1 - w_2\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}.
\end{aligned}
$$

因此，(P) 对 $P_1 = \bar{P}_1$ 和 $P_2 = \bar{P}_2\left\|\mathcal{K}_p^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X}^2;\mathbb{R}^{k_p k})}$ 成立。

(Q) 成立。固定 $h \in \{1,\ldots,k\}$、$t \in I$ 和 $x \in \mathcal{X}$。若 $u \in \mathbb{R}^k$ 且 $w \in \mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)$，则

$$
\left|q^h\left(t,x,u,w\right)\right| = \left|Q^h\left(t,x,u,\int_{\mathcal{X}} \mathcal{K}_q^h\left(t,x,x'\right)w(x')\,\mathrm{d}x'\right)\right|
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \bar{Q}_1\|u\|+\bar{Q}_2(x)\left\|\int_{\mathcal{X}}\mathcal{K}_q^h\left(t,x,x'\right)w(x')\,\mathrm{d}x'\right\|+\bar{Q}_3\|u\|\left\|\int_{\mathcal{X}}\mathcal{K}_q^h\left(t,x,x'\right)w(x')\,\mathrm{d}x'\right\|\\
&\leq \bar{Q}_1\|u\|+\left(\bar{Q}_2(x)+\bar{Q}_3\|u\|\right)\left\|\mathcal{K}_q^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X}^2;\mathbb{R}^{k_qk})}\|w\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}.
\end{aligned}
$$

若 u_1、$u_2\in\mathbb{R}^k$ 和 w_1，$w_2\in\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)$，则

$$
\begin{aligned}
&\left|q^h\left(t,x,u_1,w_1\right)-q^h\left(t,x,u_2,w_2\right)\right|\\
&\leq \bar{Q}_1\|u_1-u_2\|+\bar{Q}_3\left\|\mathcal{K}_u^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X}^2;\mathbb{R}^{k_qk})}\|w_1\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\|u_1-u_2\|\\
&\quad+\bar{Q}_3\|u_2\|\left\|\mathcal{K}_u^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X}^2;\mathbb{R}^{k_qk})}\|w_1-w_2\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}.
\end{aligned}
$$

因此，条件（Q）成立，其中 $Q_1=\bar{Q}_1$，$Q_2(x)=\bar{Q}_2(x)\left\|\mathcal{K}_q^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X}^2;\mathbb{R}^{k_qk})}$，且$Q_3=\bar{Q}_3(x)\left\|\mathcal{K}_q^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X}^2;\mathbb{R}^{k_qk})}$。（Q+）显然成立。

（BD）成立：

$$
\begin{aligned}
\left|u_b^h(t,\xi,w)\right|&\leq \bar{B}(\xi)\left(1+\left\|\int_{\mathcal{X}}\mathcal{K}_u^h(t,\xi,x')\,w(x')\,\mathrm{d}x'\right\|\right)\\
&\leq \bar{B}(\xi)\left(1+\left\|\mathcal{K}_u^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\partial\mathcal{X}\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{k_uk})}\|w\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\right).\\
\left|u_b^h(t,\xi,w)-u_b^h(t,\xi,w')\right|&\leq \bar{B}(\xi)\left\|\mathcal{K}_u^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\partial\mathcal{X}\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{k_uk})}\left\|w-w'\right\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}
\end{aligned}
$$

因此（BD）成立，其中 $B(\xi)=\bar{B}(\xi)\left(1+\|\mathcal{K}_u\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\partial\mathcal{X}\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{k_uk^2})}\right)$。显然，（BD+）也成立。

稳定性估计。现在我们转向稳定性估计。在以下各个情形中，我们固定 $t\in I$，并令 $h\in\{1,\ldots,k\}$。定义

$$
\begin{array}{lll}
\hat{\mathcal{U}}_b^h(t,\xi)=\hat{u}_b^h\left(t,\xi,\hat{u}(t)\right), & \hat{\mathcal{Q}}^h(t,x)=\hat{q}^h\left(t,x,\hat{u}(t,x),\hat{u}(t)\right), & \hat{\mathcal{P}}^h(t,x)=\hat{p}^h\left(t,x,\hat{u}(t)\right),\\
\check{\mathcal{U}}_b^h(t,\xi)=\check{u}_b^h\left(t,\xi,\check{u}(t)\right), & \check{\mathcal{Q}}^h(t,x)=\check{q}^h\left(t,x,\check{u}(t,x),\check{u}(t)\right), & \check{\mathcal{P}}^h(t,x)=\check{p}^h\left(t,x,\check{u}(t)\right).
\end{array}
\tag{4.36}
$$

为了使用引理 4.3，预先计算

$$
\mathcal{P}(t)=\exp\left(t\,\max\left\{\left\|\hat{\mathcal{P}}^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})},\,\left\|\check{\mathcal{P}}^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}\right\}\right)\leq\exp\left(t\left(P_1+P_2M\right)\right),
$$

其中，M 是两个解在时间方向的 $\mathbf{L}^\infty$ 范数和空间方向的 $\mathbf{L}^1$ 范数的上界。因此，根据引理 4.3 可得

$$
\begin{aligned}
&\left\|\hat{u}^h(t)-\check{u}^h(t)\right\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R})}\\
\leq&\mathcal{P}(t)\,\|v\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{n+m})}\left\|\hat{\mathcal{U}}_b^h-\check{\mathcal{U}}_b^h\right\|_{\mathbf{L}^1([0,t]\times\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}+\mathcal{P}(t)\left\|\hat{\mathcal{Q}}^h-\check{\mathcal{Q}}^h\right\|_{\mathbf{L}^1([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}\\
&+\mathcal{P}(t)\left(\|u_o\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}+\left\|\check{\mathcal{Q}}^h\right\|_{\mathbf{L}^1([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}\right)\left\|\hat{\mathcal{P}}^h-\check{\mathcal{P}}^h\right\|_{\mathbf{L}^1([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))}\\
&+\mathcal{P}(t)\,\|v\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{k\times(n+m)})}\left\|\check{\mathcal{U}}_b\right\|_{\mathbf{L}^1([0,t]\times\partial\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\left\|\hat{\mathcal{P}}^h-\check{\mathcal{P}}^h\right\|_{\mathbf{L}^1([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))}.
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

然后，我们估计（4.37）中的各项。利用（BD）和（4.36），可推出

$$
\begin{aligned}
&\left\|\hat{\mathcal{U}}_b^h-\check{\mathcal{U}}_b^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\\
=\;&\int_0^t\int_{\partial\mathcal{X}}\left|\hat{u}_b^h\left(\tau,\xi,\hat{u}(\tau)\right)-\check{u}_b^h\left(\tau,\xi,\check{u}(\tau)\right)\right|\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\\
\le\;&\int_0^t\int_{\partial\mathcal{X}}\left|\hat{u}_b^h\left(\tau,\xi,\hat{u}(\tau)\right)-\hat{u}_b^h\left(\tau,\xi,\check{u}(\tau)\right)\right|\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\\
&+\int_0^t\int_{\partial\mathcal{X}}\left|\hat{u}_b^h\left(\tau,\xi,\check{u}(\tau)\right)-\check{u}_b^h\left(\tau,\xi,\check{u}(\tau)\right)\right|\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\\
\le\;&\|B\|_{\mathbf{L^1}(\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\left\|\hat{u}-\check{u}\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\\
&+\int_0^t\int_{\partial\mathcal{X}}\left|\hat{U}_b^h\left(\tau,\xi,\int_{\mathcal{X}}\hat{\mathcal{K}}_u^h(\tau,\xi,x')\,\check{u}(\tau,x')\,\mathrm{d}x'\right)-\hat{U}_b^h\left(\tau,\xi,\int_{\mathcal{X}}\check{\mathcal{K}}_u^h(\tau,\xi,x')\,\check{u}(\tau,x')\,\mathrm{d}x'\right)\right|\mathrm{d}\xi\;\mathrm{d}\tau\\
&+\int_0^t\int_{\partial\mathcal{X}}\left|\hat{U}_b^h\left(\tau,\xi,\int_{\mathcal{X}}\check{\mathcal{K}}_u^h(\tau,\xi,x')\,\check{u}(\tau,x')\,\mathrm{d}x'\right)-\check{U}_b^h\left(\tau,\xi,\int_{\mathcal{X}}\check{\mathcal{K}}_u^h(\tau,\xi,x')\,\check{u}(\tau,x')\,\mathrm{d}x'\right)\right|\mathrm{d}\xi\;\mathrm{d}\tau\\
\le\;&\|B\|_{\mathbf{L^1}(\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\left\|\hat{u}-\check{u}\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\\
&+\int_0^t\int_{\partial\mathcal{X}}\bar{B}(\xi)\left\|\hat{\mathcal{K}}_u^h-\check{\mathcal{K}}_u^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\partial\mathcal{X}\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{k_u k})}\left\|\check{u}(\tau)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\\
&+\left\|\hat{U}_b^h-\check{U}_b^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\partial\mathcal{X};\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^{k_u};\mathbb{R}))}\\
\le\;&\|B\|_{\mathbf{L^1}(\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\left\|\hat{u}-\check{u}\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}+\left\|\bar{B}\right\|_{\mathbf{L^1}(\partial\mathcal{X};\mathbb{R})}\left\|\hat{\mathcal{K}}_u^h-\check{\mathcal{K}}_u^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\partial\mathcal{X}\times\mathcal{X};\mathbb{R}^{k_u k})}\left\|\check{u}\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\\
&+\left\|\hat{U}_b^h-\check{U}_b^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\partial\mathcal{X};\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^{k_u};\mathbb{R}))}.
\end{aligned}
$$

利用 (Q)，我们推得

$$
\begin{aligned}
&\left\|\hat{\mathcal{Q}}^h-\check{\mathcal{Q}}^h\right\|_{\mathbf{L^1}([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R})}\\
\le\;&\int_0^t\int_{\mathcal{X}}\left|\hat{q}^h\left(\tau,x,\hat{u}(\tau,x),\hat{u}(\tau)\right)-\hat{q}^h\left(\tau,x,\check{u}(\tau,x),\check{u}(\tau)\right)\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
&+\int_0^t\int_{\mathcal{X}}\left|\hat{q}^h\left(\tau,x,\check{u}(\tau,x),\check{u}(\tau)\right)-\check{q}^h\left(\tau,x,\check{u}(\tau,x),\check{u}(\tau)\right)\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
\le\;&Q_1\int_0^t\left\|\hat{u}(\tau)-\check{u}(\tau)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\mathrm{d}\tau+Q_3\int_0^t\left\|\hat{u}(\tau)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\int_{\mathcal{X}}\left\|\hat{u}(\tau,x)-\check{u}(\tau,x)\right\|\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau\\
&+Q_3\int_0^t\left\|\hat{u}(\tau)-\check{u}(\tau)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\int_{\mathcal{X}}\left\|\check{u}(\tau,x)\right\|\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau\\
&+\int_0^t\int_{\mathcal{X}}\left|\hat{Q}^h\left(\tau,x,\check{u}(\tau,x),\int_{\mathcal{X}}\hat{\mathcal{K}}_q^h\left(\tau,x,x'\right)\check{u}\left(\tau,x'\right)\mathrm{d}x'\right)\right.\\
&\qquad\left.-\check{Q}^h\left(\tau,x,\check{u}(\tau,x),\int_{\mathcal{X}}\check{\mathcal{K}}_q^h\left(\tau,x,x'\right)\check{u}\left(\tau,x'\right)\mathrm{d}x'\right)\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
\le\;&\left(Q_1+Q_3\left(\|\hat{u}\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t];\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k))}+\|\check{u}\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t];\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k))}\right)\right)\int_0^t\left\|\hat{u}(\tau)-\check{u}(\tau)\right\|_{\mathbf{L^1}(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t\int_{\mathcal{X}}\sup_{\eta\in\mathbb{R}^{k_q}}\left|\hat{Q}^h\left(\tau,x,\check{u}(\tau,x),\eta\right)-\check{Q}^h\left(\tau,x,\check{u}(\tau,x),\eta\right)\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
&+\bar{Q}_3\int_0^t\int_{\mathcal{X}}\left\|\check{u}(\tau,x)\right\|\left\|\int_{\mathcal{X}}\left(\hat{\mathcal{K}}_q^h(\tau,x,x')-\check{\mathcal{K}}_q^h(\tau,x,x')\right)\check{u}\left(\tau,x'\right)\mathrm{d}x'\right\|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\\
\leq\;&\left(Q_1+Q_3\left(\|\hat{u}\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t];\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R}^k))}+\|\check{u}\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t];\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R}^k))}\right)\right)\|\hat{u}-\check{u}\|_{\mathbf{L}^1([0,t]\times\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\\
&+\left\|\hat{Q}^h-\check{Q}^h\right\|_{\mathbf{L}^1([0,t]\times\mathcal{X};\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k_q};\mathbb{R}))}+\int_0^t\left\|\check{u}\left(\tau\right)\right\|^2_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\mathrm{d}\tau\left\|\hat{\mathcal{K}}_q^h-\check{\mathcal{K}}_q^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]\times\mathcal{X}^2;\mathbb{R}^{k_q})}.
\end{aligned}
$$

利用 (P)，我们有

$$
\begin{aligned}
&\left\|\hat{\mathcal{P}}^h-\check{\mathcal{P}}^h\right\|_{\mathbf{L}^1([0,t];\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X};\mathbb{R}))}\\
\leq\;&\int_0^t\sup_{x\in\mathcal{X}}\left|\hat{p}^h\left(\tau,x,\hat{u}(\tau)\right)-\hat{p}^h\left(\tau,x,\check{u}(\tau)\right)\right|\mathrm{d}\tau+\int_0^t\sup_{x\in\mathcal{X}}\left|\hat{p}^h\left(\tau,x,\check{u}(\tau)\right)-\check{p}^h\left(\tau,x,\check{u}(\tau)\right)\right|\mathrm{d}\tau\\
\leq\;&P_2\int_0^t\left\|\hat{u}(\tau)-\check{u}(\tau)\right\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\mathrm{d}\tau\\
&+\int_0^t\sup_{x\in\mathcal{X}}\left|\hat{P}^h\left(\tau,x,\int_{\mathcal{X}}\hat{\mathcal{K}}_p^h(\tau,x,x')\check{u}(\tau,x')\,\mathrm{d}x'\right)-\check{P}^h\left(\tau,x,\int_{\mathcal{X}}\hat{\mathcal{K}}_p^h(\tau,x,x')\check{u}(\tau,x')\,\mathrm{d}x'\right)\right|\mathrm{d}\tau\\
&+\int_0^t\sup_{x\in\mathcal{X}}\left|\check{P}^h\left(\tau,x,\int_{\mathcal{X}}\hat{\mathcal{K}}_p^h(\tau,x,x')\check{u}(\tau,x')\,\mathrm{d}x'\right)-\check{P}^h\left(\tau,x,\int_{\mathcal{X}}\check{\mathcal{K}}_p^h(\tau,x,x')\check{u}(\tau,x')\,\mathrm{d}x'\right)\right|\mathrm{d}\tau\\
\leq\;&P_2\int_0^t\left\|\hat{u}(\tau)-\check{u}(\tau)\right\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\mathrm{d}\tau+t\left\|\hat{P}^h-\check{P}^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty\left([0,t]\times\mathcal{X}\times\mathbb{R}^{k_p};\mathbb{R}\right)}\\
&+\bar{P}_2\int_0^t\sup_{x\in\mathcal{X}}\int_{\mathcal{X}}\left|\hat{\mathcal{K}}_p^h(\tau,x,x')-\check{\mathcal{K}}_p^h(\tau,x,x')\right|\left|\check{u}(\tau,x')\right|\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}\tau\\
\leq\;&P_2\int_0^t\left\|\hat{u}(\tau)-\check{u}(\tau)\right\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\mathrm{d}\tau+t\left\|\hat{P}^h-\check{P}^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty\left([0,t]\times\mathcal{X}\times\mathbb{R}^{k_p};\mathbb{R}\right)}\\
&+\bar{P}_2\int_0^t\left\|\check{u}(\tau)\right\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{X};\mathbb{R}^k)}\mathrm{d}\tau\left\|\hat{\mathcal{K}}_p^h-\check{\mathcal{K}}_p^h\right\|_{\mathbf{L}^\infty\left([0,t]\times\mathcal{X}^2;\mathbb{R}^{k_p k}\right)}.
\end{aligned}
$$

将上述估计代入 (4.37)，再运用标准的格朗沃尔引理，即可完成证明。□

命题 3.1 的证明。显然，（V）和（ID）成立。只需验证定理 2.5 的假设成立。显然，（P）成立，其中$\bar{P}_1=\max\{\|\mu_S\|,\|\mu_I\|+\|\kappa+\theta\|,\|\mu_H\|+\|\eta\|,\|\mu_R\|\}$（所有范数均取自 $\mathrm{L}^\infty(\mathcal{I}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$），$\bar{P}_2=1$，这是由于 $\rho\in\mathrm{L}^\infty$。关于（Q），取 $Q_1=\max\{\|\kappa\|,\|\eta+\theta\|\}$, $Q_2=0$, $Q_3=1$并使用 $\rho\in\mathrm{L}^\infty$。最后，（BD）成立，其中 $\bar{B}(\xi)=\sup_I\left\|S_b(t)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathcal{X},\mathbb{R})}$。

显然具有正性。要应用推论 2.4，只需令 $C_1\equiv 0$ 和 $C_2\equiv 0$。

为得到 L^∞ 界，首先注意到，由于 $I\in\mathbf{C}^0\left(\mathcal{I};\mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2;\mathbb{R})\right)$，(3.2) 中的积分在任意有界时间区间上都有界。因此，反复应用引理 4.2 中的 (4.16)，可得 S, I, H 和 R 在任意有界区间上都有界。由 (WP.2) 即可推出唯一性。□

命题 3.2 的证明。假设 (V) 和 (ID) 显然成立。条件 (P) 在 $P_1 = \|d\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})}/\varepsilon$ 和 $P_2 = 1/\varepsilon$ 下成立。验证 (Q) 很直接。为证明 (BD) 成立，对于 $y \in \mathbb{R}^n$ 且 $\|y\| > r$，计算如下：

$$
\begin{aligned}
\left|u_b(t,y,w)\right| &= \left|\frac{1}{A(a=0,y)\,\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{M}\left(\frac{y'-y}{\varepsilon}\right)\,b(a',y')\,w(a',y')\,\mathrm{d}a'\,\mathrm{d}y'\right| \\
&\le \frac{1}{\varepsilon^n\ \inf A}\left|\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{M}\left(\frac{y'-y}{\varepsilon}\right)\,b(a',y')\,w(a',y')\,\mathrm{d}a'\,\mathrm{d}y'\right| \\
&\le \frac{1}{\varepsilon^n\ \inf A}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\mathcal{M}\left(\frac{y'-y}{\varepsilon}\right)\right|\left(\sup_{|y'-y|<r}\left|b(a',y')\right|\right)\left|w(a',y')\right|\mathrm{d}a'\,\mathrm{d}y' \\
&\le \frac{1}{\varepsilon^n\ \inf A}\,\|\mathcal{M}\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})}\,\frac{1}{\left(1+\|y\|-r\right)^{n+1}}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n}\left|w(a',y')\right|\mathrm{d}a'\,\mathrm{d}y'
\end{aligned}
$$

证明 (BD) 中的第一项要求。利普希茨连续性可通过相同的过程证明 。数据和参数的符号假设使我们能够应用推论 2.3，并确保 (2.3) 也成立。□

致谢

作者部分得到了 GNAMPA 2022 项目“演化方程：适定性、控制与应用”的资助。

参考文献

[1] A. S. Ackleh 和 K. Deng. 非自治幼体—成体模型：通过比较原理研究适定性与长期行为. *SIAM J. Appl. Math.*, 69(6):1644–1661, 2009年.[2] B. Ainseba 和 M. Iannelli. 非线性种群动力学问题的精确能控性. *Differential Integral Equations* 16 11 1369 1384, 2003 , ( ): –

.[3] G. Albi 、 L. Pareschi 和 M. Zanella. 不确定数据条件下社会结构化分舱流行病模型的控制 . *J. Math. Biol.*, 82(7):63, 2021 年 .[4] G. I. Bell 和 E. C. Anderson. 细胞生长与分裂：I. 一种应用于哺乳动物悬浮培养物细胞体积分布的数学模型. *Biophysical Journal*, 7(4):329 – 351, 1967.[5] F. Billy、J. Clairambault 和 O. Fercoq. 利用细胞种群动力学优化癌症药物治疗. In *Mathematical methods and models in biomedicine*, 生命科学数学建模讲义, pages 265–309. Springer, 纽约, 2013.[6] A. Bressan 和 B. Piccoli. *Introduction to the mathematical theory of control* 2 *AIMS Series* , *on Applied Mathematics* 2007

volume of . 美国数学科学研究所, Springfield, MO, .[7] R. M. Colombo 和 M. Garavello. 图上的生物资源控制. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 23 3 1073 1097, 2017 , ( ): –

.[8] R. M. Colombo 、 M. Garavello 、 F. Marcellini 和 E. Rossi. 描述新冠肺炎疫情的年龄与空间结构化 SIR 模型. *J. Math. Ind.*, 10:Paper No. 22, 20, 2020.[9] R. M. Colombo、M. Herty 和 M. Mercier. 非局部流下连续性方程的控制. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 17(2):353–379, 2011.[10] R. M. Colombo 和 E. Rossi. 双曲型捕食者与抛物型猎物. *Commun. Math. Sci.*, 13(2):369– 400, 2015.

[11] K. R. Fister 和 S. Lenhart. 年龄结构竞争系统的最优控制.

J. Math. Anal. , ( ): – .[12]

Appl. 291 2 526 537, 2004
M. E. Gurtin 和 R. C. MacCamy. 非线性年龄依赖种群动力学.

Arch. Rational Mech. , : – .[13]

Anal. 54 281 300, 1974
P. Hartman. *Ordinary differential equations*, volume 38 of *Classics in Applied Mathematics*. SIAM, 费城, 宾夕法尼亚州, 2002年. 第二版（1982年版）的修订重印本.[14] M. Iannelli 和 F. Milner.
The basic approach to age-structured population dynamics. 生命科学数学建模讲义. Springer, 多德雷赫特, 2017年. 模型、方法与数值计算.[15] H. Inaba. *Age-structured population dynamics in demography and epidemiology*. Springer, 新加坡, 2017年.[16] H. Kang 和 S. Ruan. 具有非局部扩散和非局部边界条件的非线性年龄结构化种群模型.
J. Differential Equations, 278:430–462, 2021年.[17] W. O. Kermack、A. G. McKendrick 和 G. T. Walker. 对传染病数学理论的贡献. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 115 772 700 721, 1927

, ( ): – .[18]

S. N. Kruˇzhkov. 含多个独立变量的一阶拟线性方程. *Mat. Sb. (N.S.)*, 81 123 228( ): –255, 1970年.[19] M. Langlais 和 S. Busenberg. 具有季节周期性和垂直传播的年龄结构化 S.I.S. 模型的整体行为. *J. Math. Anal. Appl.*, 213(2):511–533, 1997年.[20] T. Lorenzi、A. Marciniak-Czochra 和 T. Stiehl. 急性白血病中具有多个成熟阶段的克隆选择结构化种群模型. *J. Math. Biol.*, 79(5):1587–1621, 2019年.[21] A. J. Lotka. 稳定年龄分布.
Proceedings of the National Academy of Sciences, 8 11 339( ): –345, 1922年.[22] P. Magal 和 S. Ruan.
Theory and applications of abstract semilinear Cauchy problems, volume 201 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 查姆, 2018年. Glenn Webb 作序.[23] J. M
´ ◦ *Weak and measure-valued solutions to evolutionary* alek、J.
PDEs 13 *Applied Mathematics and Mathematical Comp.* 1996
Neˇcas、M. Rokyta 和 M. Ruˇziˇcka. , volume of Chapman & Hall, 伦敦, .[24] S. Martin.
L^∞ *J. Differential* 框架下带
Equations 236 2 375 406, 2007
边界条件的一阶拟线性方程. , ( ): – .[25] A. G. McKendrick. 数学在医学问题中的应用. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 44 98 130, 1925

, : – .[26]

S. M´el´eard 和 V. C. Tran. 年龄结构种群的性状替代序列过程与典范方程. *J. Math. Biol.*, 58(6):881–921, 2009年.[27] J. A. J. Metz 和 O. Diekmann. *The dynamics of physiologically structured populations*, volume 68 of *Lecture Notes in Biomath.* Springer, 柏林, 1986年.[28] S. Mischler、B. Perthame 和 L. Ryzhik. 非线性种群成熟模型的稳定性. *Math.* ,
Models Methods Appl. Sci. 12 12 1751 1772, 2002
( ): – .[29] S. Nordmann 、 B. Perthame 和 C. Taing. 按年龄和表型性状结构化的种群中浓度的动力学 .
Acta Applicandae Mathematicae, 155(1):197–225, 2017年12月.[30] B. Perthame. *Transport equations in biology*. 数学前沿. Birkh¨auser Verlag, 巴塞尔, 2007年.[31] E. Rossi. 多维标量平衡律初边值问题的解的定义.

J. Hyperbolic , ( ): – .[32]

Differ. Equ. 15 2 349 374, 2018
S. L. Tucker 和 S. O. Zimmerman. 含任意数量连续结构变量的非线性种群动力学模型. *SIAM J. Appl. Math.*, 48(3):549–591, 1988年.[33] J. Vovelle. 有界区域上标量守恒律有限体积单调格式的收敛性. *Numer. Math.*, 90(3):563–596, 2002年.[34] G. F. Webb.
Theory of nonlinear age-dependent population dynamics 89 *Monographs and* , volu
Textbooks in Pure and Applied Mathematics 1985
me of . Marcel Dekker, Inc., 纽约, .