arXiv:2301.01563v1 [math.NA] 4 Jan 2023

用于 $\boldsymbol{H}$(旋度)-椭圆问题的混合内罚不连续Galerkin有限元方法的后验误差估计子

Ming Tang[a]、Xiaoqing Xing[a,*]、Liuqiang Zhong[a]

[a]*School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou 510631, China*

摘要

本文针对 $\boldsymbol{H}$(旋度)-椭圆问题的混合内罚不连续Galerkin方法，设计了首个残量型后验误差估计子。随后，我们证明了基于残差的后验误差指标同时具有可靠性和效率。最后，我们给出了一些数值实验，以验证该指标在自适应网格加密过程中的性能。

关键词： $\boldsymbol{H}$(旋度)-椭圆问题、混合内罚不连续Galerkin方法、后验误差估计子、可靠性、效率。

1. 引言

本文考虑如下 $\boldsymbol{H}$（旋度）椭圆问题：求电场或磁场 $\boldsymbol{u}$，使其满足

$$\boldsymbol{curl}(\alpha \text{curl } \boldsymbol{u}) + \beta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \qquad \text{in } \Omega, \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} = 0, \qquad \text{on } \partial\Omega, \tag{1.2}$$

其中，$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个单连通有界Lipschitz多边形，其边界为 $\partial\Omega$，并被划分为互不重叠的子域 Ω_i；$1 \le i \le m$, $\boldsymbol{f}$ 是依赖于给定外部源场的给定向量场； $\boldsymbol{t}$ 是 $\partial\Omega$上的单位切向量，方向为逆时针；$\alpha \ge \alpha_0 > 0$ 和$\beta \ge \beta_0 > 0$ 是 Ω_i中的分片常数； α_0 和 β_0 是常数。回顾一下，对于向量场 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$，旋度为 curl $\boldsymbol{v} = \partial v_2/\partial x - \partial v_1/\partial y$；而对于标量函数$\phi$， $\boldsymbol{curl}\, \phi = (\partial\phi/\partial y, -\partial\phi/\partial x)$。我们的数值格式和后验误差分析基于方程 (1.1)-(1.2) 的混合形式，该形式通过引入辅助变量 $p =$ curl $\boldsymbol{u}$得到。

$$\boldsymbol{curl}\ (\alpha p) + \beta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \qquad \text{in } \Omega, \tag{1.3}$$

$$p - \text{curl } \boldsymbol{u} = 0, \qquad \text{in } \Omega, \tag{1.4}$$

*通讯作者*Email addresses:* mingtang@m.scnu.edu.cn (Ming Tang), xingxq@scnu.edu.cn (Xiaoqing Xing), zhong@scnu.edu.cn (LiuqiangZhong)

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}=0,\ \text{在}\ \partial\Omega。 \tag{1.5}$$

间断Galerkin（DG）有限元方法是偏微分方程数值求解中常用的方法之一。与传统的协调有限元方法相比，DG有限元方法具有以下优点：能够适用于非协调悬挂节点网格，易于处理复杂的边界和界面问题，也易于实现局部加密以及各单元多项式次数的独立选取。DG方法的一个关键特征是，在单元边界与解的跳跃不连续性相吻合时，单元界面上的非连续近似能够自然地允许解出现跳跃不连续性 [20]。DG方法已用于求解许多方程，例如椭圆问题 [3], 、抛物方程 [23], 以及对流-扩散-反应问题 [17]。DG方法包括局部DG（LDG）方法 [7], 和内罚DG（IPDG）方法 [1]。用于$\boldsymbol{H}$(curl)–椭圆问题的间断有限元方法仍处于起步阶段。Chung 和 Kim [10] 针对二维 $\boldsymbol{H}$(curl)–椭圆问题的混合交错间断有限元方法，提出了一种改进的 FETI-DP算法并进行了收敛性分析。

另一方面，在实际工程应用和科学计算中，许多因素都可能导致电磁场传播过程中出现强奇异性。例如，电磁波传播区域内介质的材料系数不连续，或者产生电磁场的源项不光滑 [12, 13]。虽然在数值求解时可以通过均匀加密网格来克服这些奇异性，但持续加密会导致计算成本急剧增加。因此，自适应有限元应运而生。在过去几十年中，自适应有限元方法已被证明是科学计算中一种实用且有效的工具。标准的自适应流程如下：求解 $\rightarrow$ 估计 $\rightarrow$ 标记 $\rightarrow$ 细化。自适应有限元方法基于后验误差估计。它根据单元上的局部后验误差指标，自动细化网格并优化网格生成。这是一种具有高可靠性和效率的数值计算方法。

关于 $\boldsymbol{H}$(旋度)-椭圆方程自适应方法收敛性的研究，大多聚焦于边有限元。例如，分别利用所谓的内部节点性质和振荡标记作为技术假设，证明了 N´ed´elec 第一族最低阶边元用于二维和三维涡流方程自适应求解时的收敛性 [4,14], 。Chen、Xu 和 Zou [8] 证明了一种求解三维静态麦克斯韦方程的自适应方法，无需额外标记振荡项，并给出了采用 N´ed´elec 第一族最低阶边元时的相应收敛性证明。Zhong、Shu、Chen 和 Xu [29] 证明，采用 N´ed´elec 两族高阶边元，可以保证变系数三维 $\boldsymbol{H}$(旋度)-椭圆问题的收敛性。另有一些研究探讨了 $\boldsymbol{H}$(旋度)-椭圆问题自适应DG有限元方法的后验误差估计子 [16, 26]。Houston、Perugia 和 Schotzau [16] 给出了残差

型后验误差估计子，并证明了该误差估计子的可靠性和效率。Xing 和 Zhong [26] 给出了一个简化的后验误差指标，并证明了相应的上界。最近，Zhong、Chen 和 Xing [28] 证明了自适应内罚间断伽辽金方法的收敛性。

与此同时，已有许多采用混合有限元方法求解麦克斯韦方程的成功研究，例如 [18,19,21,15]。然而，对于采用自适应混合有限元方法求解麦克斯韦方程，目前关于后验误差估计子的研究成果寥寥。例如，Carstensen、Hoppe、Sharma 和 Warburton [6] 研究了混合化有限元方法的后验误差估计，并证明该估计子具有可靠性，但存在一致性误差。Chung、Yuen 和 Zhong [11] 研究了时谐麦克斯韦方程的交错间断伽辽金方法的后验误差估计，并证明基于残差的后验误差指标既可靠又有效。据我们所知，目前尚无关于 $\boldsymbol{H}$旋度–椭圆问题 (1.1)-(1.2) 的自适应混合有限元方法后验误差估计的已发表文献。本文的主要思路源自 [11]。然而，其中一个主要工具—— [24], 给出的 Cl´ement 型拟插值算子——无法用于二维有限元空间。为此，我们采用亥姆霍兹分解以及文献 [25, 4] 中的算子进行估计。

下面给出本文中使用的一些记号。为避免反复书写常数，本文将采用以下简记：依照 [27], $x \lesssim y$ 和 $x \approx y$ 表示 $x \le C_1 y$ 和 $C_2 x \le y \le C_3 x$，其中 C_1, C_2 和 C_3 为一般的正数。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍一些基本记号，给出模型问题 (1.1)-(1.2) 的变分形式，并构造一个残量型后验误差估计子。第 3 节和第 4 节分别证明该误差指示子的可靠性和有效性。第 5 节给出一些数值结果，以支持理论结果。

2. 混合内罚间断伽辽金方法与后验误差指示子

本节给出连续变分问题、混合 IPDG 方法的离散变分问题，以及后验误差指示子的定义。

2.1. 连续变分问题

对于任意区域 $D \subset \mathbb{R}^2$，我们采用标准定义，将标量值和向量值平方可积函数的索伯列夫空间 $H^s(D)$ 和 $\boldsymbol{H}^s(D)$ 配备内积 $(\cdot,\ \cdot)_{s,\ D}$ 及相应的范数 $\|\cdot\|_{s,\ D}$，分别对应 $s \ge 0$。我们将 $L^2(D)$ 和 $\mathbf{L}^2(D)$ 称为标量值和向量值平方可积函数的希尔伯特空间，其内积为 $(\cdot,\ \cdot)_{0,\ D}$，相应的范数为 $\|\cdot\|_{0,\ D}$。为简便起见，当 $G = D$ 时，我们省略下标。于是，这些空间定义如下：

$$\boldsymbol{H}(\mathrm{curl}, \Omega) := \left\{ \boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega), \mathrm{curl}\ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega) \right\},$$
$$\boldsymbol{H}_0(\mathrm{curl}, \Omega) := \left\{ \boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{curl}, \Omega), \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t} = 0\ on\ \partial\Omega \right\}.$$

空间 $\boldsymbol{H}$(旋度，Ω) 配备范数$\|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathrm{curl},\ \Omega}:=\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\ \Omega}+\|$旋度$\boldsymbol{v}\|^2_{0,\ \Omega}$，其中任意 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}$(旋度，Ω) 均成立。

我们将符号 $\boldsymbol{H}_0$(curl,Ω) 和 L^2(Ω) 分别简记为 $\boldsymbol{U}$ 和 $\mathbb{Q}$。本文假设 $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega)=\{\boldsymbol{v}:\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}^2(\Omega)\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}\in L^2(\Omega)\}$。式 (1.3)-(1.5) 的变分形式为求解 $(\boldsymbol{u},p)\in\boldsymbol{U}\times\mathbb{Q}$，使得

$$a(p,q)-b(\boldsymbol{u},q)=\ell_1(q),\quad\forall q\in\mathbb{Q}, \tag{2.6}$$

$$d(\boldsymbol{v},p)+c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\ell_2(\boldsymbol{v}),\ \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{U}, \tag{2.7}$$

其中四个双线性型定义如下

$$a(p,q):=(p,q), \tag{2.8}$$

$$b(\boldsymbol{u},q):=(\mathrm{curl}\ \boldsymbol{u},q), \tag{2.9}$$

$$c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}):=(\beta\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \tag{2.10}$$

$$d(\boldsymbol{v},p):=(\mathrm{curl}\ \boldsymbol{v},\alpha p), \tag{2.11}$$

以及两个线性泛函 $\ell_1(\cdot)\in\mathbb{Q}^*$、 $\ell_2(\cdot)\in\boldsymbol{U}^*$，其中 $\mathbb{Q}^*$ 和 $\boldsymbol{U}^*$ 分别是 $\mathbb{Q}$ 和$\boldsymbol{U}$的对偶空间，定义如下

$$\ell_1(q):=0, \tag{2.12}$$

$$\ell_2(\boldsymbol{v}):=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}). \tag{2.13}$$

为了证明连续变分问题 (2.6)-(2.7) 的适定性以及后验误差指示子的可靠性（见引理 3.1），我们还定义算子 $\mathcal{A}:(\boldsymbol{U}\times\mathbb{Q})\mapsto(\boldsymbol{U}\times\mathbb{Q})^*$ 如下

$$(\mathcal{A}(\boldsymbol{u},p))(\boldsymbol{v},q):=a(p,q)-b(\boldsymbol{u},q)+d(\boldsymbol{v},p)+c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\quad\text{for all }\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{U},p,q\in\mathbb{Q}.$$

因此，可得到方程（2.6）-（2.7）的算子形式

$$(\mathcal{A}(\boldsymbol{u},p))(\boldsymbol{v},q)=\ell(\boldsymbol{v},q), \tag{2.14}$$

其中 $\ell(\boldsymbol{v},\ q)=\ell_2(\boldsymbol{v})+\ell_1(q)$。

以下引理给出了变分问题（2.6）-（2.7）解的存在唯一性。

引理2.1 （[11], 引理2.1）。 设Ω 为具有连通边界 $\partial\Omega$的有界*Lipschitz*多边形。则 $\mathcal{A}$ 是一个连续双射线性算子。此外，对于任意（ℓ_1,ℓ_2）$\in\mathbb{Q}^*\times\boldsymbol{U}^*$ 分别由（2.16）和（2.17）给出时，方程组（2.6）-（2.7）具有唯一解（$\boldsymbol{u},p$）$\in\boldsymbol{U}\times\mathbb{Q}$，满足

$$\|(\boldsymbol{u},p)\|_{\boldsymbol{U}\times\mathbb{Q}}:=\left(\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{U}}+\|p\|^2_{\mathbb{Q}}\right)^{1/2}\lesssim\|\ell_1\|_{\mathbb{Q}^*}+\|\ell_2\|_{\boldsymbol{U}^*}, \tag{2.15}$$

其中，$\|\cdot\|_{\mathbb{Q}^*}$ 和 $\|\cdot\|_{\boldsymbol{U}^*}$ 分别是 $\mathbb{Q}^*$ 和 $\boldsymbol{U}^*$中的对偶范数。

2.2. 离散变分问题

在介绍离散变分问题之前，我们先介绍一些预备知识。给定 Ω 的形状正则三角剖分 $\mathcal{T}_h$。对于 $\tau \in \mathcal{T}_h$，我们用 $h_\tau = |\tau|^{1/2}$ 表示单元 τ的局部网格尺寸，其中 $|\tau|$ 是 τ的勒贝格测度。令 $h = \max_{\tau\in\mathcal{T}_h} h_\tau$。

设 $\mathcal{E}_h$ 为所有边的集合， $\mathcal{E}_h^0 = \mathcal{E}_h \backslash \partial\Omega$ 为所有内部边的集合， $\mathcal{E}_h^\partial = \mathcal{E}_h \cap \partial\Omega$ 为所有边界边的集合，则 $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^0 \bigcup \mathcal{E}_h^\partial$。

对于 $\mathcal{T}_h' \subseteq \mathcal{T}_h$ 和 $\mathcal{E}_h' \subseteq \mathcal{E}_h$，离散 L^2 内积和范数定义为

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\mathcal{T}_h'} = \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h'} (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_\tau = \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h'} \int_\tau \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\mathrm{d}x, \quad \|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{T}_h'}^2 = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})_{\mathcal{T}_h'},$$
$$\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle_{\mathcal{E}_h'} = \sum_{e\in\mathcal{E}_h'} \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle_e = \sum_{e\in\mathcal{E}_h'} \int_e \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\mathrm{d}s, \quad \|\boldsymbol{v}\|_{\mathcal{E}_h'}^2 = \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{E}_h'}.$$

对于满足 $e = \partial\tau_1 \cap \partial\tau_2$的任意 $e \in \mathcal{E}_h^0$，我们将向量函数 $\boldsymbol{w}$ 的平均值、切向跳跃和法向跳跃定义为

$$\{\{\boldsymbol{w}\}\}_e = (\boldsymbol{w}|_{\tau_1} + \boldsymbol{w}|_{\tau_2})/2,$$
$$[[\boldsymbol{w}]]_e = \boldsymbol{w}|_{\tau_1}\cdot\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{w}|_{\tau_2}\cdot\boldsymbol{t}_2,$$
$$[\boldsymbol{w}]_e = \boldsymbol{w}|_{\tau_1}\cdot\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{w}|_{\tau_2}\cdot\boldsymbol{n}_2,$$

其中， $\boldsymbol{w}|_{\tau_i}$ 表示 $\boldsymbol{w}$ 在 τ_i上的取值， $\boldsymbol{t}_i$ 和 $\boldsymbol{n}_i$ 分别是 τ_i 在 e 上的单位切向量和外法向单位向量（$i = 1,\ 2$）。

S类似地，对于标量函数 ϕ，我们定义其在 e 上的平均值和切向跳跃 as

$$\{\{\phi\}\}_e = (\phi|_{\tau_1} + \phi|_{\tau_2})/2,\ [[\phi]]_e = \phi|_{\tau_1}\boldsymbol{t}_1 + \phi|_{\tau_2}\boldsymbol{t}_2,$$

其中， $\phi|_{\tau_i}$ 表示 ϕ 在 τ_i上的值， $i = 1,\ 2$。

对于任意 $e \in \mathcal{E}_h^\partial$，存在一个单元 $\tau \in \mathcal{T}_h$，使得 $e \in \partial\tau \cap \partial\Omega$，我们将向量函数 $\boldsymbol{w}$ 的平均值、切向跳跃和法向跳跃定义为

$$\{\{\boldsymbol{w}\}\}_e = \boldsymbol{w}|_\tau,\ [[\boldsymbol{w}]]_e = \boldsymbol{w}|_\tau\cdot\boldsymbol{t},\ [\boldsymbol{w}]_e = \boldsymbol{w}|_\tau\cdot\boldsymbol{n}$$

其中， $\boldsymbol{w}|_\tau$ 表示 $\boldsymbol{w}$ 在 τ 上的值，而 $\boldsymbol{n}$ 表示 τ在 e 上的外法向单位向量。对于标量函数 ϕ，其在 e 上的平均值和切向跳跃定义为

$$\{\{\phi\}\}_e = \phi|_\tau,\ [[\phi]]_e = \phi|_\tau\boldsymbol{t},$$

其中， $\phi|_\tau$ 表示 ϕ 在 τ上的值。

DG方法基于通过逐元素多项式逼近向量场 $\boldsymbol{u}$ 和 p，从而构造有限维函数空间

$$\boldsymbol{U}_h := \left\{\boldsymbol{v}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \boldsymbol{v}_h|_\tau \in \mathcal{R}_1(\tau),\ \boldsymbol{v}_h|_e = 0, \forall\tau \in \mathcal{T}_h\right\},$$

$$\mathbb{Q}_h := \left\{ q_h \in L^2(\Omega) \mid q_h|_\tau \in P_0(\tau), \forall \tau \in \mathcal{T}_h \right\},$$

其中 $\mathcal{R}_1(\tau) = \left\{ \exists \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2, \exists \beta \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2) \in \tau \colon \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha} + \beta(-x_2,\ x_1) \right\}$，且 $P_0(\tau)$ 表示 τ 中的常数。

现在，我们给出系统 (1.3)-(1.4) 的混合内罚间断伽辽金（MIPDG）有限元方法：求 $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{U}_h \times \mathbb{Q}_h$，使得

$$\begin{aligned} a_h(p_h, q_h) - b_h(\boldsymbol{u}_h, q_h) &= \ell_{1,h}(q_h) + d_{1,h}(\boldsymbol{u}_h, q_h), \quad \forall q_h \in \mathbb{Q}_h, & (2.16)\\ d_h(\boldsymbol{v}_h, p_h) + c_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) &= \ell_{2,h}(\boldsymbol{v}_h) + d_{2,h}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h), \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{U}_h, & (2.17) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} a_h(p_h, q_h) &:= (p_h, q_h)_{\mathcal{T}_h}, & (2.18)\\ b_h(\boldsymbol{u}_h, q_h) &:= (\mathrm{curl}_h\ \boldsymbol{u}_h, q_h)_{\mathcal{T}_h}, & (2.19)\\ c_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) &:= (\beta \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h)_{\mathcal{T}_h}, & (2.20)\\ d_h(\boldsymbol{v}_h, p_h) &:= (\mathrm{curl}_h\ \boldsymbol{v}_h, \alpha p_h)_{\mathcal{T}_h}, & (2.21)\\ \ell_{1,h}(q_h) &:= 0, & (2.22)\\ \ell_{2,h}(\boldsymbol{v}_h) &:= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h)_{\mathcal{T}_h}, & (2.23)\\ d_{1,h}(\boldsymbol{u}_h, q_h) &:= - < \{\{q_h\}\}, [[\boldsymbol{u}_h]] >_{\mathcal{E}_h}, & (2.24)\\ d_{2,h}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) &:= < \{\{\alpha \mathrm{curl}_h\ \boldsymbol{u}_h\}\} - \kappa h_e^{-1} [[\boldsymbol{u}_h]], [[\boldsymbol{v}_h]] >_{\mathcal{E}_h}, & (2.25) \end{aligned}$$

其中 $\kappa > 0$ 是惩罚参数，取值应足够大。

注 2.1. • 与连续变分问题 (2.6)-(2.7) 和离散变分问题 (2.16)-(2.17)相比，不包含旋度$_h$的双线性项定义相同。为与其他符号保持一致，我们在离散变分形式中的双线性项上添加下标 h 。

- 离散变分问题的双线性项中旋度$_h$ 的计算采用分片求导。

- 与连续变分形式相比，离散变分形式增加了两项$d_{1,\ h}$ 和$d_{2,\ h}$。

为了说明离散变分问题的适定性，我们需要为 $\boldsymbol{H}$(旋度)–椭圆问题引入合适的 IPDG 形式：求 $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{U}_h$，使得

$$a_{IP}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h)_{\mathcal{T}_h}, \tag{2.26}$$

其中

$$\begin{aligned} a_{IP}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) &= (\beta \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + (\alpha \mathrm{curl}\ \boldsymbol{u}_h, \mathrm{curl}\ \boldsymbol{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - < \{\{\mathrm{curl}\ \boldsymbol{v}_h\}\}, [[\alpha \boldsymbol{u}_h]] >_{\mathcal{E}_h} \\ &\quad - < \{\{\alpha \mathrm{curl}\ \boldsymbol{u}_h\}\}, [[\boldsymbol{v}_h]] >_{\mathcal{E}_h} + \kappa < h_e^{-1} [[\boldsymbol{u}_h]], [[\boldsymbol{v}_h]] >_{\mathcal{E}_h}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

注 2.2。 令 $q_h = \alpha$旋度 $\boldsymbol{v}_h$ 属于 (2.16)-(2.17)，将(2.16) 从(2.17) 中相减，即得(2.26)。

为证明变分问题 (2.26) 解的存在唯一性，我们需要引入以下范数。

$$|||\boldsymbol{v}_h|||_h^2 = \|\mathrm{curl}\ \boldsymbol{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|\boldsymbol{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \kappa\|h_e^{-\frac{1}{2}}[[\boldsymbol{v}_h]]\|_{\mathcal{E}_h}^2, \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in (H^1(\mathcal{T}_h))^2, \kappa > 0.$$

与 [2], 类似，利用柯西-施瓦茨不等式、迹不等式和逆不等式，容易验证 $a_h(\cdot,\ \cdot)$ 有界于 $|||\cdot|||_h$，即

$$a_h(\boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{v}_h) \leqslant C|||\boldsymbol{w}_h|||_h|||\boldsymbol{v}_h|||_h, \quad \forall \boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{v}_h \in \mathbb{V}_h. \tag{2.28}$$

此外，对于双线性型 $a_h(\cdot,\cdot)$ 在 $\mathbb{V}_h$ 上的强制性，我们有

$$a_h(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h) \geqslant C|||\boldsymbol{v}_h|||_h^2, \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \mathbb{V}_h. \tag{2.29}$$

结合 (2.28) 和 (2.29)，可得离散变分问题 (2.26) 的适定性。此外，引理 2.2 表明，变分问题 (2.16)-(2.17) 与变分问题 (2.26) 具有等价形式。证明采用了与 [5] 中类似的论证，这里略去。

引理 2.2. 若 $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in (\boldsymbol{U}_h, \mathbb{Q}_h)$ 是方程 (2.16)-(2.17) 的解，则 $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{U}_h$ 是变分问题 (2.26) 的解。反之，若 $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{U}_h$ 是变分问题 (2.26) 的解，则存在相应的 $p_h \in \mathbb{Q}_h$，使得 $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in (\boldsymbol{U}_h, \mathbb{Q}_h)$ 是 (2.16)-(2.17) 的解。

2.3. 后验误差指示子

对于任意 $\tau \in \mathcal{T}_h$、 $e \in \mathcal{E}_h$ 和 $(\boldsymbol{v}_h, q_h) \in \mathbb{Q}_h \times \boldsymbol{U}_h$，我们引入如下单元残差和边跳跃残差:

$$\begin{aligned}
&R_1(\boldsymbol{v}_h, q_h)|_\tau := q_h|_\tau - \mathrm{curl}_h \boldsymbol{v}_h|_\tau,\\
&R_2(\boldsymbol{v}_h, q_h)|_\tau := \boldsymbol{f}|_\tau - (\boldsymbol{curl}_h\ \alpha q_h + \beta \boldsymbol{v}_h)|_\tau,\\
&R_3(\boldsymbol{v}_h)|_\tau := \nabla\cdot(\boldsymbol{f} - \beta\boldsymbol{v}_h)|_\tau,\\
&J_1(q_h)|_e := [[\alpha q_h]]_e,\\
&J_2(\boldsymbol{v}_h)|_e := [\boldsymbol{f} - \beta\boldsymbol{v}_h]_e,\\
&J_3(\boldsymbol{v}_h)|_e := [[\boldsymbol{v}_h]]_e.
\end{aligned}$$

$\tau \in \mathcal{T}_h$ 上的局部误差估计量定义为

$$\begin{aligned}
\eta^2(\boldsymbol{v}_h, q_h; \tau) :=& \|R_1(\boldsymbol{v}_h, q_h)\|_{0,\tau}^2 + h_\tau^2\left(\|R_2(\boldsymbol{v}_h, q_h)\|_{0,\tau}^2 + \|R_3(\boldsymbol{v}_h)\|_{0,\tau}^2\right)\\
&+ \sum_{e\in\partial\tau} h_e\left(\|J_1(q_h)\|_{0,e}^2 + \|J_2(\boldsymbol{v}_h)\|_{0,e}^2\right) + \kappa\sum_{e\in\partial\tau} h_e^{-1}\|J_3(\boldsymbol{v}_h)\|_{0,e}^2,
\end{aligned}$$

其中， h_τ 表示单元 τ的直径。网格 $\mathcal{T}_h$ 是形状正则的，这意味着$h_\tau \approx h_e$。

于是， $\mathcal{T}_h$ 上的全局误差估计子定义为

$$\eta^2\left(\boldsymbol{v}_h, q_h; \mathcal{T}_h\right)=\sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \eta^2\left(\boldsymbol{v}_h, q_h; \tau\right). \tag{2.30}$$

3. 可靠性分析

对于任意的（$\boldsymbol{v}$， q） $\in \boldsymbol{U} \times \mathbb{Q}$ 和（$\boldsymbol{v}_h$， q_h） $\in \boldsymbol{U}_h \times \mathbb{Q}_h$，我们定义以下误差

$$\begin{aligned}\|(\boldsymbol{v}, q)-(\boldsymbol{v}_h, q_h)\|_{DG}^2 \quad:= \quad & \|q-q_h\|_{0,\Omega}^2+\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h\|_{0,\Omega}^2+\|\operatorname{curl}_h\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h\right)\|_{0,\Omega}^2 \\ & +\kappa \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e^{-1}\|[[\boldsymbol{v}_h]]\|_{0,e}^2 .\end{aligned} \tag{3.31}$$

注 3.1. 这里我们使用 $[[\boldsymbol{v}_h]]_e$ 而非 $[[\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h]]_e$，因为对于 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}$， $[[\boldsymbol{v}]]_e=0$。

接下来，我们着重证明式（2.30）中定义的误差指示子的可靠性。我们论证的关键是采用空间分解技术：将 DG 有限元解 $\boldsymbol{u}_h$ 分解为两部分：一部分是相容部分 $\boldsymbol{u}_h^{conf} \in \boldsymbol{U}_h^{conf} := \boldsymbol{U}_h \cap \boldsymbol{U}$，另一部分是其 L^2 正交部分 $\boldsymbol{u}_h^{\perp} \in \boldsymbol{U}_h^{\perp}$。因此，我们需要处理连续误差 $\|$（$\boldsymbol{u}$， p） $-$ （$\boldsymbol{u}_h^{conf}$， p_h）$\|_{DG}$，而非 $\|$（$\boldsymbol{u}$， p） $-$ （$\boldsymbol{u}_h$， p_h）$\|_{DG}$。分析连续误差的主要工具是亥姆霍兹分解和两种插值。我们证明误差指示子的可靠性。

以下引理给出了与连续误差相关的一些估计。

引理 3.1. 设$(\boldsymbol{u}, p) \in \boldsymbol{U} \times \mathbb{Q}$ 是方程组(2.6)-(2.7)的解，则对任意$(\boldsymbol{v}_h^{conf}, p_h) \in \boldsymbol{U}_h^{conf} \times \mathbb{Q}_h$，有

$$\|(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h^{conf}, p-p_h)\|_{\boldsymbol{U} \times \mathbb{Q}} \lesssim\|\tilde{\ell}_1\|_{\mathbb{Q}^*}+\|\tilde{\ell}_2\|_{\boldsymbol{U}^*}, \tag{3.32}$$

其中

$$\tilde{\ell}_1(q)=-a\left(p_h, q\right)+b(\boldsymbol{v}_h^{conf}, q), \forall q \in \mathbb{Q}, \tag{3.33}$$

$$\tilde{\ell}_2(\boldsymbol{v})=\ell_2(\boldsymbol{v})-d\left(\boldsymbol{v}, p_h\right)-c(\boldsymbol{v}_h^{conf}, \boldsymbol{v}), \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}. \tag{3.34}$$

证明。 对于由 (2.14) 给出的算子 $\mathcal{A}$，容易得到其线性，即对任意 $q_1,\ q_2,\ q \in \mathbb{Q}$ 以及 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}$，有

$$\left(\mathcal{A}\left(q_1+q_2, \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\right)\right)(q, \boldsymbol{v})=\left(\mathcal{A}\left(q_1, \boldsymbol{v}_1\right)\right)(q, \boldsymbol{v})+\left(\mathcal{A}\left(q_2, \boldsymbol{v}_2\right)\right)(q, \boldsymbol{v}).$$

因此，我们有

$$(\mathcal{A}(p-p_h, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h^{conf}))(q, \boldsymbol{v})$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathcal{A}(p,\boldsymbol{u}))(q,\boldsymbol{v}) - (\mathcal{A}(p_h,\boldsymbol{v}_h^{conf}))(q,\boldsymbol{v}) \\
&= \ell_2(\boldsymbol{v}) - (a(p_h,q) - b(\boldsymbol{v}_h^{conf},q) + d(\boldsymbol{v},p_h) + c(\boldsymbol{v}_h^{conf},\boldsymbol{v})) \\
&:= \tilde{\ell}_1(q) + \tilde{\ell}_2(\boldsymbol{v}).
\end{aligned}
$$

最后，注意到 $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h^{conf},\ p-p_h) \in \boldsymbol{U}\times\mathbb{Q}$ 并利用算子范数的定义，证明至此完成。

□

˜ ˜在下面的引理中，我们旨在分别为引理 3.2 和 3.3 中的 $\|\ell_1\|_{Q^*}$ 和 $\|\ell_2\|_{U^*}$ 得到上界。

引理 3.2. 设$(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{U}_h\times\mathbb{Q}_h$是(2.16)-(2.17)的解。对于任意 $\boldsymbol{v}_h^{conf} \in \boldsymbol{U}_h^{conf}$，有

$$
\|\tilde{\ell}_1\|_{\mathbb{Q}^*} \lesssim \left(\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} \|R_1(\boldsymbol{u}_h,p_h)\|_{0,\tau}^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} \|\mathrm{curl}_h(\boldsymbol{v}_h^{conf}-\boldsymbol{u}_h)\|_{0,\tau}^2\right)^{1/2}.
$$

证明. 对于任意 $q\in\mathbb{Q}$，利用 (3.33)、(2.8) 和 (2.9)，可得

$$
\begin{aligned}
\tilde{\ell}_1(q) &= -a(p_h,q) + b(\boldsymbol{v}_h^{conf},q) \\
&= -(p_h,q) + (\mathrm{curl}\ \boldsymbol{v}_h^{conf},q) \\
&= (\mathrm{curl}_h\ \boldsymbol{u}_h - p_h, q)_{\mathcal{T}_h} + (\mathrm{curl}_h(\boldsymbol{v}_h^{conf}-\boldsymbol{u}_h),q)_{\mathcal{T}_h}.
\end{aligned}
$$

应用赫尔德不等式和柯西-施瓦茨不等式可得

$$
\begin{aligned}
|\tilde{\ell}_1(q)| &\le \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} \|\mathrm{curl}_h\ \boldsymbol{u}_h - p_h\|_{0,\tau}\|q\|_{0,\tau} + \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} \|\mathrm{curl}_h(\boldsymbol{v}_h^{conf}-\boldsymbol{u}_h)\|_{0,\tau}\|q\|_{0,\tau} \\
&\le 2\left(\left(\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} \|R_1(\boldsymbol{u}_h,p_h)\|_{0,\tau}^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} \|\mathrm{curl}_h(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{v}_h^{conf})\|_{0,\tau}^2\right)^{1/2}\right)\|q\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}
$$

证明完毕。 □

˜为了估计引理 3.3 中的项 $\|\ell_2\|_{U^*}$，我们将使用以下两个插值算子及其相应的逼近。

(1) Scott-Zhang 准插值 S_h: $H_0^1(\Omega) \to \{v\in C(\Omega)|\ v|_\tau \in P_1(\tau)\ \ v|_{\partial\Omega}=0,\quad \forall\tau\in\mathcal{T}_h\}$，其中 $P_1(\tau)$ 表示一个线性多项式空间。Scott-Zhang 准插值的定义及其逼近性质最早见于 [25]。对于 $\psi\in H_0^1(\Omega)$，有

$$
\|\nabla S_h\psi\|_{0,\tau} \lesssim \|\nabla\psi\|_{0,\omega_\tau}, \qquad \forall\tau\in\mathcal{T}_h, \tag{3.35}
$$

$$
\|\psi - S_h\psi\|_{0,\tau} \lesssim h_\tau\|\nabla\psi\|_{0,\omega_\tau}, \qquad \forall\tau\in\mathcal{T}_h, \tag{3.36}
$$

$$
\|\psi - S_h\psi\|_{0,e} \lesssim h_e^{\frac{1}{2}}\|\nabla\psi\|_{0,\omega_e}, \qquad \forall e\in\mathcal{E}_h, \tag{3.37}
$$

其中 $\omega_\tau := \bigcup_{\tau'\cap\tau\neq\emptyset} \tau'$ 以及 $\omega_e := \bigcup_{\tau\cap e\neq\emptyset} \tau$.

(2) 向量值算子 $\boldsymbol{P}_h\colon \boldsymbol{H}^1(\Omega)\cap\boldsymbol{U}\to\boldsymbol{U}_h^{conf}$。向量值算子的定义和逼近性质见 [4]。对于 $q\in\boldsymbol{H}^1(\Omega)\cap\boldsymbol{U}$，有

$$\|\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{q}\|_{0,\tau}\lesssim\|\boldsymbol{q}\|_{1,\tilde{\omega}_\tau},\qquad\forall\tau\in\mathcal{T}_h, \tag{3.38}$$

$$\|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{q}\|_{0,\tau}\lesssim h_\tau\|\boldsymbol{q}\|_{1,\tilde{\omega}_\tau},\qquad\forall\tau\in\mathcal{T}_h, \tag{3.39}$$

$$\|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{q}\|_{0,e}\lesssim h_e^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{q}\|_{1,\tilde{\omega}_e},\qquad\forall e\in\mathcal{E}_h, \tag{3.40}$$

其中 $\tilde{\omega}_e:=\bigcup\{\tau\in\mathcal{T}_h(\Omega)\mid e\in\mathcal{E}_h(T)\}$ 且 $\tilde{\omega}_\tau:=\bigcup\{\omega_e\mid e\in\mathcal{E}_h(T)\}$。

引理 3.3。设 $(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in\boldsymbol{U}_h\times\mathbb{Q}_h$ 为方程组(2.16)-(2.17)的解。对于任意 $\boldsymbol{v}_h^{conf}\in\boldsymbol{U}_h^{conf}$，存在一个仅依赖于 $\|\beta\|_0$ 的常数 $C_1>0$，∞，使得

$$\begin{aligned}\|\tilde{\ell}_2\|_{\boldsymbol{U}^*}\quad\leq\quad & C_1\left(\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h}h_\tau^2\left(\|R_2\left(\boldsymbol{u}_h,p_h\right)\|_{0,\tau}^2+\|R_3\left(\boldsymbol{u}_h\right)\|_{0,\tau}^2\right)\right.\\ &\left.+\sum_{e\in\mathcal{E}_h}h_e\left(\|J_1\left(p_h\right)\|_{0,e}^2+\|J_2\left(\boldsymbol{u}_h\right)\|_{0,e}^2\right)+\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h}\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{v}_h^{conf}\|_{0,\tau}^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

证明。对于任意 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{U}$，我们使用亥姆霍兹分解 $\boldsymbol{v}$，如下所示（参见 [4] 中的定理 2.1）

$$\boldsymbol{v}:=\boldsymbol{v}^0+\boldsymbol{v}^\perp, \tag{3.41}$$

and

$$\|\boldsymbol{v}^0\|_{0,\Omega}^2+\|\boldsymbol{v}^\perp\|_{0,\Omega}^2=\|\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}^2, \tag{3.42}$$

其中 $\boldsymbol{v}^0\in\boldsymbol{H}_0(\mathrm{curl0},\ \Omega):=\{\boldsymbol{v}\colon\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}_0(\mathrm{curl},\ \Omega),\ \mathrm{curl}\ \ \boldsymbol{v}=0\}$，且 $\boldsymbol{v}^\perp\in\boldsymbol{H}^\perp(\mathrm{curl},\ \Omega):=\{\boldsymbol{v}\colon\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}_0(\mathrm{curl},\ \Omega),\ (\boldsymbol{v},\ \ \boldsymbol{v}^0)\ =0,\quad\boldsymbol{v}^0\in\boldsymbol{H}_0(\mathrm{curl0},\ \Omega)\}$。我们利用表示式 $\boldsymbol{H}_0(\mathrm{curl0},\ \Omega)\ =\boldsymbol{grad}\ H_0^1(\Omega)$，因此，对于某个 $\psi\in H_0^1(\Omega)$，有 $\boldsymbol{v}^0=\nabla\psi$。根据 $\tilde{\ell}_2$(3.34) 的定义，有

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}_2(\boldsymbol{v})\quad&=\quad\tilde{\ell}_2(\boldsymbol{v}^0+\boldsymbol{v}^\perp)=\tilde{\ell}_2(\nabla\psi+\boldsymbol{v}^\perp)\\ &=\quad\tilde{\ell}_2(\nabla S_h\psi+\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^\perp)+\tilde{\ell}_2(\nabla\psi+\boldsymbol{v}^\perp-\nabla S_h\psi-\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^\perp).\end{aligned} \tag{3.43}$$

˜我们首先分析（3.43）右端的第一项。根据 ℓ_2(3.34) 的定义，我们有

$$\begin{aligned}&\tilde{\ell}_2\left(\nabla S_h\psi+\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^\perp\right)\\ &=\quad\ell_2\left(\nabla S_h\psi+\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^\perp\right)-d\left(\nabla S_h\psi+\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^\perp,p_h\right)-c(\boldsymbol{v}_h^{conf},\nabla S_h\psi+\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^\perp)\\ &=\quad\ell_2\left(\nabla S_h\psi+\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^\perp\right)-d\left(\nabla S_h\psi+\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^\perp,p_h\right)-c\left(\boldsymbol{u}_h,\nabla S_h\psi+\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^\perp\right)\\ &\quad+c(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{v}_h^{conf},\nabla S_h\psi+\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^\perp).\end{aligned} \tag{3.44}$$

利用注 2.1，对于任意 $e\in\mathcal{E}_h$，注意到 $[[\nabla S_h\psi+\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^\perp]]_e=0$，由于 $\nabla S_h\psi+\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^\perp\subset\boldsymbol{U}$，并在（2.17）中取 $\boldsymbol{v}_h=\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^\perp+\nabla S_h\psi$，可得

$$\ell_2\left(\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^\perp+\nabla S_h\psi\right)-d\left(\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^\perp+\nabla S_h\psi,p_h\right)-c\left(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^\perp+\nabla S_h\psi\right)=0. \tag{3.45}$$

结合（3.44）和（3.45），可得

$$\tilde{\ell}_2\left(\nabla S_h\psi+\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^{\perp}\right) \;=\; c(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{v}_h^{conf},\nabla S_h\psi+\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^{\perp}).$$

利用柯西-施瓦茨不等式、(3.35)、(3.38) 以及 $\boldsymbol{H}_0^{\perp}$(curl,Ω) 连续嵌入 $\boldsymbol{H}^1(\Omega)\cap\boldsymbol{H}_0$(curl,Ω)（见 [4]），可得

$$\begin{aligned}
\tilde{\ell}_2\left(\nabla S_h\psi+\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^{\perp}\right) &\lesssim C_1\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{v}_h^{conf}\|_{0,\Omega}(\|\nabla S_h\psi\|_{0,\Omega}+\|\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^{\perp}\|_{0,\Omega})\\
&\lesssim C_1\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{v}_h^{conf}\|_{0,\Omega}(\|\nabla\psi\|_{0,\Omega}+\|\boldsymbol{v}^{\perp}\|_{0,\Omega})\\
&\lesssim C_1\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{v}_h^{conf}\|_{0,\Omega}(\|\nabla\psi\|_{0,\Omega}+\|\mathrm{curl}\ \boldsymbol{v}^{\perp}\|_{0,\Omega})\\
&\lesssim C_1\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{v}_h^{conf}\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{curl},\Omega}, \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

其中 $C_1>0$ 仅依赖于 $\|\beta\|_{0,\infty}$。

接下来，我们利用 ℓ_2(3.34) 的定义、事实 $(\mathrm{curl}_h(\nabla\psi-\nabla S_h\psi)\ \alpha p_h)_{\mathcal{T}_h}=0$ 以及格林公式，分析 (3.43) 右端的第二项，可得

$$\begin{aligned}
&\tilde{\ell}_2\left(\nabla\psi+\boldsymbol{v}^{\perp}-\nabla S_h\psi-\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^{\perp}\right)\\
&= \tilde{\ell}_2\left(\nabla\psi-\nabla S_h\psi\right)+\tilde{\ell}_2\left(\boldsymbol{v}^{\perp}-\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^{\perp}\right)\\
&= (\boldsymbol{f},\nabla\psi-\nabla S_h\psi)_{\mathcal{T}_h}-(\mathrm{curl}_h(\nabla\psi-\nabla S_h\psi),\alpha p_h)_{\mathcal{T}_h}-(\beta\boldsymbol{v}_h^{conf},\nabla\psi-\nabla S_h\psi)_{\mathcal{T}_h}\\
&\quad+(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}^{\perp}-\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^{\perp})_{\mathcal{T}_h}-(\mathrm{curl}_h(\boldsymbol{v}^{\perp}-\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^{\perp}),\alpha p_h)_{\mathcal{T}_h}-(\beta\boldsymbol{v}_h^{conf},\boldsymbol{v}^{\perp}-\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^{\perp})_{\mathcal{T}_h}\\
&= (\boldsymbol{f},\nabla\psi-\nabla S_h\psi)_{\mathcal{T}_h}-(\beta\boldsymbol{u}_h,\nabla\psi-\nabla S_h\psi)_{\mathcal{T}_h}+(\beta(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{v}_h^{conf}),\nabla\psi-\nabla S_h\psi)_{\mathcal{T}_h}\\
&\quad+(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}^{\perp}-\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^{\perp})_{\mathcal{T}_h}-(\mathrm{curl}_h(\boldsymbol{v}^{\perp}-\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^{\perp}),\alpha p_h)_{\mathcal{T}_h}-(\beta\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}^{\perp}-\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^{\perp})_{\mathcal{T}_h}\\
&\quad+(\beta(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{v}_h^{conf}),\boldsymbol{v}^{\perp}-\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^{\perp})_{\mathcal{T}_h}\\
&= -\left(\nabla\cdot(\boldsymbol{f}-\beta\boldsymbol{u}_h),\psi-S_h\psi\right)_{\mathcal{T}_h}+\langle[\boldsymbol{f}-\beta\boldsymbol{u}_h]_e,\psi-S_h\psi\rangle_{\mathcal{E}_h}\\
&\quad+(\beta(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{v}_h^{conf}),\nabla\psi-\nabla S_h\psi)_{\mathcal{T}_h}+\left(\boldsymbol{f}-\mathbf{curl}_h\ \alpha p_h-\beta\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}^{\perp}-\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^{\perp}\right)_{\mathcal{T}_h}\\
&\quad-\left\langle[[\alpha p_h]]_e,\boldsymbol{v}^{\perp}-\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^{\perp}\right\rangle_{\mathcal{E}_h}+(\beta(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{v}_h^{conf}),\boldsymbol{v}^{\perp}-\boldsymbol{P}_h\boldsymbol{v}^{\perp})_{\mathcal{T}_h}. \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

利用柯西-施瓦茨不等式、(3.36)-(3.40) 以及 $\boldsymbol{H}_0^{\perp}$(curl,Ω) 连续嵌入 $\boldsymbol{H}^1(\Omega)\cap\boldsymbol{H}_0$(curl,Ω)，可得

$$\begin{aligned}
|\tilde{\ell}_2(\boldsymbol{v})|\lesssim C_1\Bigg(&\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h}h_\tau^2\left(\|R_2\left(\boldsymbol{u}_h,p_h\right)\|_{0,\tau}^2+\|R_3(\boldsymbol{u}_h)\|_{0,\tau}^2\right)\\
&+\sum_{e\in\mathcal{E}_h}h_e\left(\|J_1\left(p_h\right)\|_{0,e}^2+\|J_2\left(\boldsymbol{u}_h\right)\|_{0,e}^2\right)+\sum_{\tau\in\mathcal{T}}\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{v}_h^{conf}\|_{0,\tau}^2\Bigg)^{1/2}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{curl},\Omega},
\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

本节最后，我们给出误差估计子的上界。

定理 3.1。 设$(\boldsymbol{u}, p) \in \boldsymbol{U} \times \mathbb{Q}$和$(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{U}_h \times \mathbb{Q}_h$分别为(2.6)-(2.7)和(2.16)-(2.17)的解。则存在一个常数 $C_1 > 0$ ， 它仅依赖于$\|\beta\|_{\infty,\Omega}$ 和网格形状正则性，使得

$$\|(\boldsymbol{u}, p) - (\boldsymbol{u}_h, p_h)\|_{DG}^2 \lesssim C_1 \eta^2(\boldsymbol{u}_h, p_h; \mathcal{T}_h).$$

证明。 对于任意 $\boldsymbol{v}_h^{conf} \in \boldsymbol{U}_h^{conf}$， 利用 (3.31) 中 $\|\cdot\|_{DG}$ 的定义和三角不等式，可得

$$\begin{aligned}
&\|(\boldsymbol{u}, p) - (\boldsymbol{u}_h, p_h)\|_{DG}^2 \\
&\quad = \|p - p_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathrm{curl}\ \boldsymbol{u} - \mathrm{curl}_h\ \boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega}^2 + \kappa \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e^{-1} \|[[\boldsymbol{u}_h]]\|_{0,e}^2 \\
&\quad = |p - p_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{\mathrm{curl},\Omega}^2 + \kappa \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e^{-1} \|[[\boldsymbol{u}_h]]\|_{0,e}^2 \\
&\quad \le \|p - p_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h^{conf}\|_{\mathrm{curl},\Omega}^2 + \|\boldsymbol{v}_h^{conf} - \boldsymbol{u}_h\|_{\mathrm{curl},\Omega}^2 + \kappa \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e^{-1} \|[[\boldsymbol{u}_h]]\|_{0,e}^2 \\
&\quad = \|(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h^{conf}, p - p_h)\|_{\boldsymbol{U} \times \mathbb{Q}} + \|\boldsymbol{v}_h^{conf} - \boldsymbol{u}_h\|_{\mathrm{curl},\Omega}^2 + \kappa \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e^{-1} \|[[\boldsymbol{u}_h]]\|_{0,e}^2. \qquad (3.48)
\end{aligned}$$

对于 $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{U}_h$，存在满足（参见 [22]的命题 4.10）的 $\boldsymbol{u}_h^{conf} \in \boldsymbol{U}_h^{conf}$, $\boldsymbol{u}_h^{\perp} \in \boldsymbol{U}_h^{\perp}$

$$\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{u}_h^{conf} + \boldsymbol{u}_h^{\perp},$$

and

$$h_\tau^2 \|\mathrm{curl}_h(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_h^{conf})\|_{0,\Omega}^2 + \|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_h^{conf}\|_{0,\Omega}^2 \lesssim h_\tau^2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e^{-1} \left\|[[\boldsymbol{u}_h]]_e\right\|_{0,e}^2. \qquad (3.49)$$

最后，在 (3.48) 中取 $\boldsymbol{v}_h^{conf} = \boldsymbol{u}_h^{conf}$， 并利用引理 3.1、3.2、3.3 及 (3.49)，可得

$$\begin{aligned}
&\|(\boldsymbol{u}, p) - (\boldsymbol{u}_h, p_h)\|_{DG}^2 \\
&\quad \le \quad \|(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{conf}, p - p_h)\|_{\boldsymbol{U} \times \mathbb{Q}} + \|\boldsymbol{u}_h^{conf} - \boldsymbol{u}_h\|_{\mathrm{curl},\Omega}^2 + \kappa \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e^{-1} \|[[\boldsymbol{u}_h]]\|_{0,e}^2 \\
&\quad \lesssim \quad \|\tilde{\ell}_1\|_{\mathbb{Q}^*}^2 + \|\tilde{\ell}_2\|_{\boldsymbol{U}^*}^2 + \|\boldsymbol{u}_h^{conf} - \boldsymbol{u}_h\|_{\mathrm{curl},\Omega}^2 + \kappa \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e^{-1} \|[[\boldsymbol{u}_h]]\|_{0,e}^2 \\
&\quad \lesssim \quad C_1 \eta^2(\boldsymbol{v}_h, p_h; \mathcal{T}_h),
\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

4. 效率分析

本节将证明误差估计子是有效的。在第 3 节中，我们已经证明误差估计子是可靠的。因此，误差估计子能够很好地反映能量误差，即

$$\eta^2\left(\boldsymbol{u}_h, p_h; \mathcal{T}_h\right) \approx \|\left(p - p_h, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\right)\|_{\mathrm{DG}}^2. \qquad (4.50)$$

我们首先介绍以下定理，它给出了误差估计子的效率。 .

定理 4.1. 设$(\boldsymbol{u}, p) \in \boldsymbol{U} \times \mathbb{Q}$和$(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{U}_h \times \mathbb{Q}_h$分别为(2.6)-(2.7)和(2.16)-(2.17)的解。$\mathcal{T}_h$上任意阶分片多项式所构成的空间记为$P(\mathcal{T}_h)$。那么，对于任意$\boldsymbol{f}_h \in \mathcal{S}_h^{conf} := P(\mathcal{T}_h) \cap \boldsymbol{H}(\mathrm{div};\Omega)$，有

$$\eta^2(\boldsymbol{u}_h, p_h; \mathcal{T}_h) \lesssim C_2\Big(\|(p-p_h, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{\mathrm{DG}}^2 + \|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} h_\tau^2 \|\nabla\cdot(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h)\|_{0,\tau}^2 \Big),$$

其中，C_2是一个依赖于$\|\alpha\|_{0,\infty}$和$\|\beta\|_{0,\infty}$的常数。

注 4.1. 为证明定理 *4.1*，我们假设$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{div};\Omega)$。不过需要注意，条件$\boldsymbol{f}_h \in \mathcal{S}_h^{conf}$仅在引理 *4.7* 中需要（见(4.78)）。

对于任意的$\tau \in \mathcal{T}_h$和$e \in \mathcal{E}_h$，令b_τ和b_e分别为标准的内部泡函数和边泡函数。我们引入以下两个引理，供后续证明使用。

引理 4.1 ([16], 引理 5.1)。设χ是τ上的一个标量多项式函数，则

$$\|b_\tau \chi\|_{0,\tau} \lesssim \|\chi\|_{0,\tau}, \tag{4.51}$$

$$\|\chi\|_{0,\tau} \lesssim \|b_\tau^{\frac{1}{2}}\chi\|_{0,\tau}, \tag{4.52}$$

$$\|\nabla(b_\tau\chi)\|_{0,\tau} \lesssim h_\tau^{-1}\|\chi\|_{0,\tau}. \tag{4.53}$$

此外，设e是两个三角形τ_1和τ_2共有的一条边，设ϕ是e上的一个标量多项式函数，则

$$\|\phi\|_{0,e} \lesssim \|b_e^{\frac{1}{2}}\phi\|_{0,e}. \tag{4.54}$$

此外上，存在$b_e\phi$的一个延拓，使得$\tilde{\phi}_b \in H_0^1\left((\tau_1 \cup \tau_2)^\circ\right)$，且$\tilde{\phi}_b|_e = b_e\phi$和

$$\|\tilde{\phi}_b\|_{0,\tau} \lesssim h_e^{\frac{1}{2}}\|\phi\|_{0,e}, \qquad \forall \tau \in \omega_e, \tag{4.55}$$

$$\|\nabla\tilde{\phi}_b\|_{0,\tau} \lesssim h_e^{-\frac{1}{2}}\|\phi\|_{0,e}, \quad \forall \tau \in \omega_e. \tag{4.56}$$

引理 4.2 ([16], 引理 5.2)。设$\boldsymbol{w}$是定义在τ上的向量值多项式函数，则

$$\|b_\tau \boldsymbol{w}\|_{0,\tau} \lesssim \|\boldsymbol{w}\|_{0,\tau}, \tag{4.57}$$

$$\|\boldsymbol{w}\|_{0,\tau} \lesssim \|b_\tau^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{w}\|_{0,\tau}, \tag{4.58}$$

$$\|\mathrm{curl}(b_\tau\boldsymbol{w})\|_{0,\tau} \lesssim h_\tau^{-1}\|\boldsymbol{w}\|_{0,\tau}. \tag{4.59}$$

此外，设e是τ_1和τ_2上两个三角形共用的一条边，并设$\boldsymbol{w}$是定义在e上的向量值多项式函数，则

$$\|\boldsymbol{w}\|_{0,e} \lesssim \|b_e^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{w}\|_{0,e}. \tag{4.60}$$

此外，存在$b_e\boldsymbol{w}$的一个延拓，使其为$\tilde{\boldsymbol{w}}_b \in \left(H_0^1\left((\tau_1\cup\tau_2)^\circ\right)\right)^2$，满足$\tilde{\boldsymbol{w}}_b|_e = b_e\boldsymbol{w}$，并且

$$\|\tilde{\boldsymbol{w}}_b c\|_{0,\tau} \lesssim h_e^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{w}\|_{0,e}, \qquad \forall \tau \in \omega_e, \tag{4.61}$$

$$\|\mathrm{curl}\ \tilde{\boldsymbol{w}}_b\|_{0,\tau} \lesssim h_e^{-\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{w}\|_{0,e}, \quad \forall \tau \in \omega_e. \tag{4.62}$$

接下来，我们分别估计由 (2.30) 给出的误差指示子 $\eta(u_h, p_h; \mathcal{T}_h)$ 的各项。首先估计误差估计子的第一项 R_1。

引理 4.3. 设$(\boldsymbol{u}, p) \in \boldsymbol{U} \times \mathbb{Q}$和$(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{U}_h \times \mathbb{Q}_h$分别是(2.6)-(2.7)和(2.16)-(2.17)的解。于是得到

$$\sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \| R_1(\boldsymbol{u}_h, p_h) \|_{0,\tau}^2 \leqslant \| (p - p_h, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h) \|_{\mathrm{DG}}^2. \tag{4.63}$$

证明. 我们可以观察到，$R_1(\boldsymbol{u}_h, p_h) = p_h - 旋度_h \boldsymbol{u}_h \in \mathbb{Q}_h \subset \mathbb{Q}$，并将 $q = R_1(\boldsymbol{u}_h, p_h)$代入式 (2.6)，可得

$$(p - \operatorname{curl} \boldsymbol{u}, R_1(\boldsymbol{u}_h, p_h))_{\mathcal{T}_h} = 0. \tag{4.64}$$

因此，由式 (4.64) 和柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \| R_1(\boldsymbol{u}_h, p_h) \|_{0,\tau}^2 &= (p_h - \operatorname{curl}_h \boldsymbol{u}_h, R_1(\boldsymbol{u}_h, p_h))_{\mathcal{T}_h} \\ &= (p_h - p - \operatorname{curl}_h(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}), R_1(\boldsymbol{u}_h, p_h))_{\mathcal{T}_h} \\ &\leqslant (\|p_h - p\|_{0,\Omega} + \|\operatorname{curl}_h(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u})\|_{0,\Omega}) \| R_1(\boldsymbol{u}_h, p_h) \|_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

这意味着式 (4.63) 成立。 □

我们估计误差估计子 $\eta(u_h, p_h; \mathcal{T}_h)$ 的第二项 R_2。

引理 4.4. 设$(\boldsymbol{u}, p) \in \boldsymbol{U} \times \mathbb{Q}$和$(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{U}_h \times \mathbb{Q}_h$分别是(2.6)-(2.7)和(2.16)-(2.17)的解。则有

$$\sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} h_\tau^2 \| R_2(\boldsymbol{u}_h, p_h) \|_{0,\tau}^2 \lesssim C_2 \Big(\|(\boldsymbol{u}, p) - (\boldsymbol{u}_h, p_h)\|_{\mathrm{DG}}^2 + \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} h_\tau^2 \| \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h \|_{0,\tau}^2 \Big),$$

其中 C_2 是一个依赖于$\|\alpha\|_{0,\infty}$和$\|\beta\|_{0,\infty}$的常数。

证明。令 $\boldsymbol{f}_h \in \mathcal{S}_h^{\mathrm{conf}}$，并令 $\boldsymbol{w} := \boldsymbol{f}_h - \boldsymbol{curl}_h\, \alpha p_h - \beta \boldsymbol{u}_h$。因此，$\boldsymbol{w}$也是 τ上的多项式。令 $\boldsymbol{w}_b = b_\tau \boldsymbol{w}$，我们可以观察到$\boldsymbol{w}_b \in \boldsymbol{H}_0^1(\tau) \subset \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \subset \boldsymbol{U}$。在式 (2.7) 中取 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_b$并使用格林公式，可得

$$(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{curl}\ \alpha p - \beta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_b)_\tau = 0. \tag{4.65}$$

然后通过使用由 g (4.58)、$\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{w}_b$的定义、(4.65) 以及柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{w}\|_{0,\tau}^2 &\lesssim \|b_\tau^{1/2} \boldsymbol{w}\|_{0,\tau}^2 = (\boldsymbol{w}, b_\tau \boldsymbol{w})_\tau \\ &= ((\boldsymbol{f}_h - \boldsymbol{curl}_h\ \alpha p_h - \beta \boldsymbol{u}_h), \boldsymbol{w}_b)_\tau \\ &= ((\boldsymbol{f}_h - \boldsymbol{f}) - \boldsymbol{curl}_h\ \alpha(p_h - p) - \beta(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}), \boldsymbol{w}_b)_\tau \\ &\lesssim \Big(\|\boldsymbol{f}_h - \boldsymbol{f}\|_{0,\tau} + \|\beta\|_{0,\infty} \|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_{0,\tau} \Big) \|\boldsymbol{w}_b\|_{0,\tau} \\ &\quad - (\boldsymbol{curl}_h\ \alpha(p_h - p), \boldsymbol{w}_b)_\tau. \end{aligned} \tag{4.66}$$

根据右端 (4.66) 的最后一项，利用格林公式、 $\boldsymbol{w}_b = 0$在 $\partial\tau$上的事实、柯西-施瓦茨不等式以及 (4.59)，可得

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{curl}_h\ \alpha\left(p_h - p\right), \boldsymbol{w}_b)_\tau = (\alpha(p_h - p), \mathrm{curl}_h\ \boldsymbol{w}_b)_\tau \\
&\leqslant \quad \|\alpha\|_{0,\infty} \|p_h - p\|_{0,\tau} \|\mathrm{curl}_h\ \boldsymbol{w}_b\|_{0,\tau} \lesssim h_\tau^{-1} \|\alpha\|_{0,\infty} \|p_h - p\|_{0,\tau} \|\boldsymbol{w}\|_{0,\tau}. \qquad (4.67)
\end{aligned}$$

利用 (4.66) 和 (4.67)，我们得到

$$\|\boldsymbol{w}\|_{0,\tau} \lesssim \|\boldsymbol{f}_h - \boldsymbol{f}\|_{0,\tau} + \|\beta\|_{0,\infty} \|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_{0,\tau} + h_\tau^{-1} \|\alpha\|_{0,\infty} \|p_h - p\|_{0,\tau}. \qquad (4.68)$$

根据 $R_2(\boldsymbol{u}_h,\ p_h)$ 的定义以及 (4.68)，我们得到

$$\begin{aligned}
\|R_2\left(\boldsymbol{u}_h, p_h\right)\|_{0,\tau} &\leqslant \|\boldsymbol{w}\|_{0,\tau} + \|\boldsymbol{f}_h - \boldsymbol{f}\|_{0,\tau} \\
&\lesssim C_2\Big(\|\boldsymbol{f}_h - \boldsymbol{f}\|_{0,\tau} + \|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_{0,\tau} + h_\tau^{-1} \|p_h - p\|_{0,\tau} \Big),
\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}
&\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} h_\tau^2 \|R_2\left(\boldsymbol{u}_h, p_h\right)\|_{0,\tau}^2 \\
&\quad\lesssim C_2\Big(\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} \Big(h_\tau^2 \|\boldsymbol{f}_h - \boldsymbol{f}\|_{0,\tau}^2 + h_\tau^2 \|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_{0,\tau}^2 + \|p_h - p\|_{0,\tau}^2 \Big) \Big) \\
&\quad\lesssim C_2\Big(\|(\boldsymbol{u}, p) - (\boldsymbol{u}_h, p_h)\|_{\mathrm{DG}}^2 + \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} h_\tau^2 \|\boldsymbol{f}_h - \boldsymbol{f}\|_{0,\tau}^2 \Big).
\end{aligned}$$

□

接下来，我们来估计误差估计子的第三项 R_3。

引理 4.5. 设 $(\boldsymbol{u}, p) \in \boldsymbol{U} \times \mathbb{Q}$ 和 $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \boldsymbol{U}_h \times \mathbb{Q}_h$ 分别为 (2.6)-(2.7) 和(2.16)-(2.17)的解。则有

$$\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} h_\tau^2 \|R_3\left(\boldsymbol{u}_h\right)\|_{0,\tau}^2 \lesssim C_1\Big(\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} h_\tau^2 \|\nabla\cdot\left(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\right)\|_{0,\tau}^2 \Big), \qquad (4.69)$$

其中 C_1 是一个依赖于 $\|\beta\|_{0,\ \infty}$ 的常数。

证明。 设 $\boldsymbol{f}_h \in \mathcal{S}_h^{\mathrm{conf}}$, $\chi := \nabla\cdot(\boldsymbol{f}_h - \beta\boldsymbol{u}_h)$ 且 $\chi_b = b_\tau\chi$，其中 χ 在每个 $\tau \in \mathcal{T}$ 上都是多项式，且 $\chi_b \in H_0^1(\tau) \subset H_0^1(\Omega)$。将 $\boldsymbol{v} = \nabla\chi_b \in \boldsymbol{U}$代入 (2.7)，并利用事实 $\chi_b|_{\partial\tau} = 0$，可得

$$(\boldsymbol{f} - \beta\boldsymbol{u}, \nabla\chi_b)_\tau = 0. \qquad (4.70)$$

然后，利用 (4.52)、格林公式和 (4.70)，可得

$$\begin{aligned}
\|\chi\|_{0,\tau}^2 &\lesssim \|b_\tau^{1/2}\chi\|_{0,\tau}^2 = (\chi, b_\tau\chi) = (\nabla\cdot\left(\boldsymbol{f}_h - \beta\boldsymbol{u}_h\right), \chi_b)_\tau \\
&= -((\boldsymbol{f}_h - \beta\boldsymbol{u}_h), \nabla\chi_b)_\tau = ((\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h) - \beta\left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\right), \nabla\chi_b)_\tau.
\end{aligned}$$

根据逆不等式，有

$$\begin{aligned}\|\chi\|_{0,\tau}^2 &\leqslant \left(\|\boldsymbol{f}_h-\boldsymbol{f}\|_{0,\tau}+\|\beta\|_{0,\infty}\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}\|_{0,\tau}\right)\|\nabla\chi_b\|_{0,\tau}\\ &\lesssim C_1h_\tau^{-1}\left(\|\boldsymbol{f}_h-\boldsymbol{f}\|_{0,\tau}+\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}\|_{0,\tau}\right)\|\chi\|_{0,\tau},\end{aligned}$$

这意味着

$$h_\tau\|\chi\|\lesssim C_1\left(\|\boldsymbol{f}_h-\boldsymbol{f}\|_{0,\tau}+\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}\|_{0,\tau}\right). \tag{4.71}$$

结合 $R_3(\boldsymbol{u}_h)$ 的定义、三角不等式以及 (4.71)，可得

$$\begin{aligned}h_\tau\|R_3\left(\boldsymbol{u}_h\right)\|_{0,\tau} &\leqslant h_\tau\|\chi\|_{0,\tau}+h_\tau\|\nabla\cdot\left(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\right)\|_{0,\tau}\\ &\lesssim C_1\left(\|\boldsymbol{f}_h-\boldsymbol{f}\|_{0,\tau}+\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}\|_{0,\tau}\right)+h_\tau\|\nabla\cdot\left(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\right)\|_{0,\tau}.\end{aligned}$$

对所有单元 $\tau\in\mathcal{T}$ 求和，便可直接得到结果 (4.69)。 □

接下来，我们对误差估计子的第四项 J_1 进行界定。

引理 4.6. 设 $(\boldsymbol{u},p)\in\boldsymbol{U}\times\mathbb{Q}$ 和 $(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in\boldsymbol{U}_h\times\mathbb{Q}_h$ 分别为 (2.6)-(2.7) 和(2.16)-(2.17)的解。则有

$$\begin{aligned}&\sum_{e\in\mathcal{E}_h}h_e\|J_1\left(p_h\right)\|_{0,e}^2\\ &\quad\lesssim C_2\Big(\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h}\|R_1\left(\boldsymbol{u}_h,p_h\right)\|_{0,\tau}^2+\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h}h_e^2\|R_2\left(\boldsymbol{u}_h,p_h\right)\|_{0,\tau}^2+\|(\boldsymbol{u},p)-(\boldsymbol{u}_h,p_h)\|_{\mathrm{DG}}^2\Big),\end{aligned}$$

其中 C_2 是一个依赖于 $\|\alpha\|_{0,\infty}$ 和 $\|\beta\|_{0,\infty}$ 的常数。

证明。 不失一般性，设 $e\in\mathcal{E}_h$ 为 $\tau_1\in\mathcal{T}_h$ 和 $\tau_2\in\mathcal{T}_h$ 的公共边，我们给出如下定义

$$\boldsymbol{w}_h=[[\alpha p_h]]_e,\quad \tilde{\boldsymbol{w}}_b=b_e\boldsymbol{w}_h\in H_0^1(\tau_1\cup\tau_2). \tag{4.72}$$

应用 (4.72)、 $[[\alpha$旋度 $\boldsymbol{u}]]_e=\boldsymbol{0}$、格林公式、(2.6) 和 (2.7)，可得

$$\begin{aligned}\|b_e^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{w}_h\|_{0,e}^2&=\langle\boldsymbol{w}_h,b_e\boldsymbol{w}_h\rangle_e\\ &=\langle[[\alpha p_h]]_e,\tilde{\boldsymbol{w}}_b\rangle_e\\ &=\langle[[\alpha(p_h-\operatorname{curl}\boldsymbol{u})]]_e,\tilde{\boldsymbol{w}}_b\rangle_e\\ &=\sum_{\tau\in\omega_e}\left[\left(\boldsymbol{curl}\left(\alpha(p_h-\operatorname{curl}\boldsymbol{u})\right),\tilde{\boldsymbol{w}}_b\right)_\tau-\left(\alpha(p_h-\operatorname{curl}\boldsymbol{u}),\operatorname{curl}\tilde{\boldsymbol{w}}_b\right)_\tau\right]\\ &=\sum_{\tau\in\omega_e}\left[\left(\boldsymbol{curl}\ \alpha p_h-\boldsymbol{curl}\ \alpha\operatorname{curl}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}+\beta\boldsymbol{u}-\beta\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{u}_h-\beta\boldsymbol{u}_h,\tilde{\boldsymbol{w}}_b\right)_\tau\right.\\ &\quad\left.-\left(\alpha(p_h-\operatorname{curl}\boldsymbol{u}),\operatorname{curl}\tilde{\boldsymbol{w}}_b\right)_\tau\right]\\ &=\sum_{\tau\in\omega_e}\left[\left(\boldsymbol{curl}\ \alpha p_h+\beta\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{f},\tilde{\boldsymbol{w}}_b\right)_\tau+\left(\beta\boldsymbol{u}-\beta\boldsymbol{u}_h,\tilde{\boldsymbol{w}}_b\right)_\tau\right.\end{aligned}$$

$$-\left(\alpha(p_h-\operatorname{curl}\boldsymbol{u}),\operatorname{curl}\tilde{\boldsymbol{w}}_b\right)_\tau\big]. \tag{4.73}$$

利用 (4.60)、(4.73)、柯西-施瓦茨不等式、(4.61) 和 (4.62)，有

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{w}_h\|_{0,e}^2 &\lesssim \|b_e^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{w}_h\|_{0,e}^2\\
&\lesssim \sum_{\tau\in\omega_e}\big[(\boldsymbol{curl}\ \alpha p_h+\beta\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{f},\tilde{\boldsymbol{w}}_b)_\tau+(\beta\boldsymbol{u}-\beta\boldsymbol{u}_h,\tilde{\boldsymbol{w}}_b)_\tau\\
&\quad-\left(\alpha(p_h-\operatorname{curl}\boldsymbol{u}),\operatorname{curl}\tilde{\boldsymbol{w}}_b\right)_\tau\big]\\
&\lesssim \sum_{\tau\in\omega_e}\Big(\|\boldsymbol{curl}\ \alpha p_h+\beta\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{f}\|_{0,\tau}\cdot\|\tilde{\boldsymbol{w}}_b\|_{0,\tau}+\|\beta\|_{0,\infty}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{0,\tau}\cdot\|\tilde{\boldsymbol{w}}_b\|_{0,\tau}\\
&\quad+\|\alpha\|_{0,\infty}\|p_h-\operatorname{curl}\boldsymbol{u}\|_{0,\tau}\cdot\|\operatorname{curl}\tilde{\boldsymbol{w}}_b\|_{0,\tau}\Big)\\
&\lesssim C_2\sum_{\tau\in\omega_e}\Big(\|\boldsymbol{curl}\ \alpha p_h+\beta\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{f}\|_{0,\tau}\cdot h_e^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{w}_h\|_{0,e}\\
&\quad+\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{0,\tau}\cdot h_e^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{w}_h\|_{0,e}+\|p_h-\operatorname{curl}\boldsymbol{u}\|_{0,\tau}\cdot h_e^{-\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{w}_h\|_{0,e}\Big)\\
&\lesssim C_2\sum_{\tau\in\omega_e}\Big(h_e^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{curl}\ \alpha p_h+\beta\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{f}\|_{0,\tau}+h_e^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{0,\tau}\\
&\quad+h_e^{-\frac{1}{2}}\|p_h-\operatorname{curl}_h\boldsymbol{u}_h\|_{0,\tau}+h_e^{-\frac{1}{2}}\|\operatorname{curl}\boldsymbol{u}-\operatorname{curl}_h\boldsymbol{u}_h\|_{0,\tau}\Big)\cdot\|\boldsymbol{w}_h\|_{0,e},
\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{w}_h\|_{0,e} &\lesssim C_2\sum_{\tau\in\omega_e}\Big(h_e^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{curl}\ \alpha p_h-\beta\boldsymbol{u}_h\|_{0,\tau}+h_e^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{0,\tau}\\
&\quad+h_e^{-\frac{1}{2}}\|p_h-\operatorname{curl}_h\boldsymbol{u}_h\|_{0,\tau}+h_e^{-\frac{1}{2}}\|\operatorname{curl}\boldsymbol{u}-\operatorname{curl}_h\boldsymbol{u}_h\|_{0,\tau}\Big).
\end{aligned}\tag{4.74}$$

应用 (4.72) 和 (4.74) 得到

$$\begin{aligned}
h_e\|J_1(p_h)\|_{0,e}^2&=h_e\|[[\alpha p_h]]_\tau\|_{0,e}^2=h_e\|\boldsymbol{w}_h\|_{0,e}^2\\
&\lesssim C_2\Big(\sum_{\tau\in\omega_e}\left(\|R_1(\boldsymbol{u}_h,p_h)\|_{0,\tau}+h_e^2\|R_2(\boldsymbol{u}_h,p_h)\|_{0,\tau}\right)+\|\left(p-p_h,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\right)\|_{\mathrm{DG}}^2\Big).
\end{aligned}$$

□

最后，我们来界定误差估计子的第五项 J_2 。

引理 4.7。 设$(\boldsymbol{u},p)\in\boldsymbol{U}\times\mathbb{Q}$和$(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in\boldsymbol{U}_h\times\mathbb{Q}_h$分别是(2.6)-(2.7)和(2.16)-(2.17)的解。则有

$$\sum_{e\in\mathcal{E}_h}h_e\|J_2\left(\boldsymbol{u}_h\right)\|_{0,e}^2\lesssim C_2\Big(\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega}^2+\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\|_{0,\Omega}^2+\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h}h_\tau^2\|\nabla\cdot\left(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\right)\|_{0,\Omega}^2\Big),$$

其中， C_1 是依赖于$\|\beta\|_{0,\ \infty}$的常数。

证明。不失一般性，设 $e \in \mathcal{E}_h$ 为 τ_1 和 τ_2的公共边。令 $\phi = [(\boldsymbol{f}_h - \beta \boldsymbol{u}_h)]_e$ 和 $\phi_b = b_e \phi$，则根据（4.54），有

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{0,e}^2 &\lesssim \|b_e^{1/2}\phi\|_{0,e}^2 = (\phi, b_e\phi) = \langle [(\boldsymbol{f}_h - \beta \boldsymbol{u}_h)]_e, \tilde{\phi}_b \rangle_e \\ &= \sum_{i=1,2} \left((\nabla \cdot (\boldsymbol{f}_h - \beta \boldsymbol{u}_h), \tilde{\phi}_b)_{\tau_i} + (\boldsymbol{f}_h - \beta \boldsymbol{u}_h, \nabla \tilde{\phi}_b)_{\tau_i} \right), \end{aligned} \tag{4.75}$$

其中我们利用了 $\tilde{\phi}_b \in H_0^1(\tau_1 \cup \tau_2)$。根据 $R_3(\boldsymbol{u}_h)$ 的定义以及 (4.55)˜，对 (4.75) 的第一项（$\nabla \cdot (\boldsymbol{f}_h - \beta \boldsymbol{u}_h)$ ϕ_b）$_{\tau_i}$ 可得

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot (\boldsymbol{f}_h - \beta \boldsymbol{u}_h), \tilde{\phi}_b)_{\tau_i} &= (R_3(\boldsymbol{u}_h), \tilde{\phi}_b)_{\tau_i} + (\nabla \cdot (\boldsymbol{f}_h - \boldsymbol{f}), \tilde{\phi}_b)_{\tau_i} \\ &\leqslant (\|R_3(\boldsymbol{u}_h)\|_{0,\tau_i} + \|\nabla \cdot (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h)\|_{0,\tau_i}) \cdot \|\tilde{\phi}_b\|_{0,\tau_i} \\ &\lesssim h_e^{\frac{1}{2}} (\|R_3(\boldsymbol{u}_h)\|_{0,\tau_i} + \|\nabla \cdot (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h)\|_{0,\tau_i}) \cdot \|\phi\|_{0,e}. \end{aligned} \tag{4.76}$$

利用柯西-施瓦茨不等式和 (4.56)，对 (4.75) 的第二项可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1,2} \left(\boldsymbol{f}_h - \beta \boldsymbol{u}_h, \nabla \tilde{\phi}_b \right)_{\tau_i} &= \sum_{i=1,2} \left(\boldsymbol{f}_h - \boldsymbol{f} - \beta (\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}), \nabla \tilde{\phi}_b \right)_{\tau_i} \\ &\lesssim C_1 \sum_{i=1,2} \left(\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|_{0,\tau_i} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{0,\tau_i} \right) \cdot \|\nabla \tilde{\phi}_b\|_{0,\tau_i} \\ &\lesssim C_1 \sum_{i=1,2} h_e^{-1/2} \left(\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|_{0,\tau_i} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{0,\tau_i} \right) \cdot \|\phi\|_{0,e}, \end{aligned} \tag{4.77}$$

其中我们在 (2.7) 中取 $\boldsymbol{v} = \nabla \tilde{\phi}_b \in \boldsymbol{U}$ 时利用了 $\left(\boldsymbol{f} - \beta \boldsymbol{u}, \nabla \tilde{\phi}_b \right)_{\tau_1 \cup \tau_2} = 0$。

根据假设 $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{div}, \Omega)$ 和 $\boldsymbol{f}_h \in \mathcal{S}_h^{\mathrm{conf}}$，有

$$[\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h]_e = 0. \tag{4.78}$$

根据 $J_2(\boldsymbol{u}_h)$ 的定义以及 (4.75)-(4.78)，可得

$$\begin{aligned} \|J_2(\boldsymbol{u}_h)\|_{0,e} &= \|\phi\|_{0,e} + \|[(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h)]_e\|_{0,e} \\ &\lesssim C_1 \sum_{i=1,2} \Big(h_e^{1/2} (\|R_3(\boldsymbol{u}_h)\|_{0,\tau_i} + \|\nabla \cdot (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h)\|_{0,\tau_i}) \\ &\quad + h_e^{-1/2} \left(\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|_{0,\tau_i} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{0,\tau_i} \right) \Big). \end{aligned}$$

因此，结合引理 4.5，我们有

$$\begin{aligned} \sum_e h_e \|J_2(\boldsymbol{u}_h)\|_{0,e}^2 &\lesssim C_1 \sum_\tau \Big(h_{\tau_i}^2 \left(\|R_3(\boldsymbol{u}_h)\|_{0,\tau_i}^2 + \|\nabla \cdot (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h)\|_{0,\tau_i}^2 \right) \\ &\quad + \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|_{0,\tau_i}^2 + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{0,\tau_i}^2 \Big) \\ &\lesssim C_1 \Big(\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|_{0,\Omega}^2 + h_\tau^2 \|\nabla \cdot (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h)\|_{0,\Omega}^2 \Big). \end{aligned}$$

□

接下来，我们给出定理 4.1 的证明。

定理 *4.1* 的证明。以下结果可直接由引理 4.3-4.7 得出，

$$\kappa \sum_{e\in\mathcal{T}_h}\sum_{e\in\partial\tau} h_e^{-1}\left\|J_3(\boldsymbol{u}_h)\right\|_{0,e}^2 \lesssim \|(\boldsymbol{u},p)-(\boldsymbol{u}_h,p_h)\|_{DG}.$$

□

5. 数值实验

本节报告一些实验，以展示误差指示子和自适应算法 AMIPDG 的性能。我们使用 MATLAB 软件包 iFEM [9]进行这些数值实验。在实验 5.1 和 5.2 中，我们取 $p=$ 旋度 $\boldsymbol{u}$。

在例 5.1 中，我们讨论惩罚参数 κ 对 L^2 范数和$\|\cdot\|_{DG}$ 范数下误差的影响，并考察刚度矩阵的条件数对 κ的依赖关系。最后，我们验证所构造的误差指示子 (2.30) 的可靠性和效率。

例 5.1。令 Ω: $=[-1,1]\times[-1,1]$，我们构造模型(1.1)-(1.2)的如下解析解:

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}\cos(\pi x)\sin(\pi y)\\ -\cos(\pi y)\sin(\pi x)\end{pmatrix}$$

系数为

$$\alpha=1,\quad \beta=1,$$

对应于右端源项

$$\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{pmatrix}\left(2\pi^2-1\right)\cos(\pi x)\sin(\pi y)\\ -\left(2\pi^2-1\right)\cos(\pi y)\sin(\pi x)\end{pmatrix}.$$

容易看出，解 $\boldsymbol{u}$ 满足边界条件 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}=0$，在 $\partial\Omega$ 上。

在这个例子中，我们将 $x-$ 和 $y-$ 划分为等间距的$M(M\geq 2)$个子区间，然后将每个正方形分成两个三角形，从而得到均匀网格。令 $h=1/M$ 表示不同三角网格的网格尺寸。首先，固定网格使其满足 $h=1/32$，并在表 1 中报告不同惩罚参数 $\kappa=$ 1,50,100,150 和 200 下的 L^2 范数与 $\|\cdot\|_{DG}$ 范数误差估计。我们注意到，随着惩罚参数 κ 增大，$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_0$ 略有增加。相反，$\|($ $p-p_h,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{\mathrm{DG}}$ 随着 κ 增大而略有减小。

接下来，我们还使用固定网格 $h=1/32$，并在表 2 中观察不同 κ 对刚度矩阵条件数的影响。可以很容易看出，刚度矩阵的条件数会随着惩罚参数 κ 的增大而增大。

作为一种平衡方式，在以下数值测试中，我们始终选择 $\kappa=50$。

表 1：使用 $h=1/32$ 时， L^2 和 $\|\cdot\|_{DG}$ 范数下的误差。

κ	$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_0$	$\|\ (p-p_h,\ \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\ \|_{\mathrm{DG}}$
1	2.00399e-02	1.51333e-01
50	2.00391e-02	1.46739e-01
100	2.00397e-02	1.46733e-01
150	2.00400e-02	1.46732e-01
200	2.00401e-02	1.46732e-01

表 2：不同 κ 下刚度矩阵的条件数 .

κ	1	50	100	150	200
Cond	3.40461e+05	1.11946e+07	2.42288e+07	3.73104e+07	5.04046e+07

现在，我们通过比较 $\eta(\boldsymbol{u}_h,\ p_h;\mathcal{T}_h)$ 与 $\|(p-p_h,\ \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{\mathrm{DG}}$，验证误差估计的可靠性和效率。数值结果见表3，其中还给出了有效性指数 $\sigma=\|\ (p-p_h,\ \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\ \|_{\mathrm{DG}}/\eta(\boldsymbol{u}_h,\ p_h;\ \mathcal{T}_h)$ 的值。我们观察到， $\|\ (p-p_h,\ \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\ \|_{\mathrm{DG}}$ 的收敛率为一阶，且有效性指数为 $\sigma\approx 0.286$。这表明误差指示子是有效且可靠的，即式（4.50）。

均匀三角网格上 $\|(p-p_h,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\ \|_{\mathrm{DG}}$ 和 $\eta(\boldsymbol{u}_h,p_h;\ \mathcal{T}_h)$ 的收敛率。

h	$\|\ (p-p_h,\ \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\ \|_{\mathrm{DG}}$		$\eta(\boldsymbol{u}_h,\ p_h;\mathcal{T}_h)$		指数
	误差	阶	误差	阶数	σ
1/16	2.93259E-01	N/A	1.02621E-00	N/A	0.286
1/32	1.46739E-01	0.9989	5.13690E-01	0.9984	0.286
1/64	7.33830E-02	0.9997	2.56920E-01	0.9996	0.286
1/128	3.66932E-02	0.9999	1.28470E-02	0.9999	0.286
1/256	1.83468E-02	1.0000	6.42365E-02	1.0000	0.286

注意，我们在例 5.1 中仅考虑均匀网格和常数系数。接下来，我们测试自适应网格和跳跃系数。我们的自适应循环可通过以下算法实现：

例 5.2. 令 $\Omega:=[-1,1]\times[-1,1]$，我们构造模型(1.1)-(1.2)的如下解析解

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}\frac{y(x^2-1)(y^2-1)}{x^2+y^2+0.02}\\ \frac{-x(x^2-1)(y^2-1)}{x^2+y^2+0.02}\end{pmatrix},$$

带有跳跃系数

$$\begin{aligned}&\alpha=1.0,\beta=1.0, \quad on\ \Omega_1,\\ &\alpha=1.0,\beta=100, \quad on\ \Omega\backslash\Omega_1,\end{aligned}$$

算法 1自适应混合内罚不连续方法（AMIPDG）循环

输入 初始三角剖分 $\mathcal{T}_0$；数据 $\boldsymbol{f}$；容差 tol；标记参数 $\theta \in (0,\ 1)$。

输出 三角剖分 $\mathcal{T}_J$；MIPDG 解 $(\boldsymbol{u}_J,\ p_J)$。

$\eta = 1;\ \ k = 0;$

当 $\eta \geq tol$ **时**

求解 在 $\mathcal{T}_k$ 上求解离散变分问题 (2.16)-(2.17)，得到解 $(\boldsymbol{u}_k,\ p_k)$;

估计 使用 (2.30) 计算后验误差估计量 $\eta = \eta(\boldsymbol{u}_k, p_k, \mathcal{T}_k)$;

标记 寻找一个最小基数 $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{T}_k$，使得

$$\eta^2\left(\boldsymbol{u}_k, p_k, \mathcal{M}_k\right) \geq \theta \eta^2\left(\boldsymbol{u}_k, p_k, \mathcal{T}_k\right);$$

细化 将 $\mathcal{M}_k$ 中的单元及其相邻单元二分，以形成相容的 $\mathcal{T}_{k+1}$;

$k = k + 1;$

end

$u_J = u_k;\ \ p_J = p_k;\ \ \mathcal{T}_J = \mathcal{T}_k;$

其中 $\Omega_1 = (-0.5,0.5)^2$（见图 *2* 左侧）。注意，解 $\boldsymbol{u}$ 满足条件$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} = 0$，定义在 $\partial\Omega$上。

在这里，我们可以观察到 $\boldsymbol{u}$ 在 (0,0) 处有较大的变化。图1展示了精确解的等值线。

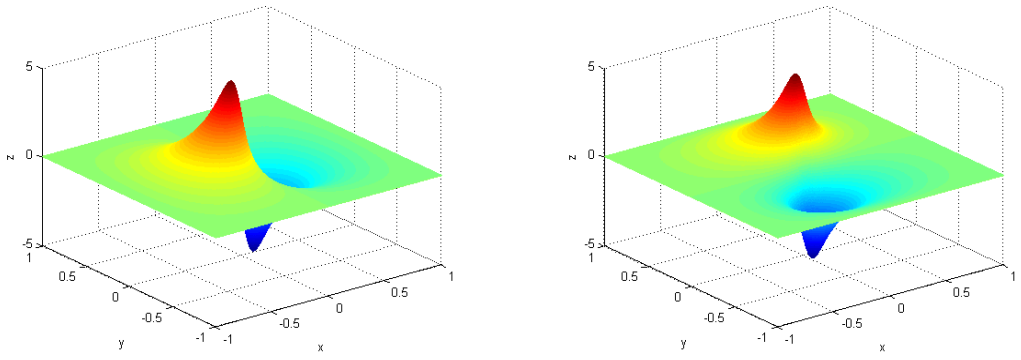

图1：左:　　解析解的第一个分量。右：解析解的第二个分量

我们通过将 x 轴和 y 轴均匀划分为八个子区间，再将每个正方形分成两个三角形，得到初始网格 $\mathcal{T}_0$，见图 2 中间部分。图 2 右侧展示了标记参数为 $\theta = 0.5$、经过 $k = 8$ 后得到的自适应加密网格；可以看到，原点和 $\partial\Omega_1$ 附近的网格都进行了局部细化。

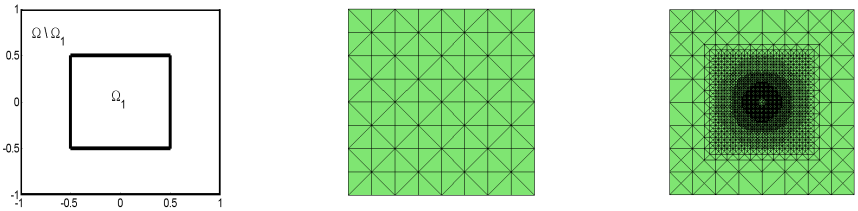

图 2：左：区域示意图。中：含有 512 个自由度的初始网格。右：经过 8 次加密后含有 20416 个自由度的自适应网格（$\theta = 0.5$）。

图 3 展示了不同标记参数 $\theta = 0.3$、0.5 和 0.7 下 $\ln N - \ln \|(p - p_k, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_k)\|_{DG}$ 的曲线，其中 N 是自由度的数量。这些曲线表明，自适应算法 AMIPDG 对能量误差 $\|(p - p_h, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)\|_{\mathrm{DG}}$ 具有收敛性和准最优性，即

$$\|(p - p_k, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_k)\|_{DG} \lesssim N^{-1/2}.$$

从这些曲线来看，当 θ 从 0.3 变为 0.7 时，收敛率似乎具有稳健性。

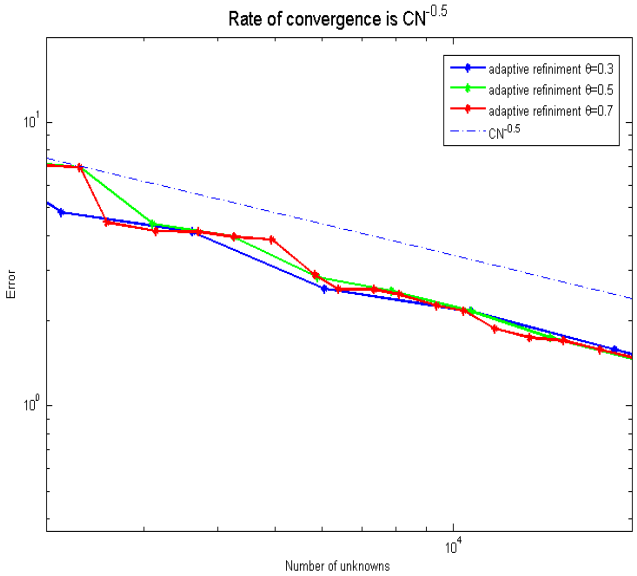

图 3：Qua　　最优性 AMIPDG 的误差 $\|(p - p_h, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)\|_{\mathrm{DG}}$，采用不同的标记参数 θ　　.

上述例子考虑的是凸域和跳跃系数。最后，我们考虑变系数、“L 形”区域以及未知精确解。

例 5.3。 设区域 $\Omega = (-1,1)^2/([0,1)\times[0,1))$ 并设变系数

$$\alpha = \frac{1}{1+x^2+y^2}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1+x^2 & xy \\ xy & 1+y^2 \end{pmatrix}.$$

我们在 $\partial\Omega$ 上施加齐次狄利克雷边界条件 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}=0$，源项为 $f = (\frac{1}{x^2+y^2+0.01}, \frac{1}{x^2+y^2+0.01})$。

我们将 x 轴和 y 轴均匀划分为八个子区间，再将每个正方形分成两个三角形，从而得到初始网格 $\mathcal{T}_0$，见图 4 左图。图 4 右图展示了经过 $k=8$ 后、标记参数为 $\theta=0.5$ 的自适应加密网格。原点附近的网格经过了局部加密。

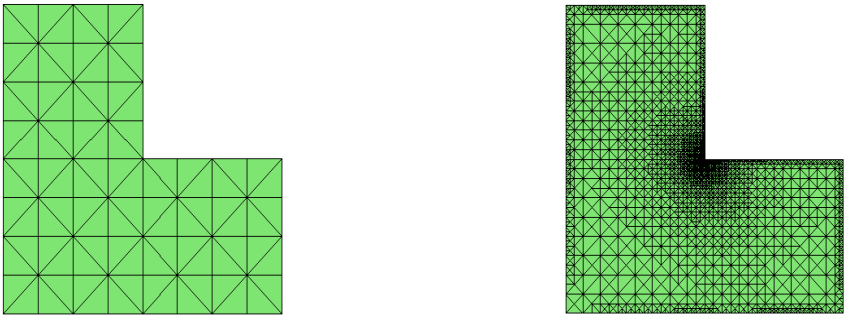

图 4：左：含 384 个自由度的初始网格。右：经过 8 次加密后，含 16032 个自由度的自适应网格（$\theta = 0.5$）。

图 5 展示了参数 $\theta = 0.3, 0.5, 0.7$ 对应的 $\ln N - \ln \eta(\boldsymbol{u}_k, p_k; \mathcal{T}_k)$ 曲线。这些曲线表明，自适应算法 AMIPDG 的 $\eta(\boldsymbol{u}_k, p_k; \mathcal{T}_k)$ 具有收敛性和准最优性。

致谢

作者受到国家自然科学基金委员会（项目编号：12071160）的资助。第二位作者还受到国家自然科学基金委员会（项目编号：11901212）的资助。

参考文献

[1] D. Arnold，采用间断元的内罚有限元方法，SIAM 数值分析杂志 19（1982）742–760。

[2]A. Bonito，R. H. Nochetto，自适应间断 Galerkin 方法的准最优收敛率，SIAM 数值分析杂志 48(2010) 734-771。

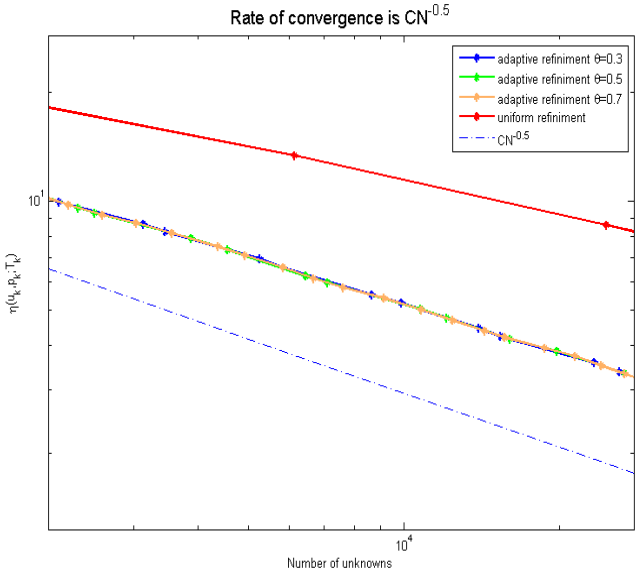

图 5：使用不同标记参数 θ 时，误差 $\eta(\boldsymbol{u}_k,\ p_k;\ \mathcal{T}_k)$ 的 AMIPDG 准最优性。

[3] F. Brezzi，G. Manzini，D. Marini，P. Pietra，A. Russo，椭圆问题的间断Galerkin逼近，偏微分方程数值方法 16(2000) 365-378。[4] C. Carstensen，R. H. W. Hoppe，二维涡流方程自适应边有限元方法的收敛性分析，数值数学杂志 13(2005) 19-32。[5] C. Carstensen，R. H. W. Hoppe，H(curl)椭圆问题非标准有限元逼近的后验误差分析统一框架，数值数学杂志 17(2009) 27-44。[6] C. Carstensen，R. H. W. Hoppe，N，Sharma，T. Warburton，H(curl)椭圆问题的自适应混合内罚间断Galerkin方法，Numer. Math. Theor. Meth. Appl. 4(2011) 13-37。[7] P. Castillo，间断Galerkin方法对椭圆偏微分方程的性能，SIAM科学计算杂志 24(2002) 524-547。[8] J. Q. Chen，Y. F. Xu，J. Zou，麦克斯韦方程自适应边元方法的收敛性分析，应用数值数学 59(2009) 2950-2969。[9] L. Chen，iFEM：MATLAB中的创新有限元方法软件包，技术报告，加州大学欧文分校，2009。

[10] E. T. Chung, H. H. Kim，适用于H(curl)椭圆问题的混合交错不连续Galerkin方法的豪华型FETI-DP算法，国际数值方法与工程杂志 98(2014) 1-23。[11] E. T. Chung, M. C. Yuen, L. Q. Zhong，时谐麦克斯韦方程交错不连续Galerkin离散的后验误差分析，应用数学与计算 237(2014) 613-631。[12] M. Costabel, M. Dauge. 多面体区域中电磁场的奇异性，Arch. Rational Mech. Anal. 151(2000) 221-276。[13] M. Costabel, M. Dauge, S. Nicaise，涡流问题的奇异性，ESAIM: Math. Model. Numer. Anal. 37(2003) 807-831。[14] R. H. W. Hoppe AND J. Sch¨oberl，三维涡流方程自适应边元方法的收敛性，J. Comput. Math. 27(2009) 657-676。[15] P. Houston, I. Perugia, A. Schneebeli, D. Sch¨otzau. 麦克斯韦算子的混合间断Galerkin逼近：不定情形。ESAIM: Math. Model. Numer. Anal. 39(2005) 727-754。[16] P. Houston, I. Perugia, D. Sch¨otzau，H(curl)椭圆偏微分方程间断Galerkin离散的后验误差指示子，IMA J. Numer. Anal. 27(2007) 122-150。[17]P. Houston, C. Schwab, E. S¨uli，对流-扩散-反应问题的间断 hp-有限元方法，SIAM J. Numer. Anal. 39(2002) 2133-2163。[18] W. Jiang, N. Liu, Y. F. Tang, Q. H. Liu，各向异性介质中二维矢量麦克斯韦特征值问题的混合有限元方法，Prog. Electromagn. Res. 148(2014) 159-170。[19] C. S. Jog, A. Nandy，用于电磁分析的混合有限元，Comput. Math. Appl. 68(2014) 887-902。[20] D. A. Kopriva, G. J. Gassner, J. Nordstr¨om，当系数矩阵存在跳跃时，用于波传播的不连续Galerkin谱元格式的稳定性，J. Sci. Comput. 88(2021) 1-23。[21] N. Liu, L. Tob´on, Y. F. Tang, Q. H. Liu，二维麦克斯韦特征值问题的混合谱元方法，Commun. Comput. Phys. 17(2015) 458-486。[22] S. Lohrengel, S. Nicaise，复合材料中二维时谐麦克斯韦方程在加密网格上的间断Galerkin方法，J. Comp. Appl. Math. 206(2007) 27-54。

[23] B Rivi`ere，求解椭圆和抛物型方程的间断伽辽金方法：理论与实现，SIAM，费城，2008年。[24] J. Sch¨oberl，麦克斯韦方程的后验误差估计，数学计算 77(2008) 633-649。[25] L. R. Scott, S. Y. Zhang，满足边界条件的非光滑函数的有限元插值，数学计算 54(1990) 483-493。[26] X. Q. Xing, L. Q. Zhong，H(curl)椭圆问题间断Galerkin方法的后验误差估计（中文），华南师范大学学报（自然科学版），44(2012) 18-21。[27] J. C. Xu，通过空间分解和子空间校正实现的迭代方法, SIAM评论 34(1992) 581-613。[28] L. Q. Zhong, T. Cheng, X. Q. Xing，$H(curl)$椭圆问题自适应内罚间断Galerkin方法的收敛性，华南师范大学学报（自然科学版），48(2016) 92-98。[29] L. Q. Zhong, S. Shu, L. Chen, J. C. Xu，H(curl)椭圆问题自适应边有限元方法的收敛性，数值线性代数及其应用 17(2010) 415-432。