arXiv:2301.01550v1 [math.GM] 4 Jan 2023

一阶和二阶微分方程的对数积分法

A. Ponomarenko

本文介绍了求解一阶和二阶常微分方程的对数方法。该方法的实质是应用导数和对数的基本性质，以减少方程中的项数。本文仅针对一阶和二阶方程进行讨论。类似的方法也可用于求解高阶方程。

关键词：微分方程、黎曼可积函数、对数方法。

求解常微分方程的主要方法早已得到研究，并为人们所熟知。在 [1], [2], [3] 中介绍了积分简单常微分方程（ODE）的基本方法，并重点讨论了具有实系数的常微分方程的实解。其中描述了具有常系数的齐次线性方程。在 [1] 中指出，具有常系数的非齐次线性方程的通解，是互补函数（相应齐次方程的通解）与特解之和。本文讨论了一种使用最简单初等运算求解常微分方程的新方法。计算过程可能较为繁琐，但不会遗漏微分方程的特解。

设 $f(x)$、 $g(x)$ 为黎曼可积函数； $y = y(x)$、 $y'(x) = \frac{dy}{(x)\ dx}$, $y''(x) = \frac{d^2y}{(x)\ dx^2}$, $\log y = \underline{\ln}\ y = \log_e y$； $C, C_1, C_2, C_{1,1}, \dots, C_{1,7}, C_{2,1}, C_{2,2}$ 是一个积分常数。符号 $\Rightarrow$ 表示后一个公式由前一个公式推出。

1 一阶微分方程

1.1. 一阶线性非齐次微分方程：

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x). \tag{1}$$

对数积分法。在方程 (1) 中，函数 $g(x)$ 不恒为零。那么 $y(x)$ 不恒为零。由方程 (1) 可得

$$\frac{y'(x)}{y(x)} + f(x) = \frac{g(x)}{y(x)}, \quad \Rightarrow$$

$$(\log|y(x)|)' + f(x) = \frac{g(x)}{y(x)}, \quad \Rightarrow$$

$$(\log|y(x)|)' + \left(\int f(x)dx\right)' = \frac{g(x)}{y(x)}, \quad \Rightarrow \tag{2}$$

$$(\log|y(x)|)' + \left(\log e^{\int f(x)dx}\right)' = \frac{g(x)}{y(x)}, \quad \Rightarrow$$

$$\left(\log|y(x)| + \log e^{\int f(x)dx}\right)' = \frac{g(x)}{y(x)}, \quad \Rightarrow$$

$$\left(\log\left(|y(x)|e^{\int f(x)dx}\right)\right)' = \frac{g(x)}{y(x)}, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\left(y(x)e^{\int f(x)dx}\right)'}{y(x)e^{\int f(x)dx}} = \frac{g(x)}{y(x)}, \quad \Rightarrow$$

$$\left(y(x)e^{\int f(x)dx}\right)' = g(x)e^{\int f(x)dx}, \quad \Rightarrow$$

$$y(x)e^{\int f(x)dx} = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C, \quad \Rightarrow$$

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C\right). \tag{3}$$

注记 1.1。 1. 类似的方法可用于求解柯西形式的方程 (1) :

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt}\left(\int_{x_0}^{x} g(\tau)e^{\int_{x_0}^{\tau} f(\sigma)d\sigma}d\tau + y(x_0)\right), \tag{4}$$

其中 x_0 是一个给定常数。事实上，方程 (2) 等价于方程

$$(\log|y(x)|)' + \left(\int f(x)dx + C_1\right)' = \frac{g(x)}{y(x)}, \tag{5}$$

其中 C_1 是一个积分常数。设 $C_1 = -F(x_0)$，其中 $F(x)$ 是一个具有性质 $F'(x) = f(x)$ 的函数。那么，方程 (5) 可以表示为

$$(\log|y(x)|)' + \left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right)' = \frac{g(x)}{y(x)}, \quad \Rightarrow$$

$$(\log|y(x)|)' + \left(\log e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}\right)' = \frac{g(x)}{y(x)}, \quad \Rightarrow$$

$$\left(\log|y(x)| + \log e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}\right)' = \frac{g(x)}{y(x)}, \quad \Rightarrow$$

$$\left(\log\left(|y(x)|e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}\right)\right)' = \frac{g(x)}{y(x)}, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\left(y(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}\right)'}{y(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}} = \frac{g(x)}{y(x)}, \quad \Rightarrow$$

$$\left(y(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}\right)' = g(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(\sigma)d\sigma}, \quad \Rightarrow$$

$$y(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt} = \int_{x_0}^{x} g(\tau)e^{\int_{x_0}^{\tau} f(\sigma)d\sigma}d\tau + C, \quad \Rightarrow$$

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt}\left(\int_{x_0}^{x} g(\tau)e^{\int_{x_0}^{\tau} f(\sigma)d\sigma}d\tau + C\right). \tag{6}$$

如果在方程 (6) 中令 $C = y(x_0)$，则可得公式 (4)。

1.2. 伯努利微分方程:

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}, \tag{7}$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$。

对数积分法。设 y 不恒等于零。由方程（7）可得

$$\frac{y'}{y} + f(x) = \frac{g(x)}{y}y^{\alpha}, \quad \Rightarrow$$

$$(\log|y|)' + f(x) = \frac{g(x)}{y}y^{\alpha}, \quad \Rightarrow$$

$$(\log|y|)' + \left(\int f(x)dx\right)' = \frac{g(x)}{y}y^{\alpha}, \quad \Rightarrow$$

$$(\log|y|)' + \left(\log e^{\int f(x)dx}\right)' = \frac{g(x)}{y}y^{\alpha}, \quad \Rightarrow$$

$$\left(\log|y| + \log e^{\int f(x)dx}\right)' = \frac{g(x)}{y}y^{\alpha}, \quad \Rightarrow$$

$$\left(\log\left(|y|e^{\int f(x)dx}\right)\right)' = \frac{g(x)}{y}y^{\alpha}, \quad \Rightarrow \tag{8}$$

$$\frac{\left(ye^{\int f(x)dx}\right)'}{ye^{\int f(x)dx}} = \frac{g(x)}{y}y^{\alpha}, \quad \Rightarrow$$

$$\left(ye^{\int f(x)dx}\right)' = g(x)e^{\int f(x)dx}y^{\alpha}, \quad \Rightarrow$$

$$\left(ye^{\int f(x)dx}\right)' = g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}y^{\alpha}e^{\alpha\int f(x)dx}, \quad \Rightarrow$$

$$\left(ye^{\int f(x)dx}\right)' = g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}\left(ye^{\int f(x)dx}\right)^{\alpha}, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\left(ye^{\int f(x)dx}\right)'}{\left(ye^{\int f(x)dx}\right)^{\alpha}} = g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}, \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{1-\alpha}\left(ye^{\int f(x)dx}\right)^{1-\alpha}\right)' = g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\left(ye^{\int f(x)dx}\right)^{1-\alpha}\right)' = g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}, \quad \Rightarrow$$

$$\left(\left(ye^{\int f(x)dx}\right)^{1-\alpha}\right)' = (1-\alpha)\,g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}, \quad \Rightarrow \tag{9}$$

$$\left(ye^{\int f(x)dx}\right)^{1-\alpha} = (1-\alpha)\int g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}dx + C, \quad \Rightarrow$$

$$ye^{\int f(x)dx} = \left((1-\alpha)\int g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}dx + C\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \Rightarrow$$

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left((1-\alpha)\int g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}dx + C\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{10}$$

注 1.2.1. 在该方法的推导开头，我们假设 y 不恒等于零。由此可知，若 $\alpha \in$ (0,1)，则方程（7）有一个特解 $y = 0$。

注 1.2.2。（对数法的第二种形式。）在方程（7）中，我们得到

$$\begin{gathered}
\frac{y'}{y} + f(x) = \frac{g(x)}{y}y^{\alpha}, \quad \Rightarrow \\
(\log|y|)' + f(x) = g(x)y^{\alpha-1}, \quad \Rightarrow \\
(1-\alpha)(\log|y|)' + (1-\alpha)f(x) = (1-\alpha)g(x)y^{\alpha-1}, \quad \Rightarrow \\
((1-\alpha)\log|y|)' + (1-\alpha)f(x) = (1-\alpha)g(x)y^{\alpha-1}, \quad \Rightarrow \\
(\log|y|^{1-\alpha})' + (1-\alpha)f(x) = (1-\alpha)g(x)y^{\alpha-1}, \quad \Rightarrow \\
\frac{\left(y^{1-\alpha}\right)'}{y^{1-\alpha}} + (1-\alpha)f(x) = (1-\alpha)g(x)y^{\alpha-1}, \quad \Rightarrow \\
\left(y^{1-\alpha}\right)' + (1-\alpha)f(x)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)g(x)y^{\alpha-1}y^{1-\alpha}, \quad \Rightarrow
\end{gathered}$$

$$\left(y^{1-\alpha}\right)' + (1-\alpha)f(x)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)g(x). \tag{11}$$

方程（11）是关于函数 $y^{1-\alpha}$ 的一阶线性非齐次微分方程。利用公式（3）求得的解为

$$y^{1-\alpha} = e^{-(1-\alpha)\int f(x)dx}\left((1-\alpha)\int g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}dx + C\right). \tag{12}$$

公式（12）推出解（10）。

注 1.2. 3.（对数法的第三种形式。）在方程（8）中，我们得到

$$\begin{gathered}
(1-\alpha)\left(\log\left(|y|e^{\int f(x)dx}\right)\right)' = (1-\alpha)g(x)y^{\alpha-1}, \quad \Rightarrow \\
\left((1-\alpha)\log\left(|y|e^{\int f(x)dx}\right)\right)' = (1-\alpha)g(x)y^{\alpha-1}, \quad \Rightarrow \\
\left(\log\left(|y|e^{\int f(x)dx}\right)^{1-\alpha}\right)' = (1-\alpha)g(x)y^{\alpha-1}, \quad \Rightarrow \\
\frac{\left(\left(ye^{\int f(x)dx}\right)^{1-\alpha}\right)'}{\left(ye^{\int f(x)dx}\right)^{1-\alpha}} = (1-\alpha)g(x)y^{\alpha-1}, \quad \Rightarrow
\end{gathered}$$

$$\left(\left(ye^{\int f(x)dx}\right)^{1-\alpha}\right)' = (1-\alpha)g(x)y^{\alpha-1}\left(ye^{\int f(x)dx}\right)^{1-\alpha} = (1-\alpha)g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}. \tag{13}$$

方程（13）与方程（9）类似。

1.3. 形式为.....的方程:

$$y' + f(x)e^{\beta y} = g(x), \tag{14}$$

其中 $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$。

对数积分法。在方程（14）中，我们得到

$$(\log(e^y))' + f(x)e^{\beta y} = g(x), \Rightarrow$$

$$-\beta(\log(e^y))' - \beta f(x)e^{\beta y} = -\beta g(x), \Rightarrow$$

$$(-\beta\log(e^y))' - \beta f(x)e^{\beta y} = -\beta g(x), \Rightarrow$$

$$\left(\log\left(e^{-\beta y}\right)\right)' - \beta f(x)e^{\beta y} = -\beta g(x), \Rightarrow$$

$$\frac{\left(e^{-\beta y}\right)'}{e^{-\beta y}} - \beta f(x)e^{\beta y} = -\beta g(x), \Rightarrow$$

$$\left(e^{-\beta y}\right)' - \beta f(x)e^{\beta y}e^{-\beta y} = -\beta g(x)e^{-\beta y}, \Rightarrow$$

$$\left(e^{-\beta y}\right)' - \beta f(x) = -\beta g(x)e^{-\beta y}, \Rightarrow$$

$$\left(e^{-\beta y}\right)' + \beta g(x)e^{-\beta y} = \beta f(x). \tag{15}$$

方程（15）是关于函数 $e^{-\beta y}$ 的一阶线性非齐次微分方程。根据公式（3），其解的形式为

$$e^{-\beta y} = e^{-\beta\int g(x)dx}\left(\beta\int f(x)e^{\beta\int g(x)dx}dx + C\right). \tag{16}$$

求解方程（16），关于 y，我们得到

$$y = -\frac{1}{\beta}\log\left(e^{-\beta\int g(x)dx}\left(\beta\int f(x)e^{\beta\int g(x)dx}dx + C\right)\right), \Rightarrow$$

$$y = \int g(x)dx - \frac{1}{\beta}\log\left(\beta\int f(x)e^{\beta\int g(x)dx}dx + C\right). \tag{17}$$

2 二阶微分方程

2.1. 线性齐次二阶微分方程:

$$y'' + by' + cy = 0, \tag{18}$$

其中 $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$。

设 y 不恒等于零。由方程 (18) 可得

$$\frac{y''}{y} + b\frac{y'}{y} + c = 0, \quad \Rightarrow$$

$$(\log|y|)'' + ((\log|y|)')^2 + b(\log|y|)' + c = 0, \tag{19}$$

因为 $\frac{y'}{y} = (\log\ |y|)', (\log\ |y|)'' = \left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \frac{y''}{y} - ((\log\ |y|)')^2, \Rightarrow \frac{y''}{y} = (\log\ |y|)'' + ((\log|y|)')^2$. 代入方程（19）：

$$(\log|y|)' = z.$$

于是得到如下形式的方程（19）

$$z' + z^2 + bz + c = 0, \quad \Rightarrow \tag{20}$$

$$\frac{z'}{z^2 + bz + c} = -1. \tag{21}$$

情形 1. $b^2 - 4c > 0$。在这种情况下，方程（21）的形式为

$$\frac{z'}{\left(z + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(b^2 - 4c)} = -1, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{z'}{\left(z + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}\right)^2} = -1, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}} \log\left|\frac{z + \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}}{z + \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}}\right| = -x + C_{1,1}. \tag{22}$$

在方程（22）中令：$z + \frac{b}{2} = \xi, \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c} = \gamma$。于是得到

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 - 4c}} \log\left|\frac{\xi - \gamma}{\xi + \gamma}\right| = -x + C_{1,1}, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\xi - \gamma}{\xi + \gamma} = C_{1,2} e^{-\sqrt{b^2 - 4c}x}, \quad C_{1,2} = e^{C_{1,1}}, \quad \Rightarrow$$

$$1 - \frac{2\gamma}{\xi + \gamma} = C_{1,2} e^{-\sqrt{b^2 - 4c}x}, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\xi + \gamma} = \frac{1}{2\gamma} + C_{1,3} e^{-\sqrt{b^2 - 4c}x}, \quad C_{1,3} = -\frac{1}{2\gamma} C_{1,2}, \quad \Rightarrow$$

$$\xi + \gamma = \frac{1}{\frac{1}{2\gamma} + C_{1,3} e^{-\sqrt{b^2 - 4c}x}}. \tag{23}$$

回到 th　　在方程（23）中进行变量代换 $z + \frac{b}{2} = \xi, \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c} = \gamma$，得到

$$z + \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{b^2 - 4c}} + C_{1,3} e^{-\sqrt{b^2 - 4c}x}}, \quad \Rightarrow$$

$$z = -\left(\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}\right) + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{b^2 - 4c}} + C_{1,3} e^{-\sqrt{b^2 - 4c}x}}, \quad \Rightarrow$$

$$z=-\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4c}}{1+C_{1,4}e^{-\sqrt{b^2-4c}x}},\quad C_{1,4}=\sqrt{b^2-4c}C_{1,3},\quad \Rightarrow$$

$$z=-\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}\right)+\frac{e^{\sqrt{b^2-4c}x}\sqrt{b^2-4c}}{e^{\sqrt{b^2-4c}x}+C_{1,4}}. \tag{24}$$

因为 $z=(\log|y|)'$，所以由方程（24）可得

$$(\log|y|)'=-\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}\right)+\frac{e^{\sqrt{b^2-4c}x}\sqrt{b^2-4c}}{e^{\sqrt{b^2-4c}x}+C_{1,4}},\quad \Rightarrow$$

$$\log|y|=\int\frac{e^{\sqrt{b^2-4c}x}\sqrt{b^2-4c}}{e^{\sqrt{b^2-4c}x}+C_{1,4}}dx-\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}\right)x+\log|C_{2,1}|=$$

$$=\log\left|e^{\sqrt{b^2-4c}x}+C_{1,4}\right|-\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}\right)x+\log|C_{2,1}|,\quad \Rightarrow$$

$$y=\left(e^{\sqrt{b^2-4c}x}+C_{1,4}\right)e^{-\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}\right)x}C_{2,1},\quad \Rightarrow$$

$$y=C_1e^{\left(-\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}\right)x}+C_2e^{\left(-\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}\right)x}, \tag{25}$$

其中 $C_1=C_{2,\ 1}C_{1,\ 4}$，$C_2=C_{2,\ 1}$ 是一个积分常数。

情况 2。 $b^2-4c=0$。在这种情况下，方程（21）的形式为

$$\frac{z'}{\left(z+\frac{b}{2}\right)^2}=-1.$$

逐步对上一个方程进行运算，我们得到

$$\left(-\frac{1}{z+\frac{b}{2}}\right)'=-1,\quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{z+\frac{b}{2}}=x+C_{1,5},\quad \Rightarrow$$

$$z+\frac{b}{2}=\frac{1}{x+C_{1,5}},\quad \Rightarrow$$

$$z=-\frac{b}{2}+\frac{1}{x+C_{1,5}}. \tag{26}$$

因为 $z=(\log|y|)'$，所以在方程 (26) 中有

$$(\log|y|)'=-\frac{b}{2}+\frac{1}{x+C_{1,5}},\quad \Rightarrow$$

$$\log|y|=-\frac{b}{2}x+\log|x+C_{1,5}|+\log|C_2|,\quad \Rightarrow$$

$$y=e^{-\frac{b}{2}x}(x+C_{1,5})C_2=C_1e^{-\frac{b}{2}x}+C_2xe^{-\frac{b}{2}x}, \tag{27}$$

其中 $C_1 = C_{1,5}C_2$ 是一个积分常数。

情形 3. $b^2 - 4c < 0$。在这种情形下，方程（21）的形式为

$$\frac{z'}{\left(z+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(4c-b^2)} = -1, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{z'}{\left(z+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}\right)^2} = -1, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{z+\frac{b}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}} = -x + C_{1,6} \quad \Rightarrow$$

$$\arctan \frac{z+\frac{b}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}x + C_{1,7}, \quad C_{1,7} = C_{1,6}\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{z+\frac{b}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}} = \tan\left(-\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}x + C_{1,7}\right), \quad \Rightarrow$$

$$z = -\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}\tan\left(-\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}x + C_{1,7}\right). \tag{28}$$

由于 $z = (\log|y|)'$，因此在方程（28）中有

$$(\log|y|)' = -\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}\tan\left(-\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}x + C_{1,7}\right), \quad \Rightarrow$$

$$\log|y| = -\frac{b}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}\int \tan\left(-\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}x + C_{1,7}\right)dx + \log|C_{2,2}| =$$

$$= -\frac{b}{2}x + \log\left|\cos\left(-\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}x + C_{1,7}\right)\right| + \log|C_{2,2}|, \quad \Rightarrow$$

$$y = e^{-\frac{b}{2}x}\cos\left(-\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}x + C_{1,7}\right)C_{2,2} =$$

$$= C_{2,2}e^{-\frac{b}{2}x}\left(\cos\left(-\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}x\right)\cos(C_{1,7}) - \sin\left(-\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}x\right)\sin(C_{1,7})\right) =$$

$$= e^{-\frac{b}{2}x}\left(C_1\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}x\right) + C_2\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}x\right)\right), \tag{29}$$

其中 $C_1 = C_{2,2}\cos(C_{1,7})$，$C_2 = C_{2,2}\sin(C_{1,7})$ 是一个积分常数。

公式（25）、（27）、（29）分别在情形 1、2、3 下解方程（18）。

结论。第 2 章中的这种方法，无须运用复分析，也无须将解表示为 $y = \psi(x)e^{\zeta x}$ 的形式，即可求得这些解。此外，我们在第 1 章中还求出了多种一阶微分方程的精确解。

参考文献

[1] C. H. Edwards、D. E. Penny、D. Calvis：《微分方程与边值问题》，第五版，（2014）—797 页。[2] C. H. Edwards、D. E. Penny、D. Calvis：《初等微分方程》—632 页。[3] Charles Roberts, Jr.：《初等微分方程》，第二版，Chapman and Hall 出版，2016 年，380 页。