arXiv:2301.01546v1 [math.AP] 4 Jan 2023

关于芬斯勒p-拉普拉斯算子在 $p \to 1$ 时的第一罗宾特征值

Rosa Barbato*、Francesco Della Pietra*、Gianpaolo Piscitelli*

摘要。设 Ω 为有界、连通且边界足够光滑的开集，$p > 1$ 以及 $\beta \in \mathbb{R}$。本文研究泛函在 $p \to 1^+$ 时的 Γ-收敛：

$$J_p(\varphi) = \frac{\displaystyle\int_\Omega F^p(\nabla\varphi)dx + \beta\int_{\partial\Omega} |\varphi|^p\, F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1}}{\displaystyle\int_\Omega |\varphi|^p\, dx}$$

其中 $\varphi \in W^{1,\,p}(\Omega)\backslash\{0\}$ 且 F 是 $\mathbb{R}^n$ 上一个足够光滑的范数。We 研究第一特征值的极限 $\lambda_1(\Omega\ p,\ \beta)$ = 下确界$_{\varphi\in W^{1,\,p}(\Omega)\atop \varphi\neq 0}$ $J_p(\varphi)$，作为 $p \to 1^+$，即：

$$\Lambda(\Omega,\beta) = \inf_{\substack{\varphi\in BV(\Omega)\\ \varphi\neq 0}} \frac{|Du|_F(\Omega) + \min\{\beta,1\}\displaystyle\int_{\partial\Omega} |\varphi|\, F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1}}{\displaystyle\int_\Omega |\varphi|\, dx}.$$

此外，对于 $\beta > -1$，我们得到一个依赖于 β 的 $\Lambda(\Omega\ \beta)$ 等周不等式。

证明利用了关于 $\mathbb{R}^n$ 上 $BV(\Omega)$ 函数可由 $C^\infty(\Omega)$ 函数在严格收敛意义下进行内部逼近的结果，以及关于各向异性全变差的 BV 中的迹不等式。

MSC 2020：28A75，35J25，35P15。
关键词和短语：芬斯勒 p-拉普拉斯特征值； Γ-收敛；等周不等式；迹不等式；严格内部逼近。

*“R. Caccioppoli”数学与应用系，那不勒斯费德里科二世大学，琴蒂亚街，圣安杰洛山 - 那不勒斯 80126，意大利。电子邮箱：f.dellapietra@unina.it (*corresponding author*)，gianpaolo.piscitelli@unina.it

目录

1 引言 **2**2 符号与预备知识 **4**

2.1 芬斯勒范数 .42.2 各向异性曲率 .62.3 各向异性全变差 .7

3 各向异性迹不等式 **8**

4 内部逼近 **11**5 芬斯勒 p-拉普拉斯算子在 $p \to 1$ **14** 下的第一罗宾特征值

5.1 情形 $p = 1$ .155.2 Γ-收敛性 J_p .195.3 等周不等式 .22

1 引言

设 Ω 是一个有界、连通且边界充分光滑的开集， $p > 1$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$。本文研究当 $p \to 1^+$ 时，下述极小化问题的渐近行为

$$\lambda_1(\Omega, p, \beta) = \inf_{\substack{\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \\ \varphi \neq 0}} J_p(\varphi) \tag{1.1}$$

其中

$$J_p(\varphi) = \frac{\displaystyle\int_\Omega F^p(\nabla\varphi)dx + \beta \int_{\partial\Omega} |\varphi|^p \, F(\nu) d\mathcal{H}^{N-1}}{\displaystyle\int_\Omega |\varphi|^p \, dx}, \tag{1.2}$$

ν 是 $\partial\Omega$ 的外法向量，且 F 是定义在 $\mathbb{R}^n$上的充分光滑范数。若 $u \in W^{1,\,p}(\Omega)$是 (1.1) 的极小化子，则它满足下述罗宾特征值问题

$$\begin{cases} -\mathcal{Q}_p u = \lambda_1(\Omega, p, \beta) \, |u|^{p-2} \, u & \text{in } \Omega \\ F^{p-1}(\nabla u) F_\xi(\nabla u) \cdot \nu + \beta F(\nu) \, |u|^{p-2} \, u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $\mathcal{Q}_p u$ 是各向异性 p–拉普拉斯算子

$$\mathcal{Q}_p u := \operatorname{div}\left(\frac{1}{p} \nabla_\xi [F^p](\nabla u)\right).$$

从寻找 $\lambda_1(\Omega\ p\beta)$ 的最优区域的角度来看， $\beta > 0$ 的情形与 $\beta < 0$的情形有显著差异。众所周知，最优形状

在 (1.1) 的体积约束下取决于 β 的符号。对于正的罗宾参数，所谓的沃尔夫形状（详情见第 2 节）是一个极小化子 [9]:

$$\lambda_1(\Omega, p, \beta) \geqslant \lambda_1(\mathcal{W}, p, \beta) \quad \text{where } |\mathcal{W}| = |\Omega|.$$

如果 $\beta < 0$，这个问题尚未完全解决，即使在欧几里得情形下也是如此（即当 $F(\xi) = \sqrt{\sum_i \xi_i^2}$时）。事实上，1977 年，Bareket [5] 猜想，在体积给定的光滑有界区域类中，球使第一特征值达到最大值。在[13] 中，研究表明，对于某种意义上接近球的区域，该猜想成立。随后， [15] 中的作者（关于 p-拉普拉斯情形，见 [19] ）推翻了 $|\beta|$ 足够大时的猜想，并证明在适当的区域类中，当 $|\beta|$取较小值时，该猜想成立。在芬斯勒框架下，这个问题已在[23]中得到研究。

我们的最终目标是求出（1.1）的极限泛函的最优形状，其中$p \to 1^+$。为此，我们首先研究 $\lambda_1(\Omega\ p\beta)$ 的极限。特别地，我们证明，当 $\beta > -1$ 时，在（1.2）中定义的泛函 J_p， $\Gamma-$当 $p \to 1^+$ 时收敛到

$$J(\varphi) = \frac{|D\varphi|_F(\Omega) + \min\{1, \beta\} \displaystyle\int_{\partial\Omega} |\varphi|\, F(\nu) d\mathcal{H}^{N-1}}{\displaystyle\int_\Omega |\varphi|\, dx},$$

其中 $|D\varphi|_F(\Omega)$ 是 φ 的各向异性全变差（参见第 2 节以了解精确定义）。由此可推出

$$\lim_{p \to 1^+} \lambda_1(\Omega, p, \beta) = \Lambda(\beta, \Omega) := \inf_{\varphi \in BV(\Omega)} J(\varphi). \tag{1.3}$$

接下来，我们证明关于 $\Lambda(\Omega\ \beta)$ 的等周不等式。特别地，我们得到：在 Ω 的体积固定时，当 $\beta \geqslant 0$ 时，沃尔夫形状使 $\Lambda(\Omega\ \beta)$ 取最小值；当 $-1 < \beta < 0$ 时，则使其取最大值。

收敛结果的证明，以及随后两个等周不等式的证明，都依赖于各向异性全变差的两个结果，这些结果本身也具有独立的研究价值。第一个是关于 BV 空间的迹不等式:

$$\int_{\partial\Omega} |u|\, F(\nu)\, d\mathcal{H}^{N-1} \leqslant c_1 |Du|_F(\Omega) + c_2 \int_\Omega |u|\, dx, \quad \forall u \in BV(\Omega), \tag{1.4}$$

其中 c_1 和 c_2 是两个取决于区域几何性质的常数。该不等式已被证明在毛细问题中非常有用，例如文献 [4, 16, 17] 对其进行了研究。

第二个关键结果是对 BV 函数进行内部逼近，即用具有紧支撑的光滑函数来逼近。众所周知，若 Ω 是一个开集，则函数 $u \in BV(\Omega)$ 的全变差可以用 $C^\infty(\Omega)$中一个序列对应的全变差来逼近。事实上，若要用一列 C^∞ 函数来逼近 $|Du|$ ，一般而言，类似的结果并不成立，除非这些函数具有紧

支撑且支撑于 Ω 中。为此，Ω 需要具有更高的正则性。在欧几里得情形下，这个问题已在 [20, 24]中得到研究。本文证明，对于任意$u \in BV(\Omega) \cap L^p(\Omega)$，存在某个 $p \in [1, \infty)$，存在一个序列 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ 使得，对于任意 $q \in [1, p]$,

$$u_k \to u \text{ in } L^q(\Omega) \quad \text{and} \quad |Du_k|_F(\mathbb{R}^N) \to |Du|_F(\mathbb{R}^N).$$

最后我们强调，本文讨论的问题与毛细现象问题密切相关。例如，关于欧几里得情形，读者可参阅 [16, 17] ；关于各向异性情形，可参阅 [8] 。

本文结构如下。在第2节中，我们回顾有关芬斯勒范数、各向异性曲率和有界变差函数的一些有用工具。在第3 节中，我们证明一般区域和光滑区域上的各向异性迹不等式。在第4节中，我们给出严格逼近结果；最后，在第5节中，我们证明 Γ–收敛结果以及关于 Λ(Ω β)的等周不等式。

2 记号与预备知识

本节给出若干与芬斯勒范数相关的定义和性质。特别地，我们回顾函数的各向异性全变差的一些基本事实，以及各向异性曲率。

2.1 芬斯勒范数

本文中我们始终假设 F 是一个凸的、偶的、 1– 次齐次函数

$$\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto F(\xi) \in [0, +\infty[,$$

使得

$$F(t\xi) = |t|F(\xi), \quad t \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{2.1}$$

并且使得

$$a|\xi| \leqslant F(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{2.2}$$

其中 $a > 0$ 为某个常数。很容易看出，这一假设保证存在一个正常数 $b \geqslant a$ ，使得

$$F(\xi) \leqslant b|\xi|, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

本文中我们还假设 F 属于 $C^2(\mathbb{R}^N\backslash\{0\})$ ，并且

$$\nabla_\xi^2[F^2](\xi) \text{ is positive definite in } \mathbb{R}^N\backslash\{0\}. \tag{2.3}$$

关于2.3的假设 F 确保该算子

$$\mathcal{Q}_p u := \operatorname{div}\left(\frac{1}{p}\nabla_\xi[F^p](\nabla u)\right)$$

是椭圆的，因此存在一个正常数 γ 使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} \nabla^2_{\xi_i\xi_j}[F^p](\eta)\xi_i\xi_j \geqslant \gamma|\eta|^{p-2}|\xi|^2 \qquad \forall \eta \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

F^o 的极函数： $\mathbb{R}^N \to [0,+\infty[$，关于 F 为

$$F^o(v) = \sup_{\xi\neq 0} \frac{\xi \cdot v}{F(\xi)}.$$

容易看出， F^o 也是一个满足性质（2.1）和（2.2）的凸函数。此外，我们有

$$F(v) = \sup_{\xi\neq 0} \frac{\xi \cdot v}{F^o(\xi)},$$

由此可得

$$|\xi \cdot \eta| \leqslant F(\xi)F^o(\eta) \qquad \forall \xi,\eta \in \mathbb{R}^N. \tag{2.4}$$

以原点为中心的沃尔夫形状是由下式表示的集合

$$\mathcal{W} = \{\xi \in \mathbb{R}^N : F^o(\xi) < 1\}.$$

我们记 $\kappa_N = |\mathcal{W}|$，其中 $|\mathcal{W}|$ 是 $\mathcal{W}$的勒贝格测度。更一般地，集合 $\mathcal{W}_r(x_0)$ 表示 $r\mathcal{W} + x_0$，即以 x_0 为中心且测度为$\kappa_N r^N$的沃尔夫形状。若不会引起歧义，我们将用 $\mathcal{W}_r$代替 $\mathcal{W}_r(0)$。

函数 F 和 F^o 具有以下性质：

$$F_\xi(\xi)\cdot\xi = F(\xi), \quad F^o_\xi(\xi)\cdot\xi = F^o(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}, \tag{2.5}$$

$$F(F^o_\xi(\xi)) = F^o(F_\xi(\xi)) = 1 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}, \tag{2.6}$$

$$F^o(\xi)F_\xi(F^o_\xi(\xi)) = F(\xi)F^o_\xi(F_\xi(\xi)) = \xi \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}, \tag{2.7}$$

其中 $F_\xi = \nabla F(\xi)$。

给定一个有界区域 Ω， $x \in \Omega$ 到 $\partial\Omega$ 的各向异性距离定义为

$$d_F(x) := \inf_{y\in\partial\Omega} F^o(x-y), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

值得注意的是，当 $F(\xi) = \sqrt{\sum_i \xi_i^2}$ 时， $d_F = d_{\mathcal{E}}$ 是到边界的欧几里得距离函数。

函数 d_F 在 Ω 上是一个一致 Lipschitz 函数，并且

$$F(\nabla d_F(x)) = 1 \quad \text{a.e. in } \Omega.$$

我们有 $d_F \in W^{1,\infty}_0(\Omega)$。各向异性距离函数的许多性质已在 [7]中得到研究。

最后，Ω 的各向异性内半径为

$$R^F(\Omega) = \max\{d_F(x),\ x \in \overline{\Omega}\},$$

即包含于 Ω 内的最大沃尔夫形状的半径 $\mathcal{W}_r(x)$ 。

2.2 各向异性曲率

这里我们回顾各向异性平均曲率的一些性质，以及各向异性法坐标中的一个积分公式。更多细节请参阅[7] 。

若 Ω 的边界为 C^2 ，则 Ω 的各向异性外法向量定义为

$$n^F(y) = F_\xi(\nu(y)), \qquad y \in \partial\Omega,$$

其中 $\nu(y)$ 是 $\partial\Omega$ 在 y处的欧几里得外法向量。此外，由 (2.6) 可得 hat

$$F^o(n^F(y)) = 1.$$

记 $T_y\partial\Omega$ 为 $\partial\Omega$ 在 y 处的切空间；各向异性魏因加滕映射定义为

$$dn^F : T_y\partial\Omega \to T_{n(y)}\mathcal{W}.$$

该映射的特征值 $\kappa_1^F \leqslant \kappa_2^F \leqslant \ldots \leqslant \kappa_{N-1}^F$ 称为 y 处的各向异性主曲率（另见 [25]）。 $\partial\Omega$ 在点 y 处的各向异性平均曲率定义为

$$\mathcal{H}^F(y) = \kappa_1^F(y) + \ldots \kappa_{N-1}^F(y), \quad y \in \partial\Omega.$$

各向异性距离 d_F 在 $\partial\Omega$ 的管状邻域中是一个函数 C^2 ；因此我们可以定义矩阵值函数

$$W(y) = -F_{\xi\xi}(\nabla d_F(y))\nabla^2 d_F(y), \quad y \in \partial\Omega.$$

基于这个函数，可以给出各向异性主曲率的另一种定义 [7, 备注 5.9]。由于 $W(y)v \in T_y\partial\Omega$，对于任意 $v \in \mathbb{R}^n$，映射 $\overline{W}(y)$: $T_y \to T_y$ 仍然有定义，其中 $\overline{W}(y)w = W(y)w, w \in T_y$。矩阵 $\overline{W}(y)$（一般来说并非对称矩阵）具有实特征值 $\kappa_1^F(y) \leqslant \kappa_2^F(y) \leqslant \ldots \leqslant \kappa_{N-1}^F(y)$。实际上，这个定义与前一种定义等价。此外，有

$$\mathcal{H}^F(y) = \operatorname{div}\left[F_\xi\left(-\nabla d_F(y)\right)\right] = \operatorname{Tr}(W(y))$$

（另见 [25,第 3] 节）。

为了陈述各向异性法坐标中的变量替换公式，我们需要先给出一些预备定义。

Let

$$\Phi(y,t) = y - tF_\xi(\nu(y)), \qquad y \in \partial\Omega, \quad t \in \mathbb{R}$$

且对于 $y \in \partial\Omega$,

$$\ell(y) = \sup\{d_F(z),\, z \in \Omega \text{ and } y \in \Pi(z))\}$$

其中

$$\Pi(z) = \{\eta \in \partial\Omega \colon d_F(z) = F^o(z-\eta)\} \tag{2.8}$$

是点 $z \in\Omega$ 在 $\partial\Omega$ 上的各向异性投影集合。

接下来，我们回顾以下内容

定理 2.1. *([7, 定理 7.1])* 对于每个 $h \in L^1(\Omega)$，均有

$$\int_\Omega h(x)dx = \int_{\partial\Omega} F(\nu(y)) \int_0^{\ell(y)} h(\Phi(y,t))J(y,t)\,dt\,d\mathcal{H}^{N-1}(y),$$

其中

$$J(y,t) = \prod_{i=1}^{N-1}(1 - t\kappa_i^F(y)). \tag{2.9}$$

由于对于任意 $i = 1$，.....（引理 5.4]），$J(y$为正。此外，还有：

$$\frac{-\frac{d}{dt}[J(y,t)]}{J(y,t)} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\kappa_i^F(y)}{1 - t\kappa_i^F(y)}. \tag{2.10}$$

最后，我们回顾以下结论，以结束本节：对于任意满足 $\Pi(x) = \{y\}$ 的 $x \in \Omega$，均有（引理 4.3]）：

$$\nabla d_F(x) = -\frac{\nu(y)}{F(\nu(y))}. \tag{2.11}$$

2.3 各向异性全变差

设 $u \in BV(\Omega)$，u 关于 F 的全变差定义为

$$|Du|_F(\Omega) = \sup\left\{\int_\Omega u\,\mathrm{div}(g)\ dx \quad : \ g \in C_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N),\ F^o(g) \leqslant 1\right\}$$

集合 E 关于 F 的周长为：

$$P_F(E;\Omega) = |D\chi_E|_F(\Omega) = \sup\left\{\int_E \mathrm{div}(g)\ dx \quad : \ g \in C_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N),\ F^o(g) \leqslant 1\right\}.$$

此外，

$$P_F(E;\Omega) = \int_{\Omega\cap\partial^* E} F(\nu_E)d\mathcal{H}^{N-1}$$

其中，$\partial^* E$ 是 Ω 的约化边界，ν_E 是相对于 ∂E 的欧几里得法向量。

固定 $u \in BV(\Omega)$，并假设 $u \equiv 0$属于 $\mathbb{R}^N\backslash\Omega$。于是 $u \in BV(\mathbb{R}^N)$一个 d

$$|Du|_F(\mathbb{R}^N) = |Du|_F(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u|F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1} \tag{2.12}$$

（例如参见[6, 引理 3.9]）。

对于各向异性周长，等周不等式成立。更确切地说，

$$P_F(\Omega) \geqslant P_F(W_R), \tag{2.13}$$

其中，$\mathcal{W}_R$ 是与 Ω 测度相同的沃尔夫形状（例如参见[14, 定理 2.10]）。

以下逼近结果在 BV 中成立（欧几里得情形参见 [4], [18, 定理 1.17]，Finsler 情形参见 [1, 命题 2.1] ）。

命题 2.2. 设 $f \in BV(\Omega)$，则存在一个序列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\Omega)$，使得：

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega |f_k - f|\,dx = 0$$

and

$$\lim_{k\to+\infty} |Df_k|_F(\Omega) = |Df|_F(\Omega).$$

命题 2.3. 设 E 是 Ω 中的一个有限周长集合。存在一列 C^∞ 集合 $\{E_k\}_k$，使得：

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega |\chi_{E_k} - \chi_E|\,dx = 0$$

and

$$\lim_{k\to+\infty} |D\chi_{E_k}|_F(\Omega) = P_F(E;\Omega).$$

3 各向异性迹不等式

本节证明 BV 关于各向异性全变差的迹不等式。我们首先给出一般情形下的结果（命题 3.1），然后通过要求 Ω 的边界具有更高的正则性来改进不等式中的常数（命题 3.2）。

首先，令

$$q(y) = \lim_{\rho\to0^+}\sup\left\{\frac{\int_{\partial\Omega}\chi_A F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1}}{|D\chi_A|_F(\Omega)} : A\subset\Omega\cap B_\rho(y), |A|>0, P_F(A;\Omega)<+\infty\right\}$$

并且 $Q = \sup_{y\in\partial\Omega} q(y)$。下面的不等式推广了定理 4] 中给出的迹不等式[4,。

命题 3.1. 设 Ω 是一个有界开集，且满足 $\mathcal{H}^{N-1}(\Omega) < +\infty$，并设 u 是 $BV(\Omega)$ 中的一个函数。那么对于任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\int_{\partial\Omega}|u|F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1} \leqslant (Q+\varepsilon)|Du|_F(\Omega) + c(\Omega,\varepsilon)\int_\Omega |u|dx, \tag{3.1}$$

其中 $c(\Omega\ \varepsilon)$ 不依赖于 u。

证明。令 $y\in\partial\Omega$ 和 $\rho(y) > 0$ 固定，使得

$$\int_{\partial\Omega}\chi_B F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1} \leqslant (Q+\varepsilon)|D\chi_B|_F(\Omega),$$

对任意满足 $P_F(B$ 的 $B \subset \Omega \cap B_{\rho(y)}(y)$；$\Omega$
$) < +\infty$。若 $\mathrm{spt}(u) \subset B_{\rho(y)}(y)$，则

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} |u| F(\nu) d\mathcal{H}^{N-1} &= \int_{\partial\Omega} F(\nu) \left(\int_0^{+\infty} \chi_{\{|u|>t\}}(y) dt \right) d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial\Omega} F(\nu) \chi_{\{|u|>t\}}(y) d\mathcal{H}^{N-1} \right) dt \leqslant (Q+\varepsilon) \int_0^{+\infty} |D\chi_{\{|u|>t\}}|_F(\Omega) dt.\end{aligned}$$

利用余面积公式，我们有

$$\int_{\partial\Omega} |u| F(\nu) d\mathcal{H}^{N-1} \leqslant (Q+\varepsilon) |D|u||_F(\Omega) \leqslant (Q+\varepsilon) |Du|_F(\Omega).$$

设 $\{B_\rho(y)\}_{y\in\partial\Omega}$ 是 $\partial\Omega$ 的一个覆盖，并取一个有限子覆盖 B_1、.....、B_k。现在，考虑一个单位分解 φ_1、.....、φ_k，使得

$$0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1, \qquad \varphi_i \in C_0^1(B_i), \qquad \sum_{i=1}^k \varphi_i(y) = 1 \qquad \text{if } y \in \partial\Omega.$$

若 $f \in BV(\Omega)$，则

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} |u| F(\nu) d\mathcal{H}^{N-1} &\leqslant (Q+\varepsilon) \left| D\left(\sum_{i=1}^k \varphi_i u \right) \right|_F (\Omega) \\ &\leqslant (Q+\varepsilon) \sum_{i=1}^k (|\varphi_i Du|_F(\Omega) + |uD\varphi_i|_F(\Omega)) \\ &= (Q+\varepsilon) \sum_{i=1}^k \left(\int_\Omega \varphi_i d|Du|_F + \int_\Omega u d|D\varphi_i|_F(\Omega) \right) \\ &\leqslant (Q+\varepsilon) |Du|_F(\Omega) + c(\Omega,\varepsilon) \int_\Omega |u| dx.\end{aligned}$$

□

若 Ω 的边界足够光滑，我们可以证明 Q 可以取为 1，且 $\varepsilon = 0$。更确切地说，有如下结论。

命题 3.2. 设 Ω 是一个属于 C^2 类的有界开连通集。则存在一个正常数 c，使得

$$\int_{\partial\Omega} |u| F(\nu) d\mathcal{H}^{N-1} \leqslant |Du|_F(\Omega) + c \int_\Omega |u| dx, \quad \forall u \in BV(\Omega). \tag{3.2}$$

证明。由于 Ω 是 C^2，因此满足半径为 $r > 0$ 的一致球条件；其含义是，对于每个点 $y \in \partial\Omega$，都存在 $z \in \Omega$，使得 $y \in \overline{B_r(z)} \subset \Omega$。令 $R \in]0, +\infty[$ 为 $\partial\mathcal{W}$ 的主曲率半径的最大值。该最大值存在，因为

F（且 F^o）是强凸的。若 $\kappa_1^F, \dots, \kappa_{N-1}^F$ 是各向异性主曲率，则有

$$\kappa_i{}^F(y) \leqslant \frac{1}{\mu}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

其中 $\mu = \frac{r}{R}$（[7, 引理 5.4]）。因此，在集合 $\Omega_{\frac{\mu}{2}} := \left\{x \in \Omega : \ d_F(x) < \frac{\mu}{2}\right\}$，有 d_F 是 C^2（[7, 引理 4.1 和定理 4.16]）且

$$\frac{\kappa_i^F(y)}{1 - \kappa_i^F(y) d_F(x)} \leqslant \begin{cases} 0 & \text{if } \kappa_i^F \leqslant 0 \\ \dfrac{2}{\mu} & \text{if } 0 < \kappa_i^F \leqslant \dfrac{1}{\mu}, \end{cases}$$

其中 $y \in \partial\Omega$ 是 $x \in \Omega$ 在 $\partial\Omega$ 上的各向异性投影。于是

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\kappa_i{}^F(y)}{1 - \kappa_i{}^F(y) d_F(x)} \leqslant 2\frac{N-1}{\mu} \tag{3.3}$$

对于 $x \in \Omega_{\frac{\mu}{2}}$。我们可以只考虑 u 非负且光滑的情形。通过分部积分，并注意到 $F(\nabla d_F(x)) = 1$ 在 Ω 中，可得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega -\Delta_F d_F(x)\, u(x) \left(\frac{\mu}{2} - d_F(x)\right)^+ dx \\
&= \int_\Omega F_\xi(\nabla d_F(x)) \cdot \nabla u(x) \left(\frac{\mu}{2} - d_F(x)\right)^+ dx \\
&\quad - \int_{\Omega_{\frac{\mu}{2}}} u(x) F_\xi(\nabla d_F(x)) \cdot \nabla d_F(x)\, dx - \frac{\mu}{2} \int_{\partial\Omega} u(x) F_\xi(\nabla d_F(x)) \cdot \nu \, dx \\
&= \int_\Omega F_\xi(\nabla d_F(x)) \cdot \nabla u(x) \left(\frac{\mu}{2} - d_F(x)\right)^+ dx - \int_{\Omega_{\frac{\mu}{2}}} u(x)\, dx + \frac{\mu}{2} \int_{\partial\Omega} u(y)\, F(\nu) d\mathcal{H}^{N-1}.
\end{aligned}$$

现在，我们估计这一项

$$\int_\Omega F_\xi(\nabla d_F(x)) \cdot \nabla u(x) \left(\frac{\mu}{2} - d_F(x)\right)^+ dx.$$

由（2.4）和（2.6）可得

$$\int_\Omega F_\xi(\nabla d_F(x)) \cdot \nabla u(x) \left(\frac{\mu}{2} - d_F(x)\right)^+ dx \geqslant -\frac{\mu}{2} \int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx. \tag{3.4}$$

另一方面，变量替换公式（2.1）给出

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega F_\xi(\nabla d_F(x)) \cdot \nabla u(x) \left(\frac{\mu}{2} - d_F(x)\right)^+ dx \\
&= \int_{\partial\Omega} F(\nu) \int_0^{\frac{\mu}{2}} \left(\frac{\mu}{2} - t\right) \frac{d}{dt}[u(\phi(y,t))] J(y,t) dt\, d\mathcal{H}^{N-1}.
\end{aligned}$$

分部积分并利用 $J(y,0)=1$ 这一事实，上述积分变为

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mu}{2}\int_{\partial\Omega} u(y)F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1}(y)-\int_{\partial\Omega}F(\nu)\int_0^{\frac{\mu}{2}}u(\phi(y,t))\left(\frac{\mu}{2}-t\right)\frac{dJ}{dt}dt\,d\mathcal{H}^{N-1}(y)\\
&\qquad\qquad+\int_{\partial\Omega}F(\nu)\int_0^{\frac{\mu}{2}}u(\phi(y,t))J(y,t)dt\,d\mathcal{H}^{N-1}(y)\\
&\leqslant-\frac{\mu}{2}\int_{\partial\Omega}u(y)F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1}(y)+(N-1)\int_{\partial\Omega}F(\nu)\int_0^{\frac{\mu}{2}}u(y)J(y,t)\,dt\,d\mathcal{H}^{N-1}(y)\\
&\qquad\qquad+\int_{\partial\Omega}F(\nu)\int_0^{\frac{\mu}{2}}u(\phi(y,t))J(y,t)dt\,d\mathcal{H}^{N-1}(y)\\
&\qquad\qquad=-\frac{\mu}{2}\int_{\partial\Omega}u(y)F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1}(y)+N\int_\Omega u\,dx
\end{aligned}
$$

在该不等式中，我们用到了（2.10）以及界（3.3）。因此，结合（3.4）可得

$$
\int_{\partial\Omega}u(y)F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1}\leqslant|Du|_F(\Omega)+\frac{2N}{\mu}\int_\Omega u(x)\,dx.
$$

□

注 3.3。采用上述定理中的记号，我们明确指出，式（3.2）中的常数为

$$
c=\frac{2N}{\mu}.
$$

4 内部逼近

现在我们给出一个逼近结果：用 Ω 中紧支撑的光滑函数逼近 BV-函数。

我们先陈述两个有用的引理。首先，我们回顾 [20, 引理 3.2] 中关于具有 Lipschitz 边界的集合 Ω 的微分同胚扰动的以下结果。我们分别用 ι 和 I 表示恒等向量函数和矩阵函数。

引理 4.1。设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是具有 Lipschitz 边界的有界开集。则存在 $\tau_0>0$，并且对于 $0\leqslant\tau\leqslant\tau_0$，存在一族 C^∞–微分同胚 $\Phi^\tau:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$，其逆映射为 Ψ^τ，使得

- $\Phi^0=\Psi^0=\iota$;
- $\Phi^\tau\to\iota$ 和 $\Psi^\tau\to\iota$ 作为 $\tau\to0$ 在 $\mathbb{R}^N$上一致收敛;
- $\nabla\Phi^\tau(x)\to I$且 $\nabla\Psi^\tau(x)\to I$关于 x在 $\mathbb{R}^N$上一致地趋于 $\tau\to0$;

- $\Phi^\tau(\Omega)\overline{\subset}\Omega$，对所有 $\tau\in(0,\tau_0]$均成立。

现在，我们给出 BV- 函数的各向异性坐标变换公式，见 [18, 引理 10。1]。

引理 4.2. 设 u 是 $BV_{loc}(\Omega)$, Φ 中的一个函数： $\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ 是一个微分同胚，且$A\Subset\Omega$。那么

$$\left|D(u\circ\Phi^{-1})\right|_F(\Phi(A))=|HDu|_F(A), \tag{4.1}$$

其中 $H=|\det\ \nabla\Phi|[\nabla\Phi]^{-1}$。

证明。考虑 $u\in C^1(\Omega)$和 $g\in C_0^1(A;\ \mathbb{R}^N)$，则以下面积变换公式成立

$$\begin{aligned}\int_{\Phi(A)}(g\circ\Phi^{-1})\cdot\nabla(u\circ\Phi^{-1})dx&=\int_{\Phi(A)}(g\circ\Phi^{-1})\cdot((\nabla u\circ\Phi^{-1})\nabla\Phi^{-1})dx\\&=\int_A g\cdot(\nabla u(\nabla\Phi^{-1}\circ\Phi))|\det\nabla\Phi|dz\\&=\int_A g\cdot(H\nabla u)dz.\end{aligned} \tag{4.2}$$

因此，命题（4.1）对 u 在 $C^1(\Omega)$ 中成立，即

$$\int_{\Phi(A)}F(\nabla(u\circ\Phi^{-1}))dx=\int_A F(H\nabla u)dx.$$

现在假设 $u\in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。根据命题 2.2 ，我们可以用一个序列 u 逼近 $\{u_i\}\subset C^\infty$。此外，相应的函数 $u_i\circ\Phi^-1$ 收敛到 $u\circ\Phi^-1$在 $L^1(A)$中。

因此，我们可以在式（4.2）中取极限，得到

$$\int_{\Phi(A)}(g\circ\Phi^{-1})\cdot dD(u\circ\Phi^{-1})=\int_A g\cdot H\,dDu=\int_A g\cdot(H\nu)d\,|Du| \tag{4.3}$$

其中 ν 是对 Du 关于 $|Du|$求导得到的。

如果 $F^o(g)\leqslant 1$，那么 $F^o(g\circ\Phi^{-1})\leqslant 1$和 $\mathrm{spt}(g\circ\Phi^{-1}))\subseteq\Phi(A)$也成立。因此，根据关于 F的全变差定义，我们有

$$\int_A g\cdot(H\nu)d\,|Du|\leqslant\left|D(u\circ\Phi^{-1})\right|_F(\Phi(A)), \tag{4.4}$$

不等式（2.4）表明

$$\sup_{F^o(g)\leqslant1}\int_A g\cdot(H\nu)\ d\,|Du|=|HDu|_F(A).$$

因此，取（4.4）左侧的上确界，可得

$$|HDu|_F(A)\leqslant\left|D(u\circ\Phi^{-1})\right|_F(\Phi(A)).$$

对于反向不等式，我们考虑 $g = \gamma \circ \Phi \in C_0^1(A;\ \mathbb{R}^N)$，其中 $\gamma \in C_0^1(\Phi(A);\ \mathbb{R}^N)$以及 $F^o(\gamma) \leqslant 1$。因此 $g \circ \Phi^{-1} = \gamma$，由（4.3）可得

$$\begin{aligned}\int_{\Phi(A)} \gamma \cdot dD(u \circ \Phi^{-1}) &= \int_A (\gamma \circ \Phi) \cdot (H\nu) d\,|Du|\,(A) \\ &\leqslant \int_A F^o(\gamma \circ \Phi)|H| d|Du|_F \leqslant \int_A |H|\,d\,|Du|_F\,.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\left|D(u \circ \Phi^{-1})\right|_F (\Phi(A)) \leqslant |HDu|_F\,(A).$$

□

现在，我们可以陈述主要的逼近结果。

定理 4.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个具有 Lipschitz 边界的有界开集，并且$u \in BV(\Omega) \cap L^p(\Omega)$，其中某个 $p \in [1, \infty)$成立。则存在一个序列 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$，使得对于任意 $q \in [1, p]$,

$$u_k \to u \quad in \quad L^q(\Omega) \quad and \quad |Du_k|_F(\mathbb{R}^N) \to |Du|_F(\mathbb{R}^N).$$

证明。 固定一族 $(\Phi^\tau)_{0\leqslant\tau\leqslant\tau_0}$ 从 $\mathbb{R}^N$ 到 $\mathbb{R}^N$ 的微分同胚$(\Psi^\tau)_{0\leqslant\tau\leqslant\tau_0}$，根据引理 4.1，并考虑

$$u^\tau := u \circ \Psi^\tau \quad \text{for} \quad \tau \in [0, \tau_0].$$

根据构造， $u^\tau = 0$ 几乎处处成立，Ω 的某个紧子集之外除外。由 [20, 定理 3.1], 我们知道 $u^\tau \in L^p(\Omega)$ 对所有 $\tau \in [0,\ \tau_0]$， $u^\tau \to u$ 在 $L^p(\Omega)$ 中成立，在 $L^p(\mathbb{R}^N)$中也成立。引理 4.2 中的坐标变换公式意味着

$$|Du^\tau|_F\,(\mathbb{R}^N) = \int_{\mathbb{R}^N} \left|(\nabla\Psi^\tau)^T\right|\ |\det(\nabla\Phi^\tau)|\ d\,|Du|_F\,.$$

因此 $u^\tau \in BV(\mathbb{R}^N)$，并且由于右侧的被积函数一致收敛于 1,

$$\lim_{\tau\to 0^+} |Du^\tau|_F\,(\mathbb{R}^N) = |Du|_F\,(\mathbb{R}^N)$$

只需证明存在 $v^\tau \in C_0^\infty(\Omega)$，使得

$$||u^\tau - v^\tau||_p < \tau \quad \text{and} \quad \left||Du^\tau|_F\,(\mathbb{R}^N) - |Dv^\tau|_F\,(\mathbb{R}^N)\right| < \tau.$$

第一种收敛（在 L^p 中）已在 [20, 定理 3.1] 中证明；与此同时，全变差的收敛基于以下论证。

对于任意 $\varepsilon > 0$，考虑其磨光 $u_\varepsilon := u^\tau * \eta_\varepsilon$，其中 $\eta_\varepsilon(x) =: \varepsilon^{-n}\eta(\varepsilon^{-1}x)$，对于标准磨光核 η。因此 $u_\varepsilon \to u^\tau$ 属于 $L^p(\Omega)$，而对于零延拓，则由 $L^1(\mathbb{R}^N)$ [3, 命题 3.2.c]可得。

然后，由各向异性全变差的下半连续性，我们有

$$|Du^\tau|_F(\mathbb{R}^N) \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0^+} |Du_\varepsilon|_F(\mathbb{R}^N).$$

因此，尚需证明反向不等式

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} |Du_\varepsilon|_F(\mathbb{R}^N) \leqslant |Du^\tau|_F(\mathbb{R}^N). \tag{4.5}$$

取 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N、\ \mathbb{R}^N)$，使得 $F^o(\varphi) \leqslant 1$，并计算

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon * \operatorname{div}(\varphi)dx \int_{\mathbb{R}^N} u^\tau(\eta_\varepsilon * \operatorname{div}\varphi)dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^\tau \operatorname{div}(\eta_\varepsilon * \varphi)dx \leqslant |Du^\tau|_F(\mathbb{R}^N), \tag{4.6}$$

其中，最后一项中的不等式成立，是因为 $F^o(\eta_\varepsilon * \varphi) \leqslant 1$。事实上，利用 F^o 的 1 次齐次性以及詹森不等式（例如参见[22, 引理 1.8。2]），可得

$$F^o\left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\epsilon(x-y)\varphi(y)dy\right) \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} F^o(\eta_\epsilon(x-y)\varphi(y))dy = \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)F^o(\varphi(y))dy \leqslant 1.$$

因此，在（4.5）中取极限，利用 φ的任意性，即得不等式（4.6）。

□

5 Finsler p-拉普拉斯算子在 $p \to 1$ 时的第一罗宾特征值

本节将把上述结果应用于一个罗宾特征值问题。具体而言，我们旨在分析该泛函的 Γ-极限

$$J_p(\varphi) = \frac{\displaystyle\int_\Omega F^p(\nabla\varphi)dx + \beta\int_{\partial\Omega} |\varphi|^p F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1}}{\displaystyle\int_\Omega |\varphi|^p dx}, \quad \varphi \in W^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}, \tag{5.1}$$

其中 Ω 是有界、连通且足够光滑的开集， $p > 1$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$，并证明当 $p \to 1^+$ 时第一特征值极限的等周不等式

$$\lambda_1(\Omega, p, \beta) = \inf_{\substack{\varphi\in W^{1,p}(\Omega)\\ \varphi\neq 0}} J_p(\varphi), \tag{5.2}$$

取决于参数 β 的值。证明这一结果的关键在于泛函 J_p 的收敛性。

我们首先回顾如下存在性结果：（5.2）成立。

定理 5.1 ([9, 12])。设 $p > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ 且 Ω 是有界利普希茨区域。那么存在一个极小值 $u \in C^{1,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$，满足（5.2）的条件

$$\begin{cases} -\mathcal{Q}_p u = \lambda(\Omega, p, \beta)\,|u|^{p-2}\,u & in\ \Omega \\ F^{p-1}(\nabla u)F_\xi(\nabla u)\cdot\nu + \beta F(\nu)\,|u|^{p-2}\,u = 0 & on\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.3}$$

此外， u 在 Ω 中不变号。最后，当 $\beta > 0$ 时， $\lambda_1(\Omega\ p, \beta)$ 为正；而当 $\beta < 0$ 时则为负。

5.1 $p = 1$的情形

为了研究 J_p 在 p 趋于 1 时的极限情形，我们考虑泛函

$$J(\varphi) = \frac{|D\varphi|_F(\Omega) + \min\{\beta, 1\} \int_{\partial\Omega} |\varphi| \, F(\nu) d\mathcal{H}^{N-1}}{\int_\Omega |\varphi| \, dx}, \tag{5.4}$$

其中 $\varphi \in BV(\Omega)$ 且 $u \neq 0$。因此，我们研究相应的极小化问题

$$\Lambda(\Omega, \beta) = \inf_{\substack{\varphi \in BV(\Omega) \\ \varphi \neq 0}} J(\varphi). \tag{5.5}$$

根据 β，我们将对区域正则性提出不同的假设。具体而言：

- 若 $\beta \geqslant 0$，我们将假设 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 的；
- 若 $-1 < \beta < 0$，我们将假设 $\partial\Omega$ 是 C^2。

特别是，这种差异取决于这样一个事实：在 $\beta < 0$ 的情形下，我们使用第 3 节中研究的迹不等式。

最后，如果 $\beta \leqslant -1$ 该问题并非适定；事实上，如果 $\beta < -1$，那么 $\Lambda(\Omega\ \beta) = -\infty$；而如果 $\beta = -1$，Λ 是有限的，但可能无法取到，即使在光滑区域的情形下也是如此。关于更多细节，请参阅 [10] 中讨论的欧几里得情形。

我们来讨论项 $\min\{\beta,\ 1\}$ 在（5.4）中的作用。对于 β的任意取值，研究如下问题似乎更为自然

$$\lambda(\Omega, 1, \beta) = \inf_{\substack{\varphi \in BV(\Omega) \\ \varphi \neq 0}} \frac{|D\varphi|_F(\Omega) + \beta \int_{\partial\Omega} |\varphi| \, F(\nu) d\mathcal{H}^{N-1}}{\int_\Omega |\varphi| \, dx}. \tag{5.6}$$

事实上，对于 $\beta \geqslant 1$ ，有

$$\lambda(\Omega, 1, \beta) = \Lambda(\Omega, \beta) = h_F(\Omega),$$

其中 $h_F(\Omega)$ 是芬斯勒框架下 Ω 的第一个切格常数（例如参见 [6]）：

$$h_F(\Omega) = \inf_{\substack{\varphi \in BV(\Omega) \\ \varphi \neq 0}} \frac{|D\varphi|_F(\mathbb{R}^N)}{\int_\Omega |\varphi| \, dx} = \inf_{E \subseteq \Omega} \frac{P_F(E; \Omega)}{|E|}. \tag{5.7}$$

事实上，在这种情况下，很容易看出

$$\lambda(\Omega, 1, \beta) \geqslant h_F(\Omega).$$

另一方面，如果 u 是（5.6）的极小化子，那么，根据定理 4.3，存在$u_k \in C_0^\infty(\Omega)$ 使得

$$u_k \xrightarrow{L^q} u, \qquad ||\nabla u_k||_{L^1(\Omega)} \xrightarrow{L^1} |Du|_F(\mathbb{R}^N),$$

对任意 $q \leqslant \dfrac{N}{N-1}$。因此

$$\lambda(\Omega,1,\beta) \leqslant \lim_{k\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_\Omega F(\nabla u_k)dx}{\displaystyle\int_\Omega |u_k|\,dx} = h_F(\Omega).$$

现在，我们将研究极小化问题（5.5）是否可以通过将分析限制在特征函数上来进行。因此，若 $E \subseteq\Omega$，则有

$$J(\chi_E) = \frac{P_F(E;\Omega) + \min\{1,\beta\}\displaystyle\int_{\partial\Omega\cap\partial^* E} F(\nu_E)d\mathcal{H}^{N-1}}{|E|}.$$

记

$$R(E,\beta) := J(\chi_E),$$

我们考虑极小化问题

$$\ell(\Omega,\beta) = \inf_{E\subseteq\Omega} R(E,\beta). \tag{5.8}$$

在证明问题（5.5）与（5.8）等价之前，我们需要以下关于泛函 J的分子下半连续性的结果。

引理 5.2。设 $\beta \geqslant -1$。泛函

$$G(u) = |Du|_F(\Omega) + \min\{1,\beta\}\int_{\partial\Omega} |u|F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1}$$

关于 $L^1(\Omega)$ 的拓扑，在 $BV(\Omega)$ 上下半连续。

证明。若 $\beta \geqslant 0$，则各项的下半连续性立即推出下半连续性（其中 Ω 是 Lipschitz）。接下来假设 $\beta < 0$ （且 Ω 属于 C^2）。证明是将 [21,命题 1.2] 推广到 Finsler 情形。

设 $u \in BV(\Omega)$，考虑一个序列 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq BV(\Omega)$，它在 $L^1(\Omega)$ 中收敛到 u；我们有如下估计

$$G(u) - G(u_k) \leqslant |Du|_F(\Omega) - |Du_k|_F(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u-u_k|F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{5.9}$$

现在，对于固定的 $\delta > 0$，定义 $\Omega_\delta = \{x \in \Omega\colon\ d_{\mathcal{E}}(x) < \delta\}$，其中 $d_{\mathcal{E}}$ 是 Ω 的边界的标准欧几里得距离；此外，考虑 $v_\delta = (1-\chi_\delta)(u-u_k)$,

其中 χ_δ 是满足以下条件的截断函数： $\chi_\delta = 1$ 在 Ω 中$\backslash\Omega_\delta$ 且 $|\nabla\chi_\delta| \leqslant \frac{2}{\delta}$ 在 Ω 中。应用于 v_δ 的迹不等式（3.2）给出 $\int_{\Omega_\delta} |u-u_k|dx + c\int_\Omega$

$$\int_{\partial\Omega} |u-u_k|F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1} \leqslant |D(u-u_k)|_F(\Omega_\delta) + \frac{2b}{\delta}\int_\delta |u-u_k|dx. \tag{5.10}$$

此外，我们有

$$|D(u-u_k)|_F(\Omega_\delta) \leqslant |Du|_F(\Omega_\delta) + |Du_k|_F(\Omega_\delta) + |D(u-u_k)|_F(\partial(\Omega\backslash\Omega_\delta)), \tag{5.11}$$

但最后一项在一个 δ的正测度集合上为零，因为 $u-u_k \in BV(\Omega)$，对所有$k \in \mathbb{N}$均成立。因此，由（5.9）-（5.10）-（5.11），我们得到:

$$G(u) - G(u_k) \leqslant |Du|_F(\Omega) + |Du|_F(\Omega_\delta) - |Du_k|_F(\Omega\backslash\Omega_\delta) + \left(\frac{2b}{\delta} + c\right)\int_{\Omega_\delta} |u-u_k|dx.$$

由泛函 $|Du_k|_F(\Omega\backslash\Omega_\delta)$ 在 $L^1(\Omega\backslash\Omega_\delta)$中的下半连续性，我们有

$$\limsup_{k\to+\infty}[G(u) - G(u_k)] \leqslant 2|Du|_F(\Omega_\delta).$$

令 $\delta \to 0^+$ 趋于极限即可得出结论。 □

此时，我们陈述极小化问题（5.5）的主要存在性结果。

定理 5.3。 对于任意 $\beta > -1$，问题（5.5）存在一个极小值。特别地，有

$$\Lambda(\Omega,\beta) = \ell(\Omega,\beta).$$

此外，若 $u \in BV(\Omega)$ 是（5.5）的一个极小值，则

$$\Lambda(\Omega,\beta) = R(\{u > t\},\beta),$$

对某个 $t \in \mathbb{R}$ 成立。

证明。设 u_n 是 $BV(\Omega)$ 中（5.5）的一个极小化序列，使得$\|u_n\|_{L^1(\Omega)} = 1$。若 $\beta > 0$，则 u_n 在 $BV(\Omega)$ 中有界，因此

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ in } BV(\Omega) \qquad \text{and} \qquad u_n \xrightarrow{L^1} u.$$

特别地，若 $\beta \geqslant 1$, $J(u_n) = |Du_n|_F(\mathbb{R}^N)$，利用各向异性全变差的下半连续性 [2], ，我们得到

$$J(u) \leqslant \liminf_n J(u_n).$$

因此， u 是泛函 J的最小值。

若 $0 < \beta < 1$，令 $\Omega_\delta = \{x \in \Omega \mid d_{\mathcal{E}}(x) < \delta\}$，其中 $\delta > 0$。我们有

$$|Du_n|_F(\Omega) = |Du_n|_F(\Omega\backslash\Omega_\delta) + |Du_n|_F(\Omega_\delta) \geqslant |Du_n|_F(\Omega\backslash\Omega_\delta) + \beta|Du_n|_F(\Omega_\delta)$$

因此

$$J(u_n) \geqslant |Du_n|_F(\Omega\backslash\Omega_\delta) + \beta\left[|Du_n|_F(\Omega_\delta) + \int_{\partial\Omega} |u_n| F(\nu) d\mathcal{H}^{N-1}\right].$$

此外，根据 J 的下半连续性，我们有

$$\liminf_n J(u_n) \geqslant |Du_n|_F(\Omega\backslash\Omega_\delta) + \beta |Du_n|_F(\mathbb{R}^N\backslash(\Omega\backslash\Omega_\delta)).$$

利用 $u \in BV(\Omega)$ 这一事实，我们得到

$$\liminf_n J(u_n) \geqslant J(u),$$

当 $\delta \to 0$ 时。

现在，取 $-1 < \beta < 0$。显然 $J(u_n) \leqslant C$。利用迹不等式（3.2），我们得到

$$J(u_n) \geqslant (1+\beta)|Du_n|_F(\Omega) + c\beta \geqslant c\beta$$

and

$$|Du_n|_F(\Omega) \leqslant \frac{C}{1+\beta} - \frac{\beta c}{1+\beta}.$$

由于 $u_n \in BV(\Omega)$，且泛函 J 是下半连续的（已在引理 5.2中证明），我们有 u 是 J的一个最小值。

现在，我们要证明定理的最后一部分。显然，我们有

$$\Lambda(\Omega,\beta) \leqslant \ell(\Omega,\beta).$$

为证明反向不等式，我们取 $u \in BV(\Omega)$ 作为（5.5）的极小化子。利用余面积公式

$$|Du|_F(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_F(\{u > t\}, \Omega) dt,$$

我们有

$$\begin{aligned}
\Lambda_F(\Omega,\beta) &= \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_F(\{u>t\},\Omega)dt + \min\{\beta,1\}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega\cap\partial\{u>t\})F(\nu)dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\{u>t\}|\,dt} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(\{u>t\},\beta)\,|\{u>t\}|\,dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\{u>t\}|\,dt} \\
&\geqslant \inf_{E\subseteq\Omega} R(E,\beta) \\
&= \ell(\Omega,\beta).
\end{aligned}$$

这表明 $\Lambda(\Omega\ \beta) = \ell(\Omega\ \beta)$，特别地，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{R(\{u > t\}, \beta) - \ell(\Omega, \beta)\} \, |\{u > t\}| \, dt = 0$$

并利用 $\ell(\Omega\ \beta)$ 的定义，我们观察到被积函数非负。特别地，$u \not\equiv 0$，且有 $\Lambda(\Omega\ \beta) = R(\{u > t\}, \beta)$。 □

5.2 Γ-收敛的 J_p

No现在我们将证明，当 $p \to 1^+$ 时，泛函 J_p $\Gamma-$ 收敛到泛函 J。

定义 5.4. 若对任意 $u \in BV(\Omega)$，以下条件均成立，则称泛函 J_p Γ 在 $BV(\Omega)$ 的弱* 拓扑下于 $p \to 1^+$ 时 J -收敛：

(i) 对于任意序列 $u_p \in BV(\Omega)$，若其在 $BV(\Omega)$ 中于 $p \to 1^+$ 时弱* 收敛到 u，则

$$\liminf_{p \to 1^+} J_p(u_p) \geqslant J(u). \tag{5.12}$$

(ii) 存在一个序列 $u_p \in W^{1,p}(\Omega)$，其在 $BV(\Omega)$ 中于$p \to 1^+$时弱* 收敛到 u，使得

$$\limsup_{p \to 1^+} J_p(u_p) \leqslant J(u). \tag{5.13}$$

现在，我们可以证明泛函 J_p 的收敛定理了。

定理 5.5. 设 $\beta > -1$，则当 $p \to 1^+$ 时，J_p Γ 收敛到 J。

证明。设 $u_p \in W^{1,\ p}(\Omega)$ 且$||u_p||_{L^p(\Omega)} = 1$。我们通过区分 β的可能取值来给出证明。无论哪种情况，我们都需要证明 (5.12) 和 (5.13)。

情形 $\beta \geqslant 1$。固定一个序列 $u_p \in W^{1,\ p}(\Omega)$ 弱* 收敛到 u 于 $BV(\Omega)$ 中，其中 $p \to 1^+$。利用例如 [11, 命题 A.1], 中给出的 H¨older 型不等式，我们有：

$$\begin{aligned}
&\left(\int_\Omega F(\nabla u_p) dx + \int_{\partial\Omega} |u_p| F(\nu) d\mathcal{H}^{N-1} \right)^p \\
&\quad \leqslant \left(\int_\Omega F(\nabla u_p)^p dx + \int_{\partial\Omega} |u_p|^p F(\nu) d\mathcal{H}^{N-1} \right) (|\Omega| + P_F(\Omega))^{p-1} .
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\liminf_{p \to 1^+} J_p(u_p) \geqslant |Du|_F(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |u| F(\nu) d\mathcal{H}^{N-1} = |Du|_F(\mathbb{R}^N) = J(u).$$

这就证明了（5.12）。

为证明（5.13），注意到由定理 4.3，存在一个序列 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$，使得对于任意 $q \in [1,\ p]$ u_k 在 $L^q(\Omega)$ 中收敛到 u，且 $||F(\nabla u_k)||_{L^1(\Omega)}$ 当 $k \to +\infty$ 时收敛到 $|Du|_F(\mathbb{R}^N)$。此外，很容易看出 $||F(\nabla u_k)||_{L^p(\Omega)}$ 收敛到 $||F(\nabla u_k)||_{L^1(\Omega)}$，因此可知存在一个子序列 $p_k \to 1^+$，当 $k \to +\infty$ 时，$||F(Du_k)||^{p_k}_{L^{p_k}(\Omega)}$ 收敛到 $|Du|_F(\mathbb{R}^N)$，当 $k \to +\infty$。这意味着 $\limsup_{k\to+\infty} J_{p_k}(u_k) \geqslant J(u)$，从而完成了（5.13）的证明。

情形 $0 \leqslant \beta < 1$。考虑一个序列 u_p，其在 u 中弱收敛于 $BV(\Omega)$，当 $p \to 1^+$ 时。由杨氏不等式 $a^p \geqslant pab - (p-1)b^{\frac{p}{p-1}}$ with$b = \frac{1}{p}$，可直接得到

$$
\begin{aligned}
J_p(u_p) &= \int_\Omega F^p(\nabla u_p)dx + \beta\int_{\partial\Omega} |u_p|^p F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1} \\
&\geqslant \int_\Omega F(\nabla u_p)dx + \beta\int_{\partial\Omega} |u_p| F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1} - \frac{p-1}{p}\left(|\Omega| + P_F(\Omega)\right),
\end{aligned}
$$

因此，应用命题 5.12，可得结论（5.2）。

为得到第二个结论，命题 2.2 保证存在一个序列$u_k \in C^\infty(\Omega)$，其在 $L^1($ 中强收敛于 $u\,\Omega)$，且 $\|F(Du_k)\|_{L^1(\Omega)}$ 在 $k \to +\infty$ 时收敛于 $|Du|_F(\Omega)$。此外，$u_k F(\nu)$ 在 $L^1(\partial$ 中收敛于 $uF(\nu)\int_{\partial\Omega}\ \mathcal{H}^{N-1})$。与前一种情形类似的论证表明，$\|F(Du_k)\|_{L^{p_k}(\Omega)}$ 收敛于 $|Du|_F(\Omega)$，且 $\int_{\partial\Omega}|u_k|^p F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1}$ 收敛于 $\int_{\partial}\Omega\,|u|F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1}$，当 $k \to +\infty$ 时。因此，序列$\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 满足 (5.13)。

情形 $-1 < \beta < 0$。考虑一个序列 $u_p \in W^{1,\ p}(\Omega)$ 弱* 收敛于u 于 $BV(\Omega)$，当 $p \to 1^+$时。

对于任意 $\delta > 0$，令 $\Omega_\delta = \{x \in \Omega :\ d_{\mathcal{E}}(x) < \delta\}$，并考虑一个光滑函数 ψ，它在 $\Omega\backslash\Omega_\delta$ 中等于零，在 $\partial\Omega$ 上等于一，且满足 $|\nabla\psi| \leqslant \frac{2}{\delta}$。

应用于函数的迹不等式（3.2） $v = (u - |u_p|^{p-1}u_p)\psi$ 可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} |u - |u_p|^{p-1}u_p| F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1} \\
&\quad\leqslant |D(u - |u_p|^{p-1}u_p)|_F(\Omega_\delta) + \left(\frac{2b}{\delta} + c\right)\int_{\Omega_\delta} |u - |u_p|^{p-1}u_p|dx \qquad (5.14)\\
&\quad\leqslant |Du|_F(\Omega_\delta) + \int_{\Omega_\delta} F(\nabla(|u_p|^{p-1}u_p))dx + \left(\frac{2b}{\delta} + c\right)\int_{\Omega_\delta} |u - |u_p|^{p-1}u_p|dx,
\end{aligned}
$$

这里我们利用了 $u - |u_p|^{p-1}u_p \in BV(\Omega)$，因此对于一组具有正测度的 δ，有 $|D(u-|u_p|^{p-1}u_p)|_F(\partial\Omega_\delta) = 0$。

利用（5.14），可得

$$\begin{aligned} J(u)-J_p(u_p) &= |Du|_F(\Omega)-\int_\Omega F^p(\nabla u_p)dx+\beta\int_{\partial\Omega}(|u|-|u_p|^{p-1}u_p)F(\nu)d\mathcal{H}^{N-1} \\ &\leqslant |Du|_F(\Omega)-\int_\Omega F^p(\nabla u_p)dx+|\beta||Du|_F(\Omega_\delta) \\ &\quad +|\beta|\int_{\Omega_\delta}F(\nabla(|u_p|^{p-1}u_p))dx+|\beta|\left(\frac{2b}{\delta}+c\right)\int_{\Omega_\delta}|u-|u_p|^{p-1}u_p|dx:=A. \end{aligned} \tag{5.15}$$

由于$\frac{1}{|\beta|}>1$，我们有

$$\begin{aligned} A &\leqslant 2|Du|_F(\Omega_\delta)+|Du|_F(\Omega\backslash\Omega_\delta)-\int_\Omega F(\nabla u_p)^p dx+\int_{\Omega\backslash\Omega_\delta}F(\nabla(|u_p|^{p-1}u_p))dx \\ &\quad +\left(\frac{K}{\delta}+c\right)\int_{\Omega_\delta}|u-|u_p|^{p-1}u_p|dx. \end{aligned} \tag{5.16}$$

由杨氏不等式可得

$$\begin{aligned} \int_\Omega F(\nabla(|u_p|^{p-1}u_p))dx &= \int_\Omega p|u_p|^{p-1}F(\nabla u_p)dx \\ &\leqslant \int_\Omega F^p(\nabla u_p)dx+(p-1)\int_\Omega |u_p|^p dx. \end{aligned} \tag{5.17}$$

此外，由（5.15）、（5.16）和（5.17），可得

$$\begin{aligned} J(u)-J_p(u_p) &\leqslant 2|Du|_F(\Omega_\delta)+|Du|_F(\Omega\backslash\Omega_\delta)-\int_{\Omega\backslash\Omega_\delta}F(\nabla(|u_p|^{p-1}u_p))dx \\ &\quad +(p-1)\int_\Omega |u_p|^p dx+\left(\frac{K}{\delta}+c\right)\int_{\Omega_\delta}|u-|u_p|^{p-1}u_p|dx. \end{aligned}$$

由于 u_p 在 $L^q(\Omega)$ 中收敛到 u，因此当 $p\to 1^+$ 时，$|u_p|^{p-1}u_p$ 在 $L^1(\Omega)$ 中收敛到 u。因此，取 $p\to 1^+$，可得

$$\limsup_{p\to 1^+}[J(u)-J_p(u_p)]\leqslant 2|Du|_F(\Omega_\delta).$$

令 $\delta\to 0^+$趋于无穷，我们得到（5.12）。

最后，不等式（5.13）可仿照前一种情况得到。 □

证明泛函 J_p 的 Γ-收敛，有助于证明特征值和特征函数的收敛，如 $p\to 1^+$ 所示。

命题 5.6。对于任意 $\beta>-1$，有

$$\lim_{p\to 1^+}\lambda_1(\Omega,p,\beta)=\Lambda(\Omega,\beta).$$

此外，(5.1) 的极小化子 $u_p\in W^{1,\,p}(\Omega)$ 在 (5.1)中，取$\|u\|_{L^p(\Omega)}=1$，弱* 收敛于 $u\in BV(\Omega)$ 的一个极小化子 (5.4) 当 $p\to 1^+$时。

证明。 定理 5.5 保证存在一个序列 w_p ，其收敛于 $\bar{u}$ （5.4）的一个固定极小化子。考虑（u_p 5.4）的极小化子序列 u_p ，我们有：

$$\limsup_{p\to 1^+} J_p(u_p) \leqslant \limsup_{p\to 1^+} J_p(w_p) \leqslant J(\bar{u}) = \Lambda(\Omega,\beta). \tag{5.18}$$

这意味着 $J_p(u_p)$ 对任意 $p>1$ 都有上界。如果 $\beta<0$，由迹不等式（3.2），可得

$$\int_\Omega F^p(\nabla u_p)dx \leqslant \Lambda(\Omega,\beta) - \beta|D(u_p^p)|_F(\Omega) - \beta c,$$

并且由（5.17）和（2.1），可得

$$(1+\beta)a^p \int_\Omega |\nabla u_p|^p dx \leqslant \Lambda(\Omega,\beta) - \beta c - \beta(p-1).$$

因此，由紧性可知，u_p 在 $BV(\Omega)$ 中有上界。如果 $\beta \geqslant 0$，则可直接由（5.18）得到。因此 u_p 弱* 收敛到 u 在 $BV(\Omega)$ 中。

最后，由（5.12）和（5.18），可得

$$\Lambda(\Omega,\beta) = J(\bar{u}) \leqslant J(u) \leqslant \liminf_{p\to 1^+} J_p(u_p) \leqslant \limsup_{p\to 1^+} J_p(u_p) \leqslant \Lambda(\Omega,\beta),$$

因此，注意到 $\lambda_1(\Omega\ p,\beta) = J_p(u_p)$ 即可得出结论。 □

5.3 等周不等式

在这里，我们研究 $\Lambda(\Omega\ \beta)$的形状优化问题。为此，我们简要回顾特征值问题 $\lambda_1(\mathcal{W}_R,\ p,\ \beta)$ 然后给出 $\Lambda(\mathcal{W}_R,\ \beta)$的显式计算。根据定理 5.1，(5.2)的一个极小化子满足以下问题：

$$\begin{cases} -\mathcal{Q}_p u = \lambda_1(\mathcal{W}_R,p,\beta)\,|u|^{p-2}\,u & \text{in } \mathcal{W}_R \\ (F(\nabla u))^{p-1}F_\xi(\nabla u)\cdot\nu + \beta F(\nu)\,|u|^{p-2}\,u = 0 & \text{on } \partial\mathcal{W}_R. \end{cases} \tag{5.19}$$

特别地，以下结果成立（罗宾参数为正值的情形参见 [9] ）。

定理 5.7. 若 $u_p \in C^{1,\ \alpha}(\mathcal{W}_R)\cap C(\overline{\mathcal{W}_R})$ 是(5.19)的一个正解，则存在一个单调函数 $\varphi_p = \varphi_p(r),\ \ r\in[0,\ \ R]$，使得 $\varphi_p \in C^\infty(0,\ \ R)\cap C^1([0,\ \ R])$，并且

$$\begin{cases} u_p(x) = \varphi_p(F^o(x)) & in\ \overline{\mathcal{W}}_R \\ \varphi_p'(0) = 0 & \\ |\varphi_p'(R)|^{p-2}\varphi_p'(R) + \beta\varphi_p(R)^{p-1} = 0. & \end{cases} \tag{5.20}$$

此外，当 $\beta>0$ 时，φ_p 递减；而当 $\beta<0$ 时，φ_p 递增。

我们首先计算 $\Lambda(\mathcal{W}_R, \beta)$。

命题 5.8。如果 $\beta > -1$，则

$$\Lambda(\mathcal{W}_R, \beta) = \hat{\beta} h_F(\mathcal{W}_R) = \hat{\beta}\frac{N}{R}, \tag{5.21}$$

其中 $\hat{\beta} = \min\{\beta, 1\}$.

证明。如果 $\beta \geqslant 0$，我们回顾

$$\Lambda(\mathcal{W}_R, \beta) = \inf_{E \subseteq \mathcal{W}_R} J(\chi_E).$$

利用定理 5.3 和等周不等式，可得

$$\begin{aligned} R(E, \beta) &= J(\chi_E) \\ &= \frac{P_F(E, \mathcal{W}_R) + \hat{\beta}\displaystyle\int_{\partial\mathcal{W}_R \cap \partial E} F(\nu_E) d\mathcal{H}^{N-1}}{|E|} \\ &\geqslant \hat{\beta}\frac{P_F(E)}{|E|} \geqslant \hat{\beta}\frac{P_F(\mathcal{W}_r)}{|\mathcal{W}_r|} \geqslant \hat{\beta}\frac{P_F(\mathcal{W}_R)}{|\mathcal{W}_R|} \\ &= \hat{\beta}\frac{N}{R}, \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{W}_r$ 是半径为 $r < R$的沃尔夫形状，且 $|\mathcal{W}_r| = |E|$。

这证明了 $\Lambda(\mathcal{W}_R, \beta) \geqslant \hat{\beta}\frac{N}{R}$。对于反向不等式，我们取 $E = \mathcal{W}_R$，因此

$$\Lambda(\mathcal{W}_R, \beta) = \ell(\mathcal{W}_R, \beta) \leqslant R(\mathcal{W}_R, \beta) = \hat{\beta}\frac{N}{R}.$$

现在，我们研究 $-1 < \beta < 0$ 的情形，并将用到 Γ-收敛。

因此，令 $u_p \in W^{1,\,p}(\mathcal{W}_R)$ 为（5.2）的极小化子。根据命题5.6，我们知道

$$\lim_{p \to 1^+} \lambda_1(\mathcal{W}_R, p, \beta) = \Lambda(\mathcal{W}_R, \beta)$$

并取 $u_p = \varphi_p$ 如（5.20）所示。因此，该极小化子在 $L^1(\mathcal{W}_R)$ 中强收敛于$u \in BV(\mathcal{W}_R)$，且在 $\mathcal{W}_R$ 上几乎处处成立，并且 $u_p \overset{*}{\rightharpoonup} u$ 在 $BV(\Omega)$ 上对 $p \to 1^+$成立。此外，u_p 是径向递增的，因此 u是非递减的，这意味着其上水平集 $\{u > t\}$ 是同心的沃尔夫形状 $\{r < F^o(x) < R\}$，并且根据定理 5.3，有

$$\Lambda(\mathcal{W}_R, \beta) = \frac{N}{R}\frac{(\frac{r}{R})^{N-1} + \beta}{1 - (\frac{r}{R})^{N-1}}$$

对于某些 $r \in [0, R[$。因此，通过极小化函数

$$f(t) = \frac{t^{N-1} + \beta}{1 - t^N} \qquad t \in [0, 1[,$$

我们观察到，最小值在 $t = 0$ 处取得。因此，结论得证。 □

最后，我们证明在满足体积约束时， $\Lambda(\Omega\ \beta)$ 的一个等周不等式：若 $\beta \geqslant 0$，则沃尔夫形状是一个极小化子；若 $\beta < 0$，则它是 $\Lambda(\Omega\ \beta)$ 的一个极大化子。

命题5.9。若 $\beta \geqslant 0$ 和 $\mathcal{W}_R$ 是半径为 R 的沃尔夫形状，且 $|\mathcal{W}_R| = |\Omega|$，则

$$\Lambda(\mathcal{W}_R, \beta) \leqslant \Lambda(\Omega, \beta).$$

若 $-1 < \beta < 0$，则

$$\Lambda(\mathcal{W}_R, \beta) \geqslant \Lambda(\Omega, \beta).$$

*Pro*的。 若 $\beta \geqslant 0$，通过使用命题 5.8的相同论证，我们有 n

$$R(E, \beta) = J(\chi_E) \geqslant \hat{\beta}\frac{P_F(\mathcal{W}_R)}{|\mathcal{W}_R|} = \hat{\beta}\frac{N}{R} = \Lambda(\mathcal{W}_R, \beta),$$

对任意 $E \subseteq\Omega$。通过在集合 $E \subseteq\Omega$ 上取下确界，并利用定理 5.3，即可得出结论。

If $-1 < \beta < 0$，然后利用等周不等式 [14] 和（5.21），我们有

$$\Lambda(\Omega, \beta) \leqslant \beta\frac{P_F(\Omega)}{|\Omega|} \leqslant \beta\frac{P_F(\mathcal{W}_R)}{|\mathcal{W}_R|} = \Lambda(\mathcal{W}_R, \beta).$$

□

致谢

本研究部分得到了 MIUR-PRIN 2017 项目“非线性偏微分方程的定性与定量方面”、INdAM 的 GNAMPA，以及 FRA 项目（圣保罗基金会和那不勒斯费德里科二世大学）000022--ALTRI_CDA_75_2021_FRA_PASSARELLI 的资助。

参考文献

[1] A. Alvino、V. Ferone、G. Trombetti 和 P.-L. Lions。凸对称化及其应用。《亨利·庞加莱研究所年刊 ´C 分析与非线性 ´》，14(2)：275–293，1997。7[2] M. Amar 和 G. Bellettini。一种依赖于具有不连续系数的度量的全变差概念。载于《亨利·庞加莱研究所年刊 ´C，非线性分析 ´》，第 11 卷，第 91–133 页。Elsevier，1994。17[3] L. Ambrosio、N. Fusco 和 D. Pallara。有界变差函数与自由间断问题。牛津数学专著。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2000。13[4] G. Anzellotti 和 M. Giaquinta。函数 BV 与迹。帕多瓦大学数学研讨会报告 `，60：1–21，1978。3，7，8

[5] M. Bareket。关于边值问题第一特征值的一个等周不等式。《SIAM 数学分析杂志》，8(2)：280–287，1977。3[6] V. Caselles、G. Facciolo 和 E. Meinhardt。各向异性 Cheeger 集及其应用。《SIAM 影像科学杂志》，2(4)：1211–1254，2009。7, 15[7] G. Crasta 和 A. Malusa。闵可夫斯基空间中的边界距离函数。《美国数学会会刊》，359(12)：5725–5759，2007。5, 6, 7, 10[8] G. De Philippis 和 F. Maggi。各向异性毛细问题中自由边界的正则性及杨氏定律的成立。《理性力学与分析档案》，216(2)：473–568，2015年。4[9] F. Della Pietra 和 N. Gavitone。具有罗宾边界条件的各向异性特征值问题的法贝尔–克拉恩不等式。《势分析》，41(4)：1147–1166，2014年。3, 14, 22[10] F. Della Pietra、C. Nitsch、F. Oliva 和 C. Trombetti。关于 p 趋于 1 时具有罗宾边界条件的 p-拉普拉斯算子第一特征值的变化。《变分法进展》，2022年。15[11]F. Della Pietra、F. Oliva 和 S. Segura de Leon。 p 趋于 1 时具有罗宾边界条件的 p-拉普拉斯方程解的行为。arXiv 预印本 arXiv:2204.01814，2022年。19[12] F. Della Pietra 和 G. Piscitelli。非线性椭圆算子的第一罗宾特征值的尖锐估计。arXiv 预印本 arXiv:2204.01814，2022年。14[13] V. Ferone、C. Nitsch 和 C. Trombetti。关于 Steklov 型拉普拉斯特征值的一个猜想反向法贝尔–克拉恩不等式。《纯粹与应用分析通讯》，14(1)：63，2015年。3[14] I. Fonseca 和 S. M¨uller。沃尔夫定理的唯一性证明。《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑：数学》，119(1-2)：125–136，1991。7, 24[15] P. Freitas 和 D. Krejˇciˇr´ık。具有负边界参数的第一罗宾特征值。《数学进展》，280：322–339，2015年。3[16] C. Gerhardt。毛细曲面的存在性与正则性。《意大利数学联合会通报》(4)，10：317–335，1974。3, 4[17] E. Giusti。液滴的平衡构型。《纯粹与应用数学杂志》，329：53–63，1981。3, 4[18]E. Giusti。极小曲面与有界变差函数，第 80 卷。施普林格，1984年。7, 12

[19] H. Kovaˇr´ık 和 K. Pankrashkin. 关于带罗宾边界条件的 p-拉普拉斯算子及边界迹定理. 变分法与偏微分方程, 2(56):1–29, 2017年. 3[20] S. Littig 和 F. Schuricht. 当 p 趋于 1 时， p-拉普拉斯算子特征值的收敛性. Calc. Var. Partial Differential Equations, 49(1-2):707–727, 2014年. 4, 11, 13[21] L. Modica. 带边界接触能的相变梯度理论. Annales de l'Institut Henri Poincar ´e C, Analyse non lin ´eaire, 4(5):487–512, 1987年. 16[22] C. B. Morrey Jr. 变分法中的重积分. 数学经典. 施普林格出版社, 柏林， 2008年. 1966年版重印 [MR0202511]. 14[23] G. Paoli 和 L. Trani. 负边界参数下芬斯勒拉普拉斯算子第一罗宾特征值的两个估计. 优化理论与应用杂志, 181(3):743–757, 2019年. 3[24] T. Schmidt. 有限周长集与有界变差函数的严格内部逼近. 美国数学会会刊, 143(5):2069–2084, 2015年. 4[25] G. Wang 和 C. Xia. 芬斯勒流形上第一特征值的一个锐下界. Annales de l'IHP Analyse non lin ´eaire, 30(6):983–996, 2013年. 6