arXiv:2301.01557v1 [quant-ph] 4 Jan 2023

被动遥感中的多参数量子计量超分辨成像

Emre Köse[1], * 和 Daniel Braun[1], †[1]图宾根埃伯哈德·卡尔斯大学理论物理研究所，德国图宾根 *72076*（日期：2023年1月5日）

我们从理论上研究超分辨成像，采用远距离的 n 模式干涉仪，在微波频段进行被动遥感，例如用于土壤湿度与海洋盐度（SMOS）任务等卫星，以观测地球表面。我们对源平面上的温度进行多参数估计，给出了完整的量子力学分析。我们发现，通过优化酉变换组合入射模式，可以找到最优探测模式，从而实现基于探测模式中光子计数、信息量最大的测量，并使温度参数集的对称对数导数所给出的量子克拉美–罗界达到饱和。在数值分析中，我们使用最大似然估计量重建图像，实现了量子增强超分辨成像，像素尺寸为 3 千米，比 SMOS 在参数相当时的空间分辨率小十倍。此外，我们还找到了适用于源平面均匀温度分布的优化酉变换，其中温度对应于图像的平均温度。尽管相应的酉变换并未针对特定图像进行优化，但在理论上可实现的最大测量次数下，与局域测量情形相比，它仍能提供超分辨率。

I. 引言

成像技术目前正经历快速演进，这既得益于计算技术的提升 [1],，也源于量子信息处理和量子计量带来的新见解。人们已经清楚地认识到，阿贝和瑞利根据经典波的干涉所确立的典型分辨率极限由光的波长决定；但若考虑光的量子属性，这并非最终的基本极限。早在 20 世纪 60 年代，量子光学领域在阐释汉伯里·布朗–特威斯效应的背景下 [2, 3] 便已认识到，从根本上说，光的干涉应在希尔伯特空间中考察，并能产生高阶关联，其中包含的信息超出了与经典电磁波干涉图样相关的一阶关联。实验方面，Hell 在 1994 [4, 5], 展示了超分辨成像：他通过在分子上标记点状发射体并对其进行选择性猝灭，利用光学波段的光以纳米分辨率分辨出一个分子。早期的理论研究运用最优参数估计技术来估算雷达的极限灵敏度，事实上由此推动了量子参数估计理论的发展 [6–9]。很久以后，研究人员应用量子参数估计理论，确定了高斯光量子态中任意编码参数的最优探测模式和极限灵敏度 [10, 11]。2016 年，Tsang 及其同事发表了一篇开创性论文，将极限分辨率问题视为量子参数估计问题，研究两个光源之间的距离。他们发现，对于强度低且相同的两个点源，当间距趋近于零时，决定极限的量子费舍尔信息（QFI）仍保持有限；而与直接成像中的强度测量相关联的经典费 Fisher 信息则趋于零。

随后，大量理论研究 [12–35]和实验研究 [36–41] 对这一见解进行了佐证和推广。

这些研究大多集中于估计一个或少数几个参数，但通常这些参数与几何信息有关，例如点源的空间间距或位置；有时也涉及光学相位成像，即联合估计相对于参考模式的相位 [42–45]。这些研究带来了重要见解，并有力证明，在许多情况下，量子参数估计技术能够突破经典衍射极限、提升分辨率。然而，成像通常并非旨在恢复点源间距，或更一般而言，点源空间位置的信息。相反，在典型图像中，场景由一系列位置已知的像素构成，人们希望获知每个像素处光源的强度、光谱组成、偏振等信息。由于图像通常包含许多像素，成像本质上是一个（量子）多参数估计问题，因此应采用相应技术，根据收集到的测量结果，尽可能提高图像重建质量。

在这项工作中，我们基于此前的研究 [46]，在微波波段地球被动遥感领域朝这一方向迈出了重要一步。目前最先进的技术是干涉天线合成，它可以利用一组小型天线形成一副有效口径更大的天线，从而提高分辨率。例如，SMOS（土壤湿度与海洋盐度）卫星是一台干涉仪，采用Y形阵列，由69根天线组成，每条臂长约4米 [47–50]。它从距地球表面 $R \simeq 758$千米的高度，通过测量电磁场在狭窄频带（1420–1427兆赫，中心波长 $\lambda \simeq 21$厘米）内的热噪声，实现了约 $d \simeq 35$千米的分辨率。电场经过实时采样、滤波，并以数值方式进行干涉，从而实现纯粹的经典干涉。此处，与阿贝和瑞利提出的衍射极限相类似的极限由范西特-泽尼克定理 [51–53], $d \simeq \lambda R/\Delta x_{ij}$给出，其中 Δx_{ij} 是两根天线之间的最大空间间距

* saban-emre.koese@uni-tuebingen.de
† daniel.braun@uni-tuebingen.de

。通过干涉测量数据，可以利用逆空间傅里叶变换估算地球表面的局部亮度温度 T_{eff}，空间分辨率为 d；再结合适当的模型，便可推算土壤湿度和海洋盐度。这些信息对于地球科学、地球监测、气候建模、洪水预测等诸多领域都极为重要。受这些应用需求的推动，人们希望提高空间分辨率，但单纯增大卫星尺寸并不切实际，而降低其轨道高度则会缩短其使用寿命。

我们在此表明，运用多参数量子估计理论中的适当技术，可以利用一颗尺寸相当的卫星，以约高出 SMOS 10 倍的空间分辨率重建地球图像。我们通过最多包含 30 个像素的图像展示这一点，并证明这些图像可以用 3 公里的像素尺寸忠实重建。我们不再对干涉仪的入射模式进行局域测量，而是通过酉变换将这些模式组合起来，从而实现非局域测量。我们找到了使所选测量对应的经典费 Fisher 信息矩阵在与权重矩阵收缩后，其标量经典克拉美–罗界最小化的最优酉矩阵 [54]。相应的酉矩阵可以分解为移相器和至多 $n(n-1)/2$ 个分束器，这一点对于线性光学量子计算而言是众所周知的 [55]。这使我们能够为成像对最优测量方案进行量子编程。请注意，与经典计算成像 [1] 不同，这种新型“量子计算成像”的量子计算是在测量之前完成的。

多参数量子估计理论本身就是一个快速发展的领域。近期出现了许多不同的研究，例如对多个相位进行多参数估计 [42],对磁场的三个分量进行估计 [56],对量子比特布洛赫矢量分量进行最优估计[57], 基于马尔可夫动力学的多参数估计[58], 等等（参见综述文章 [59]）。当样本量有限时，例如在被动传感中，同时估计图像的各项参数至关重要。通常，多参数量子克拉美–罗界无法达到饱和。与不同参数相关的最优测量通常彼此不对易，因此会导致不相容测量。一旦满足平均对易条件，便可渐近达到量子极限 [60]。

我们的工作基于此前的研究 [46, 53, 61], ，我们在其中证明，微观电流的热涨落会使微波场处于高斯态，因此可以对高斯态使用量子 Cramér-Rao 界 [10, 11, 62, 63], 。与之前一样，我们假设只有地球表面的电流密度会产生贡献，并忽略宇宙微波背景以及其他技术噪声 [64–66]。

本文其余部分安排如下。在第II节，我们介绍 n模干涉仪接收到的量子态，以及量子费舍尔信息（QFI）、对称对数导数（SLD）和相应的量子 Cramér-Rao 下界（QCRB）。此外，我们还介绍在多参数估计中使最具信息性的界最小化的最优正算子值测度（POVM），

。在第III节，首先，我们以双模干涉仪观测双像素源这一简单问题作为基准，讨论其表现。我们将采用最优酉变换时的量子优势与局域测量情形进行比较。其次，我们考虑一维源阵列和一维阵列干涉仪，增加像素数量，并考察在我们的参数集下能够多接近灵敏度量子极限。第三，我们考虑使用二维阵列干涉仪观测二维源图像。利用最大似然估计量，我们分别通过针对图像优化的酉变换、针对均匀温度分布优化的酉变换以及局域测量对应的正算子值测度来重建图像。最后，我们在第IV节结束全文。

II. 理论

A. n 模干涉仪接收的量子态

在先前的工作中 [46], , 我们分析了源平面上的电流分布 $\mathbf{j}(\mathbf{r}\ t)$ [61, 67–76] 所辐射的量子态。我们表明，来自这些辐射光源的 n模干涉仪入射模式的量子态，可以建模为具有部分相干性的圆对称高斯态，其中编码了光源的位置和振幅分布信息。随后，经过干涉仪的散射过程 [77, 78] 后，在 n 模式中接收到的部分相干态可表示为

$$\rho = \int \mathrm{d}^{2n}\beta \Phi(\{\beta_i\})|\{\beta_i\}\rangle\langle\{\beta_i\}|, \tag{1}$$

其中 $|\{\beta_i\}\rangle$ 是空间天线模式的多模相干态，$\{\beta_i\} = \beta_1, \beta_2, ...\beta_n$，且

$$\Phi(\{\beta_i\}) = \frac{1}{\pi^n \det\Gamma} e^{-\bar{\beta}^\dagger \Gamma^{-1}\bar{\beta}}. \tag{2}$$

其中 $\bar{\beta}^T = (\beta_1, \beta_2 ... \beta_n)$ 是 Sudarshan-Glauber 表示，且 $\mathrm{d}^{2n}\beta \equiv \mathrm{d}\Re\beta_1 \mathrm{d}\Im\beta_1 \ldots \mathrm{d}\Re\beta_n \mathrm{d}\Im\beta_n$。矩阵$\Gamma$ 是 n 个天线模式的相干矩阵，其元素定义为 $\Gamma_{ij} = \langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j\rangle$。考虑到这些场由源平面上的随机电流分布产生，并假设每根天线具有相同的偏振方向$\hat{e}_l$，且以相同的频率 ω_0 和带宽 B 滤除入射场，则可得到 $\langle b_i^\dagger b_j\rangle$ 与源平面上的平均电流密度分布之间的关系，如下所示 [46]

$$\begin{aligned}\langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j\rangle = K \int d^3r \, \frac{\langle |\tilde{j}_{t,l}(\mathbf{r},\omega)|^2\rangle \, e^{i\omega_0(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|-|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|)/c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i||\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} \\ \times \operatorname{sinc}\left[\frac{B}{2c}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j| - |\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|)\right],\end{aligned} \tag{3}$$

其中，d^3r 是对源体积的积分，$\mathbf{r}_i$ 是探测平面中接收模式对应的探测器位置，且 $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$。$\tilde{j}_{t,l}(\mathbf{r}\ \omega)$ 是电流密度$\mathbf{j}(\mathbf{r}\ t)$局部横向分量的傅里叶变换

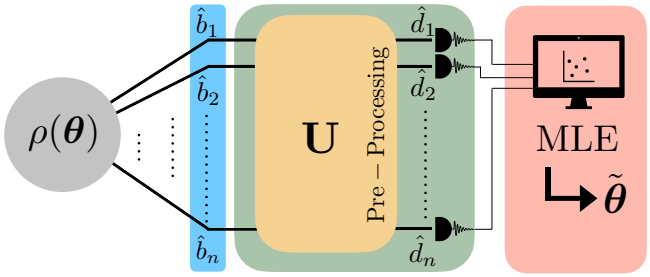


图 1. n 模式干涉仪的高斯态 $\rho(\boldsymbol{\theta})$ 包含来自电流密度源的空间和辐射信息。将入射模式 $\hat{b}_i$ 与优化后的U结合，得到光子计数测量的探测模式 $\hat{d}_i$。在实验实现中，可以像光学量子计算那样将U 分解为 $SU(2)$ 群元素，即使用分束器和移相器。测量完成后，使用估计量函数（例如最大似然估计量（MLE））估计参数集。

而 'l' 表示平行于源平面的分量。将 R 视为源平面与探测平面之间的距离后，我们可以相对于探测平面的坐标系，将地球表面的积分参数化为 $\mathbf{r} = (x, y, R)$。假设我们处于远场区$|\Delta\mathbf{r}_{ij}| \ll R$，其中 $\Delta\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ 是两根天线之间的距离，我们近似取 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| \approx \Delta\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$。在分母中，我们近似取 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| \approx R/\cos\,\theta(x, y)$，其中 $\theta(x, y)$ 是- z轴与向量 (x, y, R) 之间的极角。我们得到电流密度分布平均振幅与亮度温度之间的关系 $T_{\mathrm{B}}(x, y)$ by h$|\tilde{j}_{t,i}(\mathbf{r}\ \omega)\ |^2$i $= K_1 T_{\mathrm{B}}(x, y)\cos\,\tilde{\theta}(x, y)\delta(z - R)$，其中 $K_1 = 32\tau_c k_B/(3l_c^3\mu_0 c)$。此外，可以将有效温度定义为 $T_{\mathrm{eff}}(x, y) \equiv T_{\mathrm{B}}(x, y)\cos^3\tilde{\theta}(x, y)$。我们加入一个额外的常数前因子 μ 来表示额外损耗；通过将光子可能散射进入的损耗模式"$\hat{c}$"迹消去，并写作 $\hat{b} = \sqrt{\mu}\hat{b} + \sqrt{1-\mu}\hat{c}$，即可证明这一点。与实际物理温度相比，亮度温度还会受到表面反照率的影响，因此可以提取表面含水量或海水盐度等重要信息。为简单起见，以下我们仅使用物理温度，即令 $T_B(x, y) = T(x, y)$。基于这些假设，并从 b 中去掉 $\sim$，我们将式（3）简化为

$$\langle\hat{b}_i^\dagger\hat{b}_j\rangle = \frac{\mu\kappa}{R^2}\int dxdy\ T_{\mathrm{eff}}(x, y)e^{2\pi i\left(v_x^{ij}x + v_y^{ij}y\right)}, \quad (4)$$

我们引入了一个新的常数 $\kappa = K_1 K \equiv 2k_B/(\pi\hbar\omega_0)$，其中 κ 的量纲为逆温度，SI 单位为"(1/开尔文)"，而 $v_y^{ij} = \Delta x_{ij}/(\lambda R)$ $v_x^{ij} = \Delta y_{ij}/(\lambda R)$，其中 $\omega_0/c = 2\pi/\lambda$。考虑 SMOS 的参数，我们得到 $\kappa = 9.4$ 1/开尔文。SMOS 呈 Y 形，每条臂的长度约为 4 米。因此，将最大基线 $\Delta x_{\max} = \Delta y_{\max}$ 设为约 10 米是合理的。

B. 信源估计理论

量子克拉美–罗界：对于依赖于由 l 个参数组成的向量 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_l)^T$的量子态 $\rho_{\boldsymbol{\theta}}$，无偏估计量的参数集存在一个终极下界，即量子克拉美–罗（CR）界。该界指出，任何此类估计量的协方差矩阵都大于或等于量子费 Fisher 信息矩阵的逆矩阵（即两者之差为半正定矩阵）。由测量得到的经典克拉美-罗界（经典 Cramér-Rao 界）以下界量子克拉美–罗界（量子 Cramér-Rao 界）[6, 7, 59] 给出

$$\mathrm{Cov}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \geqslant \mathscr{F}(\boldsymbol{\theta})^{-1}, \quad \mathscr{F}_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\rho_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathscr{L}_i, \mathscr{L}_j\}\right), \quad (5)$$

其中，$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\theta})$ 是局部无偏估计量 $\boldsymbol{\theta}$ [60, 79]的协方差矩阵，$\{\cdot,\cdot\}$ 表示反对易子，而$\mathscr{L}_i$ 是与参数 i相关的对称对数导数（SLD），其定义与单参数情形类似，$\frac{1}{2}(\mathscr{L}_i\rho_{\boldsymbol{\theta}} + \rho_{\boldsymbol{\theta}}\mathscr{L}_i) = \partial_i\rho_{\boldsymbol{\theta}}$. 任意高斯态的 SLD 和量子费舍尔信息矩阵元素见参考文献 [80]。SLD 可写为

$$\mathscr{L}_i = \frac{1}{2}\mathfrak{M}^{-1}_{\alpha\beta,\gamma\delta}\left(\partial_i\Sigma^{\gamma\delta}\right)\left(\mathbf{b}_\alpha\mathbf{b}_\beta - \Sigma^{\alpha\beta}\right), \quad (6)$$

其中采用求和约定，并且在我们的情形中，高斯态的平均位移为零。协方差矩阵元素为 $\Sigma_{ij} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\rho(\mathbf{b}_i\mathbf{b}_j + \mathbf{b}j\mathbf{b}_i)\right]$,, 其中$\mathbf{b} = \left[b_1,\ b_1^\dagger,\ b_2,\ b_2^\dagger,\ \ldots b_n,\ b_n^\dagger\right]$ [10, 80–84]。那么，[80] 中的量子费 Fisher 信息矩阵元素为

$$\mathscr{F}_{ij} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}^{-1}_{\alpha\beta,\gamma\delta}\partial_j\Sigma^{\alpha\beta}\partial_i\Sigma^{\gamma\delta}, \quad (7)$$

其中 $\mathfrak{M} \equiv \Sigma\otimes\Sigma + \frac{1}{4}\Omega\otimes\Omega$，且 $\Omega = \bigoplus_{k=1}^n i\sigma_y$。利用高斯态的性质（圆对称且均值为零），我们可以将 n 模干涉仪的对称对数导数写为 [46]

$$\mathscr{L}_i = \sum_j^n g_i^j\hat{b}_j^\dagger\hat{b}_j + \sum_{j<k}^n(g_i^{jk}\hat{b}_j^\dagger\hat{b}_k + (g_i^{jk})^*\hat{b}_k^\dagger\hat{b}_j) + \mathrm{C}, \quad (8)$$

其中，C 是一个常数项，在对角化时可以忽略。在单参数情形下，最优正算子值测度是投影到 $\mathscr{L}_i$ 本征态上的投影算符集合。利用最大似然估计 [6, 85, 86]，在测量次数趋于无穷时，它可以使量子 Cramér-Rao 界达到饱和。为了从对称对数导数中求出正算符值测度，我们构造一个厄米矩阵 $\mathbf{M}_i$，其对角元素是实值函数，定义为 $g_i^j \equiv \mathfrak{M}^{-1}_{\alpha\beta,\gamma\delta}\left(\partial_i\Sigma^{\gamma\delta}\right)$，其中 $\alpha = 2j$ 且 $\beta = 2j - 1$。非对角元素是复值函数，定义为 $g_i^{jk} = \mathfrak{M}^{-1}_{\alpha\beta,\gamma\delta}\left(\partial_i\Sigma^{\gamma\delta}\right)$，其中 $\alpha = 2j$、$\beta = 2k - 1$ 和 $k > j$。通过为场算符引入一组新算符，使得 $\bar{\mathbf{b}}^\dagger \equiv \left[\hat{b}_1^\dagger,\ \hat{b}_2^\dagger,\ \ldots\ldots,\ \hat{b}_n^\dagger\right]$ 且$\bar{\mathbf{b}} \equiv \left[\hat{b}_1,\ \hat{b}_2,\ \ldots\ldots,\ \hat{b}_n\right]^T$，我们将对称对数导数写成如下形式

$$\mathscr{L}_i = \bar{\mathbf{b}}^\dagger\mathbf{M}_i\bar{\mathbf{b}}. \quad (9)$$

由于 $\mathbf{M}_i$ 是厄米矩阵，因此可以通过酉变换将其对角化：$\mathbf{M}_i = \mathbf{V}_i^\dagger \mathbf{D}_i \mathbf{V}_i$，其中 $\mathbf{V}_i^\dagger \mathbf{V}_i = \mathbb{I}$。可以定义一组新的算符：$\bar{\mathbf{d}}_i^\dagger = \bar{\mathbf{b}}^\dagger \mathbf{V}_i^\dagger$，其中 $\bar{\mathbf{d}}_i^\dagger = \left[\hat{d}_{i1}^\dagger, \hat{d}_{i2}^\dagger, \ldots\ldots, \hat{d}_{in}^\dagger\right]$。单参数情形下（$i=1$，以下省略）的最优正算子值测度可表示为 $\hat{d}_l$ 的福克基中的一组投影算符 $\{|m_1, m_2, ..., m_n\rangle\langle m_1, m_2, ..., m_n|\}_{\{m_1, m_2 ... m_n\}}$，其中 $\hat{d}_l^\dagger \hat{d}_l |m_1, m_2, ..., m_n\rangle = m_l |m_1, m_2, ..., m_n\rangle$，且 $l \in \{1, ..., n\}$。$\hat{d}_l$ 将称为“探测模式”。引入正权重矩阵 $\boldsymbol{w}$ 后，可以根据矩阵值量子克拉美-罗界定义标量不等式：$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{w}\,\mathrm{Cov}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})) \geqslant \mathrm{Tr}(\boldsymbol{w}\mathscr{F}(\boldsymbol{\theta})^{-1}) \equiv C^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w})$。与单参数情形不同，多参数量子克拉美-罗界通常无法达到饱和。Holevo 意识到了这一问题，并提出了一个更紧、更具基础性的界 [87]$C^H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w})$，其上界为 $2C^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w})$ [54, 88]。如果不同参数对应的对称对数导数算符在平均意义下可交换，即 $\mathrm{Tr}(\rho_{\boldsymbol{\theta}}[L_i, L_j]) = 0$，那么 Holevo克拉美-罗下界等价于量子 Cramér-Rao 界；在副本数趋于无穷大时，通过集体测量可以渐近地使多参数估计的量子 Cramér-Rao 界达到饱和 $\rho_{\boldsymbol{\theta}}^{\otimes N}$ [54, 60]。估计量的标准差与样本量 N 的平方根成反比 $1/\sqrt{N}$。SMOS卫星以约 v ’ 7 km/s 的恒定速度飞行。飞过距离 L 需要时间 $\tau = L/v$。每个样本的探测时间下限为 t_D，$1/B$。实际探测时间可能会长得多，例如受传感器死区时间、电子设备速度较慢等因素影响。此外，我们的计算中隐含地假设探测器和模式 b_i 处于零温度，但这需要将温度冷却到远低于 $\hbar\omega_0$。若实际探测时间为 t_D^{eff}，则最大样本量为 $N = \tau / t_D^{\mathrm{eff}}$。

多参数计量学的最具信息量界：最具信息量界是在所有可能的正算子值测度中，使经典标量克拉美-罗界最小的界。在单参数情形下，根据对称对数导数的对角化可知，要使单参数情形下的量子 Cramér-Rao 界达到饱和，需要通过酉变换组合入射模式。即使只有一个参数，这种变换也取决于参数本身。在多参数情形下，针对某个特定参数采用上述任一特定酉变换，通常会使其余参数的均方误差更大。根据对称对数导数的结构所提供的线索，我们从模式的酉变换中去掉指标“i”，并在所有可能的酉变换中，针对多参数估计最小化经典费 Fisher 信息矩阵的标量界。于是，可将一组新的探测模式算符定义为 $\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{U}\bar{\mathbf{b}}$ 其中 $\bar{\mathbf{d}}^T = \left[\hat{d}_1, \hat{d}_2, \ldots\ldots, \hat{d}_n\right]$，其中$\mathbf{U}$ 是场模式所对应的酉变换。新相干矩阵各元素的平均值 Γ可通过使用 $\hat{d}_i = \sum_l U_{il} \hat{b}_l$ 求得

$$\tilde{\Gamma}_{ij} = \langle d_i^\dagger d_j \rangle = \sum_{kl} U_{ik}^* U_{jl} \langle b_k^\dagger b_l \rangle. \tag{10}$$

然后我们就能得到测量后的概率 $P(m_1, ..m_n|\theta_1, \theta_2, ..., \theta_l)$ 作为

$$\begin{aligned} P(\{m_k\}|\boldsymbol{\theta}) &= \int \mathrm{d}^{2n}\delta\tilde{\Phi}(\{\delta_i\})|\langle\{m_k\}|\{\delta_i\}\rangle|^2, \\ &= \int \mathrm{d}^{2n}\delta\tilde{\Phi}(\{\delta_i\}) \prod_i e^{-|\delta_i|^2} \frac{|\delta_i|^{2m_i}}{m_i!}. \end{aligned} \tag{11}$$

其中，$|\{\delta_i\}\rangle$ 是探测模式的相干态，而 $\tilde{\Phi}(\{\delta_i\})$ 是探测模式状态的苏达山-格劳伯函数。由于从 $\bar{\mathbf{b}}$ 到 $\mathbf{d}$ 的线性变换，它仍然是高斯函数。要对所有可能的 m_k 值计算 $P(\{m_k\}|\boldsymbol{\theta})$ 的积分，并同时追踪所有可能的光子数计数组合，无论在数值上还是实验上都十分困难。因此，我们不再将对完整福克基的投影视为正算子值测度，而是选择每次测量至多探测到一个光子的正算子值测度，并将讨论范围限制在 $\sum_k m_k \leq 1$。显然，对于从一开始就非常微弱、每个模式至多含一个光子的光而言，由此造成的信息损失可以忽略不计；但对于较强的光源，这种损失可能很重要，因此应尝试分辨光子数。对于室温下的热微波源，每个模式约有 10 个光子。我们将在下文看到，即使不分辨其光子数，我们也已经能够大幅超越经典分辨率极限；不过，若超越下文所分析的单光子探测方案，仍有进一步改进的空间。

所选的单光子探测正算子值测度元素为

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= |0, 0, ..., 0\rangle\langle 0, 0, ..., 0|, \\ \Pi_k &= |0, 0, ..., 1_k, ..., 0\rangle\langle 0, 0, ..., 1_k, ..., 0|, \\ \Pi_{n+1} &= \mathbb{I} - \sum_{l=0}^{n} \Pi_l, \end{aligned} \tag{12}$$

其中，最后一个元素（$n+1$）确保 $\sum_{l=0}^{n+1} \Pi_l = \mathbb{I}$。任一干涉仪模式中均未检测到光子的测量概率为

$$\begin{aligned} P_0(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{\pi^n \det\tilde{\Gamma}} \int \mathrm{d}^{2n}\delta e^{-\boldsymbol{\delta}^\dagger(\tilde{\Gamma}^{-1}+\mathbb{I})\boldsymbol{\delta}} \\ &= \frac{1}{\det(\tilde{\Gamma}+\mathbb{I})}. \end{aligned} \tag{13}$$

干涉仪各模式中的单光子探测概率为

$$\begin{aligned} P_k(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{\pi^n \det\tilde{\Gamma}} \int \mathrm{d}^{2n}\delta e^{-\boldsymbol{\delta}^\dagger(\tilde{\Gamma}^{-1}+\mathbb{I})\boldsymbol{\delta}} |\delta_k|^2 \\ &= \frac{[(\tilde{\Gamma}^{-1}+\mathbb{I})^{-1}]_{kk}}{\det(\tilde{\Gamma}+\mathbb{I})}. \end{aligned} \tag{14}$$

每次测量中发现多于一个光子的概率可表示为

$$P_{n+1}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{I} - \sum_{k=0}^{n} P_k. \tag{15}$$

我们还解析地给出了测量中未探测到光子的概率分布的一阶导数：

$$\frac{\partial P_0(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = \left(\frac{1}{\det(\tilde{\Gamma}+\mathbb{I})}\right) \mathrm{Tr}\left(-(\tilde{\Gamma}+\mathbb{I})^{-1}\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \theta_i}\right). \quad (16)$$

所有模式下至多单光子探测的一阶导数变为

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_k(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = &\left(\frac{1}{\det(\tilde{\Gamma}+\mathbb{I})}\right) \\ &\times \left[[(\tilde{\Gamma}^{-1}+\mathbb{I})^{-1}\tilde{\Gamma}^{-1}\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \theta_i}\tilde{\Gamma}^{-1}(\tilde{\Gamma}^{-1}+\mathbb{I})^{-1}]_{kk}\right. \\ &\left. - [(\tilde{\Gamma}^{-1}+\mathbb{I})^{-1}]_{kk}\,\mathrm{Tr}\left((\tilde{\Gamma}+\mathbb{I})^{-1}\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \theta_i}\right)\right].\end{aligned} \quad (17)$$

最后，利用所有公式（13-17），可以通过以下方式求得经典费 Fisher 信息的各元素

$$\mathcal{F}_{ij} = \sum_{l}^{n+1} \frac{1}{P_l(\boldsymbol{\theta})}\frac{\partial P_l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}\frac{\partial P_l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}. \quad (18)$$

在此情况下，最具信息性的界 [54]是对所有可能酉矩阵取最小值后得到的界

$$\mathrm{Tr}\left[\boldsymbol{w}\,\mathrm{Cov}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})\right] \geq \min_{\mathbf{U}}\left[\mathrm{Tr}\left[\boldsymbol{w}\mathcal{F}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right]\right]. \quad (19)$$

为简便起见，我们将考虑 $\boldsymbol{w} = \mathbb{I}$。

最大似然估计：最大似然估计量在估计理论中得到广泛应用，并且在解释克拉美-罗定理 [89, 90]方面发挥着关键作用。利用观测数据，可以估计具有给定概率分布的一组参数。似然函数为 $l(\boldsymbol{\theta}) = \prod_k^{n+1}(P_k(\boldsymbol{\theta}))^{N_k}$，其中样本总数为 $N = \sum_k^{n+1} N_k$，结果 k的实现值为 N_k。由于对数函数是单调递增函数，似然函数的对数在同一参数向量 $\boldsymbol{\theta}$处取得最大值。因此，最大似然估计量（最大似然估计量） $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{mle}}$ 是使对数似然$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \log(l(\boldsymbol{\theta}))$达到最大值的 $\boldsymbol{\theta}$ 的取值，

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{mle}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}), \quad (20)$$

其中，最大值是在整个参数空间 Θ 上取得的。对于ˆ足够大的样本量， $N \to \infty$、 $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{mle}}$ 会收敛到参数集 $\boldsymbol{\theta}$的真实值。

III. 结果：源温度估计

我们将地球表面电磁场的来源划分为边长为 a、有效像素温度为 T_i 的方形像素，这些像素位于干涉仪下方的 x， y 平面上，距离卫星 R。我们感兴趣的是估计温度分布

$$T_{\mathrm{eff}}(x,y) = \sum_i T_i \mathrm{Box}(x-x_i, y-y_i), \quad (21)$$

其中，Box(x,y)定义为

$$\mathrm{Box}(x,y) \triangleq \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{a}{2} \quad \text{and} \quad |y| \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{else} \end{cases}. \quad (22)$$

我们假设所有其他参数都已知到足够高的精度。高斯态相干矩阵（Γ）的对角元素为

$$\langle \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \rangle = \frac{\mu\kappa a^2}{R^2}\sum_i^p T_i, \quad (23)$$

非对角元素为

$$\langle \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_l \rangle = \frac{\mu\kappa a^2 \eta_{kl}}{R^2}\sum_i^p T_i e^{2\pi i\left(v_{kl}^x x_i + v_{kl}^y y_i\right)}, \quad (24)$$

其中 $k \neq l$，并且我们定义了 $\eta_{kl} \equiv \mathrm{sinc}(v_{kl}^x a)\mathrm{sinc}(v_{kl}^y a)$。ˆ$x$ 轴和ˆy 轴上的像素数分别为 p_x 和 p_y，沿这两条轴的探测模式数分别为 n_x 和 n_y。总计，表面上有 $p = p_x p_y$个像素，探测平面上有 $n = n_x n_y$ 个探测器，每个探测器测量一个探测模式。我们将探测模式数设为与源平面上的像素数相等，即 $n = p$，以避免估计中出现冗余参数，并使用 $n_x = p_x$ 和 $n_y = p_y$。

A. 双像素光源的分辨率

我们先考虑源平面上两个像素（像素 1 和像素 2），其温度分别为 T_1 和 T_2，像素尺寸为 a。我们的目标是估计每个光源的温度。我们将这两个光源在源平面上的中心位置设为 $(-a/2, 0, R)$ 和 $(a/2, 0, R)$，即它们均位于平行于ˆx 轴的一条轴线上，彼此之间没有距离。在探测平面上，沿ˆx 轴分别在位置 $(-\Delta x/2, 0, 0)$ 和 $(\Delta x/2, 0, 0)$ 处设置探测器，对应两个探测模式 d_1 和 d_2。在我们先前的工作 [46]，中，我们证明，若圆对称高斯态的双模式干涉仪中两个接收模式的平均光子数相同（$\mathrm{h}b_1^\dagger b_1\mathrm{i} = \mathrm{h}b_2^\dagger b_2\mathrm{i}$），则关于 T_1 和 T_2 的对称对数导数在平均意义下对易，即 $\mathrm{Tr}(\rho_{\boldsymbol{\theta}}[L_i, L_j]) = 0$。因此，量子 Cramér-Rao 界与 Holevo克拉美-罗下界等价 $C^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) \equiv C^H(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w})$。对于每个参数，由对应 $i \in \{T_1, T_2\}$ 的对称对数导数得到的矩阵 $\mathbf{M}_i$ 具有如下形式

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} g_1^i & |g_2^i|e^{i\phi_i} \\ |g_2^i|e^{-i\phi_i} & g_1^i \end{bmatrix}, \quad (25)$$

其中的 ϕ_i通常取决于 T_1 和 T_2两者。针对 T_1 和 T_2进行单参数估计时， ϕ_1和 ϕ_2 并不相同。

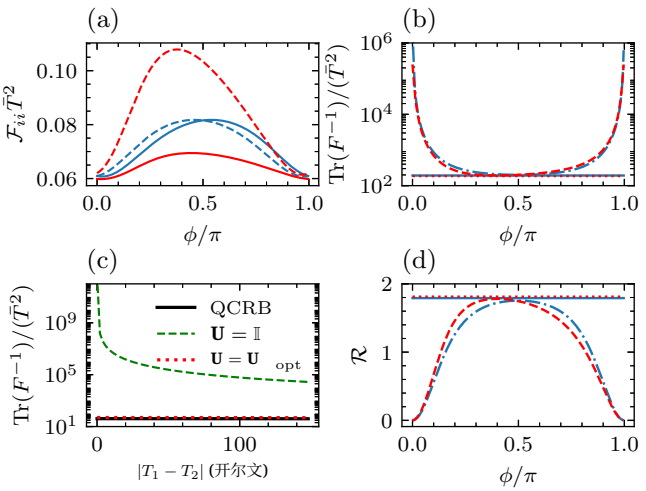


图 2. 两个像素的温度估计。(a) 费 Fisher 信息矩阵的对角元素（无量纲）随 ϕ 的变化。虚线对应 $\mathcal{F}_{T_1}$，实线对应 $\mathcal{F}_{T_2}$。(b) 标量 Cramér–Rao 界随 ϕ 的变化，并以光源平均温度 T 的平方进行缩放。水平线表示量子克拉美-罗界，其余曲线表示该测量的兼容 Cramér–Rao 界。(c) 标量 Cramér–Rao 界随两个像素的温差变化。黑色实线表示量子 Cramér-Rao 界，红色点线表示优化后的 ϕ 对应的经典 Cramér-Rao 界，绿色虚线表示考虑 $\mathbf{U}=\mathbb{I}$ 的局域测量对应的标量经典克拉美-罗界。(d) 估计量 $\mathcal{R}$ 的增益因子随 ϕ 的变化。水平线来自量子克拉美-罗界，其余曲线来自该测量对应的兼容 Cramér–Rao 界。在图 (a)、(b) 和 (d) 中，蓝色曲线表示均匀温度 $T_1=T_2=300$ 开尔文，红色曲线表示非均匀温度 $T_1=400$ 开尔文和 $T_2=200$ 开尔文。光源尺寸为 $a=4$ 千米。所有图中的平均温度为 $\bar{T}=300$ 开尔文，$\mu=0.5$。

将每个对称对数导数对角化的酉变换可表示为

$$\mathbf{U}_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & e^{i\phi_i}\\ 1 & -e^{i\phi_i}\end{bmatrix}. \tag{26}$$

由于酉变换由单个参数表征，我们可以省略索引 i，并找出在同时估计 T_1 和 T_2 时能给出信息量最大界限的 ϕ。在图 2(a) 中，我们绘制了式（18）中经典 Fisher 信息矩阵的对角元素随 ϕ 变化的曲线。如果 T_1（虚线）和 T_2（实线）相等，即 $T_1=T_2$（蓝线），则 F_1 或 F_2，这一对角元素可通过关于 $\phi=\pi/2$ 镜像另一元素得到。对于不同的温度 $T_1>T_2$（红线），经典 Fisher 信息矩阵的元素不再对称。我们观察到 $\max(\mathrm{F}_1)>\max(\mathrm{F}_2)$，二者之差与温度变化有关，这意味着温度较高的像素可以估计得更准确。在两种情况下，我们都将平均温度（$\bar{T}$）保持恒定。两种情况下，经典 Fisher 信息矩阵元素的最大值 $\max(\mathrm{F}_1)=\max(\mathrm{F}_2)$ 均出现在不同的 ϕ 处；对于单参数估计，每个参数的对称对数导数均可对角化。

在图 2(b) 中，我们绘制了对于 $T_1=T_2$（蓝色）和 $T_1>T_2$（红色）温度配置。标量量子克拉美-罗界分别以蓝色实线（$T_1=T_2$）和红色点线（$T_1>T_2$）表示。在 $T_1=T_2$（蓝色点划线）时，标量经典克拉美-罗界在 $\phi=0.5\pi$ 处达到最小值；而在 $T_1>T_2$（红色虚线）时，最小值略微向左偏移。在这两种情况下，量子 Cramér-Rao 界均达到饱和。若在两种配置中保持相同的 T，我们会发现 $T_1=T_2$ 和 $T_1>T_2$ 的标量量子克拉美-罗界数值相近。我们还观察到，对于 $T_1>T_2$（红色虚线），在 $\phi=\pi/2$ 处，$\mathrm{Tr}(\mathcal{F}^{-1})/(\bar{T}^2)$ 仍接近量子 Cramér-Rao 界（红色水平点线）。尽管要使量子 Cramér-Rao 界达到饱和，ϕ 必须取决于所有像素的温度，但仍可求得 $T_1=T_2=T$ 对应的 ϕ，并用它来估计不同的温度配置（$T_1>T_2$）。

在图2(c) 中，我们比较了最优 ϕ的最具信息性的界与局域测量的经典 Cramér-Rao 界（即$\mathbf{U}=\mathbb{I}$），该测量针对 T_1 和 T_2 的联合估计，且只进行一次测量。我们看到，当两个光源的温度相同时，局域测量的无量纲经典 Cramér-Rao 界（绿色虚线）趋于“∞”。当温差约为$\sim$ 10 开尔文时，该界约为 $\sim 10^6$，几乎是使用 $\sim 10^4$ 进行最优非局域测量时的$\mathbf{U}_{\rm opt}$(红色点线)的倍。我们还看到，最优酉变换使量子 Cramér-Rao 界达到饱和（黑色实线）。图2 中的界对应一次测量（$N=1$），对于 N 次 N 独立测量，界会缩小

人们可能会想，联合估计参数相较于单参数估计有什么优势？为回答这个问题，我们可以定义联合估计值的增益因子[91, 92]，

$$\mathcal{R}=p\sum_i^p\frac{1/F_{ii}}{\mathrm{Tr}\,(F^{-1})}, \tag{27}$$

其中，p 是我们想要估计的参数总数。F 同时表示量子费舍尔信息矩阵 $\mathscr{F}$ 和经典 Fisher 信息矩阵 F。增益因子 R 的上限为 p（$0<\mathrm{R}\leq p$），其中因子 p 源于这样一个事实：对于 p 单参数估计，与总样本量相比，每个参数可用的样本数会减少 p 倍，因为不同参数通常需要采用不同的最优测量。由于我们只需估计两个参数（T_1 和 T_2），增益因子的上限变为 $\mathrm{R}\leq 2$。如果增益因子小于 1，即 $\mathrm{R}<1$，那么联合估计就没有任何优势。在图 2(d)中，我们展示了估计的增益因子 R 随 ϕ变化的情况。对于 $T_1=T_2$（蓝色实线）和 $T_1>T_2$（红色虚线），标量量子克拉美-罗界的增益因子接近 2。此外，通过 $T_1=T_2$（蓝色点划线）和 $T_1>T_2$（红色虚线）对应的经典 Cramér-Rao 界优化酉变换，也能实现这一优势；与单参数估计相比，优势几乎达到两倍。

B. 一维阵列像素光源的分辨率

接下来，我们考虑一个像素一维阵列，它与x 轴（$p_x=n_x$ 和 $p_y=n_y=1$）上的探测器模式平行排列。所有像素的尺寸 a 相同，且最近两个像素之间的间距趋于零。每个像素的中心位置

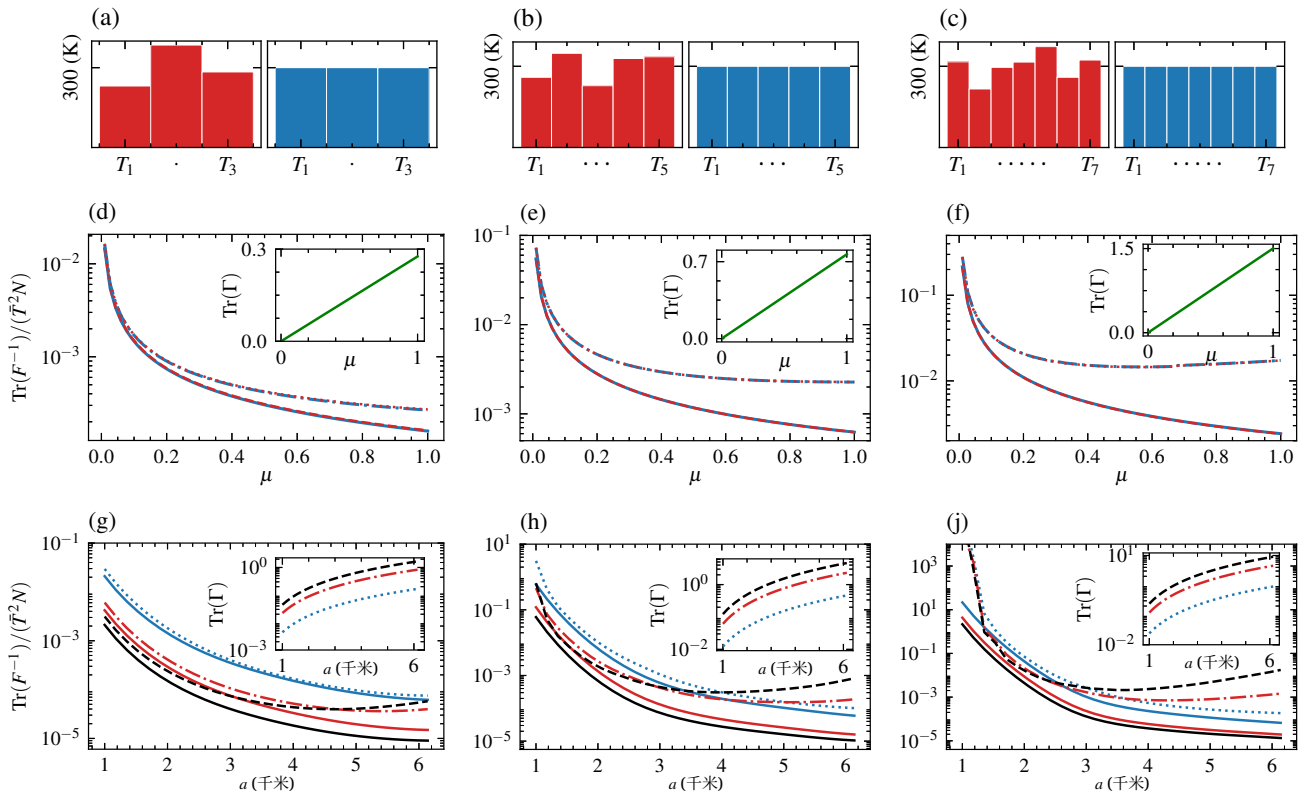


图3. (a-c) 从 (a) 到 (c) 分别为具有均匀温度（蓝色柱）和不同温度（红色柱）的 1D 像素源的温度分布，源分别包含 3,5 和 7 个像素。标量 Cramér–Rao 界（无量纲）随 μ 变化的曲线见 (d-f)，对应于 (a-c) 中的源像素数量。蓝色实线和红色虚线表示均匀温度配置下的 QCRB；红色点线和蓝色点划线表示均匀和随机温度配置下的 CCRB。插图显示总光子数随 μ 变化的情况，绿色实线表示该关系。(d) 至 (f) 中的像素尺寸为 2.5 千米。(g) 至 (j) 展示了标量 Cramér–Rao 界随源尺寸 a变化的曲线。蓝色、红色和黑色曲线分别对应不同的 $\mu = (0.1, 0.5, 1.0)$。实线表示 QCRB；虚线、点划线和点线表示针对不同像素配置进行优化酉变换的单光子测量所对应的标量经典克拉美-罗界。插图显示探测器中的总光子数随像素尺寸 a变化的情况，颜色与不同的 μ对应。假设平均温度为 $\bar{T} = 300$ 开尔文，样本量设为 $N = 10^6$。

为 $\tilde{x}_j = (2j - p_x - 1)\, a/2$，探测器 k的位置为 $x_k = (2k - n_x - 1)\, \Delta x_{\max}/n_x$，其中$j \in \{1, \ldots, p_x\}$和 $k \in \{1, \ldots, n_x\}$。我们要估计的参数是每个像素的温度，其组成的向量为 $\boldsymbol{\theta} = \{T_1, T_2, \ldots T_{p_x}\}$。

酉变换$\mathbf{U}$ 成为一个 $n_x \times n_x$ 矩阵，我们需要n_x^2 个实参数。独立改变$\mathbf{U}$ 的所有参数，以求得代价函数的最小值，是一项艰巨的任务。因此，对于 $n > 2$，我们采用最速下降算法，将式（19）中的最具信息性的界最小化。文献 $U(n)$ 提出了一种高效算法，用于最小化自变量为李群酉矩阵 [93]的给定代价函数。酉群 $U(n)$ 是一个维数为 n^2的实李群。在每次迭代中，共轭梯度（CG）算法沿黎曼流形上的测地线朝最小值移动，这对应于欧几里得空间中的直线。我们在附录A中介绍根据文献 [93–96]改编的CG算法的详细内容。这类算法广泛应用于经典通信系统中。本文采用该算法优化正算子值测度（POVM），以达到被动遥感成像的量子极限

感。我们通过数值验证，对于所选的参数集，不同参数对应的对称对数导数在相应量子态上取平均后彼此对易，适用于该 n模干涉仪。

在图3中，我们分析了不同光源像素数下的量子 Cramér-Rao 界和经典 Cramér-Rao 界 p_x （3、5 和 7）。对于随机温度分布（左侧红色条形）和光源像素的均匀温度分布（右侧蓝色条形），平均温度均固定为 ¯开尔文。图 $T = 300$ 3(d) 至 3(f) 展示了采用优化酉变换的测量所得经典界如何随 μ变化；插图则展示了各配置下相应的总光子数如何随 μ 变化。由于探测模式的总平均光子数（绿色实线）随 μ 减小并趋近于 $\mathrm{Tr}(\Gamma) \ll 1$，因此，对于不同温度配置和均匀温度配置，单光子探测的正算子值测度（红色点线和蓝色点划线）分别达到量子 Cramér-Rao 界（红色虚线和蓝色实线）。当$\mathrm{Tr}(\Gamma)$ 接近 1 时，我们发现，采用优化酉变换（$\mathbf{U}_{\mathrm{opt}}$）的单光子测量中，量子 Cramér-Rao 界与经典 Cramér-Rao 界之间的差距增大。此外，量子 Cramér-Rao 界会随着

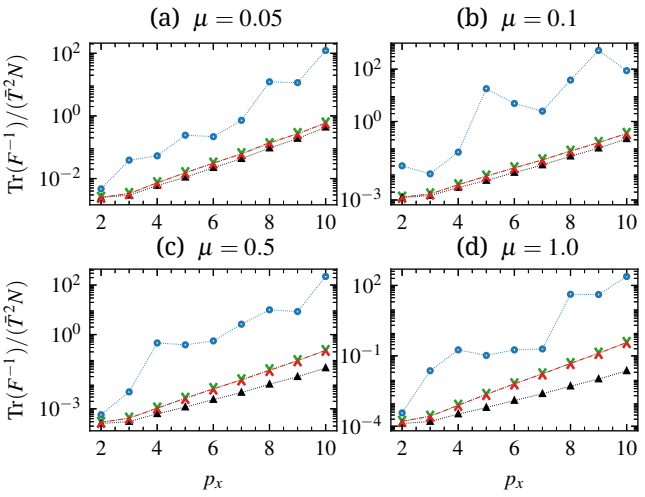


图4. 对于图 (a) 至 (d)，一维阵列中沿$\hat{x}$ 轴的不同像素数量 p_x 以及 $\mu = (0.05,\ 0.1,\ 0.5,\ 1.0)$ 对应的标量 Cramér–Rao 界（无量纲）。黑色三角形表示量子 Cramér-Rao 界，红色向上楔形标记表示使用针对光源像素实际温度分布优化的酉变换 $\mathbf{U}^{\mathrm{image}}{}_{\mathrm{opt}}$ 得到的标量经典克拉美-罗界。绿色向下楔形标记表示使用针对像素均匀温度优化的酉变换$\mathbf{U}_{\mathrm{opt}}^{\mathrm{uniform}}$，该酉变换用于估计具有相同平均温度的实际温度分布。蓝色圆圈表示优化前初始随机酉变换对应的标量 Cramér–Rao 界。像素尺寸为 $a = 2.5$ 千米，平均温度为 $\bar{T} = 300$ 开尔文，样本量为 $N = 10^6$。

光子数随 μ 增加而增加，这意味着每个像素发出的更多光子会提升参数的量子费舍尔信息。因此，在这一极限下，要达到量子 Cramér-Rao 界，需要进行光子数测量，而不能仅进行单光子测量。增加像素数 p 会增加干涉仪上的总光子数。因此，从图 (d) 到 (f)，各图中采用优化（$\mathbf{U}_{\mathrm{opt}}$）酉变换的测量所得量子 Cramér-Rao 界与兼容 Cramér–Rao 界之间的差距会增大。

在图3（g-j）中，我们比较了两种界限如何随光源尺寸 a 对于不同温度配置而变化。黑色、红色和蓝色实线表示量子克拉美-罗界，黑色虚线、红色点划线和蓝色点线表示针对不同 μ（0.1、0.5、1.0）的单光子正算子值测度测量所得的克拉美-罗界。除此之外，插图给出了探测模式中的总光子数。我们观察到，对于不同光源配置和不同光源尺寸，蓝色点线（$\mu = 0.1$）都非常接近量子极限，几乎达到量子克拉美-罗界的极限。当我们增大 μ 时，由于光子数增加，两种界限之间的差距会随光源尺寸 a 而增大。例如，比较黑色虚线（$\mu = 1.0$）和蓝色点线（$\mu = 0.1$）之间的差距。这是由于对于总光子数大于一的光源，单光子统计存在局限（$\mathrm{Tr}(\Gamma) > 1$）。

一般而言，最优酉变换取决于我们想要估计的参数（温度分布）。然而，在实际情况下，要完全优化酉变换，我们需要先了解这些参数。正如我们在双像素源一节中所讨论的，用于均匀温度分布的酉变换也可用于估计具有{v1}相同{v2}值的不同温度。

在实验中，可以单独估计平均温度，并针对均匀温度分布构造优化酉变换（$\mathbf{U}_{\mathrm{opt}}^{\mathrm{uniform}}$）。随后，用它来估计实际的非均匀温度分布。此外，我们还考察这两种界如何随像素数量（p_x）变化。图4从（a）到（d）分别展示了不同 $\mu = (0.05, 0.1, 0.5, 1.0)$对应的兼容 Cramér–Rao 界。蓝色圆圈表示CG算法的初始随机酉变换。黑色三角形表示标量量子克拉美-罗界。红色向上楔形标记表示针对像素随机温度分布的优化酉变换（$\mathbf{U}^{\mathrm{image}}{}_{\mathrm{opt}}$）所对应的标量经典克拉美-罗界。此外，绿色向下楔形标记表示针对像素均匀温度分布的优化酉变换（$\mathbf{U}_{\mathrm{opt}}^{\mathrm{uniform}}$），并将其用于估计具有相同像素数和相同平均温度的相应随机温度分布。由$\mathbf{U}_{\mathrm{opt}}^{\mathrm{uniform}}$得到的界

（绿色楔形）和$\mathbf{U}^{\mathrm{image}}{}_{\mathrm{opt}}$（红色楔形）在此对数尺度下彼此非常接近。此外，对于不同的 p_x，二者几乎都达到了 $\mu = 0.05$ 和 $\mu = 0.1$ 对应的量子克拉美-罗界。当我们增加像素数（p_x）时，可以看到所有界都随之增大。此外，与 $\mu = 0.1$相比，对于 $\mu = 0.5$和 $\mu = 1.0$，量子克拉美-罗界与单光子测量所得兼容 Cramér–Rao 界之间的差距更加显著。

C. 二维源的分辨率

本节考察像平面上总像素数为 $p = p_x p_y$ 的图像。二维阵列干涉仪的模式数 n 取为与p相同，其中 $n = n_x n_y$。每个像素的大小设为 $a = 3$ 千米，这比根据范西特-泽尼克定理得到的 SMOS 空间分辨率小约十倍；两个最近像素之间的间距再次设为零。我们要估计的参数是二维图像的温度 $\boldsymbol{\theta} = \{T_1,\ T_2,\ \ldots T_p\}$。我们考虑严重光子损耗的情况，并设定 $\mu = 0.01$；当 $T \sim 293$开尔文时，总光子数约为 $\mathrm{Tr}(\Gamma) \simeq 0.39$。在图5(a)中，我们考虑一幅 $\hbar$ 的实际图像，在像平面上使用30个像素，并在源平面上使用具有30个模式的干涉仪。将针对该图像优化的酉变换（$\mathbf{U}^{\mathrm{image}}{}_{\mathrm{opt}}$）或针对均匀温度分布的酉变换（$\mathbf{U}_{\mathrm{opt}}^{\mathrm{uniform}}$）应用于预处理阶段，以估计这些参数。对于经典测量，我们考虑采用（$\mathbf{U} = \mathbb{I}$）的局域测量情形。此外，我们使用最大似然估计量，根据大小为 N的样本重建不同测量策略得到的图像。在图5(b)中，我们使用$\mathbf{U}^{\mathrm{image}}{}_{\mathrm{opt}}$ 重建了图像。非局域测量以及针对该图像优化的酉变换为我们带来了优势。在这一参数范围内，重建图像与实际图像十分接近。尽管该酉变换取决于参数集，我们估计，通过采用自适应类型的测量 [97]，在每次测量后迭代更新酉变换，也可能达到相同的分辨率极限。

然而，这超出了本文的讨论范围。另一方面，为了便于实验实现，我们通过

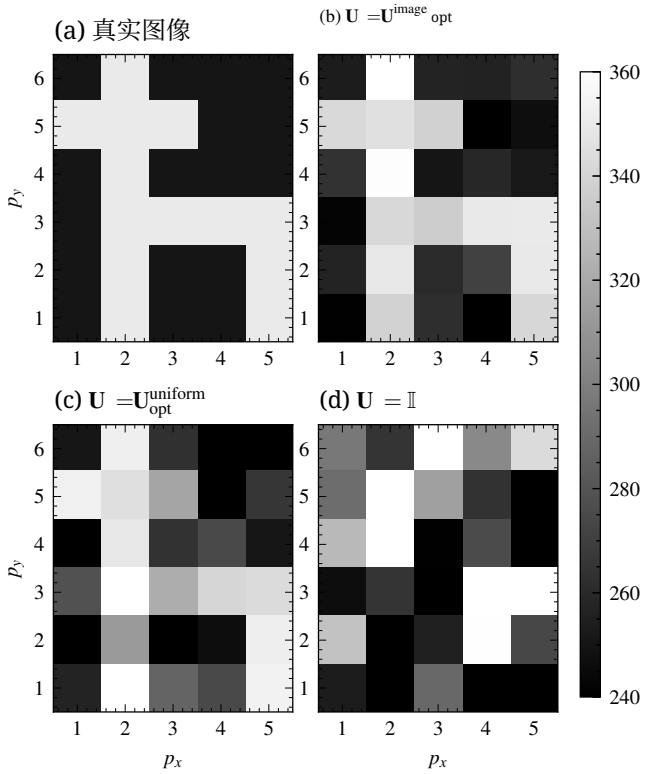


图 5. (a) 源平面上的真实图像，包含 30 个像素，将使用最大似然估计量进行估计。(b) 使用针对温度分布优化的酉变换$\mathbf{U}^{\text{image}}_{\text{opt}}$进行单光子探测后，在探测模式 $\hat{}\, d_i$ 中得到的重建图像。(c) 使用针对均匀温度分布优化的酉变换$\mathbf{U}^{\text{uniform}}_{\text{opt}}$得到的重建图像。(d) 使用考虑$\mathbf{U} = \mathbb{I}$的单光子局域测量得到的重建图像。像素尺寸为 $a = 3.0\,\text{km}$，平均温度为 $\bar{T} \sim 293$ 开尔文，样本量为 $N = 10^8$。

图像，使用 $\mathbf{U}^{\text{uniform}}_{\text{opt}}$（图 5（c））。可以根据源分布独立估算平均温度，并为任意图像构造这一通用酉变换。正如我们所见，重建图像仍能很好地呈现实际图像，但正如预期的那样，它不如采用专门优化的酉变换所得图像清晰。我们根据图 5（d）中的局域测量重建了图像。显然，这幅重建图像与原图相差甚远。对于我们的像素尺寸 $a = 3$ 千米而言，这是意料之中的；该尺寸远低于根据范西特-泽尼克定理 [47–50]。

IV. 结论

总之，我们将被动遥感表述为一个量子多参数估计问题，关注的是地面温度这一参数，而非当前量子成像研究的焦点——光源的几何信息，例如光源间距、质心或相位。天线阵列配备与源平面所需像素数量相同的天线，接收热电磁辐射，并在接收模式中按照优化后的酉变换进行混合。单光子探测器探测相应优化探测模式中的光子。优化目标是标量经典克拉美-罗界：将根据光子计数结果估计温度时的费 Fisher 信息矩阵的逆矩阵与正权重矩阵进行收缩，即可得到该界。利用后者，可以为图像不同部分的高分辨率赋予不同的优先级。对所有酉模式混合进行优化，可得到“最具信息量界”。对于所有像素权重均匀的情形，我们证明，采用这一过程，在具有热态特征的高斯白噪声情况下，可以近似达到标量量子克拉美–罗界；该界基于量子多参数估计问题的量子费舍尔信息矩阵与相同正权重矩阵的收缩（本研究中选取单位矩阵作为权重矩阵）。原则上，优化后的酉变换取决于实际温度分布，但我们证明，即使采用均匀温度分布得到的酉变换，其分辨率仍远高于直接对入射模式进行光子计数的分辨率。我们使用共轭梯度算法对酉变换进行优化。我们证明，所得到的最优模式混合后接以单光子探测，可使重建图像的空间分辨率至少比瑞利极限高约一个数量级（对于与 SMOS 天线阵列相当的阵列，即使存在显著光子损耗，分辨率也约为 3 km，而非 35 km）；在本例中，瑞利极限由范西特 - 泽尼克定理给出。最优酉变换可分解为使用分束器和移相器实现的 $SU(2)$ 个群元素，并可通过线性光学量子计算实现。鉴于近期微波波段单光子探测技术已可用，我们的结果展示了一条实现被动遥感分辨率大幅提升的途径，其性能优于本质上采用零差正交分量测量的经典干涉仪。若可进行光子数分辨测量，则在光子数更多或损耗更低时，或许还能进一步提升。

致谢

DB 和 EK 感谢德国研究联合会（DFG）通过项目编号 BR 5221\3-1 提供支持。我们感谢 Gerardo Adesso 参与讨论，DB 还感谢 Yann Kerr、Bernard Rougé 以及图卢兹的整个 SMOS 团队为该任务提供了宝贵见解。

附录A：用于优化的共轭梯度算法

本节总结了参考文献 [93, 95, 96] 给出的一种实用共轭梯度（CG）算法。通用 CG 算法首先（$k = 0$）针对初始酉矩阵求出代价函数$\mathbf{G}_k$（$\mathbf{U}_k$）的共轭梯度，其中

$$\mathbf{G}_k = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}^*} F(\mathbf{U}_k)\,. \tag{A1}$$

然后，该点处的黎曼梯度 $\mathbf{W}_k$ 可通过以下方式求得：

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{G}_k\mathbf{U}_k^\dagger - \mathbf{U}_k\mathbf{G}_k^\dagger. \tag{A2}$$

通过沿测地线方向（即沿 α 方向）使用 Armijo 方法确定步长（参见参考文献 [94] ），即可更新酉变换–$\mathbf{H}_k$。

$$\mathbf{U}_{k+1} = \exp(-\alpha\mathbf{H}_k)\mathbf{U}_k. \tag{A3}$$

此外，可以使用 Polak-Ribierre 公式 $\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{W}_{k+1} + \gamma_k\mathbf{H}_k$求得新的搜索方向，其中

$$\gamma_k := \frac{\langle \mathbf{W}_{k+1} - \mathbf{W}_k, \mathbf{W}_k\rangle}{\langle \mathbf{W}_k, \mathbf{W}_k\rangle}. \tag{A4}$$

定义的内积为 $\langle X, Y\rangle \equiv \mathrm{Tr}(X^\dagger Y)/2$，它在酉群上诱导出双不变度量 $U(n)$。我们会定期重置搜索方向，以确保$\mathbf{H}_k$ 的方向是下降方向。随后继续进行下一次迭代（伪代码见算法 1）。算法运行至收敛到代价函数的最小值，或达到最大迭代次数 $k_{\max}$。为高效处理代价函数的梯度，我们使用了 PyTorch 梯度函数。PyTorch 凭借其图形处理器功能应用于机器学习。

算法 1酉变换的共轭梯度算法优化

要求： $k = 0$, $\mathbf{U}_k =$ 随机酉变换, $n =$ **维度**$(\mathbf{U}_k)$, $\alpha = 1$

当 $k \neq k_{\max}$ **时执行**
  如果 k 对 $n^2 = 0$ 取模**则**
    $\mathbf{G}_k = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}^*} F(\mathbf{U}_k)$
    $\mathbf{W}_k = \mathbf{G}_k\mathbf{U}_k^\dagger - \mathbf{U}_k\mathbf{G}_k^\dagger$
    $\mathbf{H}_k := \mathbf{W}_k$
  else
    $\mathbf{W}_k \leftarrow \mathbf{W}_{k+1}$
    $\mathbf{H}_k \leftarrow \mathbf{H}_{k+1}$
  结束如果
  $\mathbf{P}_k = \exp(-\alpha\mathbf{H}_k)$
  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{P}_k\mathbf{P}_k$
  当 $F(\mathbf{U}_k) - F(\mathbf{Q}_k\mathbf{U}_k) \geq \alpha\langle \mathbf{W}_k, \mathbf{H}_k\rangle$ **时执行**
    $\mathbf{P}_k = \mathbf{Q}_k$
    $\mathbf{Q}_k = \mathbf{P}_k\mathbf{P}_k$
    $\alpha = 2\mu$
  结束循环
  当 $F(\mathbf{U}_k) - F(\mathbf{P}_k\mathbf{U}_k) < (\alpha/2)\langle \mathbf{W}_k, \mathbf{H}_k\rangle$ **执行**
    $\alpha = \alpha/2$
    $\mathbf{P}_k = \exp(-\alpha\mathbf{H}_k)$
  结束循环
  $\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{P}_k\mathbf{U}_k$
  $\mathbf{G}^{k+1} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}^*} F(\mathbf{U}_{k+1})$
  $\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{G}_{k+1}\mathbf{U}_{k+1}^\dagger - \mathbf{U}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1}^\dagger$
  $\gamma_k := \frac{\langle \mathbf{W}_{k+1} - \mathbf{W}_k, \mathbf{W}_k\rangle}{h\mathbf{W}_k, \mathbf{W}_k i}$
  $\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{W}_{k+1} + \gamma_k\mathbf{H}_k$
  若 $\langle \mathbf{W}_{k+1}, \mathbf{H}_{k+1}\rangle \leq 0$ **则**
    $\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{W}_{k+1}$
  结束条件判断
  $\mathbf{U}_k \leftarrow \mathbf{U}_{k+1}$
  $k \leftarrow k + 1$
结束循环

[1] A. Bhandari、A. Kadambi 和 R. Raskar，《计算成像》（麻省理工学院出版社，2022年）。[2] R. Hanbury Brown 和 R. Q. Twiss，《在天狼星上测试一种新型恒星干涉仪》，《自然》**178**，1046（1956年）。[3] U. Fano，《相位无关光混合中的干涉效应量子理论》，《美国物理学杂志》**29**，539（1961年），ADS Bibcode：1961AmJPh..29..539F。[4] S. W. Hell 和 J. Wichmann，《通过受激发射突破衍射分辨率极限：受激发射损耗荧光显微术》，《光学快报》**19**，780（1994年）。[5] S. W. Hell，《远场光学纳米显微术》，《科学》**316**，1153（2007年）。[6] C. W. Helstrom，《检测理论与量子力学》，《书中》计算机形式**10**，254（1967年）。[7] C. W. Helstrom，《量子探测与估计理论》，统计物理学杂志 **1**，231（1969）。[8] C. W. Helstrom，量子力学中算子值测度的克拉美-罗不等式，国际理论物理学杂志 **8**，361（1973）。[9] C. W. Helstrom，量子极限光学系统的物体参数估计，美国光学学会杂志 **60**，233（1970）。[10] O. Pinel、J. Fade、D. Braun、P. Jian、N. Treps 和 C. Fabre，强高斯量子光精密测量的终极灵敏度：一种多模方法，Phys. Rev. A **85**，010101（2012）。[11] O. Pinel、P. Jian、N. Treps、C. Fabre 和 D. Braun，量子

参数估计：使用一般单模高斯态，Phys. Rev. A 88，040102（2013）。[12] M. Tsang，亚衍射非相干光学成像的量子极限，Phys. Rev. A 99，012305（2019）。[13] S. Zhou 和 L. Jiang，瑞利判据的现代描述，Phys. Rev. A 99，013808（2019）。[14] G. Sorelli、M. Gessner、M. Walschaers 和 N. Treps，基于矩的超分辨率：形式体系与应用（2021），arXiv:2105.12396。[15] J. ˇReha ˇcek、Z. Hradil、B. Stoklasa、M. Paúr、J. Grover、A. Krzic 和 L. L. Sánchez-Soto，非相干点光源的多参数量子计量：迈向现实超分辨率，Phys. Rev. A 96，062107（2017）。[16] C. Napoli、S. Piano、R. Leach、G. Adesso 和 T. Tufarelli，迈向超分辨率表面计量：角向和轴向间距的量子估计，《物理评论快报》122，140505（2019）。[17] R. Nair 和 M. Tsang，量子极限下热电磁源的远场超分辨率，《物理评论快报》117，190801（2016）。[18] C. Lupo 和 S. Pirandola，量子成像与亚波长成像的终极精度界，《物理评论快报》117，190802（2016）。[19] W. Larson 和 B. E. A. Saleh，部分相干条件下瑞利诅咒的再现，《光学》5，1382（2018）。[20] S. Kurdziałek 和 R. Demkowicz-Dobrza´nski，超分辨率光学涨落成像——基础估计理论视角，美国光学学会杂志 23，075701（2021）。[21] M. I. Kolobov 和 C. Fabre，光学分辨率的量子极限，《物理评论快报》85，3789（2000）。[22] S. Z. Ang、R. Nair 和 M. Tsang，两个非相干光学点光源二维分辨率的量子极限，Phys. Rev. A 95，063847（2017）。[23] M. Tsang，弱热光干涉测量中的量子非定域性，《物理评论快报》107，270402（2011）。[24] E. Bisketzi、D. Branford 和 A. Datta，定位显微术的量子极限，New J. Phys. 21，123032（2019）。[25] M. Bojer、Z. Huang、S. Karl、S. Richter、P. Kok 和 J. von Zanthier，天文学中振幅干涉测量与强度干涉测量的定量比较（2021），arXiv:2106.05640。[26] C. Datta、M. Jarzyna、Y. L. Len、K. Łukanowski、J. Kołody´nski 和 K. Banaszek，通过阵列零差探测实现两个非相干光源的亚瑞利分辨率，Phys. Rev. A 102，063526（2020）。[27] J. O. de Almeida、J. Kołody´nski、C. Hirche、M. Lewenstein 和 M. Skotiniotis，失准条件下非相干光源的判别与估计，Phys. Rev. A 103，022406（2021）。[28] K. Liang、S. A. Wadood 和 A. N. Vamivakas，相干效应对一般亚瑞利物体分布矩估计的影响（2021），arXiv:2105.06817。[29] M. Tsang，通过空间模式解复用实现亚衍射非相干光学成像，New J. Phys. 19，023054（2017）。[30] M. Tsang，光学点光源定位的量子极限，《光学》2，646（2015）。[31] I. Karuseichyk、G. Sorelli、M. Walschaers、N. Treps 和 M. Gessner，利用任意统计特性分辨互相干光点源，Physical Review Research 4，043010（2022）。[32] C. Lupo、Z. Huang 和 P. Kok，通过线性干涉测量达到非相干成像的量子极限，《物理评论快报》124，080503（2020）。[33] D. Gottesman、T. Jennewein 和 S. Croke，利用量子中继器构建长基线望远镜，《物理评论快报》109，070503 2012( )。[34] E. T. Khabiboulline

，J. Borregaard ，K. De Greve ，和 M. D. Lukin，《量子网络光学干涉测量》，Phys. Rev. Lett. 123，070504（2019）。[35] Y. Wang、Y. Zhang 和 V. O. Lorenz，《强热光源干涉成像中的超分辨率》，Phys. Rev. A 104, 022613（2021）。[36] M. P. Backlund、Y. Shechtman 和 R. L. Walsworth，《基于泊松统计的三维光学定位显微术的基本精度界限》，Phys. Rev. Lett. 121, 023904（2018）。[37] M. Mazelanik、A. Leszczynski 和 M. Parniak，《量子存储器实现的光学域光谱超分辨率》（2021），arXiv:2106.04450。[38] M. Paúr、B. Stoklasa、Z. Hradil、L. L. Sánchez-Soto 和 J. Rehacek，《实现极限光学分辨率》，《光学》3, 1144（2016）。[39] A. A. Pushkina、G. Maltese、J. I. Costa-Filho、P. Patel 和 A. I. Lvovsky，《远场超分辨率线性光学成像》（2021），arXiv:2105.01743。[40] P. Boucher、C. Fabre、G. Labroille 和 N. Treps，《空间光学模式解复用：实现最优横向距离估计的实用工具》，《光学》7, 1621（2020）。[41] G. Sorelli、M. Gessner、M. Walschaers 和 N. Treps，《实用超分辨率成像的最优观测量与估计量》，Physical Review Letters 127, 123604（2021）。[42] P. C. Humphreys、M. Barbieri、A. Datta 和 I. A. Walmsley，《量子增强多相位估计》，Physical Review Letters 111, 070403（2013）。[43] C. N. Gagatsos、D. Branford 和 A. Datta，《用于量子增强多相位估计的高斯系统》，Physical Review A 94, 042342（2016）。[44] P. A. Knott、T. J. Proctor、A. J. Hayes、J. F. Ralph、P. Kok 和 J. A. Dunningham，《多参数估计中的局部与全局策略》，Physical Review A 94, 062312（2016）。[45] L. Pezzè、M. A. Ciampini、N. Spagnolo、P. C. Humphreys、A. Datta、I. A. Walmsley、M. Barbieri、F. Sciarrino 和 A. Smerzi，《多相位同时量子估计的最优测量》，Physical Review Letters 119, 130504（2017）。[46] E. Köse、G. Adesso 和 D. Braun，《量子增强被动遥感》，Physical Review A 106, 012601（2022年）。[47] E. Anterrieu，《合成孔径成像辐射计的分辨矩阵方法》，《IEEE地球科学与遥感汇刊》42, 1649（2004）。[48] I. Corbella、N. Duffo、M. Vall-llossera、A. Camps 和 F. Torres，《干涉孔径综合辐射测量中的可见度函数》，《IEEE地球科学与遥感汇刊》42, 1677（2004）。[49] D. Le Vine，《合成孔径辐射计系统》，《IEEE微波理论与技术汇刊》47, 2228（1999）。[50] A. R. Thompson、J. M. Moran、Swenson Jr 和 George W，《射电天文学中的干涉测量与综合》（Springer International Publishing，2017）。[51] P. van Cittert，《由光源直接或经透镜照明的平面中的可能振动分布》，《物理学》1, 201（1934）。[52] F. Zernike，《相干度的概念及其在光学问题中的应用》，《物理学》5, 785（1938）。[53] D. Braun、Y. Monjid、B. Rougé 和 Y. Kerr，《范西特特–泽尼克定理的推广：相对于光源运动的观测者》，《测量科学与技术》27, 015002（2016）。[54] F. Albarelli、M. Barbieri、M. Genoni 和 I. Gianani，《多参数量子计量展望：从理论工具到量子成像应用》，《物理快报A辑》384, 126311（2020）。[55] P. Kok

，W. J. Munro ，K. Nemoto ，T. C. Ralph ，J. P. Dowling ，and

G. J. Milburn，《使用光子量子比特进行线性光学量子计算》，现代物理评论 79，135（2007年）。[56] T. Baumgratz 和 A. Datta，《多维场的量子增强估计》，Physical Review Letters 116，030801（2016）。[57] E. Bagan、M. A. Ballester、R. D. Gill、A. Monras 和 R. Muñoz- Tapia，《量子比特混合态的最优完全估计》，物理评论A 73，032301（2006）。[58] M. Guta 和 J. Kiukas，《量子马尔可夫动力学多参数估计的信息几何与局部渐近正态性》，数学物理学杂志 58，052201（2017）。[59] M. Szczykulska、T. Baumgratz 和 A. Datta，《多参数量子计量》，物理学进展：X 1，621（2016）。[60] S. Ragy、M. Jarzyna 和 R. Demkowicz-Dobrza´nski，《多参数量子计量中的相容性》，Phys. Rev. A 94，052108 2016( )。[61] D. Braun、Y. Monjid、B. Rougé 和 Y. Kerr，《傅里叶相关成像》，J. Appl. Phys. 123，074502（2018）。[62] J. Liu、H. Yuan、X.-M. Lu 和 X. Wang，《量子费 Fisher 信息矩阵与多参数估计》，物理学杂志A：数学与理论 53，023001（2020）。[63] J. Shapiro，《光通信量子理论》，IEEE量子电子学精选主题期刊 15，1547（2009）。[64] C. Oh、S. Zhou、Y. Wong 和 L. Jiang，《噪声环境中的超分辨率量子极限》，Physical Review Letters 126，120502（2021）。[65] M. Gessner、C. Fabre 和 N. Treps，《测量串扰导致的超分辨率极限》，Physical Review Letters 125，100501（2020）。[66] Y. L. Len、C. Datta、M. Parniak 和 K. Banaszek，《噪声探测下空间模式解复用的分辨率极限》，国际量子信息杂志 18，1941015（2020）。[67] K. J. Blow、R. Loudon、S. J. D. Phoenix 和 T. J. Shepherd，《量子光学中的连续场》，Phys. Rev. A 42，4102（1990）。[68] L. Mandel、E. Wolf 和 P. Meystre，《光学相干与量子光学》，Am. J. Phys. 10.1119/1.18450（1996）。[69] R. J. Glauber，《辐射场的相干态与非相干态》，Phys. Rev. 131，2766（1963）。[70] M. O. Scully、M. S. Zubairy 和 I. A. Walmsley，《量子光学》，Am. J. Phys. 10.1119/1.19344（1999）。[71] R. Loudon 和 T. von Foerster，《光的量子理论》，Am. J. Phys. 42，1041（1974）。[72] R. Kubo，《涨落耗散定理》，Rep. Prog. Phys. 29，255（1966）。[73] S. Savasta、O. Di Stefano 和 R. Girlanda，《任意散射系统的光量子化》，Phys. Rev. A 65，043801（2002）。[74] E. A. Sharkov，《地球被动微波遥感：物理基础》（Springer，柏林；伦敦，2011）。[75] L. D. Landau、E. M. Lifshits、L. P. Pitaevskiĭ、L. D. Landau 和 L. D. Landau，《统计物理学》，佩加蒙科学、技术、工程与社会研究国际丛书第5卷第9号，1980年（佩加蒙出版社，牛津；纽约）。[76] R. Carminati 和 J.-J. Greffet，《热源空间相干性的近场效应》，Physical Review Letters 82，1660 1999( )。[77] J. Zmuidzinas，《天文仪器的克拉美–罗灵敏度极限：对干涉仪设计的启示》，J. Opt. Soc. Amer. A 20, 218 (2003). [78] J. Zmuidzinas，光子探测中的热噪声与相关性，应用光学 42, 4989 (2003). [79] J. S. Sidhu 和 P. Kok，量子参数估计的几何视角，AVS Quantum Sci 2, 014701 (2020). [80] Y. Gao 和 H. Lee，高斯态量子多参数估计的界，Eur. Phys. J. D 68, 347 (2014). [81] D. Braun、P. Jian、O. Pinel 和 N. Treps，使用光子减除或光子添加高斯态进行精密测量，Phys. Rev. A 90, 013821 (2014). [82] G. Adesso、S. Ragy 和 A. R. Lee，连续变量量子信息：高斯态及其他，Open Systems & Information Dynamics 21, 1440001 (2014). [83] S. Olivares，相空间中的量子光学：高斯态教程，Eur. Phys. J. Special Topics 203, 3 (2012). [84] C. Weedbrook、S. Pirandola、R. García-Patrón、N. J. Cerf、T. C. Ralph、J. H. Shapiro 和 S. Lloyd，高斯量子信息，Rev. Mod. Phys. 84, 621 (2012). [85] S. L. Braunstein 和 C. M. Caves，统计距离与量子态的几何，Physical Review Letters 72, 3439 (1994). [86] M. G. A. Paris，量子技术的量子估计，International Journal of Quantum Information 07, 125 (2009). [87] A. Holevo，量子系统的统计决策理论，J Multivariate Anal 3, 337 (1973). [88] M. Tsang、F. Albarelli 和 A. Datta，量子半参数估计，Physical Review X 10, 031023 (2020). [89] I. J. Myung，最大似然估计教程，Journal of Mathematical Psychology 47, 90 (2003). [90] M. Paris 和 J. ˇRehá ˇcek 编，量子态估计，物理学讲义第649卷（Springer，柏林；纽约，2004）。[91] R. Nichols、P. Liuzzo-Scorpo、P. A. Knott 和 G. Adesso，多参数高斯量子计量，Phys. Rev. A 98, 012114 2018( ). [92] R. Yousefjani、R. Nichols、S. Salimi 和 G. Adesso，利用随机生成元估计相位：多参数量子计量中的策略与资源，Physical Review A 95, 062307 (2017). [93] T. Abrudan、J. Eriksson 和 V. Koivunen，酉矩阵约束下优化的共轭梯度算法，Signal Processing 89, 1704 (2009). [94] T. Abrudan、J. Eriksson 和 V. Koivunen，酉矩阵约束下黎曼优化的高效线搜索方法，载于2007年第四十一届阿西洛马信号、系统与计算会议记录（IEEE，Pacific Grove，美国加利福尼亚州，2007），第671–675页。[95] T. E. Abrudan、J. Eriksson 和 V. Koivunen，酉矩阵约束下优化的最速下降算法，IEEE Transactions on Signal Processing 56, 1134 (2008). [96] T. Abrudan、J. Eriksson 和 V. Koivunen，酉矩阵约束下优化的高效黎曼算法，载于2008年IEEE国际声学、语音与信号处理会议（IEEE，拉斯维加斯，美国内华达州，2008），第2353–2356页。[97] A. Fujiwara，自适应量子估计问题的强一致性与渐近效率，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 44, 079501 (2011).