国际十进分类法
517.956.35

院士 Viktor I. Korzyuk[1,2], Jan V. Rudzko[1]

[1]白俄罗斯国家科学院数学研究所，明斯克，白俄罗斯[2]白俄罗斯国立大学，明斯克，白俄罗斯

具有不连续初始条件的拟线性波动方程初值问题的经典解

摘要：对于上半平面内给定的一维温和拟线性波动方程，我们研究其柯西问题。初始条件在一点处存在第一类间断。我们利用特征线法，以某些积分微分方程的隐式解析形式构造解。研究了这些方程的可解性及其解的光滑性。对于所讨论的问题，我们证明了解的唯一性，并确定了经典解存在的条件。

关键词：非线性波动方程，柯西问题，特征线法，经典解，不连续初始条件。

引言。不连续初始条件下的偏微分方程在各种应用中十分常见，例如介质中激波的传播 [1]。我们通常用具有不连续条件的柯西问题来描述这一现象。这会给解的定义和解释带来困难 [2]。

我们经常采用函数方法求解这类问题，例如傅里叶变换和拉普拉斯变换。然而，这些方法通常无法涵盖所有给定柯西条件的可能情形[3]，因为反积分变换通常收敛于左、右极限的平均值[4]。因此，人们发展了各种方法来求解这类问题，例如围道积分法[5]。尽管这种方法有许多缺点，其中一些也存在于傅里叶方法中[6], ，例如对函数光滑性和函数匹配提出了更高要求，即函数必须满足一些额外的匹配条件和光滑性条件，但它使我们得以考察一个较大的

有关动力冲击理论中的问题数量，参见 [7–10] 及其中引用的文献。此外，我们还要指出经典的达朗贝尔法（特征线法），其效力不及泛函方法。但我们可以用它定性描述冲击现象 [11；12], 求解某些边值问题 [13；14] 动力冲击理论中的问题，而且它使我们无需区分仅在一个勒贝格零测集上不同的函数。

本文是我们关于温和拟线性波动方程的柯西问题[15] 以及具有不连续初始条件和边界条件的混合问题[13; 14; 16; 17]研究的延续。本文研究上半平面内给定的一维温和拟线性波动方程的柯西问题。该问题的初始条件在实轴上的一点处存在第一类间断。我们采用特征线法求解该问题。我们以隐式解析形式构造满足附加匹配条件的分段光滑解，该解是某些积分微分方程的解。我们研究这些方程的可解性及其解的光滑性。我们证明，在初始数据满足一定光滑性条件时，柯西问题的解存在且唯一。本文提出了一种构造具有不连续初始条件的解的方法。

问题陈述。在区域 两个独立变量，考虑一维非线性方程 $\mathbb{R}$

$$\square u(t,x)+f(t,x,u(t,x),\partial_t u(t,x),\partial_x u(t,x))=F(t,x),\ (t,x)\in Q, \tag{1}$$

其中 是达朗贝尔算子 (为确定起见), F是在集合 给定的函数，且 f是在集合 上给定的函数。

方程 (1) 配有初始条件

$$u(0,x)=\varphi(x),\ \partial_t u(0,x)=\psi(x),\ x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

其中，φ 和 ψ 是定义在实轴上的某些实值函数。

这些函数 和 是分段光滑函数，其定义公式为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), & x\in(-\infty,x_0),\\ A, & x=x_0,\\ \varphi_2(x) & x\in(x_0,+\infty),\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}\psi_1(x), & x\in(-\infty,x_0),\\ \psi_2(x), & x\in(x_0,+\infty),\end{cases}$$

其中 x_0 和 为任意实数， 而 是定义在集合 上的函数， 且是定义在集合 上的函数。

对于足够光滑的数据，即 ， ， ， 以及，我们在文章 [15] 中研究了问题 (1), (2)。

对于线性波动方程，即 ，问题 (1), (2) 已在文献 [16] 和[13; 14; 17] 中分别在 和 的情形下进行了研究。

遵循 [18], ，我们探讨两个主要问题：1）初值问题 (1), (2) 的准确表述；2）解的光滑性。第一个问题源于在条件 或 下，问题不存在经典解。

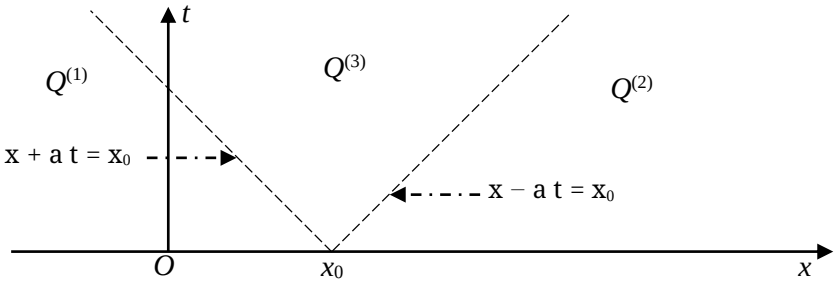
构造柯西问题的解。我们用特征线Q将区域 和 划分为三个子区域

$$Q_1=\{(t,x)|\ (t,x)\in Q\wedge x+at<x_0\},$$
$$Q_2=\{(t,x)|\ (t,x)\in Q\wedge x-at>x_0\},$$
$$Q_3=\{(t,x)|\ (t,x)\in Q\wedge x+at>x_0\wedge x-at<x_0\}.$$

在区域 Q的闭包 上，我们定义函数 u，使其与偏微分方程 (1) 的解$u^{(j)}$ 重合

$$u(t,x)=u^{(j)}(t,x),\quad (t,x)\in Q_*^{(j)}, \tag{3}$$

在区域，其中 且。



图：区域 Q 划分为三个子区域。

由于初始条件不连续，问题 (1)、(2) 在集合 上不存在经典解。不过，我们可以在更小的集合 上定义一个经典解 使其属于类 ，并满足方程 (1) 、初始条件 (2)，以及在集合 上的附加匹配条件。

定义 1. 函数 u 称为问题（1）、（2）的经典解，若满足以下条件：1）函数 $u^{(j)}$ 属于类 对每个； 2）函数 $u^{(j)}$ 在区域 对每个 满足方程（1）； 3）初始条件 在整个实轴上成立；4）初始条件 在整个实轴上成立，但在点 除外；5）古尔萨条件

$$u^{(3)}(t,x=x_0-at)=u^{(1)}(t,x_0-at)+A-\varphi_1(x_0),\quad t\geqslant 0,$$
$$u^{(3)}(t,x=x_0+at)=u^{(2)}(t,x_0+at)+A-\varphi_2(x_0),\quad t\geqslant 0, \tag{4}$$

成立。

事实证明，按照定义 1 的含义，求解问题 (1)、(2) 的经典解等价于求解以下问题。

带有特征线匹配条件的问题 (1)、(2)。求方程 (1) 的经典解，并满足柯西条件 (2) 和匹配条件

$$[(u)^+-(u)^-](t,x=x_0-at)=A-\varphi_1(x_0),\ [(u)^+-(u)^-](t,x=x_0+at)=\varphi_2(x_0)-A,\ \ t\geqslant 0.$$

这里 我们用()来表示函数 及其偏导数在特征线的不同侧计算所得的极限值；也就是说，。

函数 $u^{(1)}$ 和 $u^{(2)}$ 由以下柯西问题确定

$$\begin{cases}\Box u^{(j)}(t,x)+f(t,x,u^{(j)}(t,x),\partial_t u^{(j)}(t,x),\partial_x u^{(j)}(t,x))=F(t,x),\ (t,x)\in Q^{(j)},\\ u^{(j)}(0,x)=\varphi_j(x),\ \partial_t u^{(j)}(0,x)=\psi_j(x),\ (-1)^j x\geqslant(-1)^j x_0,\end{cases} \tag{5}$$

对每个，并且在某些条件下具有以下表示式

$$u^{(j)}(t,x)=\frac{\varphi_j(x-at)+\varphi_j(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi_j(\xi)d\xi+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\left(F(\tau,\xi)-f(\tau,\xi,u^{(j)}(\tau,\xi),\partial_t u^{(j)}(\tau,\xi),\partial_x u^{(j)}(\tau,\xi))\right)d\xi,\ (t,x)\in\overline{Q_*^{(j)}}. \tag{6}$$

引理1。设条件、、和均成立，且函数 关于最后三个变量满足常数为 L 的 Lipschitz 条件，即。则对每个，柯西问题（5）在由公式（6）确定的类 中有唯一解。

$$\left|f(t,x,z_1,z_2,z_3)-f(t,x,w_1,w_2,w_3)\right|\leq L\left(|z_1-w_1|+|z_2-w_2|+|z_3-w_3|\right)$$

证明。参见 [15]。

现在，函数 $u^{(3)}$ 由以下古萨问题确定

$$\begin{cases}\Box u^{(3)}(t,x)+f(t,x,u^{(3)}(t,x),\partial_t u^{(3)}(t,x),\partial_x u^{(3)}(t,x))=F(t,x),\ (t,x)\in Q^{(3)},\\ u^{(3)}(t,x=x_0-at)=u^{(1)}(t,x_0-at)+A-\varphi_1(x_0),\ t\geqslant 0,\\ u^{(3)}(t,x=x_0+at)=u^{(2)}(t,x_0+at)+A-\varphi_2(x_0),\ t\geqslant 0.\end{cases} \tag{7}$$

引理 2。 设条件 、、以及均成立，并设函数 关于最后三个变量满足常数为 L 的 Lipschitz 条件，即 。那么，古萨问题 (7) 在类 中有唯一解。

证明。根据引理1，条件，，，以及蕴含二阶连续可微函数$u^{(1)}$和$u^{(2)}$的存在性与唯一性。这意味着映射 和也二阶连续可微，并且在点处重合，即。现在，我们利用文献[19] 中的结果，最终证明该引理。

$t=0$

我们推导函数 $u^{(3)}$的积分微分方程。选取定义域中的四个点，，，，应用曲线平行四边形恒等式 [20]，得到 x 在 x 处 x 在 x 处 B a，C t x，在 x x D a

$$u^{(3)}(t,x)=u^{(1)}\left(\frac{x_0+at-x}{2a},\frac{x_0-at+x}{2}\right)+A-\varphi_1(x_0)-\varphi_2(x_0)+u^{(2)}\left(\frac{at+x-x_0}{2a},\frac{at+x+x_0}{2}\right)-$$
$$-\frac{1}{4a^2}\int_{x^*}^{x-at}dy\int_{x^*}^{x+at}\left(F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2a}\right)-f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2a},u^{(3)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2a}\right),\right.\right.$$
$$\left.\left.\partial_t u^{(3)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2a}\right),\partial_x u^{(3)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2a}\right)\right)\right)dz,\ (t,x)\in Q_*^{(3)}. \quad (8)$$

我们将结果表述为以下命题。

定理 1。设条件，，以及成立，并设函数 f 关于最后三个变量满足常数为 L 的 Lipschitz 条件，即 该初值问题 (1)、(2) 在定义 1 的意义下有唯一的经典解。此解由公式 (3)、(6) 和 (8) 确定。

$$\left|f(t,x,z_1,z_2,z_3)-f(t,x,w_1,w_2,w_3)\right|\le L\left(\left|z_1-w_1\right|+\left|z_2-w_2\right|+\left|z_3-w_3\right|\right)$$

柯西问题解的分析。考虑到函数 $u^{(j)}$ 对每个 ,二阶连续可微，勒贝格积分不受函数在零测集上的取值影响，以及表达式 (3)、(6) 和 (8)，我们可以将 (3) 形式上改写为

$$u(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\left(A-\frac{\varphi_1(x_0)+\varphi_2(x_0)}{2}\right)\chi_{Q_*^{(3)}}(t,x)+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\left(F(\tau,\xi)-f\left(\tau,\xi,u(\tau,\xi),\partial_t u(\tau,\xi),\partial_x u(\tau,\xi)\right)\right)d\xi,\ (t,x)\in\overline{Q}. \quad (9)$$

其中 χ_A 是集合 A 的示性函数。注意，若

$$\left(A-\frac{\varphi_1(x_0)+\varphi_2(x_0)}{2}\right)\chi_{Q_*^{(3)}}(t,x)\equiv 0 \quad (10)$$

则表示式 (9) 有时称为（“广义”）达朗贝尔公式 [21]。

按照 [16]，，我们考虑在定理 1 的条件下指定不连续初始条件的三种情形。

1. ，即 。由古尔萨条件 (4) 及这一事实可知对每个 我们看到，在这种情况下，解 u 属于类 并且满足 义”达朗贝尔公式

2. 和。在这种情况下，解u不再连续，但条件 (10) 成立，且解u也满足‘广义’达朗贝尔公式。

3. 以及。解u是不连续的，且不满足‘广义’达朗贝尔公式。

这些结果与文献 [16] 的结论一致。
我们注意到，积分微分方程（9）可用于定义问题（1）、（2）的温和解。

结论。本文得到了拟线性波动方程不连续初始条件初值问题存在唯一经典解（广义意义下）的充要条件。我们还提出了一种构造不连续初始条件解的方法，甚至适用于非线性方程。

致谢。本文ſðšu俄罗斯联邦科学和高等教育部资助，作为根据第075-15-2022-284号协议实施莫斯科基础与应用数学中心计划的一部分。

参考文献

1. Zhuravkov M. A., Starovoytov E. I.，《固体力学数学模型》。明斯克：白俄罗斯国立大学，2021年。535页。（俄文）。2. Hadamard J.，《线性偏微分方程中的柯西问题讲义》。莫斯科：Nauka 出版社，1978年。352页。（俄文）。3. Bateman H.《具有不连续初始条件的物理问题》。美国国家科学院院刊，1930年，第16卷，第3期，第205–211页。https://doi.org/10.1073/pnas.16.3.205 4. Polyanin A. D.《工程师和科学家的线性偏微分方程手册》。纽约：Chapman & Hall/CRC，2001 9781420035322 5 800 10 1201 。页。https://doi.org/ 。/ 。Rasulov M. L.《围道积分方法》。阿姆斯特丹：North Holland，1967年。454页。6. Gaiduk S. I.《黏弹性杆横向振动问题》。 Differ. Uravn.，1967年，第3卷，第9期，第1518–1536页。7. Korzyuk V.，Rudzko J.《弹性杆一端带有弹性连接件时的纵向冲击问题》。仪器工程–2022年，明斯克，白俄罗斯国立技术大学，2022年。第305–307页。（俄文）。8. Gaiduk S. I.《简支边矩形黏弹性板的横向冲击问题》。Differ. Equ.，1995年，第37卷，第1期，第75–80页。9. Gaiduk S. I.《有限杆纵向冲击理论相关问题的数学探讨》。Differ. Uravn.，1977年，第13卷，第11期，第2009–2025页。（俄文）。10. Gaiduk S. I.《与杆横向冲击理论相关的若干问题》。Differ. Uravn.，1977年，第13卷，第7期，第1233–1243页（俄文）。11. Bityurin A. A.，Manzhosov V. K.《杆撞击与刚性障碍物接触的阶梯杆所产生的波》。应用数学与力学杂志。2009年，第73卷，第2期，第162–168页。https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.04.006 12. Koshlyakov N. S.，Gliner E. B.，Smirnov M. M.《数理物理方程》。阿姆斯特丹： North Holland Publishing Co.，1964年。701页。13. Korzyuk V. I.，Rudzko J. V.《长弹性半无限杆完全非弹性冲击问题的一个经典解》。白俄罗斯国家科学院学报。物理与数学辑，2021年，第57卷，第4期，第417–427页（俄文）。https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-417-427 14. Korzyuk V. I.，Rudzko J. V.《长弹性半无限杆末端带有线弹性元件时完全非弹性冲击问题的经典解》。白俄罗斯国立大学学报。

《数学与信息学》，2022年，第2卷，第34–46页（俄文）。
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-34- 46 15. Korzyuk V. I.，Rudzko J. V.《一维拟线性波动方程初值问题的经典解》。Erugin Readings–2022年，Navapołack，波洛茨克国立大学，2022年。第2部分，第38–39页。16. Korzyuk V. I.，Puzyrnyi S. I.《具有柯西非光滑条件的一维波动方程混合问题的经典解》。白俄罗斯国家科学院学报。物理与数学辑，2016年，第2期，第22–31页（俄文）。17. Korzyuk V. I.，Rudzko J. V.《具有非光滑第二初始条件的一维波动方程混合问题的经典解》。白俄罗斯国家科学院学报。物理与数学辑，2021年，第57卷，第1期，第23–32页（俄文）。https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-1-23-32 18. Chekhlov V. I.《波动方程具有不连续边界条件的混合问题》。苏联科学院学报，1968年，第183卷，第4期，第787–790页（俄文）。19. Korzyuk V. I.，Kovnatskaya O. A.，Sevastyuk V. A.《拟线性双曲方程的平面古尔萨问题》。白俄罗斯国家科学院学报，2022年，第66卷，第4期，第391–396页（俄文）。https://doi.org/10 396 20 29235 1561 8323 2022 66 4 391 。/ - - - - - - 。Korzyuk V. I.，Rudzko J. V.《二阶半线性双曲方程的曲线平行四边形恒等式与平均值性质》。arXiv:2204 09408 21 09408 10 48550 2204 。. https://doi.org/ 。/arXiv. 。. Kharibegashvili S. S.，Jokhadze O. M.《一维半线性波动方程具有非线性边界条件的混合问题的可解性》。《数学札记》，2020年，第108卷，第1期，第123–136页。https://doi.org/10.1134/S0001434620070123

作者简介

Viktor I. Korzyuk——院士、教授、物理与数学博士，任职于白俄罗斯国家科学院数学研究所（白俄罗斯共和国明斯克市苏尔加诺夫街11号，邮编220072）和白俄罗斯国立大学（白俄罗斯共和国明斯克市独立大道4号，邮编220030）。电子邮箱：korzyuk@bsu.by。Jan V. Rudzko——数学与计算机科学硕士，白俄罗斯国家科学院数学研究所研究生（白俄罗斯共和国明斯克市苏尔加诺夫街11号，邮编220072）。电子邮箱：janycz@yahoo.com。https://orcid.org/0000-0002-1482-9106