arXiv:2301.01564v1 [math.AP] 4 Jan 2023

椭圆型偏微分方程的正则性理论

Xavier Fern´andez-Real

Xavier Ros-Oton

EPFL SB MATH, Institute of Mathematics, Station 8, CH-1015 Lausanne, Switzerland
电子邮箱地址：xavier.fernandez-real@epfl.ch

Universität Zürich, Institut für Mathematik, Winterthurerstrasse 190, 8057 Zürich, Switzerland, &

ICREA, Pg. Lluís Companys 23, 08010 Barcelona, Spain, &

Universitat de Barcelona, Departament de Matemàtiques i Informàtica, Gran Via de les Corts Catalanes 585, 08007 Barcelona,Spain, &

Centre de Recerca Matemàtica, Edifici C, Campus Bellaterra, 08193 Bellaterra, Spain
电子邮件地址：xros@icrea.cat

2020年 数学主题分类。35J15, 35B65, 35J05, 35J20, 35J60, 35R35.

关键词与短语。 椭圆型偏微分方程、Schauder估计、希尔伯特第十九问题、非线性椭圆方程、障碍问题。

目录

前言 vii 第 1 章。概述与预备知识 1 §1.1。预备知识：Sobolev 和 H¨ölder 空间 3 §1.2。拉普拉斯方程简介 9 §1.3。调和函数的概率解释 21 第2章。线性椭圆偏微分方程 25 §2.1。哈纳克不等式 26 §2.2。拉普拉斯算子的 Schauder估计 33 §2.3。非散度形式算子的 Schauder估计 46 §2.4。散度型算子的 Schauder估计 59 §2.5。连续系数的情形 64 §2.6。边界正则性 68 第3章。非线性变分偏微分方程与希尔伯特第十九问题 71 §3.1。概述 72 §3.2。存在性与基本估计 75 §3.3。德乔治的证明 81 §3.4。希尔伯特第十九问题的解答 94 §3.5。进一步结果与未决问题 95 第4章。全非线性椭圆偏微分方程 97 §4.1。什么是椭圆性？ 98 §4.2。二元方程 102

§4.3. 解的存在性 105 §4.4. 解的正则性：概述 115 §4.5. 进一步结果与未决问题 121 第 5 章. 障碍问题 125 §5.1. 一些动机与应用 128 §5.2. 解的基本性质 I 130 §5.3. 解的基本性质 II 141 §5.4. 自由边界的正则性：概述 147 §5.5. 放大极限的分类 150 §5.6. 自由边界的正则性 161 §5.7. 奇异点 171 §5.8. 关于奇异集的大小 175 附录 A. H¨older 空间的一些性质 179 附录 B. 边界哈纳克不等式的证明 191 C. 全非线性方程的概率解释 201 附录 D. 障碍问题的动机与应用 211 符号说明 219 参考文献 223 索引 229

前言

偏微分方程中最基本且重要的问题之一是正则性问题。它也是该领域的一个统一性问题，因为它影响着各种类型的偏微分方程。一个经典例子是希尔伯特第十九问题（1900），粗略地说，该问题询问所有一致椭圆变分偏微分方程的解是否都是光滑的。德乔治和纳什于1956年和1957年给出了肯定的回答；如今，这已成为整个偏微分方程领域中最著名、最重要的定理之一。

自20世纪中期以来，正则性问题一直是椭圆型偏微分方程研究的核心方向，Nirenberg、Caffarelli、Krylov、Evans、Figalli 等人做出了极其重要的贡献。他们的工作极大地影响了许多以某种方式与偏微分方程相关的数学领域，包括：调和分析、变分法、微分几何、几何测度论、连续介质力学与流体力学、概率论、数学物理以及计算与应用数学。

本文源自第二作者于2017年和2019年在苏黎世大学开设的两门椭圆型偏微分方程博士课程。本文旨在对椭圆型偏微分方程的正则性理论作一番自成体系的介绍，着重阐述主要思想，而不追求以最一般的形式证明所有结果。本书可视为基础偏微分方程课程与更高阶教材之间的桥梁，例如 [**GT77**] 或 [**CC95**]。此外，我们认为，本书所选取的结果与技巧，与其他关于椭圆型偏微分方程的著作相得益彰，例如 [**Eva98**], [**HL97**], 、 [**Kry96**]，以及近期出版的著作 [**ACM18**]。例如，我们给出了一个不同于其他教材所载证明的 Schauder估计证明（归功于 L. Simon）；证明了全非线性方程的一些基本结果，

这些内容在 [**CC95**]中并未涉及；我们还详细研究了障碍问题，而这类内容通常只见于更专业的教材，例如 [**Fri88**]或[**PSU12**]。此外，在第3、4、5章末尾，我们还回顾了一些近期成果和未解决的问题。

我们谨向 Alessio Figalli、Thomas Kappeler、Alexis Michelat、Joaquim Serra 和 Wei Wang 致谢，感谢他们对本书提出的诸多意见和建议。

最后，我们谨此感谢以下资助机构提供的支持：X.F. 获得欧洲研究委员会资助，资助协议编号为 721675，项目名称为“偏微分方程中的正则性与稳定性（RSPDE）”；同时获得瑞士国家科学基金会资助（SNF 项目编号 200021 182565 和 PZ00P2 208930 ），以及瑞士联邦教育、研究与创新国务秘书处（SERI）资助，合同编号为 M822.00034；X.R. 获得欧洲研究委员会资助，资助协议编号为 801867，项目名称为“椭圆型偏微分方程的正则性与奇异性（EllipticPDE）”；同时获得瑞士国家科学基金会资助（ SNF 项目编号 200021 178795）、AEI项目 PID2021-125021NA-I00（西班牙）资助，以及由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的项目 RED2018-102650-T 的资助；此外，还通过西班牙国家研究机构的 Mar´ı a de Maeztu 研发卓越中心与单位计划（CEX2020-001084-M）获得资助。

苏¨黎世，2020年

第 1 章

概述与预备知识

复分析中的一个优美结果指出，由于任意全纯函数的实部$u(x,\ y)$满足

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

它必须是实解析的。此外，在任意给定区域中，u 的振荡控制着任意（紧含）子区域中的所有 导数。

在高维中，对于以下方程的解，也会出现同样的现象：

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

这些是调和函数，而 (1.1) 是最简单的椭圆型偏微分方程（PDE）。该方程的任意解都是光滑的（实解析的），并且满足

$$\|u\|_{C^k(Q)} \leq C_{k,Q}\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad \text{for all} \quad k = 1, 2, 3, ...$$

对于任意紧子区域 $Q \subset\subset \Omega$。也就是说，所有导数都受 u 的上确界控制。

此处以及全书中，Ω 表示 $\mathbb{R}^n$ 的任意有界区域。

•拉普拉斯方程的正则性：

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \qquad \Longrightarrow \qquad u \text{ is } C^\infty \text{ inside } \Omega.$$

这种正则化性质在椭圆型偏微分方程中很常见，也是本书的主题。

可以从三个不同角度解释这一现象：

(a) 解的积分表示：泊松核、基本解等。

(b) 能量考量：调和函数是狄利克雷能量的局部极小化子

$$\mathcal{E}(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

˜（即，如果我们在 Ω ⊂ Ω 中将 u 改为 w，那么 $\mathcal{E}(w) \geq \mathcal{E}(u)$）。

(c) 比较原理：调和函数不可能有任何内部最大值点（最大值原理）。

这三种方法在不同情境中都极为有用，也有助于发展非线性 椭圆型偏微分方程的正则性理论。

本书的结构如下：

⋆ 首先，在**第2章** 中，我们将研究线性 椭圆型偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u = f(x) \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

and

$$\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\big(a_{ij}(x)\partial_j u\big) = f(x) \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

其中，系数 $a_{ij}(x)$ 和右端项 $f(x)$ 满足适当的正则性假设。在最简单的情形下，$(a_{ij})_{i,\,j} \equiv \mathrm{Id}$，我们有

$$\Delta u = f(x) \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

我们想要证明的结果类型是："u 比 多具有两个导数的正则性"。

⋆ 然后，在**第3章** 中，我们将把注意力转向非线性变分偏微分方程：

$\mathcal{E}(u)$ 的极小化子：$= \int_\Omega L(\nabla u)dx, \qquad L$ 光滑且一致凸。

这类非线性偏微分方程的正则性问题即希尔伯特第十九问题（1900）。

⋆ 在**第4章**中，我们将以最一般的形式研究非线性椭圆型偏微分方程

$$F(D^2u, \nabla u, u, x) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

或者简单地说

$$F(D^2u) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

这些称为全非线性椭圆方程，而且一般没有以能量泛函表示的变分形式。

⋆ 在**第 5 章**，我们将研究障碍问题，这是一类带约束的极小化问题：

$$\text{minimize} \qquad \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \qquad \text{among functions } u \geq \varphi \text{ in } \Omega,$$

其中 φ 是给定的光滑“障碍物”。这是最简单也最重要的椭圆自由边界问题。此外，它还可以看作 Ω 中形如 $\min\{-\Delta u, u - \varphi\} = 0$ 的非线性偏微分方程。

正如我们将看到的，在上述每种情形中，我们主要会运用：(b) 能量考量，或 (c) 最大值原理。

本书末尾还收录了四个附录，以补充正文各章节的理论。

1.1. 预备知识：Sobolev 与 H¨older 空间

接下来，我们将简要回顾 L^p、Sobolev 空间和 H¨older 空间，并陈述本书后文将用到的结果。

L^p 空间。给定 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 和 $1 \leq p < \infty$，空间 $L^p(\Omega)$ 是如下集合

$$L^p(\Omega) := \left\{ u \text{ measurable in } \Omega : \int_\Omega |u|^p dx < \infty \right\}.$$

它是一个巴拿赫空间，其范数为 $\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p}$。

当 $p = \infty$ 时，空间 $L^\infty(\Omega)$ 是有界函数（模去零测集）的集合，其范数为 $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{esssup}_\Omega |u|$。

在这一背景下，一个众所周知的结果是勒贝格微分定理（例如，参见 [**EG92**]）。

定理 1.1。如果 $u \in L^1(\Omega)$，那么对于几乎所有的 $x \in \Omega$，我们有

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B_r(x)} |u(x) - u(y)| dy = 0.$$

当这一性质在点 $x \in \Omega$ 处成立时，我们称 x 是 u 的勒贝格点。

此处以及全书中，$\fint_A$ 表示平均值 $\frac{1}{|A|}\int_A$，其中 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是任意一个具有有限正测度的集合。

这一结果的一个有用推论如下。

推论 1.2。假设 $u \in L^1(\Omega)$，并且

$$\int_\Omega uv\,dx = 0 \qquad for\ all\ \ v \in C_c^\infty(\Omega).$$

于是，在Ω中几乎处处成立 $u = 0$ 。

分部积分。 研究偏微分方程时，一个基本恒等式如下。

定理 1.3 (分部积分**)**。 设Ω $\subset \mathbb{R}^n$ 是任意有界 C^1区域[1]。那么，对于任意的 $u, v \in C^1(\Omega)$ ，有

$$\int_\Omega \partial_i u\, v\,dx = -\int_\Omega u\,\partial_i v\,dx + \int_{\partial\Omega} uv\,\nu_i\,dS, \tag{1.2}$$

其中 ν是Ω ∂的单位（外）法向量，并且 $i = 1, 2, ..., n$。

注意，作为直接推论，我们可得散度定理以及格林第一恒等式

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = -\int_\Omega u\,\Delta v\,dx + \int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS.$$

定理 1.3 的正则性要求可以放宽。例如，区域 Ω 只需是利普希茨的，而在 (1.2) 中只需 $u, v \in H^1(\Omega)$——其中 H^1 是一个 Sobolev 空间，定义如下。

Sobolev 空间。 给定任意区域 Ω $\subset \mathbb{R}^n$ 和 $1 \le p \le \infty$，Sobolev 空间 $W^{1,p}(\Omega)$ 由所有（弱）导数属于 $L^p(\Omega)$ 的函数构成，即

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \,:\, \partial_i u \in L^p(\Omega) \ \text{ for } \ i = 1, ..., n\}.$$

关于弱导数的定义和 Sobolev 空间的详细论述，请参阅优秀著作 [**Eva98, Bre11**] 。

Sobolev 空间的一些有用性质如下（参见 [**Eva98**]）：

(S1) 空间 $W^{1,p}(\Omega)$ 是完备的。

(S2) 嵌入 $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ 是紧的。

(S3) </style}空间 (Ω) :, $_2(\Omega)$ 是一个希尔伯特空间，其标量积为

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

(S4) 希尔伯特空间 $H^1(\Omega)$中的任意有界序列 $\{u_k\}$ 都包含一个弱收敛子列 $\{u_{k_j}\}$，也就是说，存在 $u \in H^1(\Omega)$，使得

$$(u_{k_j}, v)_{H^1(\Omega)} \to (u, v)_{H^1(\Omega)} \quad \text{for all } v \in H^1(\Omega). \tag{1.3}$$

[1]关于 C^1 区域的定义，请参阅符号说明部分（第 221 页）。

此外，这样的 u 将满足

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le \liminf_{j\to\infty} \|u_{k_j}\|_{H^1(\Omega)}, \tag{1.4}$$

由于 $H^1(\Omega)$ 紧嵌入于 $L^2(\Omega)$，因此有

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{j\to\infty} \|u_{k_j}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.5}$$

(S5) 设 Ω 为任意有界利普希茨区域，且 $1 \le p \le \infty$。则存在从 $W^{1,p}(\Omega)$ 到 $L^p(\partial\Omega)$ 的连续（当 $p > 1$ 时为紧）迹算子。对于 C^0 函数，此迹算子就是 $u \mapsto u|_{\partial\Omega}$。

因此，对于任意函数 $u \in H^1(\Omega)$，我们仍将其在 $\partial\Omega$ 上的迹记作 $u|_{\partial\Omega}$。

(S6) 对于 $1 \le p < \infty$，$C^\infty(\Omega)$ 函数在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中稠密。此外，如果 Ω 是有界利普希茨区域，则 $C^\infty(\Omega)$ 函数在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中稠密。

(S7) 对于 $1 \le p < \infty$，我们将空间 $W^{1,p}_0(\Omega)$ 定义为 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中的闭包。同样地，我们记 $H^1_0(\Omega) := W^{1,2}_0(\Omega)$。当 Ω 是有界利普希茨区域时，它是满足 $u|_{\partial\Omega} = 0$ 的 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 函数组成的空间。

(S8) 若 $u \in W^{1,p}(\Omega)$，$1 \le p \le \infty$，则对任意子区域 $K \subset\subset \Omega$，有

$$\left\| \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} \right\|_{L^p(K)} \le C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

对所有 $h \in B_\delta$，只要 $\delta > 0$ 足够小。

反过来，若 $u \in L^p(\Omega)$，$1 < p \le \infty$，且

$$\left\| \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} \right\|_{L^p(K)} \le C$$

对每个 $h \in B_\delta$ 都成立，则 $u \in W^{1,p}(K)$ 且 $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \le C$。（然而，当 $p = 1$ 时，这一性质不成立。）

(S9) 给定任意函数 u，定义 $u^+ =$ 最大值$\{u, 0\}$ 和 $u^- =$ 最大值$\{-u, 0\}$，使得 $u = u^+ - u^-$。那么，对任意 $u \in W^{1,p}(\Omega)$，有 u^+，$u^- \in W^{1,p}(\Omega)$，且 $\nabla u = \nabla u^+ - \nabla u^-$ 在 Ω 中几乎处处成立。

特别地，索博列夫函数的梯度几乎处处在水平集上为零，$\nabla u(x) = 0$ 对几乎处处的 $x \in \{u = 0\}$。

在此背景下，一个重要的不等式如下。

定理 1.4（索博列夫不等式）。若 $p < n$，则

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_*} dx \right)^{1/p_*} \le C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}, \qquad \frac{1}{p_*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

其中某个常数 C 仅取决于 n 和 p。特别地，我们有连续嵌入 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_*}(\mathbb{R}^n)$。

注意，由于 $p \uparrow n$ ，我们有 $p_* \to \infty$。然而，在极限情形 $p = n$下，$W^{1,\,n}$ 函数有界这一说法并不成立。例如，取 $u(x) = \log\log\left(1+\frac{1}{|x|}\right) \in W^{1,\,n}(B_1)$ 即可看出这一点。不过，在情形$p > n$下，不会出现以下情况。

定理 1.5 （Morrey 不等式）。 若 $p > n$，则

$$\sup_{x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p dx\right)^{1/p}, \qquad \alpha = 1-\frac{n}{p},$$

其中常数 C 仅依赖于 n 和 p。

特别地，当 $p > n$ 时， $W^{1,\,p}$ 中的任意函数都是连续的（在必要时可在零测集上重新定义）。

最后，我们还将用到有界区域中的以下不等式。

定理 1.6 （Poincar´e 不等式）。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任意有界利普希茨区域，且 $p \in [1,\infty)$。那么，对于任意 $u \in W^{1,\,p}(\Omega)$ ，有

$$\int_{\Omega}|u-u_{\Omega}|^p dx \le C_{\Omega,p}\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx,$$

其中 $u_{\Omega} := \fint_{\Omega} u$，且

$$\int_{\Omega}|u|^p dx \le C'_{\Omega,p}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx + \int_{\partial\Omega}\left|u|_{\partial\Omega}\right|^p d\sigma\right).$$

常数 $C_{\Omega,\,p}$ 和 $C'_{\Omega,\,p}$ 仅依赖于 n、 p 和 Ω。

H¨尔德空间。给定 $\alpha \in (0,\,1)$，H¨尔德空间 $C^{0,\,\alpha}(\Omega)$ 是连续函数 $u \in C(\Omega)$ 构成的集合，且 H¨尔德半范数有限，

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < \infty.$$

H¨尔德范数为

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} + [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

当 $\alpha = 1$ 时，这就是通常的利普希茨连续函数空间。

更一般地，给定 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in (0,\,1)$，空间 $C^{k,\,\alpha}(\Omega)$ 是由函数 $u \in C^k(\Omega)$ 构成的集合，且下列范数有限

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + [D^k u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})},$$

其中

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \sum_{j=1}^{k}\|D^j u\|_{L^{\infty}(\Omega)}.$$

注意，这得出了以下包含关系

$$C^0 \supset C^{0,\alpha} \supset \mathrm{Lip} \supset C^1 \supset C^{1,\alpha} \supset ... \supset C^\infty.$$

我们通常写作$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$，而不写$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$。

最后，有时使用以下符号会比较方便。当$\beta > 0$不是整数时，我们定义 $C^\beta(\Omega) := C^{k,\alpha}(\Omega)$，其中 $\beta = k + \alpha, k \in \mathbb{N}, \alpha \in (0,1)$。

本书中将会用到 H¨older 空间的许多性质或其他定义。它们对所有 $\alpha \in (0,1)$ 都成立，证明见附录 A。

(H1) 假设

$$\mathrm{osc}_{B_r(x)} u \le C_0 r^\alpha \qquad \text{for all } B_r(x) \subset \overline{B_1},$$

其中 $\mathrm{osc}_A u := \sup_A u - \inf_A u$。

那么，$u \in C^{0,\alpha}(\overline{B_1})$ 和$[u]_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le CC_0$，其中 C 仅依赖于 n，α。

(H2) 设 $u_{x,r} := \fint_{B_r(x)} u$。假设

$$\|u - u_{x,r}\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C_0 r^\alpha \qquad \text{for all } B_r(x) \subset \overline{B_1}.$$

那么，$u \in C^{0,\alpha}(\overline{B_1})$ 和$[u]_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le CC_0$，其中 C 仅依赖于 n，α。

(H3) 设 $u_{x,r} := \fint_{B_r(x)} u$。假设

$$\left(\fint_{B_r(x)} |u - u_{x,r}|^2 \right)^{1/2} \le C_0 r^\alpha \qquad \text{for all } B_r(x) \subset \overline{B_1}.$$

那么，$u \in C^{0,\alpha}(\overline{B_1})$ 和 $[u]_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le CC_0$，其中 C 仅依赖于 n，α。

(H4) 假设对每个 x，都存在一个常数 C_x，使得

$$\|u - C_x\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C_0 r^\alpha \qquad \text{for all } B_r(x) \subset \overline{B_1}.$$

那么，$u \in C^{0,\alpha}(\overline{B_1})$ 和 $[u]_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le CC_0$，其中 C 仅取决于 n，α。

假设对于每个 x，都存在一个线性函数 $\ell_x(y) = a_x + b_x \cdot (y - x)$，使得

$$\|u - \ell_x\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C_0 r^{1+\alpha} \qquad \text{for all } B_r(x) \subset \overline{B_1}.$$

那么，$u \in C^{1,\alpha}(\overline{B_1})$ 和 $[Du]_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le CC_0$，其中 C 仅依赖于 n，α。

假设对于每个 x，都存在一个二次多项式 $P_x(y)$，使得

$$\|u - P_x\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C_\circ r^{2+\alpha} \qquad \text{for all } B_r(x) \subset \overline{B_1}.$$

那么，$u \in C^{2,\alpha}(\overline{B_1})$ 和 $[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le CC_\circ$，其中 C 仅依赖于 n，$\alpha_\circ$

(H5) 设 $\rho_\circ \in (0,1)_\circ$ 假设对于每个 $x \in B_{1/2}$，都存在一个二次多项式序列 $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得

$$\|u - P_k\|_{L^\infty(B_{\rho_\circ^k}(x))} \le C_\circ \rho_\circ^{k(2+\alpha)} \qquad \text{for all } k \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

那么，$u \in C^{2,\alpha}(B_{1/2})$ 和 $[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \le CC_\circ$，其中 C 仅依赖于 n, α 和 $\rho_{\circ\circ}$

(H6) 假设 $\alpha \in (0,1)$、$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \le C_\circ$，并且

$$\sup_{\substack{x\in B_1\\ x\pm h\in\overline{B_1}}} \frac{\big|u(x+h)+u(x-h)-2u(x)\big|}{|h|^\alpha} \le C_\circ.$$

那么，$u \in C^{0,\alpha}(\overline{B_1})$ 和 $\|u\|_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le CC_\circ$，其中 C 仅依赖于 n，$\alpha_\circ$

假设 $\alpha \in (0,1)$，$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \le C_\circ$，并且

$$\sup_{\substack{x\in B_1\\ x\pm h\in\overline{B_1}}} \frac{\big|u(x+h)+u(x-h)-2u(x)\big|}{|h|^{1+\alpha}} \le C_\circ.$$

那么，$u \in C^{1,\alpha}(\overline{B_1})$ 和 $\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_1)} \le CC_\circ$，其中 C 仅取决于 $n, \alpha_\circ$

然而，当 $\alpha = 0$ 时，这种性质不成立。

(H7) 假设 $\alpha \in (0,1]$，$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \le C_\circ$，并且对每个 $h \in B_1$，都有

$$\left\| \frac{u(x+h)-u(x)}{|h|^\alpha} \right\|_{C^\beta(B_{1-|h|})} \le C_\circ, \tag{1.7}$$

其中 $C_\circ$ 与 h 无关。另假设 $\alpha+\beta$ 不是整数。那么，$u \in C^{\alpha+\beta}(B_1)$ 和 $\|u\|_{C^{\alpha+\beta}(B_1)} \le CC_\circ$，其中 C 仅取决于 $n, \alpha, \beta_\circ$

然而，当 $\alpha+\beta$ 是整数时，这种性质不成立。

(H8) 假设 $u_i \to u_0$ 在 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中一致地成立，并且 $\|u_i\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \le C_\circ$，其中 $\alpha \in (0,1]$，且某个 $C_\circ$ 与 i 无关。那么，我们有 $u_0 \in C^{k,\alpha}(\Omega)$，并且

$$\|u_0\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \le C_\circ.$$

最后，这一背景下的一个重要结果是 Arzel`a–Ascoli 定理的以下特殊情形。

定理 1.7 (阿策拉`–阿斯科利)。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0,1)$，并设 $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是任意一个满足以下条件的函数序列 f_i

$$\|f_i\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_\circ.$$

那么，存在一个子序列 f_{i_j}，它一致地收敛到函数 $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$。

更一般地，该结果与**(H8)** 结合可推出，若

$$\|u_i\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_\circ,$$

且 $\alpha \in (0,1)$，那么子序列 u_{i_j} 将在 $C^k(\Omega)$ 范数下收敛到函数 $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$。

H¨older 空间中的插值不等式。 本书中将反复用到的一个有用工具如下。对每个 $0 \leq \gamma < \alpha < \beta \leq 1$ 以及任意 $\varepsilon > 0$，都有

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_\varepsilon \|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} + \varepsilon \|u\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})}, \tag{1.8}$$

其中 C 是一个仅依赖于 n 和 ε的常数。（当 $\gamma = 0$, $C^{0,\gamma}$ 应替换为 L^∞。）这由插值不等式得出

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \|u\|^t_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \|u\|^{1-t}_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} \qquad t = \frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}.$$

更一般地，（1.8）对高阶 H¨older 范数也成立。特别地，我们将用到：对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $\alpha \in$ （0,1）

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leq C_\varepsilon \|u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \varepsilon [\nabla u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})},$$

and

$$\|u\|_{C^2(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^{1,1}(\overline{\Omega})} \leq C_\varepsilon \|u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \varepsilon [D^2 u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}. \tag{1.9}$$

此类不等式的证明可参见 [**GT77**，引理 6.35] 。

1.2. 拉普拉斯方程概述

椭圆方程与拉普拉斯方程具有一些共同性质。（我们将在后续章节中对此作更严谨的说明。）因此，我们先简要回顾拉普拉斯方程和调和函数。

该方程的狄利克雷问题如下：

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.10}$$

其中给定边界条件 g。区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界且光滑（或至少是利普希茨的）。狄利克雷问题可解，并且有唯一解。

理解拉普拉斯算子 Δ 的一种有用方式是注意到，除一个乘法常数外，它是唯一一个平移不变且旋转不变的二阶线性算子。事实上，它可以看作一个算子，用来衡量 u 在 x 处的值与 x 周围 u 的平均值之间的（无穷小）差异，具体来说：对于任意 C^2 函数 w，我们有

$$\begin{aligned} \Delta w(x) &= \lim_{r\to 0} \frac{c_n}{r^2} \left\{ \fint_{B_r(x)} w(y)dy - w(x) \right\} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{c_n}{r^2} \fint_{B_r(x)} \big(w(y) - w(x)\big)dy, \end{aligned} \tag{1.11}$$

其中 c_n 是某个正常数。例如，可以通过对 $w(y)$ 在 x 处作泰勒展开来证明这一点。此外，将 $\partial B_r(x)$ 中的积分代替 $B_r(x)$，也有类似的公式。例如，参见 [**DV21**]。

实际上，利用散度定理可以证明

$$\frac{n}{r}\frac{d}{dr} \fint_{\partial B_r(x)} w\, d\sigma = \fint_{B_r(x)} \Delta w, \tag{1.12}$$

由此也可推出 (1.11)。

解的存在性：能量方法。 构造 (1.10) 的解最经典的方法是采用“能量方法”。具体而言，我们考虑凸泛函

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \qquad \text{among functions satisfying} \quad u|_{\partial\Omega} = g,$$

然后寻找使泛函取最小值的函数 u ——关于极小化子的存在性，详见下文定理 1.10。注意，这样的极小化子 u 显然满足 Ω 上的边界条件 $u = g\ \partial$，因此我们只需进一步验证它在 Ω 内满足 $\Delta u = 0$。

若 u 是极小化子，则对于每个 $v \in C_c^\infty(\Omega)$，都有 $\mathcal{E}(u) \le \mathcal{E}(u+\varepsilon v)$。由于对于每个固定的 v，ε 中的此类函数在 $\varepsilon = 0$ 处取得最小值，因此我们有

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathcal{E}(u+\varepsilon v) = 0.$$

因此，

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathcal{E}(u+\varepsilon v) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u + \varepsilon v|^2 dx \\ &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \frac{1}{2}\int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + 2\varepsilon \nabla u\cdot\nabla v + \varepsilon^2|\nabla v|^2\big) dx \\ &= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx. \end{aligned}$$

因此，若 u 是该泛函的极小化子，则

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx = 0 \qquad \text{for all} \quad v\in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.13}$$

如果 u 足够正则（例如， $u\in C^2$），那么我们可以分部积分（定理 1.3），得到

$$\int_\Omega \Delta u\, v\, dx = 0 \qquad \text{for all} \quad v\in C_c^\infty(\Omega).$$

因此，利用推论 1.2，我们可以推出 $\Delta u = 0$ 在 Ω 中，正如所需。

注 1.8。如上所述，在分部积分之前应证明 u 的正则性——先验地，极小化子 u 只能满足 $u\in H^1(\Omega)$。我们将在下文的推论 1.12 中证明这一点。

如果 u 不具备额外的正则性，那么上述论证表明， $\mathcal{E}$ 的任意极小化子 u 都是弱解，其含义如下。

定义 1.9. 我们称 u 是狄利克雷问题 (1.10) 的弱解，当且仅当 $u\in H^1(\Omega)$、$u|_{\partial\Omega} = g$，并且

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx = 0 \qquad \text{for all} \quad v\in H_0^1(\Omega).$$

这里， $u|_{\partial\Omega}$ 是 u 在 $\partial\Omega$ 上的迹；回顾上文的**(S5)** 。

更一般地，给定 $f\in L^2(\Omega)$，我们称 u 在 Ω 中以弱意义满足 $-\Delta u = f$，当且仅当 $u\in H^1(\Omega)$，并且

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx = \int_\Omega fv \qquad \text{for all} \quad v\in H_0^1(\Omega).$$

最后，如果 u 在 Ω 中是弱超调和（分别为弱次调和）的，或者说在弱意义下在 Ω 中满足 $\Delta u\le 0$ （分别在弱意义下满足 $\Delta u\ge 0$ ），则称之为

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx \ge 0 \quad \left(\text{resp.} \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx \le 0\right) \quad \text{for all} \quad v\in H_0^1(\Omega), v\ge 0.$$

注意，如果 $H^1(\Omega) \ni u_k \rightharpoonup u \in H^1(\Omega)$ 在 H^1 中弱收敛，且 $L^2(\Omega) \ni f_k \rightharpoonup f \in L^2(\Omega)$ 在 L^2 中弱收敛，并满足在 Ω 中弱意义下的 $\Delta u_k = f_k$，那么 $\Delta u = f$ 在弱意义下也成立（将极限代入前述定义即可得到）。类似地，弱（次）超调和函数的弱极限是（次）超调和函数。

接下来我们证明以下结论:

定理 1.10 (弱解的存在唯一性)。 假设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任意一个有界利普希茨区域，并且

$$\left\{w \in H^1(\Omega) : w|_{\partial\Omega} = g\right\} \neq \varnothing. \tag{1.14}$$

那么，狄利克雷问题(1.10)存在唯一的弱解。

证明。 Existence.令

$$\theta_\circ := \inf\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx : w \in H^1(\Omega),\ w|_{\partial\Omega} = g\right\},$$

也就是说，在所有容许函数 w 中， $\mathcal{E}(w)$ 的下确界值。

取一列函数 $\{u_k\}$，使得

- $u_k \in H^1(\Omega)$
- $u_k|_{\partial\Omega} = g$
- $\mathcal{E}(u_k) \to \theta_\circ$ 当 $k \to \infty$时。

由 Poincar´e 不等式（定理 1.6，其中 $p = 2$），序列 $\{u_k\}$在 $H^1(\Omega)$ 中一致有界，因此存在一个子序列 $\{u_{k_j}\}$，它在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛到某个函数 u，并在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛（回顾 (S4) 中的 (1.3)-(1.5)）。此外，由于迹算子的紧性，我们有 $u_{k_j}|_{\partial\Omega} \to u|_{\partial\Omega}$ 在 $L^2(\partial\Omega)$ 中，因此 $u|_{\partial\Omega} = g_\circ$ 进一步，此函数 u 将满足 $\mathcal{E}(u) \leq \liminf_{j\to\infty} \mathcal{E}(u_{k_j})$（由 (1.4) 和 (1.5)），因此它将是能量泛函的极小化子。

因此，我们构造出了能量泛函 $\mathcal{E}(u)$ 的一个极小化子 u，它满足边界条件 $u|_{\partial\Omega} = g_\circ$ 根据上述论证，对于任意极小化子 u，式 (1.13) 均成立。由于 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密，因此式 (1.13) 对所有 $v \in H_0^1(\Omega)$ 均成立，故它是 (1.10) 的一个弱解。

Uniqueness. 如果 u 是 (1.10) 的任意一个弱解，那么对于每个 $v \in H_0^1(\Omega)$，我们都有

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u+v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u + \nabla v|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \\ &= \mathcal{E}(u) + 0 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geq \mathcal{E}(u),\end{aligned}$$

当 $v \neq 0$ 时，严格不等号成立。因此，若 u 是 (1.10) 的解，则该解唯一。 □

换言之，我们已证明，u 是 (1.10) 的弱解，当且仅当它极小化泛函 $\mathcal{E}(u)$；此外，这种能量泛函的极小化子存在且唯一。

注 1.11. 一个有趣的问题是确定可能的边界数据 $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ 的集合，使得 (1.14) 成立。当然，当 Ω 是任意有界利普希茨区域，且 g 是利普希茨函数时，很容易证明 g 在 Ω 内有利普希茨延拓，因而 (1.14) 成立。然而，如果 g 非常不规则，那么它可能不是任何 $H^1(\Omega)$ 函数的迹，因此此时 (1.14) 不成立。事实证明，对 g 的恰当条件如下：给定任意有界利普希茨区域 Ω，(1.14) 成立当且仅当

$$\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{n+1}}\, dx\, dy < \infty.$$

更多详情请参见 [**Eva98**] 。

泊松核与基本解。球内狄利克雷问题的唯一弱解有如下显式表达式:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1 \\ u = g & \text{on } \partial B_1, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad u(x) = c_n \int_{\partial B_1} \frac{(1-|x|^2)g(\sigma)}{|x-\sigma|^n}\, d\sigma,$$

其中，c_n 是一个正的维数相关常数。通过简单的重新缩放论证，类似的公式对任意球 $B_r(x_\circ) \subset \mathbb{R}^n$也成立。

因此，我们推得，对于 Ω 中任意满足$B_r \subset\Omega$ 的调和函数 $\Delta u = 0$ ，都有

$$u(x) = \frac{c_n}{r}\int_{\partial B_r} \frac{(r^2-|x|^2)u(y)}{|x-y|^n}\, dy. \tag{1.15}$$

取 $x = 0$，即可得到平均值性质 $u(0) = \fint_{\partial B_r} u_\circ$ 此外，泊松核表示的一个直接推论如下。

推论 1.12. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任意开集，且 $u \in H^1(\Omega)$ 是满足 $\Delta u = 0$ 在Ω中成立的弱意义下的任意函数。那么， u 在Ω内部是 C^∞ 。

此外，如果 u 有界，且 $\Delta u = 0$ 在 B_1 中满足弱意义下的条件，那么我们有如下估计

$$\|u\|_{C^k(B_{1/2})} \le C_k \|u\|_{L^\infty(B_1)}, \tag{1.16}$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$，以及某个仅依赖于 k 和 n的常数 C_k 。

证明。对于任意球 $B_r(x_\circ) \subset \Omega$，我们都有 (1.15)。由此表示可立即看出，$u \in C^\infty(B_{r/2}(x_\circ))$，并且估计 (1.16) 成立。由于这对任意球 $B_r(x_\circ) \subset \Omega$ 都成立，我们推得 u 在 Ω 内是 C^∞ 。□

另一方面，我们回忆一下，拉普拉斯算子的基本解 由下式给出

$$\Phi(x) := \begin{cases} \dfrac{\kappa_n}{|x|^{n-2}} & \text{if } n \ge 3 \\ \kappa_2 \log \dfrac{1}{|x|} & \text{if } n = 2, \end{cases} \tag{1.17}$$

其中 κ_n是某个明确给出的正维数相关常数。这样的函数在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$中满足 $\Delta\Phi = 0$ ，但在 $x = 0$处是奇异的。事实上，它满足

$$-\Delta\Phi = \delta_0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n,$$

其中 δ_0 是狄拉克δ函数。特别地，对于任意给定的、在无穷远处具有适当衰减性的 f ，我们有 $w := \Phi * f$在 $\mathbb{R}^n$中满足 $-\Delta w = f$ 。

最大值原理。最大值原理表述如下：若$\Delta u \ge 0$ 在 Ω 中，且 $u \in C(\Omega)$，则

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

特别地，我们还可以推出比较原理：若 $\Delta u \ge \Delta v$ 在 Ω 中，且 $u \le v$ 在 $\partial\Omega$ 上成立，则 $u \le v$ 在整个区域 Ω 中成立。

回顾一下，若一个函数满足 $-\Delta u \le 0$，则称其为次调和函数；若满足 $-\Delta u \ge 0$，则称其为超调和函数。

如下所示，最大值原理实际上对任意弱解 u都成立。

命题 1.13。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任意有界开集。假设$u \in H^1(\Omega)$ 在弱意义下满足

$$\begin{cases} -\Delta u \ge 0 & in\ \Omega \\ u \ge 0 & on\ \partial\Omega. \end{cases}$$

那么， $u \ge 0$ 属于Ω。

证明。 注意到， $-\Delta u \geq 0$ 属于 Ω 当且仅当

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \geq 0 \qquad \text{for all} \quad v \geq 0,\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.18}$$

令 u^- := 最大值$\{-u, 0\}$ 和 u^+ := 最大值$\{u, 0\}$，使得 $u = u^+ - u^-$。由**(S9)** 可知，只要 $u \in H^1$(Ω)，就有 $u^\pm \in H^1$(Ω)，因此我们可以在 (1.18) 中取 $v = u^- \geq 0$。也就是说，利用 $u^+u^- = 0$ 和$\nabla u = \nabla u^+ - \nabla u^-$，可得

$$0 \leq \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u^- \, dx = -\int_\Omega |\nabla u^-|^2 \, dx.$$

由于 $u^-|_{\partial\Omega} \equiv 0$ ，这意味着 $u^- \equiv 0$ 属于 Ω，即 $u \geq 0$ 属于 Ω。 □

最大值原理的一个有用推论如下。

引理 1.14. 设 u 是以下方程的任意弱解

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad in\ \Omega \\ u &= g \quad on\ \partial\Omega. \end{cases}$$

于是，

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\big(\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\big),$$

对于某个仅取决于Ω直径的常数 C 。

证明。 考虑函数

$$\tilde{u}(x) := u(x) / \left(\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right).$$

我们想证明，对于某个仅取决于 Ω 直径的常数 C ， $|\tilde{u}| \leq C$ 在 Ω 中成立。

注意到这样的函数 $\tilde{u}$ 满足

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u} &= \tilde{f} \quad \text{in } \Omega \\ u &= \tilde{g} \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

˜，其中 $|\tilde{g}| \leq 1$ 和 $|f| \leq 1$。

让我们将 R 取足够大，使得 $B_R \supset$Ω；经过一次平移后，我们可以取 $R = \frac{1}{2}$ diam(Ω)。在 B_R 中，考虑函数

$$w(x) = \frac{R^2 - x_1^2}{2} + 1.$$

这样的函数 w 满足

$$\begin{cases} \Delta w &= -1 \quad \text{in } \Omega \\ w &\geq 1 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

因此，根据比较原理，我们推得

$$\tilde{u} \leq w \quad \text{in} \quad \Omega.$$

由于 $w \le C$ （其中 C 仅取决于 R），我们推得 $\tilde{u} \le C$ 在 Ω 中。最后，用 $-\tilde{u}$ 替代 $\tilde{u}$，重复同样的论证，可得 $|\tilde{u}| \le C$ 在 Ω 中，至此证明完成。□

最后，由最大值原理可推出另一个重要结果，如下所述。这里，如果存在 $\rho_\circ > 0$，使得 Ω 上的每个点都可以从内部与一个半径为 $\rho_\circ$、包含于 Ω 的球相切，我们就说 Ω 满足内切球条件。也就是说，对于任意 $x_\circ \in \partial\Omega$，都存在 $B_{\rho_\circ}(y_\circ) \subset \Omega$，且 $x_\circ \in \partial B_{\rho_\circ}(y_\circ)$。

不难看出，任何 C^2 区域都满足这一条件，凸集的补集所构成的任何区域也满足这一条件。

引理 1.15 (Hopf 引理)。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是满足内切球条件的任意区域。设 $u \in C(\Omega)$ 是 $\Omega \cap B_2$ 中的任意正调和函数，且 $u \ge 0$ 在 $\partial\Omega \cap B_2$ 上。

那么，对于某个 $c_\circ > 0$，$u \ge c_\circ d$ 属于 $\Omega \cap B_1$，其中 $d(x) := \operatorname{dist}(x, \Omega^c)$。

证明。由于 u 在 $\Omega \cap B_2$ 中为正且连续，因此对于某个 $c_1 > 0$，有 $u \ge c_1 > 0$ 属于 $\{d \ge \rho_\circ/2\} \cap B_{3/2}$。

考虑 $\Delta w = 0$ 在 $B_{\rho_\circ} \setminus B_{\rho_\circ/2}$ 中的解，其中 $w = 0$ 在 $\partial B_{\rho_\circ}$ 上，且 $w = 1$ 在 $\partial B_{\rho_\circ/2}$ 上。这样的函数 w 是显式的——它只是基本解 Φ（见式 (1.17)）的截断并重新缩放后的版本。特别地，容易验证，对于某个 $c_2 > 0$，$w \ge c_2(\rho_\circ - |x|)$ 属于 $B_{\rho_\circ}$。

将函数 $c_1 w(x_\circ + x)$ 用作任意满足 $B_{\rho_\circ}(x_\circ) \subset \Omega \cap B_{3/2}$ 的球中的次解，可推出 $u(x) \ge c_1 w(x_\circ + x) \ge c_1 c_2(\rho_\circ - |x - x_\circ|) \ge c_1 c_2 d$ 属于 $B_{\rho_\circ}(x_\circ)$。令 $c_\circ = c_1 c_2$，并对每个满足 $B_{\rho_\circ}(x_\circ) \subset \Omega \cap B_{3/2}$ 的球使用前述不等式，即得结论。□

平均值性质与刘维尔定理。若 u 在 Ω 中是调和函数（即，$\Delta u = 0$ 在 Ω 中），则

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)dy \qquad \text{for any ball} \quad B_r(x) \subset \Omega. \tag{1.19}$$

这称为平均值性质。

反之，若 $u \in C^2(\Omega)$ 满足平均值性质，则 $\Delta u = 0$ 在 Ω 中。举例来说，可利用上面的 (1.11) 得出这一点。

事实上，平均值性质 (1.19) 可用于给出调和函数的另一种（弱）定义，该定义只要求 u 局部可积。类似地，不难推导出由弱超调和性和次调和性的定义（见定义 1.9）所对应的性质：

由 (1.12) 可知，如果 u 在 Ω 中弱超调和（$\Delta u \le 0$ 在 Ω 中具有弱意义），那么对于所有 $x \in \Omega$

(1.20) $\fint_{B_r(x)} u(y)\,dy$ 在 $r \in (0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega))$ 上单调不增。

（对于弱次调和函数，它单调不减。）

因此，我们可以为 L^1_{loc} 函数定义（弱）超调和性和次调和性：如果对所有 $x \in \Omega$, (1.20) 都成立，则称 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 在 Ω 中是超调和的。类似地，如果对所有 $x \in \Omega$ 和 $r \in (0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega))$，(1.20) 中的映射单调不减，则称 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 在 Ω 中是次调和的。

现在我们给出两个将在第 5 章中用到的引理。第一个引理指出，一列超调和且一致有界函数的逐点极限是超调和的。

引理 1.16. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，并设 $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一致有界函数 $w_n : \Omega \to \mathbb{R}$ 的一个序列，满足 (1.20)，且逐点收敛于某个 $w : \Omega \to \mathbb{R}$。则 w 满足 (1.20)。

证明. 设 $w_\infty := w$，并定义对于 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\varphi_x(r) := \fint_{B_r(x)} w_n$。注意到 φ_x, $_n(r)$ 关于 r 单调不增，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。特别地，给定 $0 < r_1 < r_2 < R_x$, 我们有 φ_x, $_n(r_1) \ge \varphi_x$, $_n(r_2)$, 对$n \in \mathbb{N}$成立。现在令 $n \to \infty$，并利用 $w_n \to w$ 逐点收敛这一事实，根据控制收敛定理（注意到 w_n 是一致有界的），可得 φ_x, $_\infty(r_1) \ge \varphi_x$, $_\infty(r_2)$。也就是说， $w_\infty = w$ 满足 (1.20)。□

第二个引理说明，超调和函数是下半连续的。

引理 1.17. 假设 w 有界，并且在$\Omega \subset \mathbb{R}^n$中满足$(1.20)$ 。那么，除去在零测集上改变 w 外， w 是下半连续的。

证明。 证明是标准的。若定义 $w_0(x) := \lim_{r\downarrow 0} \fint_{B_r(x)} w$ （这是良定义的，因为平均值单调不增），那么当 x 是勒贝格点时， $w_0(x) = \bar{w}(x)$，因此 $w_0 = w$ 在 Ω 中几乎处处成立。现在考虑 $x_\circ \in \Omega$，并令 $x_k \to x_\circ$ 如 $k \to \infty$。于是，由控制收敛定理可得

$$\fint_{B_r(x_\circ)} w = \lim_{k\to\infty} \fint_{B_r(x_k)} w \le \liminf_{k\to\infty} w_0(x_k)$$

对于 $0 < r < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x_\circ, \partial\Omega)$。现在，将 $r \downarrow 0$ 代入左边，我们得到

$$w_0(x_\circ) \le \liminf_{k\to\infty} w_0(x_k),$$

也就是说， w_0 是下半连续的。 □

另一方面，由平均值性质可以推得一个著名定理，即对全局有界调和函数的分类。

定理 1.18 (刘维尔定理**).** $\Delta u = 0$ 在$\mathbb{R}^n$ 中的任意有界解都是常数。

证明.</style}设 u 是 $\Delta u = 0$ 在 $\mathbb{R}^n$中的任意全局有界解。由于u 是光滑的（由推论 1.12 得出），每个导数 $\partial_i u$ 都有定义，且也是调和函数。因此，借助平均值性质和散度定理，对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $R \geq 1$ ，我们有

$$|\partial_i u(x)| = \left| \frac{c_n}{R^n} \int_{B_R(x)} \partial_i u \right| = \left| \frac{c_n}{R^n} \int_{\partial B_R(x)} u(y) \frac{y_i}{|y|} \, dy \right| \leq \frac{C}{R^n} \int_{\partial B_R(x)} |u|.$$

因此，利用 $|u| \leq M$ 属于 $\mathbb{R}^n$这一点，我们得到

$$\begin{aligned} |\partial_i u(x)| &\leq \frac{c_n}{R^n} |\partial B_R(x)| M \\ &= \frac{c_n}{R^n} |\partial B_1| R^{n-1} M = \frac{c_n M}{R} \to 0, \quad \text{as} \quad R \to \infty. \end{aligned}$$

因此，对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$， $\partial_i u(x) = 0$ ，且 u 是常数。 □

更一般地，我们甚至可以证明一个关于具有多项式增长的函数的分类结果。这里， $\gamma \in \mathbb{R}$， $\lfloor \gamma \rfloor$ 表示下取整函数，即小于或等于 γ的最大整数。

命题 1.19 （带增长条件的刘维尔定理）。 假设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $\Delta u = 0$ 的一个解，并且满足 $|u(x)| \leq C(1 + |x|^\gamma)$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$均成立，其中$\gamma > 0$。那么， u 是一个次数至多为 $\lfloor \gamma \rfloor$的多项式。

证明。 定义 $u_R(x) := u(Rx)$，并注意到 $\Delta u_R = 0$ 属于 $\mathbb{R}^n$。由推论1.12和增长假设

$$\begin{aligned} R^k \|D^k u\|_{L^\infty(B_{R/2})} &= \|D^k u_R\|_{L^\infty(B_{1/2})} \\ &\leq C_k \|u_R\|_{L^\infty(B_1)} = C_k \|u\|_{L^\infty(B_R)} \leq C_k R^\gamma. \end{aligned}$$

特别是，如果 $k = \lfloor \gamma \rfloor + 1$,

$$\|D^k u\|_{L^\infty(B_{R/2})} \leq C_k R^{\gamma - k} \to 0 \quad \text{as} \quad R \to \infty.$$

也就是说， $D^k u \equiv 0$ 属于 $\mathbb{R}^n$，而 u 是一个次数为 $k - 1 = \lfloor \gamma \rfloor$的多项式。 □

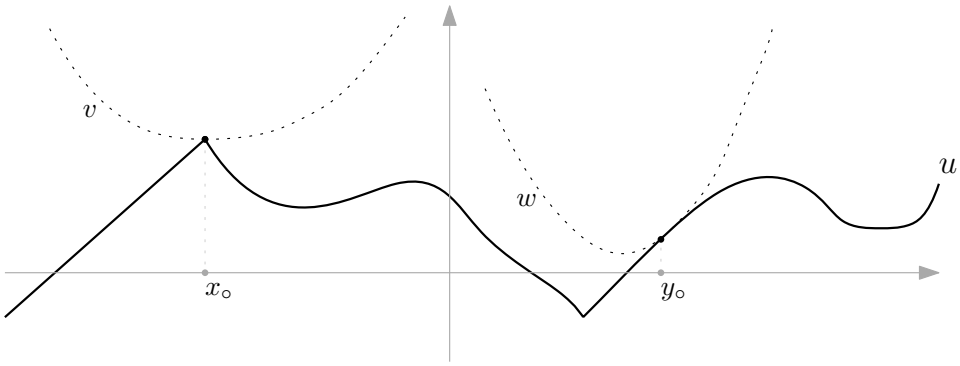


图 1.1. v 在 $x_\circ$处从上方接触 u， w 在 $y_\circ$处从上方接触 u。

解的存在性：比较原理。我们已经看到，证明拉普拉斯算子狄利克雷问题的解存在性的一种方法是使用能量方法。采用这种方法，实际上可以证明弱解 $u \in H^1(\Omega)$的存在性。

现在，我们将介绍一种构造解的替代方法：通过比较原理。利用这种方法，可以证明粘性解_ $u \in C(\Omega)$的存在性。

对于拉普拉斯方程，可以进一步证明这些解（弱解或粘性解）属于 $C^\infty(\Omega)$，因此它们彼此相同。

我们先给出粘性意义下次调和性和超调和性的定义。需要指出的是，在此定义中，函数u 只需是连续的。

定义 1.20. 若函数 $u \in C(\Omega)$满足以下条件，则称其为次调和函数（在粘性意义下）：对于任意函数 $v \in C^2$，只要 v 在$x_\circ \in$ 处从上方接触 u（即 $v \geq u$ 属于Ω且 $v(x_\circ) = u(x_\circ)$），就有 $\Delta v(x_\circ) \geq 0$。参见图 1.1。

对于 $u \in C(\Omega)$，超调和性 的定义类似（从下方接触，且满足 $\Delta v(x_\circ) \leq 0$）。

若函数 $u \in C(\Omega)$ 在上述粘性意义下既是次调和的又是超调和的，则称其为调和的 。

显然，在 $u \in C^2$ 的情况下，这一定义与我们熟知的定义一致。不过，它允许非-C^2 函数 u，例如 $u(x) = |x|$ 是次调和的，而 $-|x|$ 是超调和的。

黏性次解／上解有如下一个有用的性质。

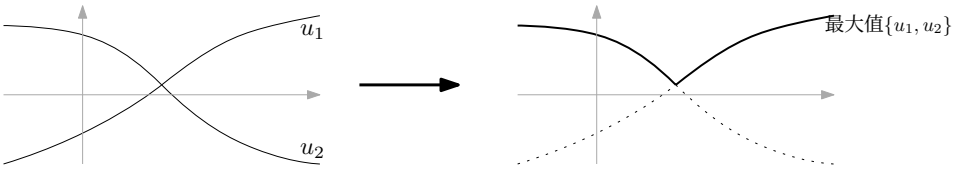


图 1.2. 两个函数 u_1 和 u_2的最大值。

命题 1.21。 两个次调和函数的最大值仍是次调和的。也就是说，若 $u_1, u_2 \in C(\Omega)$ 是次调和的，则函数$v := \text{最大值}\{u_1, u_2\}$ 也是次调和的。参见图 *1.2*。

类似地，两个超调和函数的最小值也是超调和函数。

证明可由上面的定义 1.20 轻易得出，留作读者练习。

此外，我们还有如下结论：

命题 1.22。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域，并假设$u \in C(\Omega)$ 在粘性意义下满足

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 & in\ \Omega \\ u \geq 0 & on\ \partial\Omega. \end{cases}$$

那么， $u \geq 0$ 在Ω中。

证明。 经过重新缩放，不妨设 $\Omega \subset B_1$。

反设 u 在 Ω 中取得负最小值。于是，由于 $u \geq 0$ 在 $\partial\Omega$ 上，我们有 $\min_{\Omega} u = -\delta$，其中 $\delta > 0$，且该最小值在 Ω 中取得。

现在考虑 $0 < \varepsilon < \delta$，以及 $v(x) := -\kappa + \varepsilon(|x|^2 - 1)$，其中 $\kappa > 0$（即一个足够平坦的抛物面）。

现在注意到 $u - v > 0$ 在 $\partial\Omega$ 上，并且我们可以选择 $\kappa > 0$，使得 $\min_{\Omega}(u - v) = 0$。也就是说，我们可以将抛物面从解 u 下方滑动，直到与其接触；根据假设，接触点位于内部。因此，存在 $x_0 \in \Omega$，使得 $u(x_0) - v(x_0) = \min_{\Omega}(u - v) = 0$。因此，作出这样的 κ选择后，函数 v 从下方接触 u 于 $x_0 \in \Omega$，并且根据粘性解的定义，我们必须有

$$\Delta v(x_0) \leq 0.$$

然而，直接计算可得 $\Delta v \equiv 2n\varepsilon > 0$在 Ω 中，这与假设矛盾。 □

借助这两个命题，可以如下证明狄利克雷问题的（黏性）解的存在性。

Let

$$S_g := \left\{ v \in C(\overline{\Omega}) \,:\, v \text{ is subharmonic, and } v \le g \text{ on } \partial\Omega \right\},$$

并定义逐点上确界

$$u(x) := \sup_{v \in S_g} v(x).$$

接下来可以证明，如果 Ω 是正则的且 g 连续，那么 $u \in C(\overline{\Omega})$，并且 $\Delta u = 0$ 在 Ω 内，且在 $\partial\Omega$ 上满足 $u = g$。这就是所谓的*Perron*方法。关于拉普拉斯算子情形下该方法的完整描述，请参阅 [**HL97**] 。

在第3章中，我们将研究更一般的全非线性椭圆方程框架下粘性解的存在性。

解的存在性简述。我们有两种截然不同的构造解的方法：能量方法，或最大值（或比较）原理。

第一种情况下，构造出的解属于 $H^1(\Omega)$；第二种情况下，属于 $C(\overline{\Omega})$。无论哪种情况，只要 Ω 和 g 足够正则，就可以证明 $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$，因此 u 以通常意义满足狄利克雷问题。

1.3. 调和函数的概率解释

为了结束本导论章节，我们介绍调和函数一个广为人知的概率解释。这里的讨论主要是启发式的，旨在从随机过程的角度帮助理解拉普拉斯方程。关于全非线性方程和障碍问题的更多概率解释，请参阅附录 C。

回忆一下，布朗运动 是一个随机过程 X_t, $t \ge 0$，满足以下性质：

(1) $X_0 = 0$ 几乎必然成立。(2) X_t 具有无记忆性 （与过去独立，或者说具有独立增量）。(3) X_t 具有平稳增量： $X_{t+s} - X_s$ 与 X_t的分布相同。(4) X_t 具有连续路径 （$t \mapsto X_t$ 连续），且几乎必然成立。(5) X_t 是各向同性的，即其分布具有旋转对称性。

前述性质实际上将该随机过程 X_t 确定到一个乘法常数的差异。布朗运动的另一个重要性质是尺度不变，即：

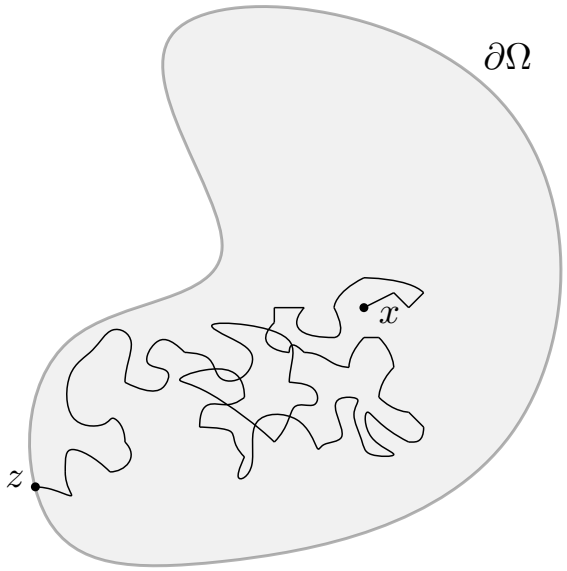


图 1.3。 在 Ω 中定义、从 x 出发的随机过程 X_t^x，直到它首次命中边界 $z \in \partial\Omega$ 上的一个点。

(6) $r^{-1}X_{r^2t}$ 等于 X_t 的分布，对任意 $r > 0$均成立。

接下来我们会看到，布朗运动与拉普拉斯算子之间有着密切的联系。

期望收益。 给定一个正则区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，以及一个从 x 出发的布朗运动X_t^x（即 $X_t^x := x + X_t$），我们进行如下随机博弈：当过程 X_t^x首次命中边界 $\partial\Omega$ 时，我们会获得一项收益$g(z)$，其取决于命中点 $z \in \partial\Omega$。（见图 1.3。）

接下来我们问：

$$\textit{What is the expected payoff?}$$

为回答这个问题，我们定义

$$\begin{aligned} &\tau := \text{first hitting time of } X_t^x, \\ &u(x) := \mathbb{E}\left[g(X_\tau^x)\right] \qquad \text{(value function)}. \end{aligned}$$

根据定义， $u(x)$的值就是上面问题的答案。也就是说，它是 g 在 X_t^x 首次到达边界$\partial\Omega$时的期望值。

为了求出 $u(x)$，我们尝试将它与 $y \neq x$的 $u(y)$值联系起来。然后我们会看到，这会得到一个的偏微分方程，求解该方程即可求出 $u(x)$。

事实上，考虑一个球 $B_r(x) \subset \Omega$，其中 $r > 0$。对于任意这样的球，我们知道过程 X_t^x会在到达 $\partial\Omega$之前（根据性质 **(4)**）击中

$\partial B_r(x)$上的某个点，而且 $\partial B_r(x)$上的任意点被击中的概率都相同。这是因为该过程的分布具有旋转对称性，(5)。

由于该过程具有无记忆性（2）和平稳增量（3），这意味着

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)dy. \tag{1.21}$$

直观地说，这是因为当过程在点 y 处到达边界 $\partial B_r(x)$ 时，它会从该点 y 重新开始游戏。但由于所有点 $y \in \partial B_r(x)$ 都以相同的概率首次到达，因此（1.21）成立。

现在，由于对每个 $x \in \Omega$ 和 $r > 0$ 都可以这样做，我们推知$u(x)$ 满足平均值性质，因此它在 Ω 中是调和的， $\Delta u = 0$（1.11）。

此外，由于我们还知道 $u = g$ 在 $\partial\Omega$ 上成立（因为到达边界时我们必然获得收益 g ），那么 u 必定是以下方程的唯一解:

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

关于这一主题的精彩入门介绍，可参阅 [**定律10**]。

期望击中时间。 一个类似的随机问题如下：给定一个光滑域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 和布朗运动 X_t^x，我们来问:

X_t^x 首次到达 $\partial\Omega$ 的期望时间是多少?

为回答这个问题，我们像之前那样推理，利用过程必须先到达球 $B_r(x) \subset\Omega$ 的边界这一事实。具体来说，我们先用 $u(x)$ 表示所求的期望击中时间。于是，对于任意这样的球，过程 X_t^x都会在到达 $\partial\Omega$ 之前击中 $\partial B_r(x)$ 上的某个点，而且击中任意一点 $y \in \partial B_r(x)$ 的概率都相同。因此，总期望时间 $u(x)$ 等于首次击中 $\partial B_r(x)$ 所需的期望时间，加上 从相应的点 $y \in \partial B_r(x)$ 出发时的期望时间，也就是 $u(y)$。换句话说，我们有

$$u(x) = T(r) + \fint_{\partial B_r(x)} u(y)dy.$$

这里， $T(r)$ 是 X_t^x 到达 $\partial B_r(x)$ 的期望首次时间——显然，它仅取决于 r 和 n。

现在，利用布朗运动的尺度不变性，即$r^{-1}X_{r^2t} \sim X_t$，我们看到，对于某个常数 $c_1 > 0$， $T(r) = T(1)r^2 = c_1 r^2$。

因此，我们有

$$u(x) = c_1 r^2 + \fint_{\partial B_r(x)} u(y)dy,$$

重新整理各项后，我们得到

$$-\frac{1}{r^2}\left\{ \fint_{B_r(x)} u(y)dy - u(x) \right\} = c_1.$$

最后，取 $r \to 0$ 并利用 (1.11)，我们推得 $-\Delta u = c_2$，其中 $c_2 > 0$为某个常数。由于显然在 $\partial\Omega$ 上有 $u = 0$，期望击中时间 $u(x)$ 是该问题的唯一解

$$\begin{cases} -\Delta u &= c_2 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

考虑一种非齐次 介质（在某些区域移动所需的时间比其他区域更长），同样的论证可得右端项为如下形式的问题

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x) & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

与 $f \geq 0$。

第2章

线性椭圆偏微分方程

本章节将研究以下类型的线性椭圆偏微分方程

$$\boxed{\operatorname{tr}\big(A(x)D^2u(x)\big) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u = f(x) \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n,} \tag{2.1}$$

以及

$$\boxed{\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u(x)\big) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\big(a_{ij}(x)\partial_j u(x)\big) = f(x) \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n.} \tag{2.2}$$

它们分别是非散度形式和散度形式的椭圆型偏微分方程。

系数 $(a_{ij}(x))_{ij}$ 和右端项 $f(x)$ 满足适当的正则性假设。此外，我们将假设系数矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij}$ 满足一致椭圆性条件

$$0 < \lambda \operatorname{Id} \leq (a_{ij}(x))_{ij} \leq \Lambda \operatorname{Id},$$

对于某些椭圆性常数 $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$。（对于两个矩阵 A，$B \in \mathcal{M}_n$，如果矩阵 $A - B$ 是半正定的，我们就称 $A \geq B$。）

我们将证明，在对 $A(x)$ 施加适当的正则性假设后，(2.1) 的解 u 相对于 f 和系数 $A(x)$“多获得两个导数”。另一方面，对于散度型方程 (2.2)，我们预期解相对于系数$A(x)$“多获得一个导数”。

为此，我们将采用微扰方法，通过在某个点附近“冻结”系数，先研究常系数方程。经过变量变换，可以将常系数方程化为最常见且最简单的椭圆方程：

拉普拉斯方程，其中 $(a_{ij}(x))_{ij}$ 是恒等映射。因此，本章节将从研究拉普拉斯方程的性质开始，例如哈纳克不等式以及有界右端项下的 H¨older 正则性。之后，我们将证明拉普拉斯算子的 Schauder 估计，并继续介绍本章节的主要定理：(2.1) 和 (2.2) 的 Schauder 估计。

我们通过研究具有连续系数的 (2.1) 和 (2.2) 型方程来结束本章。在这种情况下，我们不会增加两个（分别为一个）导数，而是会损失任意小的 H¨older 正则性指数。

散度形式和非散度形式的方程，在第 3 章和第 4 章讨论非线性变分偏微分方程及全非线性椭圆偏微分方程时，将特别有用。

对于非散度形式和散度形式的方程，我们都建立了先验估计。也就是说，我们并不证明解是正则的，而是证明：如果解是正则的，那么就可以根据系数的 H¨older 范数 $(a_{ij}(x))_{ij}$ 以及右端项 f，估计高出两阶和一阶的导数范数。这足以将其应用于第 3 章和第 4 章的非线性方程。

当算子为拉普拉斯算子时，借助先验估计并通过逼近论证，我们证明弱解实际上是光滑的。对于更一般的椭圆算子，先验估计结合连续性方法可得正则解的存在性。关于这种方法，请参阅 [**GT77**]。

2.1. 哈纳克不等式

我们从调和函数最基本的估计之一开始本章。它本质上给出了一种“定量形式的最大值原理”。

我们通常会写作 $u \in H^1$ 是调和的，即在弱意义下成立。不过回想一下引言中的内容，只要一个函数是调和的，它就立刻是 C^∞。

定理 2.1 (哈纳克不等式)。 假设 $u \in H^1(B_1)$ 在 B_1 中是非负调和函数。那么 u 的下确界和上确界在 $B_{1/2}$ 中是可比的。也就是说，

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & in\ B_1 \\ u \geq 0 & in\ B_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sup_{B_{1/2}} u \leq C \inf_{B_{1/2}} u,$$

其中某个常数 C 仅依赖于 n。

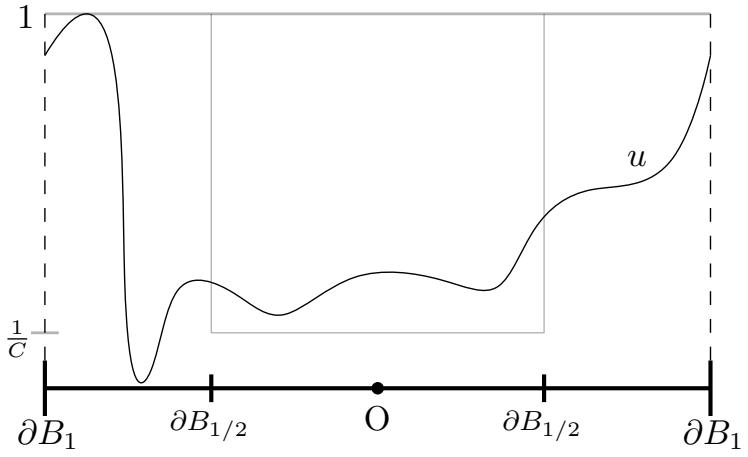


图 2.1. 调和函数 $u > 0$ 满足 $\sup_{B_1} u = 1$ 时，哈纳克不等式的图示。

证明。 这可以由平均值性质证明。或者，我们也可以使用泊松核表示，

$$u(x) = c_n \int_{\partial B_1} \frac{(1-|x|^2)u(z)}{|x-z|^n}\, dz.$$

注意，对于任意 $x \in B_{1/2}$ 和 $z \in \partial B_1$，我们有 $2^{-n} \le |x-z|^n \le (3/2)^n$ 和 $3/4 \le 1-|x|^2 \le 1$。因此，由于 $u \ge 0$ 属于 B_1，

$$C^{-1} \int_{\partial B_1} u(z)\, dz \le u(x) \le C \int_{\partial B_1} u(z)\, dz, \quad \text{for all} \quad x \in B_{1/2},$$

对于某个维数相关常数 C。特别地，对于任意 $x_1,\ x_2 \in B_{1/2}$，我们有 $u(x_1) \le C^2 u(x_2)$。对 $x_2 \in B_{1/2}$ 取下确界，对 $x_1 \in B_{1/2}$ 取上确界，我们得到 $\sup_{B_{1/2}} u \le C \inf^{B_{1/2}} u$，其中 C 是某个维数相关常数，证毕。□

注 2.2. 这个不等式表明，如果 $u \ge 0$ 属于 B_1，那么不仅 $u > 0$ 属于 $B_{1/2}$（强最大值原理），而且还能得到定量信息：对于某个常数 C，有 $u \ge C^{-1} \sup^{B_{1/2}} u$ 属于 $B_{1/2}$，其中 C 仅取决于 n。见图 2.1。

$B_{1/2}$并没有什么特殊之处。我们可以在 B_ρ 中得到一个类似的不等式，其中 $\rho < 1$，但常数 C 还会取决于 ρ。事实上，重复前面的论证可得：如果 $\Delta u = 0$ 且 $u \ge 0$属于 B_1，那么

$$\sup_{B_\rho} u \le \frac{C}{(1-\rho)^n} \inf_{B_\rho} u, \tag{2.3}$$

其中某个 C 仅取决于 n，且 $\rho \in$ （0,1）。

由哈纳克不等式，我们可以推出调和函数的振荡衰减。也就是说，调和函数的振荡在较小的区域中会（定量地）减小。区域 Ω 中的振荡定义为

$$\operatorname*{osc}_{\Omega} u := \sup_{\Omega} u - \inf_{\Omega} u.$$

需要指出的是，以下引理适用于所有调和函数，不一定要求它们为正。

推论 2.3 (振荡衰减)。 设 $u \in H^1(B_1)$ 是 B_1中的一个调和函数，即 $\Delta u = 0$ 在 B_1中。则

$$\operatorname*{osc}_{B_{1/2}} u \leq (1-\theta) \operatorname*{osc}_{B_1} u$$

其中某个较小的 $\theta > 0$ 仅依赖于 n。

证明。设

$$w(x) := u(x) - \inf_{B_1} u,$$

它满足 $w \geq 0$ 在 B_1 中，且 $\operatorname{osc}^{B_{1/2}} w = \operatorname{osc}^{B_{1/2}} u$。由于 $\Delta w = 0$ 在 B_1中，由哈纳克不等式可得

$$\sup_{B_{1/2}} w \leq C \inf_{B_{1/2}} w,$$

从而

$$\operatorname*{osc}_{B_{1/2}} u = \operatorname*{osc}_{B_{1/2}} w = \sup_{B_{1/2}} w - \inf_{B_{1/2}} w \leq \left(1 - \frac{1}{C}\right) \sup_{B_{1/2}} w \leq \left(1 - \frac{1}{C}\right) \sup_{B_1} w.$$

现在注意到 $\sup^{B_1} w = \operatorname{osc}_{B_1} u$，结论便得证。 □

注 2.4 （推论 2.3 的另一种证明）。 此外，我们可以利用估计的不变性，改写前面对推论 2.3 的证明。

事实上，函数 $u - \inf_{B_1} u$ 非负且为调和函数。由于我们要证明的估计在加上常数及乘以常数后保持不变，因此不妨设 $\inf_{B_1} u = 0$ 且 $\sup_{B_1} u = 1$。令 $\theta := \frac{1}{C+1}$，其中 C 是哈纳克不等式（定理 2.1）中的常数。现在有两种选择:

- 如果 $\sup_{B_{1/2}} u \leq 1 - \theta$，结论便得证，
- 如果 $\sup_{B_{1/2}} u \geq 1 - \theta$，则利用哈纳克不等式可得

$$\inf_{B_{1/2}} u \geq \frac{1}{C}(1-\theta) \geq \theta.$$

无论如何，我们得到 $\operatorname{osc}_{B_{1/2}} u \leq 1 - \theta$，因此证明完毕。

注 2.5. 我们已经证明，哈纳克不等式蕴含振荡衰减。这一点始终 成立；我们并未利用所讨论的是调和函数这一事实。一般而言，我们有

$$\left(\begin{array}{c}\text{Harnack's}\\ \text{inequality}\end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{Oscillation}\\ \text{decay}\end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{Hölder}\\ \text{regularity}\end{array}\right)$$

哈纳克不等式和振荡衰减具有尺度不变性。也就是说，以下推论成立：

推论 2.6（重标度版本）。 设 $u \in H^1(B_r)$ 满足 $\Delta u = 0 in\ B_r$。则

- （哈纳克不等式）如果 $u \geq 0\ in\ B_r$，则
$$\sup_{B_{r/2}} u \leq C \inf_{B_{r/2}} u,$$
对于某个 C，其仅取决于 n。
- （振荡衰减）有
$$\operatorname*{osc}_{B_{r/2}} u \leq (1-\theta) \operatorname*{osc}_{B_r} u,$$
对于某个足够小的 $\theta > 0$，它仅依赖于 n。

证明。 定义 $\tilde{u}(x) := u(rx)$，它满足 $\Delta \tilde{u} = 0$ 于 B_1 中，因此

$$\sup_{B_{r/2}} u = \sup_{B_{1/2}} \tilde{u} \leq C \inf_{B_{1/2}} \tilde{u} = C \inf_{B_{r/2}} u,$$

由定理 2.1 可得。同理,

$$\operatorname*{osc}_{B_{r/2}} u = \operatorname*{osc}_{B_{1/2}} \tilde{u} \leq (1-\theta) \operatorname*{osc}_{B_1} \tilde{u} = (1-\theta) \operatorname*{osc}_{B_r} u$$

由推论 2.3 可得。 □

上述定量振荡衰减的一个标准推论是解的 H¨older 正则性。

推论 2.7（H¨older 正则性）。 设 $u \in H^1(B_1) \cap L^\infty(B_1)$ 满足$\Delta u = 0$ 于 B_1。则

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq C \|u\|_{L^\infty(B_1)}$$

其中存在一些常数 $\alpha > 0$ 和 C，它们仅依赖于 n。

证明。 如果记 $\tilde{u} := (2\|u\|_{L^\infty(B_1)})^{-1} u$，那么 $\tilde{u} \in H^1 \cap L^\infty(B_1)$ 在 B_1 中满足 $\Delta \tilde{u} = 0$，且满足 $\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} \leq \frac{1}{2}$。如果我们证明 $\|\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq C$，那么结论便可得出。

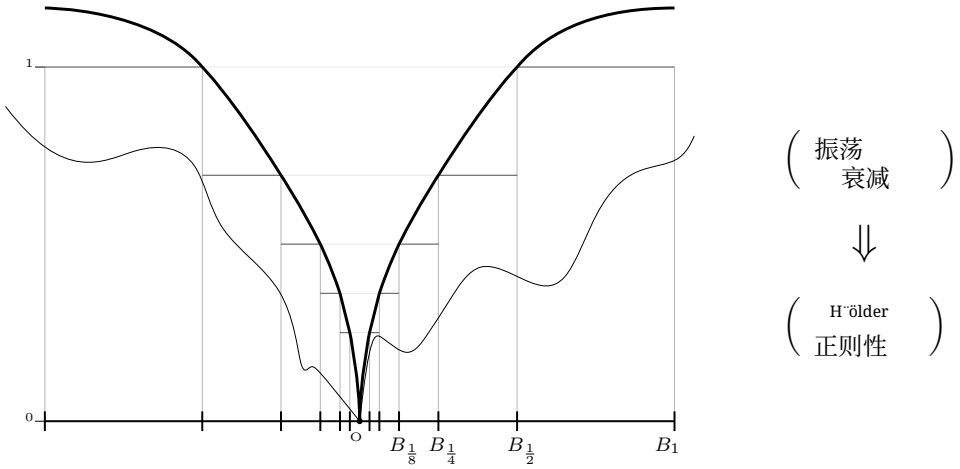


图 2.2. 振荡衰减型引理蕴含 Hölder 正则性的图像表示。

因此，如有必要，将 u 除以一个常数后，我们可以假设$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$。我们需要证明

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \quad \text{for all} \quad x, y \in B_{1/2},$$

对于某个较小的 $\alpha > 0$。为简单起见，我们在 $y = 0$ 处进行。

设 $x \in B_{1/2}$，并设 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $x \in B_{2^{-k}} \setminus B_{2^{-k-1}}$。那么，

$$|u(x) - u(0)| \leq \operatorname*{osc}_{B_{2^{-k}}} u \leq (1-\theta)^k \operatorname*{osc}_{B_1} u \leq (1-\theta)^k = 2^{-\alpha k},$$

其中 $\alpha = -\log_2(1-\theta)$。（注意，我们使用了推论 2.6 k 次，其中常数 θ 与振荡衰减的半径无关。）

现在，由于 $2^{-k} \leq 2|x|$，我们得到

$$|u(x) - u(0)| \leq (2|x|)^\alpha \leq C|x|^\alpha,$$

如所需。证明的图示表示见图 2.2。 □

最后，哈纳克不等式的另一个重要推论是非负调和函数的刘维尔定理。

推论 2.8。设 u 是一个非负调和函数，即 $u \geq 0$且 $\Delta u = 0$ 属于 $\mathbb{R}^n$。那么，u 是常数。

证明。设

$$v = u - \inf_{\mathbb{R}^n} u,$$

其中，$\inf_{\mathbb{R}^n} u$ 有定义且有限，因为 $u \geq 0$。然后，借助推论 2.6 中适用于任意球的 Harnack 不等式，我们得到，对于任意

$R > 0$,

$$\sup_{B_R} v \le C \inf_{B_R} v = C \left(\inf_{B_R} u - \inf_{\mathbb{R}^n} u \right) \to 0,$$

即 $R \to \infty$。也就是说，$\sup_{\mathbb{R}^n} u = \inf_{\mathbb{R}^n} u$，因此 u 在 $\mathbb{R}^n$中为常数。 □

当然，如果 $u \ge -M$ 在 $\mathbb{R}^n$中，对于某个常数 M，上述结果同样成立，因为此时 $u + M$ 是非负调和函数。

带右端项的哈纳克不等式。我们可以证明带右端项的方程的哈纳克不等式，也就是说，此时拉普拉斯算子不一定为零，$\Delta u = f$。同样，我们将处理函数$u \in H^1$，因此必须在弱意义下理解方程 $\Delta u = f$。

定理 2.9。设 $f \in L^\infty(B_1)$，且 $u \in H^1(B_1)$。则，

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & f & in\ B_1 \\ u & \ge & 0 & in\ B_1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \sup_{B_{1/2}} u \le C \left(\inf_{B_{1/2}} u + \|f\|_{L^\infty(B_1)} \right),$$

其中某个 C 仅取决于 n。

证明。我们将 u 表示为 $u = v + w$，其中

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta v & = & 0 & \text{in } B_1 \\ v & = & u & \text{on } \partial B_1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} \Delta w & = & f & \text{in } B_1 \\ w & = & 0 & \text{on } \partial B_1. \end{array} \right.$$

于是，我们有

$$\sup_{B_{1/2}} v \le C \inf_{B_{1/2}} v \qquad \text{and} \qquad \sup_{B_1} w \le C \|f\|_{L^\infty(B_1)}$$

由定理 2.1 和引理 1.14 得出。因此，

$$\begin{aligned} \sup_{B_{1/2}} u &\le \sup_{B_{1/2}} v + C\|f\|_{L^\infty(B_1)} \\ &\le C \inf_{B_{1/2}} v + C\|f\|_{L^\infty(B_1)} \le C \left(\inf_{B_{1/2}} u + \|f\|_{L^\infty(B_1)} \right), \end{aligned}$$

其中必要时我们取一个更大的常数。注意，我们在此还用到了 $v \le u + C\|f\|_{L^\infty(B_1)}$。□

因此，与之前一样，我们也得到振荡衰减，但现在包含一个大小为 $\|f\|_{L^\infty}$ 的误差项。

推论 2.10。设 $f \in L^\infty(B_1)$ 和 $u \in H^1(B_1)$。若 $\Delta u = f$ 属于 B_1，且 $f \in L^\infty(B_1)$，则

$$\operatorname*{osc}_{B_{1/2}} u \le (1 - \theta) \operatorname*{osc}_{B_1} u + 2\|f\|_{L^\infty(B_1)},$$

其中某个 $\theta > 0$ 仅取决于 n。

证明。 证明与情形 $f \equiv 0$ 相同，参见推论 2.3 的证明。□

注 2.11。 现在，带有右端项 $f = f(x)$ 时，方程 $\Delta u = f$ 和哈纳克不等式在 x 下不 具有缩放不变性。事实上，当我们放大观察时，右端项会变小!

也就是说，如果 $\Delta u = f$ 属于 B_r，那么 $\tilde{u}(x) := u(rx)$ 在 B_1 中满足 $\Delta \tilde{u}(x) = r^2 f(rx)$，因此

$$\sup_{B_{1/2}} \tilde{u} \le C \left(\inf_{B_{1/2}} \tilde{u} + 2r^2 \|f\|_{L^\infty(B_r)} \right),$$

因此

$$\sup_{B_{r/2}} u \le C \left(\inf_{B_{r/2}} u + 2r^2 \|f\|_{L^\infty(B_r)} \right)$$

其中某个常数 C 仅依赖于 n。

即使前述振荡衰减中包含一个依赖于 f 的误差，这也足以证明解具有 H¨lder 正则性。

推论 2.12 （H¨older 正则性）。 设 $f \in L^\infty(B_1)$ 和 $u \in H^1 \cap L^\infty(B_1)$。若 $\Delta u = f$ 在 B_1中，则

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \le C \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)} \right),$$

对于某些常数 $\alpha > 0$ 和 C，它们仅取决于 n。

证明。 若记 $\tilde{u} := (2\|u\|_{L^\infty(B_1)} + 2\|f\|_{L^\infty(B_1)})^{-1} u$，则 $\tilde{u} \in H^1(B_1) \cap L^\infty(B_1)$ 在 B_1 中满足 $\Delta \tilde{u} = \tilde{f}$，其中 $\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} \le \frac{1}{2}$ 以及 $\|\tilde{f}\|_{L^\infty(B_1)} \le \frac{1}{2}$。若我们证明 $\|\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \le C$，则结论即得。

因此，如有必要，将 u 除以一个常数后，我们可以假设 $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \le \frac{1}{2}$ 且 $\|f\|_{L^\infty(B_1)} \le \frac{1}{2}$。

与推论 2.7 中一样，我们要证明，对于所有 $x_0 \in B_{1/2}$，都有 $|u(x_0) - u(0)| \le C|x_0|^\alpha$，其中存在一个常数 C，仅依赖于 n。

我们来说明，只需证明

$$\operatorname*{osc}_{B_{2^{-k}}} u \le C 2^{-\alpha k} \quad \text{for all } k \in \mathbb{N},\ k \ge k_0, \tag{2.4}$$

存在某些 $\alpha > 0$、 C和一个固定的 k_0，使得三者都仅依赖于n_0。事实上，取 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in B_{2^{-k}} \setminus B_{2^{-k-1}}$。若 $k < k_0$，则$|x| \ge 2^{-k_0-1}$ 且

$$|u(x) - u(0)| \le \operatorname*{osc}_{B_1} u \le 1 \le 2^{\alpha(k_0+1)} |x|^\alpha.$$

另一方面，如果 $k \ge k_0$，由 (2.4) 可得

$$|u(x) - u(0)| \le \operatorname*{osc}_{B_{2^{-k}}} u \le C 2^{-\alpha k} \le C(2|x|)^\alpha,$$

其中，在最后一个不等式中我们用到了 $|x| \geq 2^{-k-1}$。因此，只需证明 (2.4)。

令 $k \in \mathbb{N}$ 和 $k \geq k_\circ$ 满足某个待选的 $k_\circ$，并定义

$$\tilde{u}(x) := u(rx), \quad r = 2^{-k+1}.$$

于是 $\tilde{u}$ 在 B_1 中满足 $\Delta\tilde{u} = r^2 f(rx)$（事实上，在 $B_{2^{k-1}}$中也成立），因此由推论 2.10

$$\operatorname*{osc}_{B_{1/2}} \tilde{u} \leq (1-\theta) \operatorname*{osc}_{B_1} \tilde{u} + 2r^2 \|f\|_{L^\infty(B_r)}.$$

由于 $\operatorname{osc}_{B_1} \tilde{u} = \operatorname{osc}^{B_{2^{-k+1}}} u$ 且 $\|f\|_{L^\infty(B_r)} \leq \frac{1}{2}$，我们得到

$$\operatorname*{osc}_{B_{2^{-k}}} u \leq (1-\theta) \operatorname*{osc}_{B_{2^{-k+1}}} u + 4^{-k+2}.$$

现在，取足够大的 $k_\circ \in \mathbb{N}$，使得 $4^{-k_\circ+1} \leq \frac{\theta}{2}$。于是，

$$\operatorname*{osc}_{B_{2^{-k}}} u \leq (1-\theta) \operatorname*{osc}_{B_{2^{-k+1}}} u + \frac{\theta}{2} 4^{k_\circ - k}.$$

通过归纳法可立即验证，这将得到

$$\operatorname*{osc}_{B_{2^{-k+1}}} u \leq 2^{\alpha(k_\circ - k)}, \quad \text{for all } k \in \mathbb{N}.$$

事实上，归纳步骤如下

$$\begin{aligned}\operatorname*{osc}_{B_{2^{-k}}} u &\leq (1-\theta)2^{\alpha(k_\circ-k)} + \frac{\theta}{2}4^{k_\circ-k} \leq (1-\theta)2^{\alpha(k_\circ-k)} + \frac{\theta}{2}2^{\alpha(k_\circ-k)} \\ &= \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) 2^{\alpha(k_\circ-k)} = 2^{\alpha(k_\circ-k-1)} \qquad \text{if} \quad 1 - \frac{\theta}{2} = 2^{-\alpha}.\end{aligned}$$

因此，(2.4) 在 $C = 2^{\alpha k_\circ}$ 下成立。 □

总而言之，我们已经验证，调和函数的哈纳克不等式可推出解的 Hölder 正则性，即使右端项为 ~~$f \in L^\infty$~~ 也成立。

这是一个普遍事实，对其他类型的椭圆方程也成立。

2.2. 拉普拉斯算子的 Schauder估计

现在我们希望为方程建立尖锐结果

$$\boxed{\Delta u = f(x) \quad \text{in} \quad B_1} \qquad (\text{or in } \Omega \subset \mathbb{R}^n).$$

这将作为非散度形式和散度形式方程更一般情形的介绍。

其理念是，尖锐结果应表明："u 比 f（x）高出两个导数的正则性"。

该方向上目前已知的主要结果如下：

(a) Schauder估计。若 $f \in C^{0,\alpha}$ 则 $u \in C^{2,\alpha}$，其中 $\alpha \in (0,1)$。(b) Calder´on–Zygmund 估计。若 $f \in L^p$，则 $u \in W^{2,p}$，其中 $p \in (1,\infty)$。(c) 当 α 为整数，或当 $p \in \{1,\infty\}$时，上述结果不成立。例如，若 $f \in C^0$，一般而言 $u \in C^2$并不成立，甚至 $C^{1,1}$也不成立。（在这种情况下，对于所有 $\varepsilon > 0$，都有 $u \in C^{1,1-\varepsilon}$；对于所有 $p < \infty$，都有 $u \in W^{2,p}$。）

两个反例。下面给出两个反例，说明一般而言，Schauder和Calder´on–Zygmund估计在极限情形下对 $\alpha = 0$ 和 $p = 1$ 或 $p = \infty$并不成立。

我们先来看一个函数 u 的例子，其拉普拉斯算子有界（$\Delta u \in L^\infty$），但其二阶导数并不有界（$u \notin W^{2,\infty}$）。因此，这给出了Calder´on–Zygmund估计在 $p = \infty$下的一个反例。

Let

$$u(x,y) = (x^2 - y^2)\log(x^2 + y^2) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2.$$

于是，

$$\partial_{xx} u = 2\log(x^2+y^2) + \frac{8x^2}{x^2+y^2} - 2\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2,$$

$$\partial_{yy} u = -2\log(x^2+y^2) - \frac{8y^2}{x^2+y^2} + 2\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2,$$

也就是说，$\partial_{xx} u$ 和 $\partial_{yy} u$ 都无界，且 $u \notin W^{2,\infty}$。然而，

$$\Delta u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u = 8\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \in L^\infty(\mathbb{R}^2).$$

可以修改这种构造，使 Δu 连续且$u \notin C^{1,1}$，从而得到一个关于 $\alpha = 0$的Schauder估计反例，只需取 $u(x,y) = (x^2-y^2)\log|\log(x^2+y^2)|$。（不过，请记住，Schauder估计告诉我们，如果 Δu 是H¨older连续的（$C^{0,\alpha}$），那么这是不可能的。）

现在我们来给出一个反例，说明当 $p = 1$ 时 Calder´on–Zygmund 估计不成立。取狄拉克 δ 函数的光滑逼近（积分为常数）作为右端项，可以看出该估计不成立：此时解收敛于基本解，而基本解不属于 $W^{2,1}$。

不过，让我们给出一个具体的函数示例：其拉普拉斯算子可积（$\Delta u \in L^1$），但其二阶导数不可积（$u \notin W^{2,1}$）。

Let

$$u(x,y) = \log\log\frac{1}{x^2+y^2} = \log\log r^{-2} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2,$$

这里我们使用极坐标，并记作 $r^2 := x^2 + y^2$。由于$u = u(r)$ 和 $u_r = {}_r{}^1$ 对数 r，我们得到

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = -\frac{\log r + 1}{r^2(\log r)^2} + \frac{1}{r^2 \log r} = -\frac{1}{r^2(\log r)^2} \in L^1(B_{1/2}),$$

因为 $\int_{B_{1/2}} \Delta u = -2\pi \int_0^{1/2} \frac{dr}{r\,(\log r)_2} < \infty$。另一方面，直接计算可知，$\partial_{xx} u$ （以及 $\partial_{yy} u$）在原点附近并非绝对可积，因此 $u \notin W^{2,1}$。（或者，由于有嵌入 $W^{2,1}(\mathbb{R}^2) \subset L^\infty(\mathbb{R}^2)$ [**Bre11**，推论 9.13] 和 $u \notin L^\infty$，我们可推出 $u \notin W^{2,1}$）。

在任意维数 $n \geq 2$ 下，都可以构造类似的反例：取函数 u 为 $r^{1-n}\log r$ 的一个适当原函数。

本书重点证明（a）Schauder 估计，而不证明（b）Calder´on–Zygmund 估计。在本书后文中，我们将看到 Schauder 型估计在线性方程中的应用。

注 2.13 （Calder´on-Zygmund 对 $p = 2$ 的估计）。在 $p = 2$ 的情形下，可以通过简单的计算证明先验 Calder´on-Zygmund 估计。也就是说，设 $u, f \in C^\infty(B_1)$ 满足

$$\Delta u = f \quad \text{in} \quad B_1.$$

那么，

$$\|u\|_{W^{2,2}(B_{1/2})} \leq C\left(\|u\|_{L^2(B_1)} + \|f\|_{L^2(B_1)}\right) \tag{2.5}$$

对于某个仅依赖于 n 的常数 C，成立。事实上，令 $w := \eta u$，其中检验函数 $\eta \in C_c^\infty(B_1)$ 固定且满足 $\eta \equiv 1$ 属于 $B_{1/2}$，$\eta \equiv 0$ 属于 $B_1 \setminus B_{3/4}$，并且 $\eta \geq 0$。然后，分部积分可得

$$\begin{aligned}
\|D^2 u\|_{L^2(B_{1/2})} &= \sum_{i,j=1}^n \int_{B_{1/2}} |D_{ij}^2 u|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \int_{B_1} |D_{ij}^2 w|^2 \\
&= -\sum_{i,j=1}^n \int_{B_1} (D_{iij} w)(D_j w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{B_{1/2}} (D_{ii} w)(D_{jj} w) \\
&= \int_{B_1} (\Delta w)^2 \leq C \int_{B_1} \left(u^2 + (\Delta u)^2 + |\nabla \eta|^2 |\nabla u|^2\right),
\end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中，我们可以取某个维数相关常数 C'，使得 $C = C' \sup_{B_1}\left(\eta^2 + |\Delta \eta|^2\right)$。接着，再分部积分两次并利用$2ab \leq a^2 + b^2$，得到

$$\int_{B_1} |\nabla \eta|^2 |\nabla u|^2 = -\int_{B_1} |\nabla \eta|^2 u \Delta u + \int_{B_1} \frac{1}{2} u^2 \Delta |\nabla \eta|^2 \leq \tilde{C} \int_{B_1} \left(u^2 + (\Delta u)^2\right),$$

其中 $\tilde{C} =$ 上确界$_{B_1}\left(|\nabla \eta|^2 + \Delta |\nabla \eta|^2\right)$。

这直接推出，对于满足 $\Delta u = f$ 的光滑函数 u 和 f，结论 (2.5) 成立。仿照下文推论 2.16 的证明，只要 $u \in H^1(B_1)$ 是 B_1 中关于 $f \in L^2(B_1)$ 的 $\Delta u = f$ 弱解，同样的结论也成立。

Schauder估计的证明：几点说明。 Schauder估计有多种证明方法，主要包括:

(1) 解的积分表示（基本解）；(2) 能量考量；(3) 比较原理。

最灵活的方法是 (2) 和 (3)。这里我们将介绍几种类型 (3) 的不同证明。

类型 (2)–(3) 的证明有一个共同特点，即它们具有“微扰性”：在任意一点附近不断放大，方程会越来越接近 $\Delta u =$ 常数，因此（减去一个抛物面后）会接近 $\Delta u = 0$。因此，我们可以利用已知的调和函数性质来证明该结果。

我们先陈述本节要证明的结果：拉普拉斯算子的Schauder估计。

定理 2.14 （拉普拉斯算子的Schauder估计）。 设 $\alpha \in (0,1)$，并设 $u \in C^{2,\alpha}(B_1)$ 满足

$$\Delta u = f \quad in\ B_1,$$

其中 $f \in C^{0,\alpha}(B_1)$。于是

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right). \tag{2.6}$$

常数 C 仅取决于 α 和维数 n。

一般而言，我们将在球 $B_{1/2}$ 和 B_1中陈述估计。借助下文将要解释的覆盖论证，我们可以据此得到一般区域中的内部正则性估计。

注 2.15 （覆盖论证）。 假设我们有一个类似于式（2.6）中的估计，但它是在某个球 B_{r_1} 中成立，其中 $r_1 \in (0,1)$，且通常非常接近零。具体来说，我们知道，如果 $\Delta u = f$ 属于 B_1，那么

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{r_1})} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right). \tag{2.7}$$

假设我们要为一个更大的球 B_{r_2} 求得估计，其中 $r_1 < r_2 \in (0,1)$，而 r_2 通常接近一。我们通过“覆盖论证”来实现这一点。（见图 2.3。）

也就是说，用较小的球 $B_{r_2}(x_i)$ 覆盖球 B_r，使得$x_i \in B_{r_2}$ 且 $r = (1 - r_2)r_1$。我们可以用有限个球做到这一点，

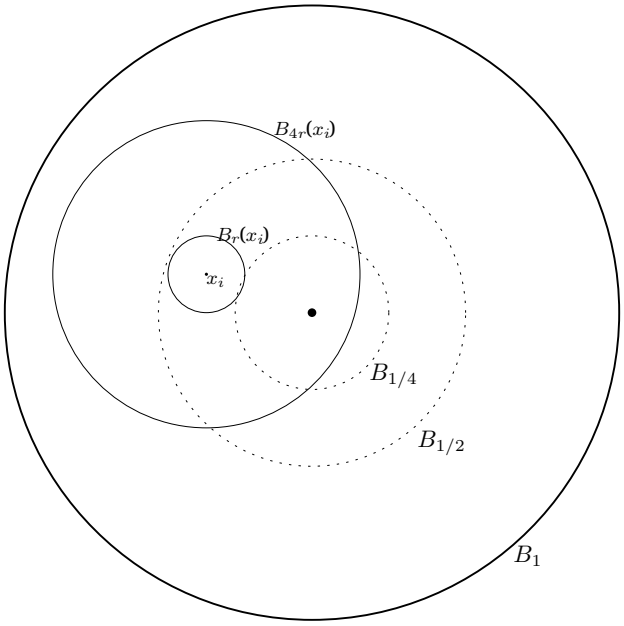


图 2.3. 在 $r_1 = \frac{1}{4}$、$r_2 = \frac{1}{2}$ 和 $r = \frac{1}{8}$ 的情况下"覆盖论证"的图像表示。

使得 $i \in \{1, \ldots, N\}$，其中 N 取决于 r_1、r_2 和 n。注意，$B_{r/r_1}(x_i) \subset B_1$。

我们在这些球 $B_{r/r_1}(x_i)$ 上分别应用估计 (2.7)（经过平移和重新缩放）$\Delta u = f$ 在 $B_{r/r_1}(x_i) \subset B_1$）。因此，我们得到 $\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_r(x_i))}$

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_r(x_i))} &\leq C(r_1, r_2)\left(\|u\|_{L^\infty(B_{r/r_1}(x_i))} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_{r/r_1}(x_i))}\right) \\ &\leq C(r_1, r_2)\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right).\end{aligned}$$

现在，由于 B_{r_2} 可以由有限个这样的球覆盖，我们得到

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{r_2})} \leq \sum_{i=1}^{n} \|u\|_{C^{2,\alpha}(B_r(x_i))} \leq NC(r_1, r_2)\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right).$$

这正是我们想要的那类界，其中常数现在也依赖于 r_1 和 r_2。

作为拉普拉斯算子"先验"估计的推论，我们将证明：

推论 2.16. 设 u 是任意一个有界弱解，满足

$$\Delta u = f \quad in\ B_1,$$

其中 $f \in C^{0,\alpha}(B_1)$ 对某个 $\alpha \in (0,1)$成立。那么， u 属于 $C^{2,\alpha}$ 在 B_1 内成立，且估计 (2.6) 成立。

此外，通过迭代前面的估计，我们将证明以下结果。

推论 2.17 (高阶正则性估计)。 设 u 是以下方程的任意有界弱解

$$\Delta u = f \quad in\ B_1,$$

其中 $f \in C^{k,\alpha}(B_1)$ 对某个 $\alpha \in (0,1)$成立，且 $k \in \mathbb{N}$。那么， u 在 $C^{k+2,\alpha}$ 内属于 B_1 ，并且

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(B_{1/2})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{k,\alpha}(B_1)}\right),$$

其中某个常数 C 仅依赖于 k、 α 和维数 n。

当 $f \in L^\infty$ 时，我们将证明以下结果。

命题 2.18。 设 u 是以下方程的任意一个解

$$\Delta u = f \quad in\ B_1,$$

满足 $f \in L^\infty(B_1)$。那么，对于任意 $\varepsilon > 0$， u 在 $C^{1,1-\varepsilon}$ 内属于 B_1，并且有如下估计

$$\|u\|_{C^{1,1-\varepsilon}(B_{1/2})} \le C_\varepsilon\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)}\right)$$

其中某个常数 C_ε 只取决于 ε 和 n。

我们将给出定理 2.14 的两种不同证明。第一种证明采用 Wang 在 [**Wan06**] 中提出的方法，并以一种非常自洽的方式证明先验估计。第二种证明则采用 `*a la* Caffarelli 的方法，见 [**Moo12, Caf89**]。

在此之前，我们先观察以下事实:

- 如果 $\Delta u = f \in L^\infty$ ，那么 $\tilde{u}(x) := u(rx)$ 求解 $\Delta\tilde{u} = r^2 f(rx)$。换言之，如果 $|\Delta u| \le C$，那么 $|\Delta\tilde{u}| \le Cr^2$ （并且如果 r 很小，右端项会变得越来越小）。
- 若 $\Delta u = f \in C^{0,\alpha}$, $\tilde{u}(x) = u(rx) - \frac{f(0)}{2n}|x|^2$ 满足 $\Delta\tilde{u} = r^2(f(rx) - f(0))$, 因此 $|\Delta\tilde{u}| \le Cr^{2+\alpha}$ 属于 B_1。根据比较原理，这意味着 $\tilde{u}$ “非常接近”一个调和函数。

现在我们来证明，假设定理 2.14 成立，则推论 2.16 也成立。这可由一个逼近论证得出。

推论 2.16 的证明。 我们将由定理 2.14 推导出该结果。设 u 是 B_1 中满足 $\Delta u = f$ 的任意解，其中 $f \in C^{0,\alpha}(B_1)$，并设 $\eta \in C_c^\infty(B_1)$ 是满足 $\eta \ge 0$ 和 $\int_{B_1}\eta = 1$ 的任意光滑函数。令

$$\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

其满足 $\int_{B_\varepsilon}\eta_\varepsilon = 1$、 $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(B_\varepsilon)$。考虑卷积

$$u_\varepsilon(x) := u * \eta_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon} u(x-y)\eta_\varepsilon(y)\,dy,$$

它是 C^∞ ，并且满足

$$\Delta u_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon =: f_\varepsilon \quad \text{in} \quad B_{1-\varepsilon}.$$

（注意，对于光滑函数，导数与卷积可交换；弱导数也可以同样处理。）
由于 $u_\varepsilon \in C^\infty$，我们可以使用定理 2.14 得到

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \le C\left(\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{1-\varepsilon})} + \|f_\varepsilon\|_{C^{0,\alpha}(B_{1-\varepsilon})}\right),$$

这里我们还使用了注 2.15 中的覆盖论证，将右端项中的它写在球 $B_{1-\varepsilon}$ 中。现在注意，对于任意 $x,\ y \in B_{1-\varepsilon}$

$$|u_\varepsilon(x)| \le \int_{B_\varepsilon} |u(x-z)|\eta_\varepsilon(z)\,dy \le \|u\|_{L^\infty(B_1)}\int_{B_\varepsilon}\eta_\varepsilon(z)\,dz = \|u\|_{L^\infty(B_1)},$$

and

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| \le \int_{B_\varepsilon} |f(x-z) - f(y-z)|\eta_\varepsilon(z)\,dz = [f]_{C^{0,\alpha}(B_1)}|x-y|^\alpha.$$

由此，我们推出 $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_{1-\varepsilon})} \le \|u\|_{L^\infty(B_1)}$ 以及 $\|f_\varepsilon\|_{C^{0,\alpha}(B_{1-\varepsilon})} \le \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}$。因此，序列 u_ε 在 $C^{2,\alpha}(B_{1/2})$ 中一致有界，

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right).$$

此外，由于 u 是连续的（见推论 2.12），像前面一样推理可得 $\|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty(B_1)} \to 0$ 当 $\varepsilon \downarrow 0$时，因此 $u_\varepsilon \to u$ 一致地。我们可以利用第 1 章中的（**H8**）推出 $u \in C^{2,\alpha}$ 并且

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right).$$

通过覆盖论证（见注 2.15），我们可以在任意满足 $\rho < 1$的球 B_ρ 中得到类似的估计，

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_\rho)} \le C_\rho\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right),$$

此时常数 C_ρ 还依赖于 ρ，而且当$\rho \uparrow 1$时会趋于无穷。无论如何，对于任意 $\rho < 1$，我们都有 $u \in C^{2,\alpha}(B_\rho)$，也就是说， u 在$C^{2,\alpha}$ 内部属于 B_1。□

前面的证明体现了在证明偏微分方程正则性估计时反复出现的一种现象。如果能够得到如下形式的估计

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le C\left(\|u\|_{L^\infty} + \|f\|_{C^{0,\alpha}}\right),$$

对所有 C^∞ 函数 u，并且存在一个 C 常数 C ，它仅依赖于 α 和n （但与 u 和 f 无关），那么一般而言，该估计对所有解 u也成立。因此，若要证明高阶正则性

估计（来自推论 2.17），只需按照定理 2.14 的思路得到先验估计。因此，假设定理 2.14 成立，我们就能证明推论 2.17。

推论 2.17 的证明。 如上所述，我们只需证明，对于任意满足 $\Delta u = f$ 的 $u \in C^\infty$，都有

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{k,\alpha}(B_1)}\right). \tag{2.8}$$

其中常数 C 仅依赖于 n、 α 和 k；然后由覆盖论证即可得证（见注 2.15）。我们对 k 使用归纳法，并对 u 的导数应用归纳假设即可得到结论。注意，(2.8) 适用于球 $B_{1/2}$ 和 B_1，但经过重新缩放和覆盖论证（见注 2.15）后，也可以表述为适用于球 $B_{1/2}$ 和 $B_{3/4}$（我们将在这种情形下使用它）。

基例 $k = 0$ 已由定理 2.14 得证。现在假设 (2.8) 对 $k = m - 1$ 成立，我们将证明它对 $k = m$ 也成立。

在这种情况下，对 $\Delta u = f$ 求导，得到 $\Delta \partial_i u = \partial_i f$，其中 $i \in \{1, \dots, n\}$。将 (2.8) 应用于 $k = m - 1$ 在球 $B_{1/2}$ 和 $B_{3/4}$ 中的 $\partial_i u$，可得

$$\begin{aligned}\|\partial_i u\|_{C^{m+1,\alpha}(B_{1/2})} &\leq C\left(\|\partial_i u\|_{L^\infty(B_{3/4})} + \|\partial_i f\|_{C^{m-1,\alpha}(B_{3/4})}\right)\\ &\leq C\left(\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{3/4})} + \|f\|_{C^{m,\alpha}(B_{3/4})}\right).\end{aligned}$$

现在在球 $B_{3/4}$ 和 B_1 中应用定理 2.14，

$$\|\partial_i u\|_{C^{m+1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^\alpha(B_1)} + \|f\|_{C^{m,\alpha}(B_{3/4})}\right)$$

这与定理 2.14 给出的关于 $\Delta u = f$ 的基本估计结合，并对每个 $i \in \{1, \dots, n\}$ 使用，便可直接推出 (2.8) 对 $k = m$ 成立。□

类似地，若要证明其他情形下的正则性估计，通常只需得到相应的先验估计。例如，利用我们稍后在本章节中证明的一个估计（适用于更一般的非散度型方程情形），便可立即得到命题 2.18 的证明。

命题 2.18 的证明。 证明与推论 2.16 的证明完全相同，只需改用下文的命题 2.31，而不是定理 2.14。（或者参见注 2.19。）□

现在我们给出定理 2.14 的第一个证明。这里采用的方法由 Wang 在 [**Wan06**]中提出。

定理 2.14 的第一个证明。我们将证明

$$|D^2u(z) - D^2u(y)| \le C|z-y|^\alpha \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + [f]_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right),$$

对所有 $y, z \in B_{1/32}$。经过平移后，我们假设 $y = 0$，从而证明可以围绕 0 进行。这样即可证明我们的定理：在球 $B_{1/32}$ 中成立的估计；而半径为 $1\ 2$ 的球中的预期结果，则可通过覆盖论证得到。此外，如有必要，将解 u 除以 $\|u\|_{L^\infty(B_1)} + [f]_{C^{0,\alpha}(B_1)}$ 后，我们可以假设 $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \le 1$ 且 $[f]_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le 1$；因此只需证明对所有 $z \in B_{1/16}$，

$$|D^2u(z) - D^2u(0)| \le C|z|^\alpha.$$

在整个证明过程中，我们将使用以下关于调和函数的基本估计：

$$\Delta w = 0 \quad \text{in} \quad B_r \quad \Rightarrow \quad \|D^\kappa w\|_{L^\infty(B_{r/2})} \le Cr^{-\kappa}\|w\|_{L^\infty(B_r)}, \tag{2.9}$$

其中 C 仅取决于 n 和 $\kappa \in \mathbb{N}$。（事实上，我们只会用到 $\kappa \in \{1,2,3\}$。）此估计可通过重新缩放估计式 (1.16) 得到——该估计式对应于 $r = 1$的情形。

我们还将使用以下估计

$$\Delta w = \lambda \quad \text{in} \quad B_r \quad \Rightarrow \quad \|D^2 w\|_{L^\infty(B_{r/2})} \le C\left(r^{-2}\|w\|_{L^\infty(B_r)} + |\lambda|\right), \tag{2.10}$$

其中某个常数 C 仅依赖于 n。此估计可由减去 $\frac{\lambda}{2n}|x|^2$ 后得到。 (2.9)

—

对于 $k = 0$，1，2，.....，令 u_k 为下列方程的解

$$\begin{cases} \Delta u_k = f(0) & \text{in } B_{2^{-k}} \\ u_k = u & \text{on } \partial B_{2^{-k}}. \end{cases}$$

于是，$\Delta(u_k - u) = f(0) - f$，并且根据引理 1.14 的重新缩放版本

$$\|u_k - u\|_{L^\infty(B_{2^{-k}})} \le C(2^{-k})^2\|f(0) - f\|_{L^\infty(B_{2^{-k}})} \le C2^{-k(2+\alpha)}, \tag{2.11}$$

这里用到了 $[f]_{C^{0,\ \alpha}(B_1)} \le 1$。因此，由三角不等式可得

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{L^\infty(B_{2^{-k-1}})} \le C2^{-k(2+\alpha)}.$$

由于 $u_{k+1} - u_k$ 是调和函数，我们有

$$\|D^2(u_{k+1} - u_k)\|_{L^\infty(B_{2^{-k-2}})} \le C2^{2(k+1)}\|u_{k+1} - u_k\|_{L^\infty(B_{2^{-k-1}})} \le C2^{-k\alpha}. \tag{2.12}$$

现在，注意到

$$D^2u(0) = \lim_{k\to\infty} D^2u_k(0). \tag{2.13}$$

事实上，设 $\tilde{u}(x) := u(0) + x \cdot \nabla u(0) + \frac{1}{2} x \cdot D^2 u(0) x$ 为 u 在 0 处的二阶展开。那么，由于 $u \in C^{2,\alpha}$，我们有 $\|\tilde{u} - u\|_{L^\infty(B_r)} \le C r^{2+\alpha} = o(r^2)$。利用 $\tilde{u} - u_k$ 是调和函数这一点，再结合 (2.9)，可得

$$\begin{aligned} |D^2 u_k(0) - D^2 u(0)| &\le \|D^2(u_k - \tilde{u})\|_{L^\infty(B_{2^{-k-1}})} \\ &\le C 2^{2k} \|u_k - \tilde{u}\|_{L^\infty(B_{2^{-k}})} \\ &= C 2^{2k} \|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\partial B_{2^{-k}})} \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty. \end{aligned}$$

现在，对于原点附近的任意点 z，我们有

$$\begin{aligned} |D^2 u(z) - D^2 u(0)| \le\ & |D^2 u_k(0) - D^2 u(0)| \\ & + |D^2 u_k(0) - D^2 u_k(z)| + |D^2 u_k(z) - D^2 u(z)|. \end{aligned}$$

对于给定的 $z \in B_{1/16}$，我们选择 $k \in \mathbb{N}$，使得

$$2^{-k-4} \le |z| \le 2^{-k-3}.$$

由 (2.12)-(2.13) 以及三角不等式，我们得到

$$|D^2 u_k(0) - D^2 u(0)| \le \sum_{j=k}^{\infty} |D^2 u_j(0) - D^2 u_{j+1}(0)| \le C \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\alpha} = C 2^{-k\alpha},$$

这里用到了 $\alpha \in (0,1)$。

为了估计 $|D^2 u(z) - D^2 u_k(z)|$，可以在 z 周围重复同样的论证，而不是在 0 周围。也就是说，取 $\Delta v_j = f(z)$ 在 $B_{2^{-j}(z)}$ 中的解，以及 $v_j = u$ 在 $\partial B_{2^{-j}}(z)$ 上的解。于是，

$$|D^2 u_k(z) - D^2 u(z)| \le |D^2 u_k(z) - D^2 v_k(z)| + |D^2 v_k(z) - D^2 u(z)|.$$

上面的第二项可以像之前一样通过 $C 2^{-k\alpha}$ 有界化。对于第一项，我们注意到 $\Delta(u_k - v_k) = f(0) - f(z)$ 在 $B_{2^{-k}} \cap B_{2^{-k}}(z) \supset B_{2^{-k-1}}(z)$ 中成立（回忆 $|z| \le 2^{-k-3}$），因此在 $B_{2^{-2-k}(z)}$ 中有

$$\begin{aligned} |D^2 u_k(z) - D^2 v_k(z)| &\le \|D^2(u_k - v_k)\|_{L^\infty(B_{2^{-2-k}}(z))} \\ &\le C 2^{2k} \|u_k - v_k\|_{L^\infty(B_{2^{-k-1}(z)})} + C|f(z) - f(0)| \\ &\le C 2^{2k} \|u_k - v_k\|_{L^\infty(B_{2^{-k-1}(z)})} + C 2^{-k\alpha}, \end{aligned}$$

这里再次用到 $|z| \le 2^{-k-3}$，以及 $[f]_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le 1$

最后，由（2.11）可知，

$$\|u_k - u\|_{L^\infty(B_{2^{-k-1}}(z))} \le \|u_k - u\|_{L^\infty(B_{2^{-k}})} \le C 2^{-k(2+\alpha)},$$

and

$$\|u - v_k\|_{L^\infty(B_{2^{-k-1}(z)})} \le C 2^{-k(2+\alpha)},$$

由此得到

$$\|u_k - v_k\|_{L^\infty(B_{2^{-k-1}(z)})} \le C2^{-k(2+\alpha)}.$$

因此，我们推得

$$|D^2u_k(z) - D^2u(z)| \le C2^{-k\alpha}.$$

最后，为了估计 $|D^2u_k(z) - D^2u_k(0)|$，记 $h_j := u_j - u_{j-1}$ for$j = 1, 2, \ldots\ldots, k$。由于 h_j是调和的，由 (2.9)（取 $\kappa = 3$）并利用$B_{2^{-k-3}} \subset B_{2^{-j-1}}$，可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{D^2h_j(z) - D^2h_j(0)}{|z|}\right| &\le \|D^3h_j\|_{L^\infty(B_{2^{-k-3}})} \\ &\le C2^{3j}\|h_j\|_{L^\infty(B_{2^{-j}})} \le C2^{j(1-\alpha)}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}|D^2u_k(0) - D^2u_k(z)| &\le |D^2u_0(z) - D^2u_0(0)| + \sum_{j=1}^{k}|D^2h_j(z) - D^2h_j(0)| \\ &\le C|z|\|u_0\|_{L^\infty(B_1)} + C|z|\sum_{j=1}^{k}2^{j(1-\alpha)}.\end{aligned}$$

这里我们还用到了以下事实：若定义 $w := u_0 - \frac{f(0)}{2n}|x|^2 + f(0)$，则 w是调和的，$D^3w = D^3u_0$，并且在 ∂B_1上有 $w = u_0$，且

$$\begin{aligned}|z|^{-1}|D^2u_0(z) - D^2u_0(0)| &\le \|D^3u_0\|_{L^\infty(B_{1/2})} = \|D^3w\|_{L^\infty(B_{1/2})} \\ &\le C\|w\|_{L^\infty(B_1)} = C\|u_0\|_{L^\infty(\partial B_1)} \le C\|u_0\|_{L^\infty(B_1)},\end{aligned}$$

由调和函数的高阶正则性估计（见 (2.9)）和最大值原理（引理 1.14）可得。注意，此处的常数 C 仅取决于 n。

结合由（2.11）可得的事实，

$$\|u_0\|_{L^\infty(B_1)} \le C,$$

（其中我们还使用了$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \le 1$）以及 $|z| \le 2^{-k-3}$，我们推得

$$|D^2u_k(0) - D^2u_k(z)| \le C|z| + C|z|2^{k(1-\alpha)} \le C2^{-k\alpha}.$$

最后注意到 $|z| \ge 2^{-k-4}$，并结合上述所有不等式，我们得到

$$|D^2u(z) - D^2u(0)| \le C2^{-k\alpha} \le C|z|^\alpha$$

对所有 $z \in B_{1/16}$均成立。也就是说，

$$[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/16})} \le C.$$

现在，得益于插值不等式（见取 $\varepsilon = 1$ 时的 (1.9)），

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/16})} &= \|u\|_{C^2(B_{1/16})} + [D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/16})} \\ &\le C\|u\|_{L^\infty(B_{1/16})} + 2[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/16})} \le C.\end{aligned}$$

最后回顾一下，我们将解 u 除以 $\|u\|_{L^\infty(B_1)} + [f]_{C^{0,\alpha}(B_1)}$，并使用覆盖论证得到所需结果（见注 2.15）。

□

对于定理 2.14 的第二个证明，我们使用 [**Moo12**],的方法，该方法最初来自 [**Caf89**]。

定理 2.14 的第二个证明。 减去 $f(0) + \sum_{i,j=1}^{2n} a_{ij}(0)x_ix_j$ 后，我们可以假设 $f(0) = 0$。如有必要，将 u 除以 $\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \varepsilon^{-1}\|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}$ 后，我们还可以假设 $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \le 1$ 且 $\|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le \varepsilon$，其中 $\varepsilon > 0$ 是一个常数，其取值仅依赖于 n 和 α。经过这些简化后，只需证明

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \le C \tag{2.14}$$

其中某个常数 C 仅依赖于 n 和 α。

我们将证明，对每个 $x \in B_{1/2}$，都存在一个二次多项式序列 $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$，以及一个 $\rho_\circ < 1$，使得

$$\|u - P_k\|_{L^\infty(B_{\rho_\circ^k}(x))} \le C_\circ \rho_\circ^{k(2+\alpha)} \qquad \text{for all } k \in \mathbb{N}, \tag{2.15}$$

其中某个常数为 $C_\circ$。由第 1 章的性质 (**H5**) 可知，这推出 $[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \le CC_\circ$。应用插值不等式 (1.9) 后，即得 (2.14)。

我们将证明 $x = 0$ 时的 (2.15)（经过平移即可推出对所有 $x \in B_{1/2}$ 都成立）。我们将利用 $\Delta u = f$, $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \le 1$, $f(0) = 0$ 以及 $[f]_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le \varepsilon$ 这一事实。

注意，$\|\Delta u\|_{C^{0,\alpha}(B_1)} = \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le 2\varepsilon$，也就是说，$u$ 在 Hölder 范数下与一个调和函数相差至多 2ε：取 w 使得 $\Delta w = 0$ 且在 ∂B_1 上 $w = u$。那么，$\Delta(u - w) = f$ 于 B_1，且在 ∂B_1 上 $u - v = 0$，因此由引理 1.14 可得，

$$\|u - w\|_{L^\infty(B_1)} \le C'\|f\|_{L^\infty(B_1)} \le C\varepsilon, \tag{2.16}$$

对于某个 C 通用常数（我们只使用 $\|f\|_{L^\infty(B_1)} \le 2\varepsilon$，此处并未使用其 C^α 范数）。函数 w 是调和函数，且 $|w| \le 1$（因为 $|u| \le 1$）。因此，它在原点处有一个二次泰勒多项式 P_1，满足 $\Delta P_1 \equiv 0$ 和 $|P_1| \le C$。此外，由于 w 是调和的（尤其是 $w \in C^3$），我们有

$$\|w - P_1\|_{L^\infty(B_r)} \le Cr^3 \qquad \text{for all } r \le 1, \tag{2.17}$$

其中某个 C 仅依赖于 n。

结合 (2.16) 和 (2.17)，我们得到

$$\|u - P_1\|_{L^\infty(B_r)} \le C(r^3 + \varepsilon) \qquad \text{for all } r \le 1.$$

现在选择 $r_\circ$ 足够小，使得$Cr_\circ^3 \le \frac{1}{2} r_\circ^{2+\alpha}$（注意 $\alpha < 1$），并且ε 足够小，使得 $C\varepsilon < \frac{1}{2} r_\circ^{2+\alpha}$。（注意，$r_\circ$ 和 ε 都可以只依赖于 n 和 $\alpha_\circ$）于是，

$$\|u - P_1\|_{L^\infty(B_{r_\circ})} \le r_\circ^{2+\alpha}.$$

现在定义

$$u_2(x) := \frac{(u - P_1)(r_\circ x)}{r_\circ^{2+\alpha}}.$$

注意$\|u_2\|_{L^\infty(B_1)} \le 1$，并且 $\Delta u_2(x) = r_\circ^{-\alpha} f(r_\circ x) =: f_2(x)$。于是，$f_2(0) = 0$，并且$[f_2]_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le [f]_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le \varepsilon_\circ$。也就是说，满足与之前相同的假设。重复相同的步骤，可得存在一个多项式P_2，使得

$$\|u_2 - P_2\|_{L^\infty(B_{r_\circ})} \le r_\circ^{2+\alpha}.$$

也就是说，代回后，

$$\left\|u - P_1 - r_\circ^{2+\alpha} P_2(x/r_\circ)\right\|_{L^\infty(B_{r_\circ^2})} \le r_\circ^{2(2+\alpha)}.$$

迭代继续下去，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们都可以定义

$$u_{k+1}(x) := \frac{(u_k - P_k)(r_\circ x)}{r_\circ^{2+\alpha}},$$

它满足

$$\|u_{k+1}\|_{L^\infty(B_1)} \le 1, \quad \Delta u_{k+1}(x) = r_\circ^{-\alpha} f_k(r_\circ x) = r_\circ^{-k\alpha} f(r_\circ^k x) =: f_{k+1}(x),$$

并且存在某个 P_{k+1}，使得

$$\|u_{k+1} - P_{k+1}\|_{L^\infty(B_{r_\circ})} \le r_\circ^{2+\alpha}.$$

代回可得，

$$\left\|u - P_1 - r_\circ^{2+\alpha} P_2(x/r_\circ) - \cdots - r_\circ^{k(2+\alpha)} P_{k+1}(x/r_\circ^k)\right\|_{L^\infty(B_{r_\circ^{k+1}})} \le r_\circ^{(k+1)(2+\alpha)}.$$

也就是说，我们构造了一列二次多项式，在以 0 为中心且半径递减的一列球上逼近 u；这说明 (2.15) 在 0 附近成立。经过一次平移，同样的论证可以在任意点 $x \in B_{1/2}$ 附近重复进行，因此，由 **(H5)** 可知，证明完成。□

注 2.19. 当 $\alpha = 0$ 时，前面的证明表明，若 $f \in L^\infty(B_1)$，则由 (2.15) 可知，∇u 属于齐格蒙德空间 $\Lambda^1(B_1)$；更多详情请参见附录 A 中的 RemarkA.1。特别地，我们也得到了命题 2.18 的一个证明。

注意，在前面的证明中，我们并未直接用到 u 是 C^2 这一点。事实上，我们用到的 u （以及拉普拉斯算子）的唯一性质是最大值原理成立，且 $\Delta(u(rx)) = r^2(\Delta u)(rx)$。

特别地，定理 2.14 的第二个证明不是一个先验估计，而是说明，拉普拉斯方程的任意弱解，其C^α 右端项为 $C^{2,\alpha}$。也就是说，我们直接证明了推论 2.16。

2.3. 非散度形式算子的 Schauder估计

在证明了拉普拉斯算子的 Schauder估计之后，现在我们将研究更一般的二阶线性椭圆算子。我们从非散度形式的算子开始。我们所关注的方程形式为

$$\boxed{\operatorname{tr}\big(A(x)D^2u(x)\big) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) = f(x) \quad \text{in} \quad B_1}$$

其中矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij}$ 一致椭圆——即满足下文的 (2.18)——且 $a_{ij}(x) \in C^{0,\alpha}(B_1)$。我们将证明以下先验估计。

定理 2.20 （非散度形式下的 Schauder估计）。令 $\alpha \in (0,1)$，并令 $u \in C^{2,\alpha}$ 为方程的任意解

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u = f(x) \quad in \quad B_1,$$

其中 $f \in C^{0,\alpha}(B_1)$ 以及 $a_{ij}(x) \in C^{0,\alpha}(B_1)$，并且 $(a_{ij}(x))_{ij}$ 满足椭圆性条件

$$0 < \lambda \operatorname{Id} \le (a_{ij}(x))_{ij} \le \Lambda \operatorname{Id} \quad in \quad B_1, \tag{2.18}$$

对于某个 $0 < \lambda \le \Lambda < \infty$。于是，

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right)$$

对于某个仅依赖于 α、n、λ、Λ 和 $\|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}$ 的常数 C。

对于拉普拉斯算子，我们将给出上述结果的两种不同证明。另一方面，作为上述结果的推论，我们还可以得到非散度形式下的高阶Schauder估计。

推论 2.21 （非散度形式下的高阶Schauder估计）。设 $u \in C^{k+2,\alpha}$ 是下列方程的一个解：

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u = f(x) \quad in \quad B_1,$$

其中 $f \in C^{k,\alpha}(B_1)$ 且 $a_{ij}(x) \in C^{k,\alpha}(B_1)$ 对于某个 $\alpha \in (0,1)$、$k \in \mathbb{N}$, 并且 $(a_{ij}(x))_{ij}$ 满足某个 $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ 下的椭圆性条件(2.18)。那么,

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{k,\alpha}(B_1)}\right)$$

对于某个常数 C，它仅取决于 α、k、n、λ、Λ 和 $\|a_{ij}\|_{C^{k,\alpha}(B_1)}$。

注 2.22（椭圆性条件）。B_1 中的一致椭圆性条件（2.18），量化了矩阵

$$A(x) := (a_{ij}(x))_{ij}$$

是一致正定且一致有界的这一事实。注意，我们总可以假设 $A(x)$ 是对称的（由 $\partial_{ij}u = \partial_{ji}u$ 可知）。我们回顾一下，对于对称矩阵 A_1，$A_2 \in \mathcal{M}_n$，不等式 $A_1 \leq A_2$ 的含义是 $A_2 - A_1$ 为半正定。或者，若

$$0 < \lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j a_{ij}(x) \leq \Lambda|\xi|^2 \quad \text{for all} \quad x \in B_1$$

对所有 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 均成立。

注 2.23（常系数）。我们先来理解常系数的情形,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_{ij}u(x) = 0 \quad \text{in} \quad B_1,$$

其中 a_{ij} 是常数，并满足一致椭圆性假设,

$$0 < \lambda \mathrm{Id} \leq (a_{ij})_{ij} \leq \Lambda \mathrm{Id},$$

对于 $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$。

记 $A := (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n$。那么，$A$ 是对称正定矩阵，因此存在唯一的正定平方根 $A^{1/2}$。经过仿射变量变换

$$z = A^{1/2}x,$$

方程

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_{x_i x_j}u = 0 \quad \text{becomes} \quad \sum_{i=1}^n \partial_{z_i z_i}u = 0$$

或 $\Delta_z u = 0$。事实上,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_{x_i x_j}u = \mathrm{tr}(AD_x^2 u) = \mathrm{tr}(A^{1/2}D_x^2 u A^{1/2}) = \mathrm{tr}(D_z^2 u) = \Delta_z u.$$

因此（且由于 $0 < \lambda \mathrm{Id} \leq A \leq \Lambda \mathrm{Id}$），常系数（一致椭圆）的情形可以归约为调和函数的情形。

由于一致椭圆性，变量变换并不退化，因此我们得到的关于$\|u\|_{C^{2,\alpha}}$的估计只依赖于 α、n、λ 和 Λ（而不依赖于 A）。类似地，变量变换后，区域可能会缩小；例如，对于某个 $\rho < 1/2$，u 的 $C^{2,\alpha}$ 范数在B_ρ 中有界，而不是在 $B_{1/2}$中有界。同样，由于变换并不退化，这样的 ρ 只依赖于 n、λ和 Λ，于是可以通过在 $B_{1/2}$ 中进行覆盖论证来完成证明（见注 2.15）。

最大值原理。我们陈述非散度形式方程的最大值原理，本节将用到这一原理。

命题 2.24（非散度形式的最大值原理）。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任意有界开集。假设 $u \in C^0(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ 满足

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u \geq 0 \quad in \quad \Omega,$$

其中$(a_{ij}(x))_{ij}$ 满足

$$0 < \lambda \,\mathrm{Id} \leq (a_{ij}(x))_{ij} \quad in \quad \Omega.$$

那么，

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

证明。我们先证明在以下情形下的最大值原理

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u > 0 \quad \text{in} \quad B_1, \tag{2.19}$$

也就是说，此时不等式是严格的。我们用矛盾法证明：假设存在某个 $x_\circ \in \Omega$，使得 $\sup_\Omega u = u(x_\circ)$。由于这是一个内部最大值，我们必有 $\nabla u(x_\circ) = 0$ 且 $D^2u(x_\circ) \leq 0$，也就是说，$D^2u(x_\circ)$ 是一个负半定对称矩阵。特别地，它的所有特征值均非正，经过变量变换后，我们有

$$P^T D^2u(x_\circ)P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := D_{x_\circ}$$

对于某个正交 $n \times n$ 矩阵 P，并且对所有 $1 \leq i \leq n$都有 $\lambda_i \leq 0$。令 $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij}$，并令 $A^P(x_\circ) := P^T A(x_\circ)P$。那么，由于 $A(x_\circ)$ 是正定的，$A^P(x_\circ) = (a^P_{ij}(x_\circ))_{ij}$ 也是正定的。特别地，对所有 $1 \leq i \leq n$都有 $a^P_{ii}(x_\circ) \geq 0$。于是，

$$\mathrm{tr}(A(x_\circ)D^2u(x_\circ)) = \mathrm{tr}(A(x_\circ)PD_{x_\circ}P^T) = \mathrm{tr}(P^T A(x_\circ)PD_{x_\circ})$$

因此

$$0 < \mathrm{tr}(A(x_\circ)D^2u(x_\circ)) = \mathrm{tr}(A^P(x_\circ)D_{x_\circ}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^P(x_\circ)\lambda_i \le 0,$$

矛盾。这里，我们用到了 $a_{ii}^P(x_\circ) \ge 0$ and $\lambda_i \le 0$ for all $1 \le i \le n$。这说明当严格不等式 (2.19) 成立时，最大值原理成立。

现在让我们去掉这一假设。令 R 足够大，使得 $B_R \supset \Omega$——经过平移后，我们可以取 $R = \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}(\Omega)$。现在考虑函数

$$u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{x_1} \quad \text{for} \quad x \in \Omega,$$

对于 $\varepsilon > 0$。注意，

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u_\varepsilon(x) \ge \lambda\varepsilon e^{x_1} > 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

特别地，我们可以应用 (2.19) 的结果，得到

$$\sup_\Omega u \le \sup_\Omega u_\varepsilon = \sup_{\partial\Omega} u_\varepsilon \le \sup_{\partial\Omega} u + \varepsilon e^R.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$，即可得到所需结果。 □

因此，我们得到：

引理 2.25. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界开集，并设 $u \in C^0(\Omega)\cap C^2(\Omega)$是满足以下条件的函数

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{ij}u &= f \quad in\ \Omega \\ u &= g \quad on\ \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $(a_{ij})_{ij}$ 满足椭圆性条件 (2.18)，其中某个 $0 < \lambda \le \Lambda < \infty$存在。于是，

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\big(\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\big),$$

其中常数 C 仅取决于Ω的直径、 λ和 Λ。

证明。 这可完全仿照引理 1.14 的证明，利用命题 2.24 得出。□

Schauder估计的证明。 现在我们开始证明非散度形式方程的Schauder估计，即定理 2.20。我们将先用两种方法证明下面的命题，它是我们要证明的估计的一个较弱版本。

我们稍后将证明，事实上，这样的估计足以证明定理 2.20。

命题 2.26。 设 $u \in C^{2,\alpha}$ 是

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u = f(x) \quad in \quad B_1,$$

其中 $f \in C^{0,\alpha}(B_1)$ 且 $a_{ij}(x) \in C^{0,\alpha}(B_1)$ 对于某个 $\alpha \in (0, 1)$，并且 $(a_{ij}(x))_{ij}$满足椭圆性条件

$$0 < \lambda \mathrm{Id} \leq (a_{ij}(x))_{ij} \leq \Lambda \mathrm{Id} \quad in \quad B_1,$$

对于某个 $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$。那么，对于任意 $\delta > 0$,

$$[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq \delta [D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_1)} + C_\delta \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)} \right),$$

对于某个常数 C_δ，它仅依赖于 δ、 α、 n、 λ、 Λ 和 $\|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}$。

注意，前面的结论几乎就是我们想要的：如果能让 $\delta \downarrow 0$ 和 C_δ 保持有界，那么应用插值不等式 (1.9) 后，定理 2.20 就得证了。另一方面，如果 H¨older 范数属于 $B_{1/2}$ 而非 B_1，那么取 $\delta = \frac{1}{2}$ 也能完成证明。正如我们将看到的，尽管并非那么直接，命题 2.26 离最终结果仅一步之遥。

下面给出命题 2.26 的两种不同证明。第一个证明是一个概要，其思路与定理 2.20 的第一个证明相同。第二个证明采用爆破论证（通过反证法）。

命题 2.26 的第一个证明。 这个证明与拉普拉斯算子的情形（定理 2.14 的第一个证明）非常相似。

我们将 u_k 定义为下列方程的解

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(0)\partial_{ij}u_k &= f(0) & \text{in } B_{2^{-k}} \\ u_k &= u & \text{on } \partial B_{2^{-k}}. \end{cases}$$

（我们将系数冻结在零点处。）于是，

$$v_k := u - u_k$$

满足

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(0)\partial_{ij}v_k = f(x) - f(0) + \sum_{i,j=1}^{n} \big(a_{ij}(0) - a_{ij}(x)\big)\partial_{ij}u \quad \text{in} \quad B_{2^{-k}}.$$

由最大值原理（引理 2.25）可得

$$\|u - u_k\|_{L^\infty(B_{2^{-k}})} \leq C2^{-2k} \Bigg(2^{-\alpha k} \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_{2^{-k}})} + 2^{-\alpha k} \|D^2u\|_{L^\infty(B_{2^{-k}})} \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}(B_{2^{-k}})} \Bigg).$$

因此，

$$\|u_k - u_{k+1}\|_{L^\infty(2^{-k-1})} \le C2^{-k(2+\alpha)} \left(\|f\|_{C^{0,\alpha}(B_{2^{-k}})} + \|D^2u\|_{L^\infty(B_{2^{-k}})} \right),$$

其中常数 C 仅依赖于 α、 n、 λ、 Λ 和$\|a_{ij}\|_{C^{0,\ \alpha}(B_1)}$。

沿用拉普拉斯算子情形下完全相同的证明， $\Delta u = f(x)$，现在我们得到

$$[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \le C \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)} + \|D^2u\|_{L^\infty(B_1)} \right).$$

这几乎 正是我们想要证明的结果。不过，右端项上多出了一项 $\|D^2u\|_{L^\infty(B_1)}$ 。这可以通过插值不等式来处理。

我们利用这样一个事实：对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 C_ε 使得

$$\|D^2u\|_{L^\infty(B_1)} \le \varepsilon [D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_1)} + C_\varepsilon \|u\|_{L^\infty(B_1)} \tag{2.20}$$

参见第 1 章中的 (1.9)。

其思想是，由于 $\|D^2u\|_{L^\infty}$ 项是低阶项，我们可以通过在右端增加更多的 $\|u\|_{L^\infty}$ 范数来付出代价，从而将其吸收到左端中。

也就是说，我们有

$$\begin{aligned}
[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} &\le C \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)} + \|D^2u\|_{L^\infty(B_1)} \right) \\
\text{(by interpolation)} \quad &\le C \left(C_\varepsilon \|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)} + \varepsilon [D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_1)} \right) \\
&\le C_\delta \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)} \right) + \delta [D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_1)},
\end{aligned}$$

其中我们使用了插值不等式，并且在最后一步选择了 $\varepsilon = \delta/C > 0$。常数 C_δ 仅取决于 δ、 α、 n、 λ、 Λ 和$\|a_{ij}\|_{C^{0,\ \alpha}(B_1)}$ 。这就完成了证明。 □

对于命题 2.26 的第二个证明，我们使用 L. Simon 提出的稳健爆破方法， [**Sim97**]。为简单起见，我们首先在拉普拉斯算子的情形下进行证明。在完成拉普拉斯算子情形的证明后，我们将详细说明如何将该方法推广到更一般的非散度算子。

命题 2.26 的第二个证明。首先假设 $(a_{ij}(x))_{ij} = \mathrm{Id}$，也就是说， $\Delta u = f$ in B_1。接着说明为证明一般情形 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) = f(x)$ in B_1，需要做哪些修改。

由插值不等式可知，我们只需证明以下估计对任意充分小的 $\delta > 0$ 成立，

$$[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \le \delta [D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_1)} + C_\delta \left(\|D^2u\|_{L^\infty(B_1)} + [f]_{C^{0,\alpha}(B_1)} \right) \tag{2.21}$$

对所有满足 $\Delta u = f$ 属于 B_1 的 $u \in C^{2,\alpha}(B_1)$。事实上，若 (2.21) 成立，则由插值 (2.20) 可得，其中 $\varepsilon = \delta/C_\delta$,

$$[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \le 2\delta[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_1)} + C_\delta\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + [f]_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right)$$

对于某个仅取决于 δ、n 和 α 的新 C_δ，这正是所需的结果。

现在我们将通过反证法证明 (2.21) 成立，其中某个 C_δ 仅取决于 δ、n 和 α。事实上，假设它不成立。那么，对于 $k \in \mathbb{N}$，存在序列 $u_k \in C^{2,\alpha}(B_1)$ 和 $f_k \in C^{0,\alpha}(B_1)$，使得

$$\Delta u_k = f_k \quad \text{in} \quad B_1,$$

并且对于一个固定的小常数 $\delta_\circ > 0$，我们有

(2.22)
$$[D^2u_k]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} > \delta_\circ[D^2u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)} + k\left(\|D^2u_k\|_{L^\infty(B_1)} + [f_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right).$$

现在我们必须导出一个矛盾。

选取 x_k, $y_k \in B_{1/2}$ 使得

$$\frac{|D^2u_k(x_k) - D^2u_k(y_k)|}{|x_k - y_k|^\alpha} \ge \frac{1}{2}[D^2u_k]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \tag{2.23}$$

并令

$$\rho_k := |x_k - y_k|.$$

注意到，由于 $\rho_k \to 0$ 当 $k \to \infty$时，我们必然有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[D^2u_k]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} &\le \frac{|D^2u_k(x_k) - D^2u_k(y_k)|}{\rho_k^\alpha} \\ &\le \frac{2\|D^2u_k\|_{L^\infty(B_1)}}{\rho_k^\alpha} \le \frac{2[D^2u_k]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})}}{k\rho_k^\alpha},\end{aligned}$$

其中最后一个不等式使用了 (2.22)。因此,

$$\rho_k \le Ck^{-\frac{1}{\alpha}} \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty$$

现在，我们进行重新缩放并放大。定义

$$\tilde{u}_k(x) := \frac{u_k(x_k + \rho_k x) - p_k(x)}{\rho_k^{2+\alpha}[D^2u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}}, \quad \tilde{f}_k(x) := \frac{f_k(x_k + \rho_k x) - f_k(x_k)}{\rho_k^\alpha[D^2u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}},$$

其中二次多项式 p_k 选取为满足

$$\tilde{u}_k(0) = |\nabla\tilde{u}_k(0)| = |D^2\tilde{u}_k(0)| = 0. \tag{2.24}$$

也就是说,

$$p_k(z) := u_k(x_k) + \rho_k\sum_{i=1}^n \partial_i u_k(x_k)z_i + \frac{1}{2}\rho_k^2\sum_{i,j=1}^n \partial_{ij}u_k(x_k)z_iz_j.$$

现在只需简单计算即可验证

$$\Delta\tilde{u}_k = \tilde{f}_k \quad \text{in} \quad B_{1/(2\rho_k)}. \tag{2.25}$$

我们也记

$$\xi_k := \frac{y_k - x_k}{\rho_k} \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

注意到

$$[D^2\tilde{u}_k]_{C^{0,\alpha}\left(B_{1/(2\rho_k)}\right)} \le 1, \qquad \text{and} \qquad \left|D^2\tilde{u}_k(\xi_k)\right| > \frac{\delta_\circ}{2}, \tag{2.26}$$

其中，第二个不等式用到了 (2.22)-(2.23)。

由于 $\tilde{u}_k$ 在紧子集上一致有界，且在$C^{2,\alpha}$ 范数下有界（见 (2.24)-(2.26)），由 Arzel`a–Ascoli 定理可知，序列$\tilde{u}_k$ 收敛（取一个子序列后，在 C^2 范数下）到一个在 $\mathbb{R}^n$的紧子集上定义的 $C^{2,\alpha}$ 函数$\tilde{u}$ 。此外，再次取一个子序列后，有 $\xi_k \to \xi \in \mathbb{S}^{n-1}$。

根据 $\tilde{u}_k$的性质，我们推得 $\tilde{u}$ 满足

$$\tilde{u}(0) = |\nabla\tilde{u}(0)| = |D^2\tilde{u}(0)| = 0, \quad [D^2\tilde{u}]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le 1, \quad |D^2\tilde{u}(\xi)| > \frac{\delta_\circ}{2}. \tag{2.27}$$

另一方面，对任意 $R \ge 1$ ，我们有

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}_k\|_{L^\infty(B_R)} &= \sup_{x\in B_R} \frac{|f_k(x_k+\rho_k x) - f_k(x_k)|}{\rho_k^\alpha [D^2u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}} \le \frac{(\rho_k R)^\alpha [f_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}}{\rho_k^\alpha [D^2u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}} \\ &\le \frac{R^\alpha [D^2u_k]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})}}{k[D^2u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}} \le \frac{R^\alpha}{k} \to 0, \text{ as } k\to\infty.\end{aligned}$$

˜因此， $f_k \to 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的紧集上一致成立。结合$\tilde{u}_k \to \tilde{u}$ 在紧集上关于 C^2 范数收敛这一事实，我们可以推出（回顾 (2.25)）

$$\Delta\tilde{u} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n.$$

也就是说， $\tilde{u}$ 是调和函数，特别地，对于任意 i， $j = 1$， ……， n， $\partial_{ij}\tilde{u}$ 也都是调和函数。

现在我们利用 (2.27) 中的三个性质导出矛盾。首先注意到，我们有 $[D^2\tilde{u}]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le 1$。因此， $D^2\tilde{u}$ 在无穷远处具有次线性增长，根据刘维尔定理（命题 1.19），我们得出 $D^2\tilde{u}$ 是常数。也就是说， $\tilde{u}$ 是一个二次多项式，并且也满足 $\tilde{u}(0) = |\nabla\tilde{u}(0)| = |D^2\tilde{u}(0)| = 0$。唯一的可能性是，$\tilde{u} \equiv 0$ 属于$\mathbb{R}^n$，这与 $|D^2\tilde{u}(\xi)| > \frac{\delta_\circ}{2}$矛盾。 —

由此，拉普拉斯算子的情形得证。

现在我们来处理变系数的情形，

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) = f(x) \quad \text{in} \quad B_1,$$

其中 $a_{ij}(x)$ 在 B_1 中一致椭圆（即，对$x \in B_1$有 $0 < \lambda\mathrm{Id} \le (a_{ij}(x))_{ij} \le \Lambda\mathrm{Id}$），且 $\|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le M < \infty$ 对某个 M 成立。证明

基本相同。和之前一样，我们通过反证法进行证明，假设存在序列 u_k、f_k 和 $a_{ij}^{(k)}$，使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}(x)\partial_{ij}u_k(x) = f_k(x) \quad \text{in} \quad B_1,$$

且（2.22）成立。

与拉普拉斯算子的情形相比，唯一的区别在于 $\tilde{u}_k$ 满足的方程。定义：

$$\tilde{a}_{ij}^{(k)}(x) := a_{ij}^{(k)}(x_k + \rho_k x).$$

注意到

$$[\tilde{a}_{ij}^{(k)}]_{C^{0,\alpha}(B_{1/(2\rho_k)})} \le \rho_k^{\alpha}[a_{ij}^{(k)}]_{C^{0,\alpha}(B_1)} \to 0, \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

特别地，取子序列后，$\tilde{a}_{ij}^{(k)}$ 在紧集上一致收敛到某个 $\tilde{a}_{ij}$，其中 $[\tilde{a}_{ij}^{(k)}]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} = 0$，即 $\tilde{a}_{ij}$ 为常数。于是 $\tilde{u}_k$ 满足

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}^{(k)}\partial_{ij}\tilde{u}_k = \tilde{f}_k(x) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\left(a_{ij}^{(k)}(x_k + \rho_k x) - a_{ij}^{(k)}(x_k)\right)\partial_{ij}u_k(x_k)}{\rho_k^{\alpha}[D^2u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}^{(k)}\partial_{ij}\tilde{u}_k - \tilde{f}_k(x)\right| &\le \sum_{i,j=1}^{n} \frac{|x|^{\alpha}\rho_k^{\alpha}[a_{ij}^{(k)}]_{C^{0,\alpha}(B_1)}\|\partial_{ij}u_k\|_{L^{\infty}(B_1)}}{\rho_k^{\alpha}[D^2u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}} \\ &\le C|x|^{\alpha}\frac{\|D^2u_k\|_{L^{\infty}(B_1)}}{[D^2u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}} \le C|x|^{\alpha}\frac{\|D^2u_k\|_{L^{\infty}(B_1)}}{[D^2u_k]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})}}.\end{aligned}$$

利用 (2.22)，我们推出，对于任意 $x \in B_\sigma$，取某个固定的 $\sigma \in (0, \infty)$，并且当 k 足够大时，

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}^{(k)}\partial_{ij}\tilde{u}_k - \tilde{f}_k(x)\right| \le C(\sigma)\frac{\|D^2u_k\|_{L^{\infty}(B_1)}}{[D^2u_k]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})}} \le \frac{C(\sigma)}{k}.$$

˜取极限 $k \to \infty$ (并回忆 $f_k \to 0$ 在紧集上一致地成立)，我们得到

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\partial_{ij}\tilde{u} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n,$$

一个常系数方程，它等价于 $\Delta\tilde{u} = 0$ in $\mathbb{R}^n$（见注 2.23），因此我们同样得到了矛盾。□

现在我们可以继续证明非散度形式下的Schauder估计。具体来说，我们将说明如何从命题 2.26 推导出定理 2.20。与前面的结果一样，我们将采用两种不同的方法。不过在这种情况下，这两种方法都归结为同一个思路。

定理 2.20 的第一个证明。定义半范数

$$[D^2u]^*_{\alpha;B_1} := \sup_{B_\rho(x_\circ)\subset B_1} \rho^{2+\alpha}[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{\rho/2}(x_\circ))}.$$

注意，这个范数精确地刻画了当我们趋近 ∂B_1 时， U 的 $C^{2,\alpha}$ 范数如何爆增。

由 H¨older 半范数关于凸集并集具有次可加性这一事实，

$$[D^2u]^*_{\alpha;B_1} \le C \sup_{B_\rho(x_\circ)\subset B_1} \rho^{2+\alpha}[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{\rho/4}(x_\circ))} \tag{2.28}$$

（事实上，它们是可比的），其中某个常数 C 仅取决于 α 和 $n_\circ$ 事实上，对于任意固定的球 $B_\rho(x_\circ)\subset B_1$，我们用 N 个较小的球 $(B_{\rho/8}(z_j))_{1\le j\le N}$ 覆盖 $B_{\rho/2}(x_\circ)$；由于 $B_{\rho/2}(z_j)\subset B_1$，可得

$$\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2+\alpha}[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{\rho/8}(z_j))} \le \sup_{B_\rho(x_\circ)\subset B_1} \rho^{2+\alpha}[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{\rho/4}(x_\circ))}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\rho^{2+\alpha}[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{\rho/2}(x_\circ))} &\le \rho^{2+\alpha}\sum_{j=1}^{N}[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{\rho/8}(z_j))}\\ &\le 2^{2+\alpha}N \sup_{B_\rho(x_\circ)\subset B_1} \rho^{2+\alpha}[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{\rho/4}(x_\circ))}.\end{aligned}$$

对左侧取上确界即可得到 (2.28)。

应用不等式

$$[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \le \delta[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_1)} + C_\delta\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right)$$

将命题 2.26 中的不等式应用于任意球 $B_{\rho/2}(x_\circ)\subset B_\rho(x_\circ)\subset B_1$，我们得到

$$\begin{aligned}\rho^{2+\alpha}[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{\rho/4})} &\le \delta\rho^{2+\alpha}[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{\rho/2})} + C_\delta\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right)\\ &\le \delta[D^2u]^*_{\alpha;B_1} + C_\delta\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right).\end{aligned}$$

取上确界并利用 (2.28)，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{C}[D^2u]^*_{\alpha;B_1} &\le \sup_{B_\rho(x_\circ)\subset B_1} \rho^{2+\alpha}[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{\rho/4}(x_\circ))}\\ &\le \delta[D^2u]^*_{\alpha;B_1} + C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right).\end{aligned}$$

现在，如果我们固定一个足够小的 $\delta > 0$，就可以将左边的 $[D^2u]^*_{\alpha;B_1}$ 项吸收进去，从而得到

$$[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \le [D^2u]^*_{\alpha;B_1} \le C_\delta \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)} \right),$$

经过插值（见 (1.9)）后，即可得到所需结果。 □

我们还通过直接使用以下抽象引理，给出定理 2.20 的另一种证明。该引理是对前述证明的一种推广。

引理 2.27。设 $k \in \mathbb{R}$ 和 $\gamma > 0$。设 S 是定义在 B_1的开凸子集类上的非负函数，并假设 S 是次可加的。也就是说，若 $A, A_1, \dots, A_N$ 是 B_1 的开凸子集，且满足 $A \subset \bigcup_{j=1}^N A_j$，则有 $S(A) \le \sum_{j=1}^N S(A_j)$。

那么，存在一个足够小的 $\delta > 0$ （仅取决于 n 和 k），使得若

$$\rho^k S(B_{\rho/2}(x_\circ)) \le \delta \rho^k S(B_\rho(x_\circ)) + \gamma \quad \textit{for all } B_\rho(x_\circ) \subset B_1,$$

then

$$S(B_{1/2}) \le C\gamma,$$

对于某个 C （仅取决于 n 和 k）。

证明。设

$$Q := \sup_{B_\rho(x_\circ) \subset B_1} \rho^k S(B_{\rho/2}(x_\circ)).$$

根据引理中的假设，我们得到

$$\left(\frac{\rho}{2}\right)^k S(B_{\rho/4}(x_\circ)) \le \delta \left(\frac{\rho}{2}\right)^k S(B_{\rho/2}(x_\circ)) + \gamma \le \delta Q + \gamma, \quad \text{for all } B_\rho(x_\circ) \subset B_1.$$

现在对所有 $B_\rho(x_\circ) \subset B_1$ 取上确界，我们得到

$$\tilde{Q} := \sup_{B_\rho(x_\circ) \subset B_1} \left(\frac{\rho}{2}\right)^k S(B_{\rho/4}(x_\circ)) \le \delta Q + \gamma.$$

我们现在断言

$$Q \le C\tilde{Q}, \tag{2.29}$$

对于某个仅依赖于 n 和 k 的 C。这将推出

$$\frac{1}{C} Q \le \tilde{Q} \le \delta Q + \gamma \Rightarrow Q \le \tilde{C}\gamma$$

如果 $\delta > 0$ 足够小，且其取值仅依赖于 n 和 $k_\circ$ 因此，我们必须证明 (2.29)。

任取 $B_\rho(x_\circ) \subset B_1$，并用有限个较小的球 $B_{\rho/8}(z_j)$ $(j = 1, 2, \dots\dots, N)$ 覆盖 $B_{\rho/2}(x_\circ)$，其中 $z_j \in B_{\rho/2}(x_\circ)$ 且 $N \le C$

（其有界性仅取决于维数）。由于 $B_{\rho/2}(z_j) \subset B_1$，因此我们有

$$\left(\frac{\rho}{4}\right)^k S(B_{\rho/8}(z_j)) \le \tilde{Q}.$$

对所有指标 j 求和，并利用 S 的次可加性，我们得到

$$\rho^k S(B_{\rho/2}(x_\circ)) \le \sum_{j=1}^{N} \rho^k S(B_{\rho/8}(z_j)) \le N4^k \tilde{Q} = C\tilde{Q}.$$

取上确界，得到 (2.29)。 □

定理 2.20 的第二种证明。我们使用引理 2.27，其中 $k = \alpha$ 且

$$S(A) := [D^2 u]_{C^{0,\alpha}(A)},$$

它在开凸子集上是次可加的。根据命题 2.26 中的估计，固定引理 2.27 中的 $\delta > 0$（它仅依赖于 α 和 n），我们知道

$$[D^2 u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right) + \delta [D^2 u]_{C^{0,\alpha}(B_1)}.$$

将 [1] 重新缩放为 $B_\rho(x_\circ)$，其中 $\rho \le 1$，我们得到

$$\begin{aligned}
\rho^{2+\alpha}[D^2 u]_{C^{0,\alpha}(B_{\rho/2}(x_\circ))} \le& \\
&\le \delta\rho^{2+\alpha}[D^2 u]_{C^{0,\alpha}(B_\rho(x_\circ))} \\
&\quad + C\left(\|u\|_{L^\infty(B_\rho(x_\circ))} + \rho^2\|f\|_{L^\infty(B_\rho(x_\circ))} + \rho^{2+\alpha}[f]_{C^{0,\alpha}(B_\rho(x_\circ))}\right) \\
&\le \delta\rho^{2+\alpha}[D^2 u]_{C^{0,\alpha}(B_\rho)} + C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right).
\end{aligned}$$

这恰好是

$$\rho^k S(B_{\rho/2}(x_\circ)) \le \delta\rho^k S(B_\rho(x_\circ)) + \gamma,$$

with

$$\gamma = C_\delta\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right).$$

因此，借助引理 2.27，我们立即推出

$$S(B_{1/2}) \le C\gamma,$$

也就是说，

$$[D^2 u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right).$$

因此，应用插值不等式（见 (1.9)）后，我们得到

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right)$$

如所需。 □

[1] 通过考虑 $u_\rho(x) = u(x_\circ + \rho x)$ 上的估计来进行重新缩放，该估计满足 $\sum a_{ij}^{(\rho)}(x)\partial_{ij} u_\rho(x) = \rho^2 f(x_\circ + \rho x) =: f_\rho(x)$ 在 B_1 中，其中 $a_{ij}^{(\rho)}(x) = a_{ij}(x_\circ + \rho x)$（注意，$\|a_{ij}^{(\rho)}\|_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le \|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}$）。然后，$[D^2 u_\rho]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} = \rho^{2+\alpha}[D^2 u]_{C^{0,\alpha}(B_{\rho/2}(x_\circ))}$ 且 $[f_\rho]_{C^{0,\alpha}(B_1)} = \rho^{2+\alpha}[f]_{C^{0,\alpha}(B_\rho(x_\circ))}$。

我们通过证明推论 2.21 来结束本节。

推论 2.21 的证明。 我们沿用推论 2.17 的证明。我们将对 k 作归纳法，证明

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(B_{1/2})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{k,\alpha}(B_1)}\right) \tag{2.30}$$

存在一个常数 C，它仅依赖于 n、α、k、λ、Λ 和 $\|a_{ij}\|_{C^{k,\alpha}(B_1)}$。我们将归纳假设应用于非散度型方程的导数。

与推论 2.17 的证明相同，(2.30) 针对球 $B_{1/2}$ 和 B_1，但经过重新缩放和覆盖论证（见注释 2.15）后，也可以将其表述为针对球 $B_{1/2}$ 和 $B_{3/4}$。

基例 $k = 0$ 已由定理 2.20 得证。现在假设 (2.30) 对 $k = m - 1$ 成立，我们将证明它对 $k = m$ 也成立。

我们对非散度型方程关于 ∂_e 求导，得到

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{ij}\partial_e u(x) = \partial_e f(x) - \sum_{i,j=1}^n \partial_e a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) \quad \text{in} \quad B_1.$$

现在，我们将估计 (2.30) 应用于前一个表达式中的 $k = m-1$ $\partial_e u$，在球 $B_{1/2}$ 和 $B_{3/4}$ 中，从而得到

$$\begin{aligned}\|\partial_e u\|_{C^{m+1,\alpha}(B_{1/2})} \le C\Bigg(&\|\partial_e u\|_{L^\infty(B_{3/4})} + \|\partial_e f\|_{C^{m-1,\alpha}(B_{3/4})} \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \|\partial_e a_{ij}\partial_{ij}u\|_{C^{m-1,\alpha}(B_{3/4})}\Bigg).\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\|\partial_e a_{ij}\partial_{ij}u\|_{C^{m-1,\alpha}(B_{3/4})} &\le \|\partial_e a_{ij}\|_{C^{m-1,\alpha}(B_{3/4})}\|\partial_{ij}u\|_{C^{m-1,\alpha}(B_{3/4})} \\ &= C\|\partial_{ij}u\|_{C^{m-1,\alpha}(B_{3/4})} \\ &\le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{m-1,\alpha}(B_1)}\right),\end{aligned}$$

最后一个不等式中，我们使用了球 $B_{3/4}$ 和 B_1 中的归纳假设（见注 2.15）。利用 $\|\partial_e u\|_{L^\infty(B_{3/4})} \le \|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{3/4})}$，我们可以使用 (2.30) 的基例（取球 $B_{3/4}$ 和 B_1）来估计这一项。综上，我们得到

$$\|\partial_e u\|_{C^{m+1,\alpha}(B_{1/2})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{m-1,\alpha}(B_1)}\right),$$

将其与基例结合，并对每个 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$，即可得到所需的估计。□

2.4. 散度型算子的 Schauder估计

接下来，我们将证明散度型算子的 Schauder估计。特别地，我们将研究以下方程

$$\boxed{\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u(x)\big) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\big(a_{ij}(x)\partial_j u(x)\big) = f(x) \quad \text{in} \quad B_1,} \tag{2.31}$$

其中 $A(x) := (a_{ij}(x))_{ij}$ 是一致椭圆的，并且 $a_{ij}(x) \in C^{0,\alpha}$。请注意，先验地，表达式 (2.31) 即使对于 C^∞ 函数 u也没有意义：我们对$a_{ij}(x)$求导，而它只有 $C^{0,\alpha}$。因此，我们需要为 (2.31) 定义解的弱概念。于是，如果满足以下条件，我们称$u \in H^1(B_1)$是 (2.31) 的弱解

$$\int_{B_1} \nabla\phi(y) \cdot A(y)\nabla u(y)\, dy = -\int_{B_1} \phi(y) f(y)\, dy \qquad \text{for all} \quad \phi \in C_c^\infty(B_1).$$

我们将证明以下结论：

定理 2.28 (散度形式下的 Schauder估计)。 设 $u \in C^{1,\alpha}$ 是以下方程的弱解

$$\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\big(a_{ij}(x)\partial_j u(x)\big) = f(x) \quad in \quad B_1,$$

其中 $f \in L^q(B_1)$ 对 $q \geq \frac{n}{1-\alpha}$成立，且 $a_{ij}(x) \in C^{0,\alpha}(B_1)$ 对某个 $\alpha \in (0,1)$ 成立，使得 $(a_{ij}(x))_{ij}$ 满足椭圆性条件

$$0 < \lambda\,\mathrm{Id} \leq (a_{ij}(x))_{ij} \leq \Lambda\,\mathrm{Id} \quad in \quad B_1, \tag{2.32}$$

对某个 $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$。那么，

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^q(B_1)}\right)$$

对某个常数 C，其仅依赖于 α、 n、 λ、 Λ 和 $\|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}$。

由此，我们还可以得到散度型算子的高阶Schauder估计。

推论 2.29 (散度形式下的高阶Schauder估计)。 设$u \in C^{k+1,\alpha}$ 是下列方程的一个弱解：

$$\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\big(a_{ij}(x)\partial_j u(x)\big) = f(x) \quad in \quad B_1,$$

其中 $f \in C^{k-1+\alpha}(B_1)$ 和 $a_{ij}(x) \in C^{k,\alpha}(B_1)$ 对于某个 $\alpha \in (0,1)$，$k \in \mathbb{N}$，使得 $(a_{ij}(x))_{ij}$ 满足椭圆性条件 (2.32)，其中某个 $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$。那么，

$$\|u\|_{C^{k+1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{k-1,\alpha}(B_1)}\right)$$

对于某个常数 C，它仅依赖于 $\alpha, k, n, \lambda, \Lambda$ 和 $\|a_{ij}\|_{C^{k,\alpha}(B_1)}$。

最大值原理。与非散度形式的算子情形一样，散度形式的方程也有最大值原理。

命题 2.30 (散度形式的最大值原理)。设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$是一个有界开集。假设 $u \in H^1(\Omega)$ 在弱意义下满足，

$$\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\big(a_{ij}(x)\partial_j u(x)\big) \geq 0 \quad in \quad \Omega,$$

其中$(a_{ij}(x))_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ 满足逐点椭圆性条件，

$$0 < (a_{ij}(x))_{ij} \quad in \quad \Omega.$$

那么，

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

证明。我们知道，记 $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij}$，

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot A(x)\nabla u \, dx \leq 0 \quad \text{for all} \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega),\ \phi \geq 0.$$

特别地，通过逼近（见第 1 章中的(S6)），前面的表达式对所有满足 $\phi \geq 0$ 的 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ 均成立。我们取 $\phi(x) := (u - \sup_{\partial\Omega} u)^+ \in H_0^1(\Omega)$ 作为检验函数，其中 $f^+ := \max\{f, 0\}$ 表示正部。于是，

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot A(x)\nabla\phi \, dx = \int_\Omega \nabla\phi \cdot A(x)\nabla u \, dx \leq 0.$$

由于 $A(x) > 0$，这意味着 $\nabla\phi \equiv 0$，且 ϕ 为常数。又由于 $\phi \in H_0^1(\Omega)$，这意味着 $\phi \equiv 0$，也就是说，Ω 中 $u \leq \sup_{\partial\Omega} u$，正如所需。□

Schauder估计的证明。我们来证明定理 2.28。我们将采用放大论证，思路与命题 2.26 的第二个证明相同。

定理 2.28 的证明。与命题 2.26 的（第二个）证明一样，我们将证明，对于任意 $\delta > 0$，

$$[\nabla u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq \delta[\nabla u]_{C^{0,\alpha}(B_1)} + C_\delta \left(\|\nabla u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^q(B_1)}\right) \tag{2.33}$$

对于所有满足以下条件的 $u \in C^{1,\alpha}(B_1)$

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \left(a_{ij}(x)\partial_j u(x)\right) = f(x), \quad \text{weakly in} \quad B_1.$$

由此得到

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq \delta[\nabla u]_{C^{0,\alpha}(B_1)} + C_\delta \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^q(B_1)}\right)$$

因此，仿照定理 2.20 的证明，利用引理 2.27（或者，也可以调整定理 2.20 的第一个证明），我们便得到所需结果。接下来，我们来重点证明 (2.33):

假设结论不成立。那么，存在序列 $u_k \in C^{1,\alpha}(B_1)$ 和 $f_k \in L^q(B_1)$，对于 $k \in \mathbb{N}$，满足

$$\operatorname{div}\big(A_k(x)u_k(x)\big) = f_k(x) \quad \text{weakly in} \quad B_1,$$

并且对于一个固定的小常数 $\delta_\circ > 0$，我们有

$$[\nabla u_k]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} > \delta_\circ [\nabla u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)} + k\left(\|\nabla u_k\|_{L^\infty(B_1)} + \|f_k\|_{L^q(B_1)}\right). \tag{2.34}$$

现在我们必须导出一个矛盾。

选取 $x_k, y_k \in B_{1/2}$，使得

$$\frac{|\nabla u_k(x_k) - \nabla u_k(y_k)|}{|x_k - y_k|^\alpha} \geq \frac{1}{2}[\nabla u_k]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \tag{2.35}$$

并令

$$\rho_k := \frac{|x_k - y_k|}{2}, \quad \text{and} \quad z_k := \frac{x_k + y_k}{2}.$$

于是，与命题 2.26 中一样，$\rho_k \leq Ck^{-\frac{1}{\alpha}} \to 0$ 当 $k \to \infty$ 时。定义

$$\tilde{u}_k(x) := \frac{u_k(z_k + \rho_k x) + u_k(z_k - \rho_k x) - 2u_k(z_k)}{\rho_k^{1+\alpha}[\nabla u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}}.$$

于是，

$$\tilde{u}_k(0) = |\nabla \tilde{u}_k(0)| = 0. \tag{2.36}$$

我们指出，这里我们没有像命题 2.26 中那样定义 $\tilde{u}_k$（即减去一个二次多项式），而是使用了二阶增量商。

我们还记

$$\xi_k := \frac{y_k - x_k}{2\rho_k} \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

注意，

$$[\nabla \tilde{u}_k]_{C^{0,\alpha}\left(B_{1/(2\rho_k)}\right)} \leq 2, \qquad \text{and} \qquad |\nabla \tilde{u}_k(\xi_k)| > \frac{\delta_\circ}{2}, \tag{2.37}$$

其中，第二个不等式用到了 (2.34) 和 (2.35)。

由于 $\tilde{u}_k$ 在紧子集上一致有界，且在 $C^{1,\,\alpha}$ 范数下有界（由 (2.36) 和 (2.37) 可知），根据阿尔泽拉–阿斯科利定理，序列 $\tilde{u}_k$ 收敛（在 C^1 范数下）到一个 $C^{1,\,\alpha}$ 函数 $\tilde{u}$，且在 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集上一致收敛（取某个子序列）。此外，再取一个子序列，可得 $\xi_k \to \xi \in \mathbb{S}^{n-1}$。

根据 $\tilde{u}_k$ 的性质，我们推得 $\tilde{u}$ 满足

$$\tilde{u}(0) = |\nabla \tilde{u}(0)| = 0, \quad [\nabla \tilde{u}]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq 2, \quad |\nabla \tilde{u}(\xi)| > \frac{\delta_\circ}{2}. \tag{2.38}$$

我们来检查 $\tilde{u}_k$ 满足哪个方程。令

$$\tilde{a}_{ij}^{(k)}(x) := a_{ij}^{(k)}(z_k + \rho_k x),$$

因此，与命题 2.26 中一样， $\tilde{a}_{ij}^{(k)}$ 在紧集上一致收敛到某个 $\tilde{a}_{ij}$ 常数。对于任意 $\phi \in C_c^\infty(B_1)$，我们知道

$$\int_{B_1} \nabla\phi \cdot A_k(x)\nabla u_k = -\int_{B_1} f_k\phi. \tag{2.39}$$

设 $\tilde{A}_k(x) := A_k(z_k + \rho_k x) = (\tilde{a}_{ij}^{(k)}(x))_{ij}$。设 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，并令 k 足够大，使得 $\operatorname{supp}\phi \subset B_{1/(2\rho_k)}$。设

$$\int \nabla\phi \cdot \tilde{A}_k(x)\nabla\tilde{u}_k = \mathrm{I} - \mathrm{II},$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \frac{1}{\rho_k^\alpha [\nabla u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}} \int \nabla\phi(x) \cdot A_k(z_k + \rho_k x)\nabla u_k(z_k + \rho_k x)\, dx \\
&= \frac{1}{\rho_k^\alpha [\nabla u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}} \int \nabla_y \left(\phi\left(\rho_k^{-1}(y - z_k)\right)\right) \cdot A_k(y)\nabla u_k(y)\rho_k^{-n+1}\, dy \\
&= \frac{-\rho_k^{1-\alpha}}{[\nabla u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}} \int \phi(x) f_k(z_k + \rho_k x)\, dx,
\end{aligned}$$

由 (2.39) 可知，且

$$\mathrm{II} = \frac{1}{\rho_k^\alpha [\nabla u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}} \int \nabla\phi(x) \cdot A_k(z_k + \rho_k x)\nabla u_k(z_k - \rho_k x)\, dx = \mathrm{II}_i + \mathrm{II}_{ii}.$$

这里，我们用 II_i 和 II_{ii} 表示以下量：

$$\mathrm{II}_i = \frac{1}{\rho_k^\alpha [\nabla u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}} \int \nabla\phi(x) \cdot (A_k(z_k + \rho_k x) - A_k(z_k - \rho_k x))\nabla u_k(z_k - \rho_k x)\, dx$$

and

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_{ii} &= \frac{1}{\rho_k^\alpha [\nabla u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}} \int \nabla\phi(x) \cdot A_k(z_k - \rho_k x)\nabla u_k(z_k - \rho_k x)\, dx \\
&= \frac{\rho_k^{1-\alpha}}{[\nabla u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}} \int \phi(x) f_k(z_k - \rho_k x)\, dx.
\end{aligned}$$

现在来证明

$$\left| \int \nabla\phi \cdot \tilde{A}_k \nabla\tilde{u}_k \right| \to 0, \quad \text{as} \quad k \to \infty$$

对所有 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，分别对每一项进行估计。

注意，对于 $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$，

$$\left|\int \phi(x) f_k(z_k+\rho_k x)\,dx\right| \le \left(\int |\phi|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int |f_k(z_k+\rho_k x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C(\phi)\|f_k\|_{L^q(B_1)}\rho_k^{-\frac{n}{q}}.$$

于是，

$$|\mathrm{I}| \le C(\phi)\rho_k^{1-\alpha-\frac{n}{q}} \frac{\|f_k\|_{L^q(B_1)}}{[\nabla u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}} \le C(\phi)\rho_k^{1-\alpha-\frac{n}{q}} k^{-1} \to 0, \quad \text{as} \quad k\to\infty,$$

只要 $1-\alpha-\frac{n}{q}\ge 0$，也就是说，$q \ge \frac{n}{1-\alpha}$。在最后一步中，我们使用了 (2.34)。同理，

$$|\mathrm{II}_{ii}| \to 0, \quad \text{as} \quad k\to\infty,$$

因为 $q \ge \frac{n}{1-\alpha}$。最后，

$$|\mathrm{II}_i| \le \frac{[A_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}}{[\nabla u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}} \int |\nabla\phi||x|^\alpha \|\nabla u\|_{L^\infty(B_1)}\,dx \le C(\phi)\frac{\|\nabla u\|_{L^\infty(B_1)}}{[\nabla u_k]_{C^{0,\alpha}(B_1)}} \le \frac{C(\phi)}{k} \to 0, \quad \text{as} \quad k\to\infty.$$

这里我们再次使用了 (2.34)。也就是说，$|\mathrm{II}_i| \to 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的紧集中一致地成立。

于是我们得出，对于任意 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，

$$\left|\int \nabla\phi \cdot \tilde{A}_k(x)\nabla\tilde{u}_k\right| \to 0, \quad \text{as} \quad k\to\infty.$$

~ ~取极限后，经过选取一个子序列，我们可得 $A_k \to A$ 在紧集上一致地~，其中 A 是一个常系数矩阵。因此，我们推得

$$\int \nabla\phi \cdot \tilde{A}\nabla\tilde{u} = 0 \quad \text{for all} \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

这意味着，经过变量变换后，$\tilde{u}$是调和的（回顾注 2.23）。由刘维尔定理（命题 1.19），我们得到 $\nabla\tilde{u}$必为常数（因为它是调和的，且$[\nabla\tilde{u}]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le 2$）。然而，$\nabla\tilde{u}(0)=0$ 且 $\nabla\tilde{u}(\xi)\neq 0$（见 (2.38)），这就产生了矛盾。□

推论 2.29 的证明。我们对 k 使用归纳法。情形 $k=0$ 由定理 2.28 得出。接下来，假设

$$\|u\|_{C^{k+1,\alpha}(B_{1/2})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{k-1,\alpha}(B_1)}\right) \tag{2.40}$$

对所有 $k \le m-1$ 都成立，接下来我们证明它对 $k=m$ 成立。

为此，注意到，由于 $a_{ij}(x) \in C^{m,\ \alpha}$，且 $m \geq 1$，我们可以计算散度型方程中的导数，得到

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u = f(x) - \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i a_{ij}(x)\partial_j u \quad \text{in} \quad B_1,$$

也就是说，这是一个非散度型方程，其右端项属于$C^{m-1,\ \alpha}$。应用非散度形式方程的高阶Schauder估计，即推论 2.21（在球 $B_{1/2}$ 和 $B_{3/4}$中），可得

$$\|u\|_{C^{m+1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\Bigg(\|u\|_{L^\infty(B_{3/4})} + \|f\|_{C^{m-1,\alpha}(B_{3/4})} + \\ + \sum_{i,j=1}^{n} \|\partial_i(a_{ij})\|_{C^{m-1,\alpha}(B_{3/4})} \|\partial_j u\|_{C^{m-1,\alpha}(B_{3/4})} \Bigg),$$

也就是说，

$$\|u\|_{C^{m+1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\Bigg(\|u\|_{L^\infty(B_{3/4})} + \|f\|_{C^{m-1,\alpha}(B_{3/4})} + \|u\|_{C^{m,\alpha}(B_{3/4})} \Bigg),$$

其中常数 C 仅依赖于 n、 α、 λ、 Λ和$\|a_{ij}\|_{C^{m,\ \alpha}(B_1)}$。现在利用归纳假设，即 $k = m - 1$的（2.40），在球 $B_{3/4}$ 和 B_1中，即可完成证明。□

2.5. 连续系数的情形

最后，我们通过研究具有连续系数的散度形式和非散度形式方程来结束本章。

在本节中，我们将为 (2.1) 和 (2.2) 建立先验 Schauder估计，条件是 $a_{ij} \in C^0$（B_1）（且右端项分别有界或属于 L^n）。这类估计将在接下来的章节中发挥作用。

在这个极限情形下（当 $\alpha \downarrow 0$ 时），我们可以根据前面的结果推断，解分别具有有界的 C^2 和 C^1 范数。然而，事实并非如此。

相反，我们将证明，获得的导数几乎多出两个 阶。也就是说，对于任意 $\varepsilon > 0$，解的 $C^{2-\varepsilon}$ 和 $C^{1-\varepsilon}$ 范数有界。更准确地说，我们将在下文证明以下结果：

命题 2.31。 设 $u \in C^2$ 是下列方程的任意一个解

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u = f(x) \quad in \quad B_1,$$

其中 $f \in L^\infty$（B_1）和 $a_{ij} \in C^0$（B_1）对于某个 （a_{ij}（x）$_{ij}$ 满足 （2.18）对于某个 $0 < \lambda \leq \Lambda$。那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，

$$\|u\|_{C^{1,1-\varepsilon}(B_{1/2})} \leq C_\varepsilon \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)} \right)$$

对于某个仅取决于 ε、 n、 λ、 Λ 和 (a_{ij}) $_{ij}$ 的常数 C_ε 。

也就是说，我们并未获得两个完整的 导数，而是损失了一个任意小的因子。这种损失伴随着常数C_ε 在 $\varepsilon \downarrow 0$时发散这一事实；关于 $\varepsilon = 0$情形的反例，参见 [**JMV09, EM17**] 。这也与拉普拉斯算子的情况一致（见第 2.2 节开头的反例）。

我们指出，前一个命题中 C 对 $(a_{ij})_{i,j}$ 的依赖，实际上是对 $(a_{ij})_{i,j}$的连续模的依赖。也就是说，若ω : $[0,\infty) \to [0,\infty)$ 是一个连续单调函数，满足 $\omega(0) = 0$ ，并且

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \le \omega(|x-y|), \quad \text{for all} \quad x, y \in B_1,$$

那么前一个命题中的常数依赖于 ω ，而非 $(a_{ij})_{i,j}$。

对于散度型方程，我们有以下结论:

命题 2.32. 设 $u \in C^1$ 是下列方程的一个弱解

$$\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\big(a_{ij}(x)\partial_j u\big) = f(x) \quad in \quad B_1,$$

其中 $f \in L^n(B_1)$ 和 $a_{ij}(x) \in C^0(B_1)$ 满足椭圆性条件(2.32)，其中某个 $0 < \lambda \le \Lambda$。那么，对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$\|u\|_{C^{1-\varepsilon}(B_{1/2})} \le C_\varepsilon \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)}\right)$$

存在某个常数 C_ε ，它仅依赖于 ε、 n、 λ、 Λ 和 $(a_{ij})_{ij}$。

前两个命题的证明分别类似于非散度形式算子和散度形式算子的 Schauder 估计证明。

我们简要概述命题 2.31 和 2.32 的证明，其中包含了所需步骤的所有关键信息。

命题 2.31 的证明概要。 我们简要概述 $(a_{ij}(x))_{ij}$ =Id 的情形下的证明，细节留给读者。这里概述的证明遵循与命题 2.26 的第二个证明相同的步骤和论证。

类似地进行推导，并应用引理 2.27 后（参见定理 2.20 的第一个或第二个证明），我们只需证明对于任意 $\delta > 0$

$$[\nabla u]_{C^{1-\varepsilon}(B_{1/2})} \le \delta [\nabla u]_{C^{1-\varepsilon}(B_1)} + C_\delta(\|\nabla u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)}),$$

对于某个 C_δ。

用矛盾法，假设我们有一个序列 $f_k \in L^\infty(B_1)$、$u_k \in C^2(B_1)$，以及系数 $(a_{ij}^{(k)})_{ij}$，它们具有共同的连续模，使得 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)} \partial_{ij} u_k = f_k$ 并且

$$[\nabla u_k]_{C^{1-\varepsilon}(B_{1/2})} > \delta_\circ [\nabla u_k]_{C^{1-\varepsilon}(B_1)} + k(\|\nabla u_k\|_{L^\infty(B_1)} + \|f_k\|_{L^\infty(B_1)}), \tag{2.41}$$

对于某个 $\delta_\circ > 0$。

选取 $x_k, y_k \in B_{1/2}$ 使得

$$\frac{|\nabla u_k(x_k) - \nabla u_k(y_k)|}{|x_k - y_k|^{1-\varepsilon}} \geq \frac{1}{2}[\nabla u_k]_{C^{1-\varepsilon}(B_{1/2})} \tag{2.42}$$

并令 $\rho_k := |x_k - y_k|$，从而如命题 2.26 的第二个证明中所示$\rho_k \downarrow 0$。定义

$$\tilde{u}_k(x) := \frac{u_k(x_k + \rho_k x) - u_k(x_k) - \rho_k \nabla u_k(x_k) \cdot x}{\rho_k^{2-\varepsilon} [\nabla u_k]_{C^{1-\varepsilon}(B_1)}}$$

and

$$\tilde{f}_k(x) := \rho_k^\varepsilon \frac{f_k(x_k + \rho_k x) - f_k(x_k)}{[\nabla u_k]_{C^{1-\varepsilon}(B_1)}},$$

从而

$$\tilde{u}_k(0) = |\nabla \tilde{u}_k(0)| = 0, \qquad \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}^{(k)} \partial_{ij} \tilde{u}_k = \tilde{f}_k \quad \text{in} \quad B_{1/(2\rho_k)}. \tag{2.43}$$

其中

$$\tilde{a}_{ij}^{(k)}(x) := a_{ij}^{(k)}(z_k + \rho_k x).$$

记 $\xi_k := \frac{y_k - x_k}{\rho_k} \in \mathbb{S}^{n-1}$，我们有

$$[\nabla \tilde{u}_k]_{C^{1-\varepsilon}\left(B_{\frac{1}{2\rho_k}}\right)} \leq 1, \qquad \text{and} \qquad \left|\nabla \tilde{u}_k(\xi_k)\right| > \frac{\delta_\circ}{2},$$

由 (2.41) 和 (2.42) 得。

与命题 2.26 中一样，$\tilde{u}_k$（取一个子序列，并且在 C^1范数下）收敛到 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集上的一个 $C^{1,1-\varepsilon}$ 函数 $\tilde{u}$，且 $\xi_k \to \xi \in \mathbb{S}^{n-1}$。此外，

$$\tilde{u}(0) = |\nabla \tilde{u}(0)| = 0, \quad [\nabla \tilde{u}]_{C^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} \leq 1, \quad |\nabla \tilde{u}(\xi)| > \frac{\delta_\circ}{2}.$$

另一方面，对于任意 $R \geq 1$，我们有

$$\|\tilde{f}_k\|_{L^\infty(B_R)} \leq \frac{\rho_k^\varepsilon}{k} \to 0, \text{ as } k \to \infty,$$

并且，由于 $a_{ij}^{(k)}$，$\tilde{a}_{ij}^{(k)}(x) \to \tilde{a}_{ij}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中局部一致具有连续模，其中极限系数 $\tilde{a}_{ij}$ 为常数。此时，在方程 (2.43) 中，系数局部一致地收敛到常系数，而解 $\tilde{u}_k$ 仅在 C^1 中收敛。

现在，取极限的过程比之前更加复杂：为此，我们需要粘性解的概念（见定义 1.20 和第 4.3 节），以及粘性解在一致极限下稳定这一事实（见命题 4.20）。总之，我们可以证明极限 $\tilde{u}$ 满足

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\partial_{ij}\tilde{u} = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^n$$

（在粘性意义下）。因此，极限解 $\tilde{u}$ 是调和的（经过变量变换后），由此可像命题 2.26 的第二个证明那样得到矛盾。□

为了证明命题 2.32 的证明中的序列收敛，我们需要以下引理：

引理 2.33. 设 $u \in H^1(B_1)$ 满足

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) = f(x) \quad in \quad B_1, \tag{2.44}$$

在弱意义下，对某些 $f \in L^2(B_1)$ 和 $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij}$ 一致椭圆，其椭圆性常数为 λ 和 Λ（见 (2.18)）。那么

$$\|\nabla u\|_{L^2(B_{1/2})} \le C(\|u\|_{L^2(B_1)} + \|f\|_{L^2(B_1)})$$

对于某个 C，其仅依赖于 λ、Λ 和 n。

证明。 我们来证明当对所有 $x \in B_1$，$A(x)$ 都是对称矩阵时的引理。

任取满足 $\eta \equiv 1$ in $B_{1/2}$ 的 $\eta \in C_c^\infty(B_1)$，并注意到

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla u|^2 \le C \int_{B_1} \nabla(u\eta) \cdot A(x)\nabla(u\eta)\, dx$$

由椭圆性可得。特别地，由于对所有 $x \in B_1$，$A(x)$ 都是对称矩阵，我们可以利用 $\nabla(u\eta) \cdot A\nabla(u\eta) = u^2\nabla\eta \cdot A\nabla\eta + \nabla(u\eta^2) \cdot A\nabla u$ 以及方程 (2.44) 得到

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla u|^2 \le C \int_{B_1} u^2|\nabla\eta|^2 + C\int_{B_1} |fu|\eta^2.$$

由 H¨older 不等式可得所需的估计。关于证明的更多细节，以及非常类似情形下的非对称情形，请参见引理 3.8 的证明。□

现在我们来给出命题 2.32 的证明。

命题 2.32 的证明。 证明采用反证法，按照定理 2.28 的证明进行，并对照命题 2.26 的证明，作出命题 2.31 的证明概要中引入的相应修改。

注意，在这种情况下，我们应将 $\tilde{u}_k(x)$ 定义为一阶增量商：

$$\tilde{u}_k(x) = \frac{u_k(x_k + \rho_k x) - u_k(x_k)}{\rho_k^{1-\varepsilon}[u_k]_{C^{1-\varepsilon}(B_1)}}$$

因此，我们可以直接得到（与定理 2.28 的证明不同）：$\tilde{u}_k$ 满足：

(2.45)

$$\operatorname{div}(\tilde{A}_k(x)\nabla\tilde{u}_k(x)) = \tilde{f}_k(x) \quad \text{in} \quad B_{1/(2\rho_k)}, \qquad \tilde{f}_k(x) = \frac{\rho_k^{1+\varepsilon} f_k(x_k + \rho_k x)}{[u_k]_{C^{1-\varepsilon}(B_1)}},$$

~ ~在弱意义下，其中 $A_k(x) := A_k(x_k + \rho_k x)$，且 $\|f_k\|_{L^n(B_{1/(2\rho_k)})} \downarrow 0$ 当 $k \to \infty$时。

因此，由于 A_k的一致连续性， $A_k(x)$局部一致收敛到某个常矩阵 A_∞。

另一方面，注意到每个 $\tilde{u}_k$ 都属于 H^1（因为根据假设它们是 C^1），并且它们在 L^2 中局部一致（因为它们局部一致有界）。因此，我们可以应用引理 2.33，得到 $\tilde{u}_k$ 在 H^1 中局部一致有界。特别地，根据第 1 章中的 **（S4）**（见（1.3）），$\nabla\tilde{u}_k$ 弱收敛到 $\nabla\tilde{u}_\infty$。因此：

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla\phi \cdot \tilde{A}_k \nabla\tilde{u}_k \to \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\phi \cdot \tilde{A}_\infty \nabla\tilde{u}_\infty \quad \text{as} \quad k \to \infty, \quad \text{for all } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

并且由 (2.45) 可知， u_∞ 在 $\mathbb{R}^n$中是调和的（经过变量变换后）。再次利用刘维尔定理，即命题 1.19，便得出矛盾。□

注 2.34。 爆破技巧是分析中的常用工具，具有很强的通用性。特别是，本节介绍的技巧归功于 L. Simon， [**Sim97**], 并且可以以类似的方式应用于许多不同的情形。我们已经看到，这一技巧应用于线性二阶方程的内部先验估计，无论是散度形式还是非散度形式；此外，上文所述的放大论证也可以推广到边界估计、抛物型方程、非线性方程，甚至积分微分方程。

2.6. 边界正则性

本章最后，我们陈述推论 2.16 和 2.17 对应的全局（直至边界）估计结果，适用于足够光滑的区域。

为便于阅读，我们给出拉普拉斯算子的结果；不过，对于非散度形式的一致椭圆方程（其系数满足相应的正则性条件），也存在类似结果。

定理 2.35 (边界正则性)。设 $\alpha \in (0,1)$ 且 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $k \geq 2$，并设 Ω 是一个有界 $C^{k,\alpha}$ 区域，$\mathbb{R}^n$。设 $u \in H^1(\Omega)$ 是下列方程的一个弱解：

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad in\ \Omega \\ u &= g \quad on\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.46}$$

对于某个 $f \in C^{k-2,\alpha}(\Omega)$，$g \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$。

那么，$u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ 并且

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\left(\|f\|_{C^{k-2,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|g\|_{C^{k,\alpha}(\partial\Omega)}\right),$$

对于某个常数 C，它仅依赖于 α、n、k 和 Ω。

注 2.36. 注意，在这种情况下，右端项不需要包含 $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ 这一项，因为根据最大值原理（引理 2.25），

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq C\left(\max_{\partial\Omega} g + \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\right)$$

对于某个 C，它仅依赖于 Ω、λ、Λ 和 M。

定理 2.35 可以运用与前几节类似（并作相应调整）的技巧来证明：爆破之后，靠近边界的点表现得如同半空间中的局部问题（也就是说，爆破将 $\partial\Omega$压平），由此我们可以借助半空间中的刘维尔定理得出矛盾。

有人可能会好奇，当区域的正则性假设较弱时会发生什么（关于这一方向的更多内容，可参阅 [**Ken94, Kry96**] ）。在这种情况下，类似的正则性结果适用于 $C^{1,\alpha}$ （甚至C^1）区域；但当 Ω 仅为利普希茨区域时，几乎所有正则性都会丧失。具体而言，假设 u 是 (2.46) 的解，且 f 和 g 足够光滑。那么，

- 如果 Ω 是一个 $C^{1,\alpha}$ 区域，那么解是 $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$。
- 如果 Ω 是一个 C^1 区域，那么对所有 $\varepsilon > 0$，解都属于 $C^{1-\varepsilon}(\overline{\Omega})$，但一般而言并不属于 $C^{0,1}(\overline{\Omega})$。
- 若 Ω 是利普希茨区域，则解属于 $C^\gamma(\overline{\Omega})$，其中指数为某个较小的 $\gamma > 0$，其取值取决于该区域的利普希茨范数；这是最优的。

我们看到，若 Ω 是利普希茨区域，那么几乎所有正则性都会丧失。若从放大与紧性方法的角度来思考，就会发现利普希茨区域与 C^1截然不同。事实上，对利普希茨区域进行爆破并不会 使其变得更平坦（它们仍是利普希茨区域，且利普希茨范数不变）。因此，无法通过爆破来改善正则性。结果表明，解属于某个较小 $\gamma > 0$ 对应的 C^γ 空间；一般来说，无法获得更好的正则性。

第3章

非线性变分偏微分方程与希尔伯特第十九问题

在解析函数理论的基础知识中，我认为最令人费解的事实之一是，存在这样一些偏微分方程：它们的所有解都必定是自变量的解析函数；简言之，它们只能有解析解。

——大卫·希尔伯特（1900）。

到目前为止，我们研究的都是线性椭圆偏微分方程。本章将开始研究非线性 椭圆型偏微分方程。

更准确地说，我们研究变分 非线性偏微分方程，也就是变分法中出现的方程（最小化一个能量泛函）。具体而言，我们的主要目标是介绍并解决希尔伯特第十九问题[1]。

•希尔伯特第十九问题（1900）：考虑任意局部极小值点能量泛函的形式为

$$\mathcal{E}(w) := \int_{\Omega} L(\nabla w)\, dx,$$

其中 L： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 光滑且一致凸，且 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$。这类问题的所有局部极小化子是否都光滑?

[1]希尔伯特的原始表述是“*there exist partial differential equations whose integrals are all of necessity analytic functions of the independent variables, that is, in short, equations susceptible of none but analytic solutions*”，并且指的是他所称的“正则变分问题”的解，其中涉及形如 $L(\nabla w,\ w,\ x)$ 的凸（关于 ∇w）且解析的算子。为简便起见，我们在此处理 $L(\nabla w)$。

注意，给定一个边界条件

$$u = g \quad \text{on} \quad \partial\Omega,$$

可以证明，这个问题存在唯一的极小化子， $u \in H^1(\Omega)$，满足 $u|_{\partial\Omega} = g$。也就是说，存在唯一的 $u \in H^1(\Omega)$，使得 u在所有满足 $w|_{\partial\Omega} = g$的函数 $w \in H^1(\Omega)$ 中，使泛函 $\mathcal{E}(w) := \int_\Omega L(\nabla w)\,dx$ 达到极小值。我们将在本章的前两节对此作更精确的说明。

希尔伯特第十九问题所探讨的是正则性：这样的极小化子 u是否光滑?

注 3.1（关于凸性假设）。 函数的一致凸性保证了极小化子的存在唯一性（见下文定理 3.3）。此外，从正则性的角度来看，如果 L 不是凸函数，且在两个不同的点处达到其最小值，那么即使在维数 $n = 1$ 下，也存在正则性的反例。

如果 $n = 1$和 L 在两个点 $p_1 < p_2$处取得最小值，那么我们可以构造仅满足利普希茨条件、斜率在 p_1 和 p_2 之间来回变化的极小化子（例如，若 $p_1 = -1$ 和 $p_2 = 1$，那么 $u(x) = |x|$ 将是一个极小化子）。

因此，凸性假设是必要的。

3.1. 概述

如上所述的希尔伯特第十九问题，是对狄利克雷积分极小化问题的一种推广，

$$\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx.$$

狄利克雷积分的局部极小化子满足相应的欧拉–拉格朗日方程，在这种情况下，该方程就是拉普拉斯方程

$$\Delta w = 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

如第2章所述，这个偏微分方程的解已知在 Ω 的内部是 C^∞ 。

因此，狄利克雷积分情形 $L(p) = |p|^2$ 极其简单。令人惊讶的是，一般情形要困难得多，其解决历时超过 50 年。

首先，我们更精确地说明这个问题：所谓$\mathcal{E}(w) = \int_\Omega L(\nabla w)\,dx$的局部极小化子 ，是指满足下述条件的函数 $u \in H^1(\Omega)$

$$\mathcal{E}(u) \le \mathcal{E}(u + \phi) \quad \text{for all} \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

泛函的一致凸性等价于

$$0 < \lambda \mathrm{Id} \le D^2 L(p) \le \Lambda \mathrm{Id} \quad \text{for all} \quad p \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

（即 L 的一致凸性）。注意，这与上一章节中的一致椭圆性类似。

那么， $\mathcal{E}(u)$的极小化子满足什么偏微分方程？（也就是说，这个问题的欧拉–拉格朗日方程是什么？）如果 $u \in H^1(\Omega)$是一个局部极小化子，那么

$$\mathcal{E}(u) \leq \mathcal{E}(u + \varepsilon\phi) \quad \text{for all } \phi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \text{and all } \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

因此，

$$\int_\Omega L(\nabla u)\,dx \leq \int_\Omega L(\nabla u + \varepsilon\nabla\phi)\,dx \quad \text{for all } \phi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \text{and all } \varepsilon \in \mathbb{R},$$

因此，作为 ε的函数，它在 $\varepsilon = 0$处取得极小值。对 ε求导，我们得到

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \int_\Omega L(\nabla u + \varepsilon\nabla\phi)\,dx = \int_\Omega DL(\nabla u)\nabla\phi\,dx.$$

欧拉–拉格朗日方程的弱形式于是为

$$\int_\Omega DL(\nabla u)\nabla\phi\,dx = 0 \quad \text{for all } \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{3.2}$$

也就是说， u 在弱意义下满足偏微分方程

$$\boxed{\operatorname{div}(DL(\nabla u)) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega.} \tag{3.3}$$

（这一推导将在下文定理 3.3 中得到严格证明。）

如果 u 是 C^2，则 (3.3) 等价于

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\partial_{ij}L)(\nabla u)\partial_{ij}u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega. \tag{3.4}$$

由 L 的一致凸性可知，这是一个（非线性）一致椭圆偏微分方程。关于 u 的正则性，我们能得出什么结论？

局部极小化子的正则性：第一种方法。我们假设 u 足够光滑，因而满足 (3.4)。通过记作下式，我们可以将 (3.4) 视为一个具有变系数的线性方程

$$a_{ij}(x) := (\partial_{ij}L)(\nabla u(x)),$$

并且注意到，由于 L 具有一致凸性，我们有

$$0 < \lambda\,\mathrm{Id} \leq (a_{ij}(x))_{ij} \leq \Lambda\,\mathrm{Id}.$$

此外，如果 $\nabla u \in C^{0,\alpha}$，那么 $a_{ij} \in C^{0,\alpha}$。特别地，利用 Schauder估计（见定理 2.20），我们有

$$u \in C^{1,\alpha} \Rightarrow a_{ij} \in C^{0,\alpha} \Rightarrow u \in C^{2,\alpha}. \tag{3.5}$$

然后，我们可以逐步提升正则性，得到 C^∞:

$$u \in C^{2,\alpha} \Rightarrow \nabla u \in C^{1,\alpha} \Rightarrow a_{ij} \in C^{1,\alpha} \Rightarrow u \in C^{3,\alpha} \Rightarrow \cdots \Rightarrow u \in C^\infty.$$

事实上，利用连续系数的线性估计，我们实际上可以得到 $u \in C^1 \Rightarrow a_{ij} \in C^0 \Rightarrow u \in C^{1,\alpha}$。我们要指出，尽管前面的推论在形式上成立，但我们并未严谨地论证 Schauder 估计的使用。事实上，我们在非散度形式（定理 2.20）和散度形式（定理 2.28）下得到的 Schauder 估计都是先验的，也就是说，它们已经假设 u 具有正则性。我们将在下文的定理 3.5 中说明如何使用这些估计，来证明我们所需且预期的结果。

有界可测系数方程。 我们已经论证，利用线性方程的扰动结果（Schauder 估计），我们预期可以证明

$$u \in C^1 \quad \Longrightarrow \quad u \in C^\infty.$$

然而，如果我们事先不知道 $u \in C^1$，这种方法就无法证明任何正则性。于是，希尔伯特第十九问题中的主要未解决问题是

$$\text{is it true that } u \in H^1 \Rightarrow u \in C^1 \ ?$$

这个问题悬而未决了许多年，最终由德乔治 [**DeG57**] 和纳什[**Nas57, Nas58**]（彼此独立且几乎同时）解决。

定理3.2 （德乔治–纳什）。 设 u 是

$$\mathcal{E}(w) = \int_\Omega L(\nabla w)\, dx,$$

其中 L 一致凸且光滑。则， $u \in C^{1,\alpha}$ 对某个 $\alpha > 0$成立。

该定理解决了希尔伯特第十九问题。

为了证明 u 的局部极小化子 $\mathcal{E}(w) = \int_\Omega L(\nabla w)\, dx$的正则性，其中 $w \in H^1(\Omega)$，我们首先注意到，它们在弱意义下满足非线性椭圆方程

$$\operatorname{div}\left(DL(\nabla u)\right) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

证明的第一个思路是考察 u的导数 $v = \partial_e u$，并证明它们同样满足一个椭圆型偏微分方程。

对方程 $\operatorname{div}(DL(\nabla u)) = 0$ 关于 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ 求导，得到

$$\operatorname{div}\left(D^2 L(\nabla u)\nabla \partial_e u\right) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

记（与之前一样） $v := \partial_e u$, $a_{ij}(x) := \partial_{ij} L(\nabla u(x))$ 和 $A(x) := (a_{ij}(x))_{ij}$，我们可以将该方程写成

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla v) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

这是一个线性的一致椭圆散度形式方程，但我们对 $A(x)$ 在 x 变量上的正则性一无所知。我们只知道该方程是一致椭圆的。

这称为具有有界可测系数的（一致椭圆）散度形式方程。（回想一下，L 的一致凸性推出 $0 < \lambda \mathrm{Id} \le A(x) \le \Lambda \mathrm{Id}$。）

德乔治和纳什为这类方程建立了一个新的正则性结果，见定理 3.7。

本章旨在为希尔伯特第十九问题的解提供一个完整而详细的证明。我们将采用德乔治的方法。

3.2. 存在性与基本估计

我们首先证明，在具有给定边界数据的 $H^1(\Omega)$ 函数类中，$\mathcal{E}$ 的极小化子存在且具有唯一性。也就是说，我们希望得到一个类似于定理 1.10 的陈述，但其中的泛函涉及 L。我们回顾一下：$u|_{\partial\Omega}$ 表示 u 在 Ω 上的迹；见第 1 章中的 **(S5)**。

定理 3.3（极小化子的存在唯一性）。假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任意有界利普希茨区域，并且

$$\left\{ w \in H^1(\Omega) : w|_{\partial\Omega} = g \right\} \neq \varnothing. \tag{3.6}$$

令 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 光滑且一致凸，见 (3.1)。令

$$\mathcal{E}(w) := \int_\Omega L(\nabla w)\, dx.$$

那么，存在唯一的极小化子 $u \in H^1(\Omega)$，满足 $u|_{\partial\Omega} = g$。此外，u 在弱意义下满足 (3.3)。

为了证明极小化子的存在唯一性定理，我们首先需要证明下面关于该情形下能量下半连续性的结果。我们给出两种不同的证明。

引理 3.4 (泛函的下半连续性)。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域。设 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 光滑且一致凸，见(3.1)；并且

$$\mathcal{E}(w) := \int_\Omega L(\nabla w)\, dx.$$

那么， $\mathcal{E}$ 在 $H^1(\Omega)$上弱下半连续。也就是说，若 $H^1(\Omega) \ni w_k \rightharpoonup w \in H^1(\Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$中弱收敛，则

$$\mathcal{E}(w) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(w_k).$$

第一个证明。 定义集合

$$\mathcal{A}(t) := \left\{ v \in H^1(\Omega) : \mathcal{E}(v) \leq t \right\}.$$

注意，由于 $\mathcal{E}$的凸性， $\mathcal{A}(t)$也是凸的。下面证明它是闭的，也就是说，若 $\mathcal{A}(t) \ni w_k \to w$ 在 $H^1(\Omega)$ 中强收敛，则 $w \in \mathcal{A}(t)$。只需注意到，取一个子序列后， $\nabla w_k \to \nabla w$ 几乎处处成立，因此由Fatou引理，

$$\mathcal{E}(w) = \int_\Omega L(\nabla w) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega L(\nabla w_k) \leq t,$$

也就是说， $w \in \mathcal{A}(t)$。因此， $\mathcal{A}(t)$是闭的（相对于 $H^1(\Omega)$收敛），且它是凸的。根据泛函分析中的一个标准结果（闭凸集是弱闭的；例如参见 [**Bre11**，定理 3.7]） ， $\mathcal{A}(t)$在弱收敛下也闭；也就是说，若 $\mathcal{A}(t) \ni w_k \rightharpoonup w$ 在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛，则 $w \in \mathcal{A}(t)$。

现在考虑在 $H^1(\Omega)$ 中弱意义下收敛的序列 $w_k \rightharpoonup w$，并记 $t^* := \liminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(w_k)$。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在某个子序列 $k_{j,\varepsilon}$使得 $w_{k_{j,\varepsilon}} \rightharpoonup w$在 $H^1(\Omega)$ 中弱意义下收敛，且 $\mathcal{E}(w_{k_{j,\varepsilon}}) \leq t^* + \varepsilon$。也就是说， $w_{k_{j,\varepsilon}} \in \mathcal{A}(t^* + \varepsilon)$，因此，由于对于所有 t， $\mathcal{A}(t)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中是弱闭的，我们有 $w \in \mathcal{A}(t^* + \varepsilon)$，且 $\mathcal{E}(w) \leq t^* + \varepsilon$。由于对任意 $\varepsilon > 0$ 都可以这样做，我们得到 $\mathcal{E}(w) \leq t^*$，因此我们证明了 $\mathcal{E}$ 在 $H^1(\Omega)$ 中的弱下半连续性。□

第二个证明。 我们用不同于 [**Mag11**] 的方法来证明该泛函的下半连续性。实际上，我们将证明：如果$u_k, u \in W^{1,1}(\Omega)$，且 $u_k \to u$ 属于 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，那么

$$\int_\Omega L(\nabla u) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega L(\nabla u_k).$$

特别地，由于 Ω 有界，我们可以将这一结果应用于在 $H^1(\Omega)$ 中弱意义下收敛的 $H^1(\Omega)$ 中的序列（根据第 1 章中的(**S2**) ）。设 $\eta \in C_c^\infty(B_1)$ 是一个光滑函数，满足 $\eta \geq 0$ 和 $\int_{B_1} \eta = 1$，并令 $\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\eta(x/\varepsilon)$，这样我们就可以考虑磨光

$$(u_k)_\varepsilon(x) := (u_k * \eta_\varepsilon)(x) = \int_{B_\varepsilon} u(x-y)\eta_\varepsilon(y)\,dy, \qquad u_\varepsilon(x) := (u * \eta_\varepsilon)(x).$$

设 $\Omega' \subset \Omega$，使得对于所有 $x \in \Omega'$， $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$。特别地，由于$u_k \to u$ 属于 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，我们有 $\nabla(u_k)_\varepsilon(x) \to \nabla u_\varepsilon(x)$，对每个 $x \in \Omega'$均成立。由

L 的光滑性，我们还得到 $L(\nabla(u_k)_\varepsilon(x)) \to L(\nabla u_\varepsilon(x))$，并由 Fatou引理（回忆我们可以假设 $L \geq 0$）

$$\int_{\Omega'} L(\nabla u_\varepsilon) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega'} L(\nabla (u_k)_\varepsilon). \tag{3.7}$$

注意到现在 $\nabla(u_k)_\varepsilon = (\nabla u_k)_\varepsilon$，并利用 Jensen不等式（因为 L是凸的，且 $\int \eta_\varepsilon = 1$），我们得到

$$L(\nabla(u_k)_\varepsilon) = L\left(\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\nabla u_k(y)\,dy\right) \leq \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)L(\nabla u_k(y))\,dy$$

由此可得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} L(\nabla(u_k)_\varepsilon) &\leq \int_{\Omega'} \left\{\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)L(\nabla u_k(y))\,dy\right\} dx \\ &\leq \int_{I_\varepsilon(\Omega')} L(\nabla u_k(y)) \int_{B_\varepsilon(y)\cap\Omega'} \eta_\varepsilon(x-y)\,dx\,dy \leq \int_\Omega L(\nabla u_k),\end{aligned}$$

其中 $I_\varepsilon(\Omega') \subset \Omega$ 表示 Ω' 的一个 ε-邻域。结合 (3.7)，可得

$$\int_{\Omega'} L(\nabla u_\varepsilon) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega L(\nabla u_k).$$

现在，由于 $u \in W^{1,1}(\Omega)$，我们有 $\nabla u_\varepsilon \to \nabla u$ 几乎处处于 Ω' 中成立，因此再次由 Fatou引理，令 $\varepsilon \downarrow 0$，可推出

$$\int_{\Omega'} L(\nabla u) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega L(\nabla u_k).$$

取一列递增的集合 Ω'，其并集为 Ω，即可得到所需结果。□

现在我们可以证明定理 3.3。

定理 3.3 的证明。 我们将证明分为三个不同部分。

步骤 *1*。 如果 u 是一个局部极小化子，那么它在弱意义下满足 (3.3)。这由以下事实得出:

$$\int_\Omega L(\nabla u)\,dx \leq \int_\Omega L(\nabla u + \varepsilon\nabla\phi)\,dx \quad \text{for all } \varepsilon, \quad \text{for all } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

事实上，注意到这些积分是有界的（L 一致凸，即在无穷远处至多呈二次增长，且 $\nabla u \in L^2$）。由于 L 光滑，我们可以进行泰勒展开

$$L(\nabla u + \varepsilon\nabla\phi) \leq L(\nabla u) + \varepsilon DL(\nabla u)\nabla\phi + \frac{\varepsilon^2}{2}|\nabla\phi|^2 \sup_{p\in\mathbb{R}^n} \left|D^2L(p)\right|.$$

回顾 (3.1)， $\left|D^2L\right|$ 由 Λ有界，将其代回积分中可得

$$-\Lambda\frac{\varepsilon}{2}|\nabla\phi|^2 \le \int_\Omega DL(\nabla u)\nabla\phi\,dx \quad \text{for all } \varepsilon>0, \quad \text{for all } \phi\in C_c^\infty(\Omega).$$

令 ε 趋于零，我们得到

$$\int_\Omega DL(\nabla u)\nabla\phi\,dx \ge 0 \quad \text{for all } \phi\in C_c^\infty(\Omega).$$

另一方面，用 $-\phi$ 代替 ϕ，我们便得到等式 (3.2)，正如我们希望看到的那样。

步骤 2. 现在我们来证明解的存在性。

由于 L 是一致凸的（见 (3.1)），它有唯一极小值。也就是说，存在 $p_L\in\mathbb{R}^n$，使得对所有 $p\in\mathbb{R}^n$， $L(p)\ge L(p_L)$。特别地，由于 L 是光滑的，$\nabla L(p_L)=0$，因此由一致凸性 (3.1) 可得

$$0<\lambda|p|^2\le L(p-p_L)-L(p_L)\le\Lambda|p|^2, \quad \text{for all} \quad p\in\mathbb{R}^n.$$

~不失一般性，必要时取 $L(p)=L(p-p_L)-L(p_L)$，我们可以假设 $L(0)=0$ 且 $\nabla L(0)=0$，于是有

$$0<\lambda|p|^2\le L(p)\le\Lambda|p|^2, \quad \text{for all} \quad p\in\mathbb{R}^n. \tag{3.8}$$

（注意，我们可以假设，因为如果 u 是 L的极小化子，那么~$u+\langle p_L,x\rangle$ 是 L的极小化子，因为区域有界，因此 $L(p_L)$ 的积分有限。）

Let

$$\mathcal{E}_\circ=\inf\left\{\int_\Omega L(\nabla w)\,dx\,:\,w\in H^1(\Omega),\ w|_{\partial\Omega}=g\right\},$$

也就是说，在所有容许函数 w 中， $\mathcal{E}(w)$ 的下确界。注意，根据假设 (3.6)，这样的下确界存在。事实上，如果 $w\in H^1(\Omega)$，由 (3.8) 可得

$$\mathcal{E}(w)=\int_\Omega L(\nabla w)\le\Lambda\int_\Omega|\nabla w|^2=\Lambda\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}<\infty$$

也就是说，对于 $H^1(\Omega)$ 中的函数，能量泛函有界。

取一列函数的极小化序列。也就是说，取 $\{u_k\}$，使得 $u_k\in H^1(\Omega)$、$u_k|_{\partial\Omega}=g$，且 $\mathcal{E}(u_k)\to\mathcal{E}_\circ$ 当 $k\to\infty$。我们首先证明 $\mathcal{E}(u_k)$ 有界，并且 u_k 是 $H^1(\Omega)$ 中的一个有界序列。由 (3.8)，

$$\lambda\|\nabla u_k\|^2_{L^2(\Omega)}\le\lambda\int_\Omega|\nabla u_k|^2\le\int_\Omega L(\nabla u_k)\le\mathcal{E}(u_k)<\infty,$$

也就是说，由于 $\mathcal{E}(u_k)$ 一致有界（它是一个由有限元素组成的收敛序列），我们得出 $\|\nabla u_k\|^2_{L^2(\Omega)}$ 一致有界。因此，根据庞加莱不等式（见定理 1.6），序列 u_k 在 $H^1(\Omega)$ 中一致有界。

特别地，存在一个子序列 u_{k_j}，在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛，并在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛于某个 $u \in H^1(\Omega)$，$u_k \rightharpoonup u$ 在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛。由弱下半连续性（引理 3.4），我们得到

$$\mathcal{E}(u) \le \liminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(u_k) = \mathcal{E}_\circ,$$

从而 $\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}_\circ$（由极小性），因此 u 是一个极小化子。

步骤 *3.* 我们通过证明此类极小化子的唯一性来完成证明。

这源于一致凸性。事实上，由于 L 是一致凸的，如果 $p \neq q$，那么

$$\frac{L(p)+L(q)}{2} > L\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

设 $u,\ v \in H^1(\Omega)$ 是具有相同边界数据的两个不同极小化子（$\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}(v) = \mathcal{E}_\circ$）。特别地，在 Ω 中有 $\nabla u \neq \nabla v$，因此 $U := \{x \in \Omega : \nabla u \neq \nabla v\} \subset \Omega$ 具有正测度。于是，

$$\frac{L(\nabla u)+L(\nabla v)}{2} > L\left(\frac{\nabla u+\nabla v}{2}\right) \quad \text{in} \quad U,$$

因此，由于 $|U| > 0$,

$$\frac{1}{2}\int_U \big\{L(\nabla u)+L(\nabla v)\big\} > \int_U L\left(\frac{\nabla u+\nabla v}{2}\right).$$

由于 $\Omega \setminus U$ 中的积分相等，我们得到

$$\mathcal{E}_\circ = \frac{1}{2}\int_\Omega \big\{L(\nabla u)+L(\nabla v)\big\} > \int_\Omega L\left(\frac{\nabla u+\nabla v}{2}\right) \ge \mathcal{E}_\circ,$$

其中最后一个不等式源于 $\mathcal{E}_\circ$ 的极小性。我们得到了矛盾，因此极小化子是唯一的。□

接下来，我们将对上一节中的形式论证给出一个完整且严谨的证明；在那里，我们解释了 C^1 解是 C^∞。

定理 3.5。设 $u \in H^1(\Omega)$ 是

$$\mathcal{E}(w) = \int_\Omega L(\nabla w)\,dx,$$

其中 L 一致凸且光滑。假设 $u \in C^1$。那么 $u \in C^\infty$。

证明。 我们知道，如果 $u \in C^1$ 且 u 是 $\mathcal{E}(w)$ 的极小化子，那么

$$\int_\Omega DL(\nabla u(x))\nabla\phi(x)\,dx = 0 \quad \text{for all } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

设 $h \in \mathbb{R}^n$，并假设 $|h|$ 很小。特别地，我们有

$$\int_\Omega \Big(DL(\nabla u(x+h)) - DL(\nabla u(x))\Big)\nabla\phi(x)\,dx = 0 \quad \text{for all } \phi \in C_c^\infty(\Omega_h),$$

其中 $\Omega_h := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x,\ \partial\Omega) > |h|\}$。注意，根据线积分基本定理，我们可以写成

$$DL(\nabla u(x+h)) - DL(\nabla u(x)) = \\ = \int_0^1 D^2L\Big(t\nabla u(x+h) + (1-t)\nabla u(x)\Big)\Big(\nabla u(x+h) - \nabla u(x)\Big)\,dt.$$

如果我们定义

$$\tilde{A}(x) := \int_0^1 D^2L\Big(t\nabla u(x+h) + (1-t)\nabla u(x)\Big)\,dt,$$

那么 $\tilde{A}(x)$ 是一致椭圆的（因为 L 是一致凸的），并且是连续的（因为 L 是光滑的，且 ∇u 是连续的）。然后，根据前面的论证，

$$\int_\Omega \nabla\left(\frac{u(x+h)-u(x)}{|h|}\right)\cdot\tilde{A}(x)\nabla\phi(x)\,dx = 0 \quad \text{for all } \phi \in C_c^\infty(\Omega_h),$$

也就是说，$\frac{u(\cdot+h)-u}{|h|}$ 是下列方程的弱解

$$\mathrm{div}\left(\tilde{A}(x)\nabla\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{|h|}\right]\right) = 0 \quad \text{for } x \in \Omega_h.$$

此外，注意到 $\frac{u(\cdot+h)-u}{|h|}$ 对所有 $h \neq 0$ 都是 C^1，因为 u 是 C^1。因此，根据散度型算子和连续系数的 Schauder 型估计（命题 2.32），

$$\left\|\frac{u(\cdot+h)-u}{|h|}\right\|_{C^\beta(B_{\rho/2}(x_\circ))} \le C(\rho)\left\|\frac{u(\cdot+h)-u}{|h|}\right\|_{L^\infty(B_\rho(x_\circ))} \le C,$$

对所有 $B_\rho(x_\circ) \subset \Omega_h$ 和 $\beta \in (0,\ 1)$ 都成立。在最后一个不等式中，我们用到了 ∇u 是连续的（因此是有界的）。注意，常数 $C(\rho)$ 与 h 无关（但可能依赖于 β）。特别地，由第 1 章中的 **(H7)**，即令 $\alpha = 1$ 时的 **(1.7)**，可得对所有 $h \in \mathbb{R}^n$，$u \in C^{1,\ \beta}(\Omega_h)$。令 $|h| \downarrow 0$，便得到 $u \in C^{1,\ \beta}$ 在 Ω 内。

我们希望重复前面的推理，此时注意到 $A(x)$ 是 $C^{0,\ \beta}$（因为 $\nabla u \in C^{0,\ \beta}$ 且 L 是光滑的）。也就是说，$\frac{u(\cdot+h)-u}{|h|} \in C^{1,\ \beta}(\Omega)$，并且

满足

$$\operatorname{div}\left(\tilde{A}(x)\nabla\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{|h|}\right]\right)=0 \quad \text{for } x\in\Omega_h,$$

在弱意义下，且具有 $\tilde{A}\in C^{\beta}$ 和一致椭圆性。根据定理 2.28,

$$\left\|\frac{u(\cdot+h)-u}{|h|}\right\|_{C^{1,\beta}(B_{\rho/2})}\le C(\rho)\left\|\frac{u(\cdot+h)-u}{|h|}\right\|_{L^{\infty}(B_{\rho})}\le C,$$

对所有 $B_{\rho}\subset\Omega_h$，再次得益于 **(H7)**、(1.7)，我们得到 $u\in C^{2,\beta}(\Omega)$。现在，我们可以利用散度形式的高阶内部 Schauder 估计（推论 2.29）进行迭代，从而得到对于所有 $k\in\mathbb{N}$， $u\in C^{k}(\Omega)$，即 $u\in C^{\infty}$ 在 Ω 内部。□

注 3.6。请注意，在形式证明 (3.5) 中，我们使用的是非散度形式的 Schauder 估计，因为当时我们已经假设解 u 是 C^2。而在定理 3.5 的证明中，我们需要对方程进行微分（采用增量商），随后得到一个散度形式的方程，其系数具有适当的正则性。因此，在实际证明中，我们使用的是散度形式方程的 Schauder 估计。

3.3. 德乔治的证明

德乔治和纳什关于有界可测系数方程的解的正则性的结果如下（参见第 3.1 节的讨论）。

定理 3.7 (德乔治–纳什)。任意 $v\in H^1(\Omega)$ 的弱解满足

$$\operatorname{div}\left(A(x)\nabla v\right)=0 \quad in \quad \Omega, \tag{3.9}$$

其中 $0<\lambda\mathrm{Id}\le A(x)\le\Lambda\mathrm{Id}$。那么，存在某个 $\alpha>0$，使得$v\in C^{0,\alpha}(\tilde{\Omega})$ 对任意 $\tilde{\Omega}\subset\subset\Omega$都成立，其中

$$\|v\|_{C^{0,\alpha}(\tilde{\Omega})}\le C\|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

˜常数 C 仅依赖于 n、 λ、 Λ、Ω 和 Ω。常数 $\alpha>0$仅依赖于 n、 λ 和 Λ。

该定理推出定理3.2，并结合前文讨论，解决了希尔伯特第十九问题。事实上，若 $u\in H^1(\Omega)$ 是 $\mathcal{E}(w)=\int_{\Omega}L(\nabla w)\,dx$ 的任意局部极小化子，那么 u 的任意导数 $v=\partial_e u$ 都满足方程 (3.9)。

由定理 3.7 可知

$$u\in H^1(\Omega)\Rightarrow v\in L^2(\Omega)\xRightarrow[\text{DeGiorgi}\atop-\text{Nash}]{}v\in C^{0,\alpha}(\tilde{\Omega})\Rightarrow u\in C^{1,\alpha}\xRightarrow[\text{Schauder}]{}u\in C^{\infty}.$$

这将在第3.4节中详细证明。

定理 3.7 的思想与此前所有关于椭圆正则性的结果都大不相同。

此前的大多数结果都可以看作是对拉普拉斯方程的扰动（它们都是扰动性结果）。在 Schauder 型估计中，我们总是利用这样一点：当放大某一点处的解时，算子会越来越接近拉普拉斯算子。

在德·乔治定理中，情况不再如此。一致椭圆性在缩放下得以保持，但方程并没有变得更好，也没有更接近拉普拉斯方程。

证明的一般思路。我们将遵循德乔治的方法。

从现在起，我们用 $\mathcal{L}$ 表示任意一个如下形式的算子

$$\mathcal{L}v := -\operatorname{div}(A(x)\nabla v), \qquad \begin{array}{l}\text{where } A(x) \text{ is uniformly elliptic}\\ \text{with ellipticity constants } 0 < \lambda \le \Lambda.\end{array} \tag{3.10}$$

根据标准的覆盖论证（参见注 2.15），我们只需证明 $\Omega = B_1$ 和 $\Omega = B_{1/2}$ 的估计。

在整个证明过程中，我们将用到以下事实：若 v 满足 $\mathcal{L}v = 0$，则 $\tilde{v}(x) := v(x_\circ + rx)$ 满足同类方程 $\tilde{\mathcal{L}}\tilde{v} = 0$，其中某个算子 $\tilde{\mathcal{L}}$ 与 $\mathcal{L}$ 具有相同的椭圆性常数，且该算子由 $\tilde{\mathcal{L}}\tilde{v} = \operatorname{div}\big(A(x_\circ + rx)\nabla\tilde{v}\big)$ 给出。

德乔治的证明分为两个步骤：

第一步：证明 $\|v\|_{L^\infty} \le C\|v\|_{L^2}$ 第二步：证明 $\|v\|_{C^{0,\alpha}} \le C\|v\|_{L^\infty}$。

第一步中，我们研究球族（见图3.1）

$$\tilde{B}_k := \left\{ x : |x| \le \frac{1}{2} + 2^{-k-1} \right\}.$$

注意到 $B_0 = B_1$，且 B_k 在 $k \to \infty$ 时收敛到 $B_{1/2}$。

我们假设 $\|v\|_{L^2(B_1)} \le \delta \ll 1$，然后考虑截断函数

$$v_k := (v - C_k)_+ \quad \text{with} \quad C_k := 1 - 2^{-k},$$

以及这些数

$$V_k \approx \int_{\tilde{B}_k} |v_k|^2 \, dx.$$

那么，关键点在于推导出如下形式的估计

$$V_k \le C^k V_{k-1}^{\beta} \quad \text{for some} \quad \beta > 1, \tag{3.11}$$

对于某个常数 C，它只取决于 n、λ 和 Λ。上述不等式意味着，当 V_0 足够小时，$V_k \to 0$ as $k \to \infty$。特别地，$v_\infty = (v-1)_+$ 在 $B_{1/2}$ 中等于零，因此 $v \le 1$ in $B_{1/2}$。

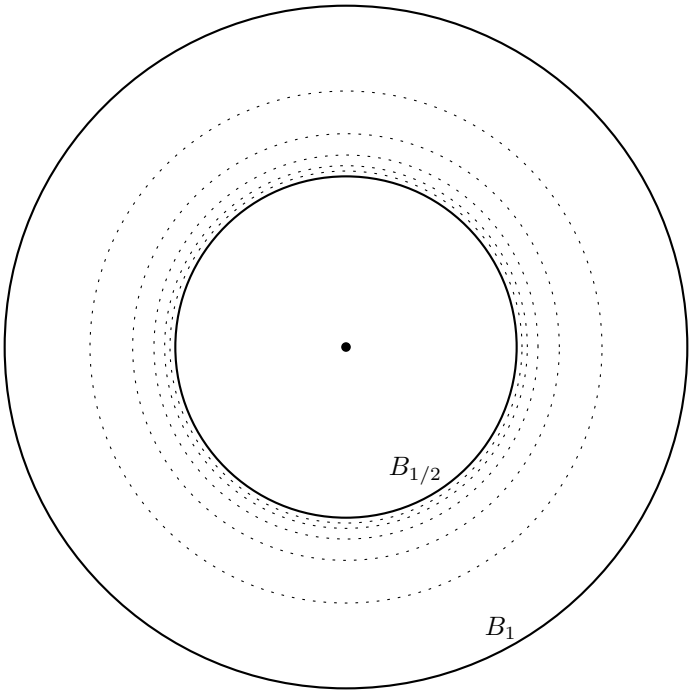


图3.1。 球族 $\tilde{B}_k$ 的表示。

注意，我们在 B_1 中的方程 $\mathcal{L}v = 0$ 是线性的，而界（3.11）是非线性的。“诀窍”在于结合能量不等式，使用索博列夫不等式（它可以用 L^2 范数控制 v_k 的 L^p 范数），而能量不等式给出一个“反向”的 Poincar´e 不等式，即用 $\|v_k\|_{L^2}$ 控制 $\|\nabla v_k\|_{L^2}$。

有了第一步 $v \in L^2 \Rightarrow v \in L^\infty$ 之后，第二步就是证明振荡衰减引理

$$\mathcal{L}v = 0 \quad \text{in} \quad B_1 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname*{osc}_{B_{1/2}} v \leq (1-\theta) \operatorname*{osc}_{B_1} v.$$

这意味着 $C^{0,\alpha}$ v 的正则性（正如我们在推论 2.7 中所见）。

在接下来的证明中，我们遵循 [**CV10, Vas16**]。

德乔治的第一步：从 L^2 到 L^∞。 两个主要要素是索博列夫不等式

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \qquad p = \frac{2n}{n-2},$$

（见定理 1.4）以及以下能量不等式（Caccioppoli 不等式）：

引理 3.8 (能量不等式**)。** 设 $v \in H^1(B_1)$ 满足 $v \geq 0$，且$\mathcal{L}v \leq 0$ 在 B_1 中，其中 $\mathcal{L}$ 具有形式 (3.10)。那么，对于任意 $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$，有

$$\int_{B_1} |\nabla(\varphi v)|^2 \, dx \leq C\|\nabla\varphi\|^2_{L^\infty(B_1)} \int_{B_1 \cap \operatorname{supp}\varphi} v^2 \, dx,$$

其中，C 仅取决于 n、λ和 Λ。

证明。 注意到，$-\operatorname{div}(A(x)\nabla v) \leq 0$ 在 B_1 中的弱形式为

$$\int_{B_1} \nabla\eta \cdot A(x)\nabla v \, dx \leq 0 \quad \text{for all} \quad \eta \in H_0^1(B_1), \eta \geq 0.$$

取 $\eta = \varphi^2 v$，得到

$$\int_{B_1} \nabla(\varphi^2 v) \cdot A(x)\nabla v \, dx \leq 0.$$

现在，我们想要“将第一个梯度中的一个 φ 移到第二个梯度中”。事实上，利用

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi^2 v) &= \varphi\nabla(\varphi v) + (\varphi v)\nabla\varphi, \\ \nabla(\varphi v) &= \varphi\nabla v + v\nabla\varphi, \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{B_1} \nabla(\varphi^2 v) \cdot A(x)\nabla v \, dx \\ &= \int_{B_1} \varphi\nabla(\varphi v) \cdot A(x)\nabla v \, dx + \int_{B_1} \varphi v \, \nabla\varphi \cdot A(x)\nabla v \, dx \\ &= \int_{B_1} \nabla(\varphi v) \cdot A(x)\nabla(\varphi v) \, dx - \int_{B_1} v\nabla(\varphi v) \cdot A(x)\nabla\varphi \, dx \\ &\qquad + \int_{B_1} \varphi v \, \nabla\varphi \cdot A(x)\nabla v \, dx \\ &= \int_{B_1} \nabla(\varphi v) \cdot A(x)\nabla(\varphi v) \, dx - \int_{B_1} v\nabla(\varphi v) \cdot (A(x) - A^T(x))\nabla\varphi \, dx \\ &\qquad - \int_{B_1} v^2 \nabla\varphi \cdot A(x)\nabla\varphi \, dx. \end{aligned}$$

我们先估计涉及 $(A - A^T)$ 的项。由 H¨older 不等式，利用 A 的一致椭圆性以及 $(A - A^T)^2 \leq 4\Lambda^2 \mathrm{Id}$，得到

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1} v\nabla(\varphi v)\cdot(A(x)-A^T(x))\nabla\varphi\,dx \\
&\qquad\leq \left(\int_{B_1}|v\,(A(x)-A^T(x))\nabla\varphi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_1}|\nabla(\varphi v)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\leq 2\frac{\Lambda}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{B_1}|v\nabla\varphi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_1}\nabla(\varphi v)A(x)\nabla(\varphi v)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\leq \frac{1}{2}\int_{B_1}\nabla(\varphi v)A(x)\nabla(\varphi v)\,dx + 2\frac{\Lambda^2}{\lambda}\int_{B_1}|v\nabla\varphi|^2\,dx,
\end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们用到了 $2ab \leq a^2 + b^2$。结合前面的不等式，可得

$$2\frac{\Lambda^2}{\lambda}\int_{B_1}|v\nabla\varphi|^2\,dx \geq \frac{1}{2}\int_{B_1}\nabla(\varphi v)\cdot A(x)\nabla(\varphi v)\,dx - \int_{B_1}v^2\nabla\varphi\cdot A(x)\nabla\varphi\,dx.$$

因此，我们推得

$$\begin{aligned}
\lambda\int_{B_1}|\nabla(\varphi v)|^2\,dx &\leq \int_{B_1}\nabla(\varphi v)\cdot A(x)\nabla(\varphi v)\,dx \\
&\leq 2\int_{B_1}v^2\,\nabla\varphi\cdot A(x)\nabla\varphi\,dx + 4\frac{\Lambda^2}{\lambda}\int_{B_1}|v\nabla\varphi|^2\,dx \\
&\leq \left(2\Lambda + 4\frac{\Lambda^2}{\lambda}\right)\|\nabla\varphi\|^2_{L^\infty(B_1)}\int_{B_1\cap\operatorname{supp}\varphi}v^2\,dx,
\end{aligned}$$

引理得证。 □

我们将对函数应用能量不等式（来自前一个引理）

$$v_+ := \max\{v, 0\}.$$

在此之前，我们先证明：若 $\mathcal{L}v \leq 0$ （即， v 是一个次解），则 $\mathcal{L}v_+ \leq 0$ （即， v_+ 也是一个次解）。（更一般地，两个次解的最大值总是一个次解。）

引理 3.9。 设 $\mathcal{L}$ 具有(3.10)的形式，令 $v \in H^1(B_1)$ 满足$\mathcal{L}v \leq 0$ 属于 B_1。那么， $\mathcal{L}v_+ \leq 0$。

证明。 我们通过逼近来进行。设 $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ 是一个光滑、非递减的凸函数，且其一阶导数全局有界。我们先证明 $\mathcal{L}(F(v)) \leq 0$ 属于 B_1。

注意，若 $v \in W^{1,2}(B_1)$，那么 $F(v) \in W^{1,2}(B_1)$ 也成立。

We know that $\mathcal{L}(v) \le 0$, i.e.,

$$\int_{B_1} \nabla\eta \cdot A\nabla v \, dx \le 0 \quad \text{for all} \quad \eta \in H_0^1(B_1), \eta \ge 0.$$

现在，对于任意满足 $\eta \ge 0$, $\mathcal{L}(F(v))$ 的固定 $\eta \in H_0^1(\Omega)$，我们来计算。注意，弱形式仍然有意义。

$$\begin{aligned}\int_{B_1} \nabla\eta \cdot A\nabla F(v) \, dx &= \int_{B_1} F'(v)\nabla\eta \cdot A\nabla v \, dx \\ &= \int_{B_1} \nabla(F'(v)\eta) \cdot A\nabla v \, dx - \int_{B_1} \eta F''(v)\nabla v \cdot A\nabla v \, dx.\end{aligned}$$

第一项非正，因为 $F'(v)\eta \in H_0^1(B_1)$，且 $F'(v) \ge 0$ (F是非递减的)，因此 $F'(v)\eta$ 是容许测试函数。第二项也非正，因为 $\eta F''(v) \ge 0$，且根据椭圆性有 $\nabla v \cdot A\nabla v \ge 0$ （积分是良定义的，因为通过逼近可以假设 $\eta F''(v)$ 有界，且 $\int_{B_1} \nabla v \cdot A\nabla v \le \Lambda \|\nabla v\|^2_{L^2(B_1)}$）。因此，

$$\int_{B_1} \nabla\eta \cdot A\nabla F(v) \, dx \le 0,$$

证明至此完成。最后，我们取正部函数 F_ε 的光滑逼近，使其在紧集上一致收敛到 $F(x) = \max\{x, 0\}$。注意，可以用这样的方式进行逼近，使得 $\|F_\varepsilon(v)\|_{W^{1,2}(B_1)} \le C$，其中 C 与 $\varepsilon > 0$ 无关，这就得到了所需结果。□

我们要证明如下结论。

命题 3.10 （从 L^2 到 L^∞）。设 $\mathcal{L}$ 具有（3.10）的形式，且$v \in H^1$（B_1）是方程的解

$$\mathcal{L}v \le 0 \quad in \quad B_1.$$

Then

$$\|v_+\|_{L^\infty(B_{1/2})} \le C\|v_+\|_{L^2(B_1)},$$

其中常数 C 仅依赖于 n、λ 和 Λ。

事实上，我们将证明以下结论（这实际上与之等价）：

命题 3.11 (来自 L^2 至 L^∞)。设 $\mathcal{L}$ 具有(3.10)的形式。存在一个常数 $\delta > 0$，仅依赖于 n、λ和 Λ，使得若 $v \in H^1$（B_1）是解

$$\mathcal{L}v \le 0 \quad in \quad B_1 \quad and \quad \int_{B_1} v_+^2 \le \delta,$$

then

$$v \le 1 \quad in \quad B_{1/2}.$$

证明。 按照证明的一般思路，对 $k \geq 0$定义：

$$\tilde{B}_k := \left\{ |x| \leq \frac{1}{2} + 2^{-k-1} \right\},$$

$$v_k := (v - C_k)_+ \quad \text{with} \quad C_k = 1 - 2^{-k},$$

并令 φ_k 为一族满足以下条件的递减截断函数 $0 \leq \varphi_k \leq 1$ $\varphi_k \in C_c^\infty(B_1)$ $\varphi_k = \begin{cases} 1 & \text{在 } 0 \\ & \text{中，在 } \tilde{B}_{k-1}^c \text{，且} |\nabla \varphi_k| \leq C 2^k \text{ 在} \end{cases}$

$\tilde{B}_{k-1} \setminus \tilde{B}_k$ 中，

其中 C 仅依赖于 n。

Let

$$V_k := \int_{B_1} \varphi_k^2 v_k^2 \, dx.$$

现在，索博列夫不等式和能量不等式（引理 3.8）给出

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_1} |\varphi_{k+1} v_{k+1}|^p \, dx \right)^{\frac{2}{p}} &\leq C \left(\int_{B_1} |\nabla (\varphi_{k+1} v_{k+1})|^2 \, dx \right) \\ &\leq C 2^{2k} \int_{\tilde{B}_k} |v_{k+1}|^2 \, dx \\ &\leq C 2^{2k} \int_{B_1} (\varphi_k v_k)^2 \, dx = C 2^{2k} V_k, \end{aligned}$$

对于 $p = \frac{2n}{n-2}$，若 $n \geq 3$。若 $n = 1$ 或 $n = 2$，我们可以取 $p = 4$。

另一方面，由于 H¨older 不等式，

$$V_{k+1} = \int_{B_1} \varphi_{k+1}^2 v_{k+1}^2 \, dx \leq \left(\int_{B_1} (\varphi_{k+1} v_{k+1})^p \, dx \right)^{\frac{2}{p}} \left| \{ \varphi_{k+1} v_{k+1} > 0 \} \right|^\gamma,$$

其中 $\gamma := \frac{2}{n}$（如果 $n = 1$ 或 $n = 2$，则 $\gamma = \frac{1}{2}$）。这里，我们利用了 $\int_A f \leq (\int_A |f|^{p/2})^{2/p} |A|^\gamma$。

现在，由切比雪夫不等式以及 v_k 和 φ_k的定义，

$$\begin{aligned} \left| \{ \varphi_{k+1} v_{k+1} > 0 \} \right| &\leq \left| \{ \varphi_k v_k > 2^{-k-1} \} \right| \\ &= \left| \{ \varphi_k^2 v_k^2 > 2^{-2k-2} \} \right| \\ &\leq 2^{2(k+1)} \int_{B_1} \varphi_k^2 v_k^2 \, dx = 2^{2(k+1)} V_k. \end{aligned}$$

除了切比雪夫不等式外，我们还在这里用到了：若 $v_{k+1} > 0$且 $\varphi_{k+1} > 0$，则 $v_k > 2^{-k-1}$ 且 $\varphi_k = 1$。因此，结合前面的

不等式，我们得到

$$V_{k+1} \le \left(\int_{B_1} (\varphi_{k+1} v_{k+1})^p \, dx \right)^{\frac{2}{p}} \left| \{ \varphi_{k+1} v_{k+1} > 0 \} \right|^{\gamma}$$
$$\le C 2^{2k} V_k \left(2^{2(k+1)} V_k \right)^{\gamma} \le C^{k+1} V_k^{1+\gamma},$$

其中，我们回顾：若 $n \ge 3$，则 $\gamma = \frac{2}{n}$；否则为 $\gamma = \frac{1}{2}$；并且 C 仅取决于 n、λ 和 Λ。

现在，我们断言，若 $\delta > 0$ 足够小，则

$$\begin{cases} 0 \le V_{k+1} \le C^{k+1} V_k^{1+\gamma} \\ 0 \le V_0 \le \delta \end{cases} \implies V_k \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

事实上，要证明这一点，只需用归纳法验证：若$V_0 \le C^{-1/\gamma - 1/\gamma^2}$，则

$$V_k^{\gamma} \le \frac{C^{-k-1}}{(2C)^{\frac{1}{\gamma}}},$$

这只需简单计算即可得出。或者，也可以用归纳法验证 $V_k \le C^{(1+\gamma)^k \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{(1+\gamma)^i} \right)} V_0^{(1+\gamma)^k}$。

因此，我们已经证明

$$V_k = \int_{B_1} (\varphi_k v_k)^2 \, dx \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

取极限后，我们得到

$$\int_{B_{1/2}} (v-1)_+^2 \, dx = 0,$$

因此，$v \le 1$ 属于 $B_{1/2}$，如所需。 □

命题 3.10 的证明。要从命题 3.11 推出命题 3.10，只需使用 $\tilde{v} := \sqrt{\delta}\, v / \|v_+\|_{L^2(B_1)}$（它满足同一个方程）。□

这证明了该估计的第一部分

$$\mathcal{L} v \le 0 \quad \text{in} \quad B_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|v_+\|_{L^\infty(B_{1/2})} \le C \|v_+\|_{L^2(B_1)}. \tag{3.12}$$

注意，作为直接推论，我们有 L^2 到 L^∞ 估计。事实上，如果 $\mathcal{L} v = 0$，那么 $\mathcal{L} v_+ \le 0$（见引理 3.9），而且 $\mathcal{L} v_- \le 0$，其中 $v_- := \max\{0, -v\}$。因此，$\|v_-\|_{L^\infty(B_{1/2})} \le C \|v_-\|_{L^2(B_1)}$，并且由于$\|v\|_{L^2(B_1)} = \|v_+\|_{L^2(B_1)} + \|v_-\|_{L^2(B_1)}$，结合对 v_+ 和 v_-的估计，我们得到

$$\mathcal{L} v = 0 \quad \text{in} \quad B_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|v\|_{L^\infty(B_{1/2})} \le C \|v\|_{L^2(B_1)}, \tag{3.13}$$

正如我们所要看到的。

注 3.12 （莫泽证明）。 这里给出的 (3.12) 的证明是德乔治的原始证明。证明中的第一个步骤是在我们偏微分方程的弱形式中使用$\varphi^2 v_+$ 作为检验函数，从而得到引理 3.8 中的能量不等式，

$$\int_{B_1} |\nabla(\varphi v)^2| \, dx \leq C \int_{B_1} v^2 |\nabla \varphi|^2 \, dx \quad \text{for all} \quad \varphi \in C_c^\infty(B_1).$$

粗略地说，这个不等式表明， v 不能变化得太快（梯度由 v 本身控制）。

莫泽采用了类似的方法，但改用 $\eta = \varphi^2 (v_+)^\beta$ ，其中 $\beta \geq 1$，从而得到不等式

$$\int_{B_1} \left| \nabla \left(v^{\frac{\beta+1}{2}} \varphi \right)^2 \right| dx \leq C \int_{B_1} v^{\beta+1} |\nabla \varphi|^2 \, dx \quad \text{for all} \quad \varphi \in C_c^\infty(B_1).$$

结合索伯列夫不等式，可得

$$\left(\int_{B_{r_1}} v^{q\gamma} \, dx \right)^{\frac{1}{q\gamma}} \leq \left(\frac{C}{|r_2 - r_1|^2} \int_{B_{r_2}} v^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $\gamma = \frac{2^*}{2} > 1$ 且 $q = \beta + 1$。按照德乔治的证明取 $r_k \downarrow \frac{1}{2}$ 的一个序列，可得

$$\|v\|_{L^{2\gamma^k}(B_{r_k})} \leq C \|v\|_{L^2(B_1)},$$

取 $k \to \infty$ ，便可得到 $B_{1/2}$中的 L^∞ 界。

我们请感兴趣的读者参阅 [**HL97**，第 4]章，其中给出了完整证明。

德乔治估计的第二步： L^∞ **至** $C^{0,\alpha}$。接下来我们证明德乔治估计的第二步。我们要证明:

命题 3.13 （振荡衰减）。设 $\mathcal{L}$ 具有(3.10)的形式。设$v \in H^1$（B_2）是方程的一个解

$$\mathcal{L} v = 0 \quad in \quad B_2.$$

那么，

$$\operatorname*{osc}_{B_{1/2}} v \leq (1 - \theta) \operatorname*{osc}_{B_2} v$$

存在某个 $\theta > 0$ 足够小的量，它仅依赖于 n、 λ和 Λ。

正如我们在第2章中看到的（见推论 2.7），这个命题立即推出了 $C^{0,\alpha}$ 解的正则性。

如下所示，命题 3.13 可由以下引理推出。

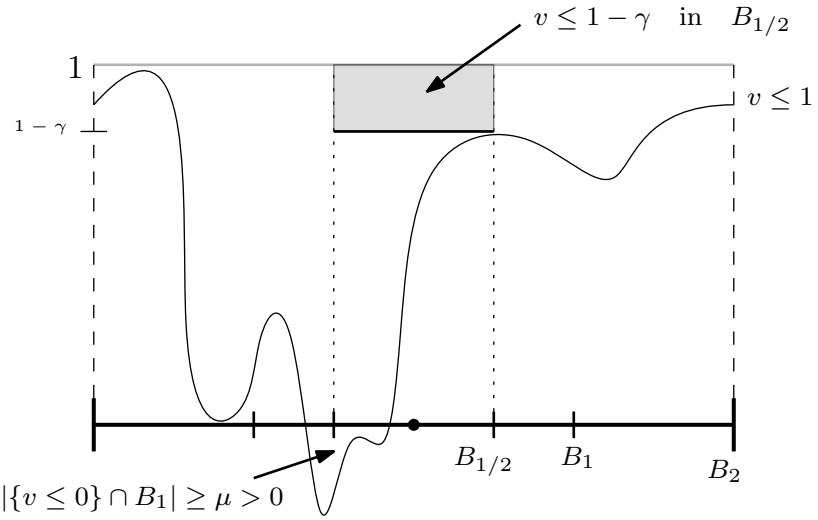


图 3.2. v 与来自引理 3.14 的 $\mathcal{L}v \le 0$ 的图像表示。

引理 3.14. 设 $\mathcal{L}$ 具有(3.10)的形式，并设 $v \in H^1(B_2)$ 满足

$$v \le 1 \quad in \quad B_2, \qquad and \qquad \mathcal{L}v \le 0 \quad in \quad B_2.$$

假设

$$\big|\{v \le 0\} \cap B_1\big| \ge \mu > 0.$$

那么，

$$\sup_{B_{1/2}} v \le 1-\gamma,$$

对于某个足够小的 $\gamma > 0$，它仅取决于 n、 λ、 Λ和 μ。

换句话说，若 $v \le 1$，并且它在一个非零测度的集合中“远离 1”，那么 v 在 $B_{1/2}$中就不可能接近 1。（见图 3.2。）

下面说明这个引理如何推出振荡衰减：

命题 3.13 的证明。考虑函数

$$w(x) := \frac{2}{\operatorname{osc}_{B_2} v}\left(v(x) - \frac{\sup_{B_2} v + \inf_{B_2} v}{2}\right)$$

并注意到

$$-1 \le w \le 1 \quad \text{in} \quad B_2,$$

（事实上，$\operatorname{osc}_{B_2} w = 2$）。设 $\big|\{w \le 0\} \cap B_1\big| \ge \frac{1}{2}|B_1|$（否则，我们可以改取 $-w$）。那么，由引理 3.14 可得

$$w \le 1-\gamma \quad \text{in} \quad B_{1/2},$$

因此

$$\operatorname*{osc}_{B_{1/2}} w \le 2-\gamma.$$

这得到

$$\operatorname*{osc}_{B_{1/2}} v \le \left(1-\frac{\gamma}{2}\right) \operatorname*{osc}_{B_2} v,$$

因此命题得证。 □

为了证明引理 3.14，我们需要以下德乔治等周不等式。这是以下事实的一种定量表述：一个 H^1函数不可能具有跳跃间断。

引理 3.15。 设 $w \in H^1(B_1)$ 满足

$$\int_{B_1} |\nabla w|^2\,dx \le C_\circ.$$

Let

$$A := \{w \le 0\} \cap B_1, \quad D := \left\{w \ge \frac{1}{2}\right\} \cap B_1, \quad E := \left\{0 < w < \frac{1}{2}\right\} \cap B_1.$$

则有

$$C_\circ |E| \ge c|A|^2 \cdot |D|^2$$

对于某个常数 c，它仅取决于 n。

证明。 我们定义 $\bar{w}$ 在 B_1 中为 $\bar{w} = w$ 在 E中、 $\bar{w} \equiv 0$ 在 A 中且 $\bar{w} = \frac{1}{2}$ 在 D 中。这样， $\nabla \bar{w} \equiv 0$ 在 $B_1 \setminus E$ 中且 $\int_{B_1} |\nabla \bar{w}|^2 \le C_\circ$。

记 $\bar{w}$ 在 B_1 中的平均值为 $\bar{w}_{B_1} := \fint_{B_1} \bar{w}(x)\,dx$。于是，

$$\begin{aligned}
|A| \cdot |D| &\le 2 \int_A \int_D |\bar{w}(x) - \bar{w}(y)|\,dx\,dy \\
&\le 2 \int_{B_1} \int_{B_1} \left(\left|\bar{w}(x) - \bar{w}_{B_1}\right| + \left|\bar{w}(y) - \bar{w}_{B_1}\right|\right) dx\,dy \\
&= 4|B_1| \int_{B_1} \left|\bar{w}(x) - \bar{w}_{B_1}\right| dx \le C \int_E |\nabla \bar{w}(x)|\,dx,
\end{aligned}$$

最后一步中，我们使用了 Poincar´e 不等式（定理 1.6，其中 $p = 1$）以及 $\nabla \bar{w} \equiv 0$ 在 $B_1 \setminus E$这一事实。于是，由 H¨older 不等式可得

$$|A| \cdot |D| \le C \int_E |\nabla \bar{w}| \le C \left(\int_E |\nabla \bar{w}|^2\right)^{1/2} |E|^{1/2} \le C C_\circ^{1/2} |E|^{1/2},$$

这正是我们要证明的。 □

最后，我们证明引理 3.14：

引理 3.14 的证明。考虑该序列

$$w_k := 2^k \left[v - (1 - 2^{-k}) \right]_+ .$$

注意，由于 $v \le 1$ 属于 B_2，因此 $w_k \le 1$ 属于 B_2。此外， $\mathcal{L} w_k \le 0$ 属于 B_2。

利用能量不等式（引理 3.8），我们很容易得到

$$\int_{B_1} |\nabla w_k|^2 \le C \int_{B_2} w_k^2 \le C_\circ \qquad (\text{notice } 0 \le w_k \le 1 \text{ in } B_2).$$

我们还有

$$\left| \{ w_k \le 0 \} \cap B_1 \right| \ge \mu > 0$$

（根据关于 v的假设）。现在，只要满足以下条件，我们就递归地应用引理 3.15 于 w_k

$$\int_{B_1} w_{k+1}^2 \ge \delta^2.$$

我们得到

$$\left| \left\{ w_k \ge \frac{1}{2} \right\} \cap B_1 \right| \ge \left| \{ w_{k+1} > 0 \} \cap B_1 \right| \ge \int_{B_1} w_{k+1}^2 \ge \delta^2.$$

因此，由引理 3.15，

$$\left| \left\{ 0 < w_k < \frac{1}{2} \right\} \cap B_1 \right| \ge \frac{c}{C_\circ} \delta^4 \mu^2 = \beta > 0,$$

其中 $\beta > 0$ 与 k无关，且仅依赖于 n、 δ和 $\mu_\circ$

但请注意，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，集合 $\left\{ 0 < w_k < \frac{1}{2} \right\}$ 两两不相交，因此不可能对每个 k都成立前述不等式。这意味着，对于某个 $k_\circ \in \mathbb{N}$ （仅依赖于 n 和 β），我们有

$$\int_{B_1} w_{k_\circ}^2 < \delta^2$$

因此，由命题 3.10 给出的从 L^2 到 L^∞ 的估计，

$$\| w_+ \|_{L^\infty(B_{1/2})} \le C \| w_+ \|_{L^2(B_1)}.$$

我们得到

$$\| w_{k_\circ} \|_{L^\infty(B_{1/2})} \le C\delta \le \frac{1}{2},$$

只要 $\delta > 0$ 足够小（仅依赖于 n、 λ和 Λ），上述结论便成立。这意味着 $w_{k_\circ} \le \frac{1}{2}$ 属于 $B_{1/2}$，因此

$$v \le \frac{1}{2} 2^{-k_\circ} + \left(1 - 2^{-k_\circ} \right) \le 1 - 2^{-k_\circ - 1} = 1 - \gamma$$

如所需，其中 $k_\circ$（因此 γ）仅取决于 n、 λ、 Λ 和 $\mu_\circ$ □

总而言之，我们现在已经证明了引理 3.14（通过使用 L^2 到 L^∞ 的估计以及引理 3.15）。接着，引理 3.14 推出振荡衰减，而振荡衰减则推出 H¨older 正则性。

定理 3.16. 设 $\mathcal{L}$ 具有(3.10)的形式，且 $v \in H^1(B_1)$ 满足

$$\mathcal{L}v = 0 \quad in \quad B_1.$$

那么，

$$\|v\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\|v\|_{L^\infty(B_1)}$$

对于某些仅依赖于 n、 λ 和 Λ 的 $\alpha > 0$ 和 C，

证明。 该定理由振荡衰减推出，方法与推论 2.7 类似。□

将这一结果与 L^2 到 L^∞ 的估计（命题 3.10）结合起来，我们最终得到德乔治–纳什定理。

定理 3.17. 设 $v \in H^1(B_1)$ 是$\operatorname{div}(A(x)\nabla v) = 0$在 B_1中的弱解，且 $0 < \lambda \operatorname{Id} \leq A(x) \leq \Lambda \operatorname{Id}$。那么，存在某个 $\alpha > 0$，使得 $v \in C^{0,\alpha}(B_{1/2})$ 并且

$$\|v\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\|v\|_{L^2(B_1)}.$$

常数 C 和 $\alpha > 0$ 仅依赖于 n、 λ 和 Λ。

证明。 该结论由定理 3.16 与命题 3.10 结合（根据 (3.13)）得出。□

作为前一结果的推论，我们有：

定理 3.7 的证明。 由定理 3.17 通过覆盖论证可得。□

特别是，如下文所示，定理 3.17 解决了希尔伯特第十九问题。

这是德乔治于1990年获得沃尔夫奖、纳什于2015年获得阿贝尔奖的主要成果之一。有人推测，如果只有他们中的一人解决了希尔伯特第十九问题，他也会因这一证明而获得菲尔兹奖。

注 3.18 （哈纳克不等式）。 尽管证明定理 3.17 并不需要这一点，但值得注意的是，经过一些额外工作，我们也可以证明形如 div(*A*(*x*)∇*v*) 的算子的哈纳克不等式；参见[**LZ17, Mos61**]。

3.4. 希尔伯特第十九问题的解

在本章节中，我们证明了 $v \in H^1(B_1)$ 的内部正则性 结果

$$\operatorname{div}\big(A(x)\nabla v\big) = 0 \quad \text{in} \quad B_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|v\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \le C\|v\|_{L^2(B_1)},$$

对于某个仅取决于 n、λ 和 Λ 的小 $\alpha > 0$。

对于一般区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，这给出了 $v \in H^1(\Omega)$ 的估计

$$\operatorname{div}\big(A(x)\nabla v\big) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad \Longrightarrow \quad \|v\|_{C^{0,\alpha}(\tilde{\Omega})} \le C\|v\|_{L^2(\Omega)},$$

~对于任意 $\Omega \subset\subset \Omega$（其中常数 C 仅取决于 n、λ、Λ、Ω 和 Ω）。

有了这一点，事实上就可以解决希尔伯特第十九问题：

> **定理。** 令 $u \in H^1(\Omega)$ 为以下泛函的任意局部极小化子
>
> $$\mathcal{E}(w) := \int_\Omega L(\nabla w)\,dx,$$
>
> 其中 L 光滑且一致凸，而$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界。那么， u 在Ω中是 C^∞ 。

证明。 任意局部极小化子 u 都满足

$$\int_\Omega DL(\nabla u)\nabla\phi\,dx = 0, \qquad \text{for all} \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

（这是 $\operatorname{div}(DL(\nabla u)) = 0$ 在 Ω 中的弱形式。）

与定理 3.5 的证明一样，对于任意 $h \in \mathbb{R}^n$，定义

$$\tilde{A}(x) := \int_0^1 D^2L\big(t\nabla u(x+h) + (1-t)\nabla u(x)\big)\,dt,$$

~则 $A\ x \qquad L \qquad 0 < \lambda \quad \le ()$ 是一致 $D^2L\ p \le \Lambda$ 椭圆的（因为 是一致凸的，Id ( ) Id）。~我们有 $\frac{u\ \cdot+h}{|h|}\ ^{-u} \in {}^{h}H^1(\Omega\ )$ 满足（再次参见定理 3.5）

$$\int_\Omega \nabla\left(\frac{u(x+h)-u(x)}{|h|}\right)\cdot\tilde{A}(x)\nabla\phi(x)\,dx = 0 \quad \text{for all } \phi \in C_c^\infty(\Omega_h),$$

也就是说，$\frac{u_{(\cdot+h)}}{|h|}^{-u}$ 是弱意义下的解

$$\operatorname{div}\left(\tilde{A}\nabla\left[\frac{u(\cdot+h)-u}{|h|}\right]\right) = 0, \quad \text{in} \quad \Omega_h.$$

（回顾 $\Omega_h := \{x \in \Omega\colon \text{距离}(x, \partial\Omega) > |h|\}$。）

由德乔治和纳什的估计（定理 3.7），我们得到

$$\left\|\frac{u(\cdot+h)-u}{|h|}\right\|_{C^{0,\alpha}(\tilde{\Omega})} \leq C\left\|\frac{u(\cdot+h)-u}{|h|}\right\|_{L^2(\Omega_h)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

˜对于任意 Ω ⊂⊂Ω$_h$ （参见第 1 章中的**(S8)** ）。由**(H7)**，由于常数 C与 h无关，因此可得

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\tilde{\Omega})} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

现在，一旦 u 是 $C^{1,\alpha}$，根据定理 3.5，我们就完成了。 □

3.5. 进一步结果与未决问题

最后，我们通过介绍凸能量泛函极小化方面的一些最新结果和未决问题来结束本章。

正如我们所解释的，凸泛函的极小化是变分法中的一个经典问题。具体而言，

$$\min_{w\in\mathcal{W}} \int_\Omega L(\nabla w)\,dx, \tag{3.14}$$

其中 $L:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 凸，Ω ⊂ $\mathbb{R}^n$，以及某个适当的函数类$\mathcal{W}$，例如，在 ∂ Ω上具有给定的迹。希尔伯特第十九问题讨论的是 L 一致凸且光滑的情形，以获得良好的正则性结果。备注 3.1 中我们讨论了凸性的缺失可能导致极小化子不唯一，但如果只是去掉一致凸性的条件，同时保留严格凸性，究竟会发生什么，并不十分清楚。事实上，只涉及严格凸性的函数 L 所构成的泛函（也就是说， D^2L 在某些集合上可能具有 0 和 ∞ 作为特征值）自然出现在一些应用中：各向异性表面张力、交通流和统计力学（参见 [**穆20**]及其中的参考文献）。

根据比较原理，已知（3.14）的极小化子是利普希茨连续的（前提是区域和边界数据具有足够的光滑性）。因此，自然会提出以下问题：极小化子的一阶导数是否连续?

如果 L 是严格凸的，那么 (3.14) 的极小化子是 C^1 吗?

近年来，人们一直在研究这个问题。De Silva 和 Savin 最早在 [**DS10**], 中探讨了这个问题，并研究了维数为 2 的情形：

定理 3.19 ([**DS10**])**.** 设 u 是 $\mathbb{R}^2$中问题 (3.14) 的一个 *Lipschitz* 极小解，并假设 L 严格凸。假设满足以下条件的点的集合是有限集：D^2L 的某个特征值等于 *0* 或 ∞ 。那么， $u \in C^1$。

后来，Mooney 在 [**Moo20**] 中研究了高维情形，并证明一般而言，问题在维数 $n \geq 4$下的答案是否定的：

定理 3.20 ([**Moo20**])。 在 $\mathbb{R}^4$ 中，存在一个使(3.14)成立的 *Lipschitz* 极小解，且 L 严格凸，但它不是 C^1。

在 Mooney 的例子中，极小化子在原点之外是解析的（并在原点处有奇异性），相应的泛函的海森矩阵有一个特征值趋于 ∞ 于 $\{x_1^2+x_2^2 = x_3^2+x_4^2\} \cap \sqrt{2}\mathbb{S}^3$，但除此之外，所有特征值都一致地有正下界。

目前，维数为 $n = 3$ 时会发生什么，以及 $\mathbb{R}^2$ 中一般严格凸泛函的情形如何，仍是未解决问题。

第4章

全非线性椭圆偏微分方程

最一般形式的二阶非线性椭圆偏微分方程可以写为

$$F(D^2u, \nabla u, u, x) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

自20世纪中期以来，理解这些方程的解的正则性一直是一个重要的研究方向。

这些方程称为全非线性椭圆方程。除了其在偏微分方程理论中的自身意义外，它们还出现在概率论中（随机控制、微分博弈；概率解释见附录C），以及几何学中。

借助 Schauder 型估计，在关于其对 ∇u、 u 和 x 的依赖关系作出自然假设的条件下，要研究 (4.1) 的正则性，可以归结为理解以下方程的解：

$$\boxed{F(D^2u) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n.} \tag{4.2}$$

事实上，我们在第2章中用于证明线性方程 $\sum a_{ij}(x)\partial_{ij}u = f(x)$ 在 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中的 Schauder 估计的一些“扰动”方法，在这种全非线性情形下同样适用。为简单起见，我们在此将重点研究 (4.2)。

在接下来的各节中，我们将讨论以下内容：

– 方程 (4.2) 的椭圆性是什么？ – 解的存在唯一性。– 方程 (4.2) 的解的正则性。

我们不会 证明本章节所有已知的主要结果，而只会概述已有的研究成果。关于这一主题的更多细节，请参阅书籍 [**CC95**]和[**NTV14**] 。

4.1. 什么是椭圆性?

定义椭圆性至少有两种可能的方式:

– 将方程线性化。– “施加”比较原理成立这一条件。

我们将看到，这两种方式本质上是相同的。

定义 4.1。 设 F： $\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$。如果对于任意两个对称矩阵 A， $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$，满足 $A\geq B$（即， $A-B$ 是半正定的），我们都有，则称 F 是椭圆的

$$F(A)\geq F(B),$$

若 $A>B$（即 $A-B$ 正定），则为严格不等式。

拉普拉斯方程 $\Delta u=0$ 对应于情形 F（M） $=$tr M。对于一个线性方程（具有常系数）

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\partial_{ij}u=0,$$

F由 F（M） $=$tr（AM）给出，其中 $A=$（a_{ij}）$_{i,\ j}$。当且仅当系数矩阵 A 为正定时，该方程才是椭圆的。因此，这与我们对线性方程椭圆性的定义一致。

注4.2 （比较原理）。 若一个 C^2 函数 v 在点 $x_\circ$ 处从下方与 $u\in C^2$相切（即 $u\geq v$ 处处成立，且 u（$x_\circ$） $=v$（$x_\circ$）；见图**4.1**），则可得

$$\nabla u(x_\circ)=\nabla v(x_\circ),\qquad D^2u(x_\circ)\geq D^2v(x_\circ).$$

因此，若F 具有椭圆性，则对于这些函数，我们有 F（D^2u（$x_\circ$）） $\geq F$（D^2v（$x_\circ$））。这在证明比较原理时至关重要。

命题 4.3 (比较原理**)**。 假设 F 是椭圆的，且$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 有界。设 $u,v\in C^2$**(**Ω**)** $\cap\, C^0$**(**Ω**)**。那么，

$$\begin{cases} u\ \geq\ v & on\ \ \partial\Omega\\ F(D^2u)\ \leq\ F(D^2v) & in\ \ \Omega. \end{cases}\quad\Longrightarrow\quad u\geq v\quad in\quad\overline{\Omega}.$$

证明。 我们分两种情况讨论。

情况*1*. 首先假设 F**(**D^2u**)** $<$ F**(**D^2v**)** 在 Ω 中成立（且为严格不等式）。如果结论不成立，那么函数 $u-v$ 在 Ω 内部会取得一个内部极小值，比如在 $x_\circ\in$ Ω 处。于是，我们有 D^2**(**$u-$

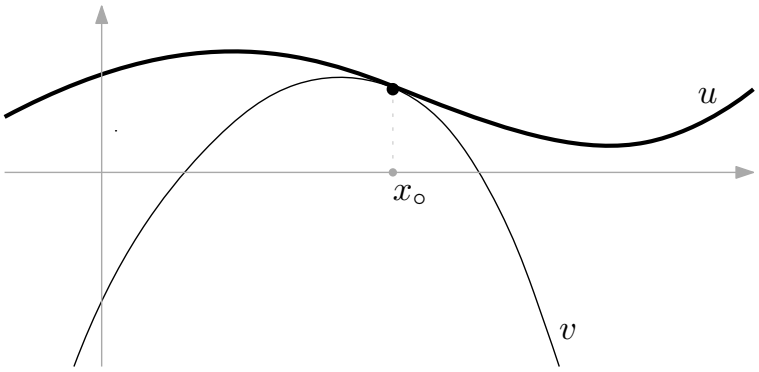


图4.1. 函数 v 在 $x_\circ$处从下方接触 u 。

$v)(x_\circ) \geq 0$. 因此， $D^2u(x_\circ) \geq D^2v(x_\circ)$，并且根据 F 的椭圆性，可得$F(D^2u(x_\circ))$ $\geq F(D^2v(x_\circ))$。这与 $F(D^2u) < F(D^2v)$ 在 Ω 中成立相矛盾，因此 $u \geq v$ 在 Ω 中成立。

情形 *2.* 现在假设在 Ω 中， $F(D^2u) \leq F(D^2v)$。于是，我们可以定义

$$\bar{u}(x) := u(x) + \varepsilon\left(c_\Omega - |x|^2\right),$$

其中 $c_\Omega > 0$ 是一个常数，使得在 Ω 中 $c_\Omega - |x|^2 > 0$ （回忆一下，Ω 是有界的）。

于是，在 Ω 上有 $\bar{u} \geq u$ ，且 $D^2\bar{u} = D^2u - 2\varepsilon\mathrm{Id}$。因此，由椭圆性可得，

$$F(D^2\bar{u}) = F(D^2u - 2\varepsilon\mathrm{Id}) < F(D^2u) \leq F(D^2v) \quad \text{in} \quad \Omega.$$

由情况1可得,

$$\begin{cases} \bar{u} \geq v & \text{on } \partial\Omega, \\ F(D^2\bar{u}) < F(D^2v) & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \bar{u} \geq v \quad \text{in} \quad \Omega.$$

由此得到

$$u(x) + \varepsilon\left(c_\Omega - |x|^2\right) \geq v(x) \quad \text{in} \quad \Omega.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$ ，我们推得 $u \geq v$ 在 Ω 中。 □

因此，我们看到，椭圆性正是证明比较原理所需要的条件。我们将看到，一致椭圆性 （与线性方程的情形类似）实际上意味着解的正则性。

定义4.4。 设 $F:\ \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$。那么，如果存在 $0 < \lambda \leq \Lambda$ （即椭圆性常数），使得对于任意满足 $N \geq 0$ （即半正定）的对称矩阵 M、 N，都有

$$\lambda\|N\| \leq F(M+N) - F(M) \leq \Lambda\|N\|,$$

其中 $\|N\| := \mathrm{tr}\left((N^TN)^{1/2}\right) = \mathrm{tr}(N)$ 是特征值（绝对值）的总和。

我们指出，前一定义中采用的矩阵范数并非标准选择。在 $\mathbb{R}^n$ 中，所有范数都等价，因此我们本可以选择其他任意范数。不过，这种范数定义避免了在后续计算中处理常数。

当然，一致椭圆性以定量的方式蕴含椭圆性。

对于线性方程，即 $F(M) = \operatorname{tr}(AM)$，一致椭圆性等价于

$$0 < \lambda \mathrm{Id} \leq A \leq \Lambda \mathrm{Id},$$

如通常所见。

理解椭圆性的另一种方式是将方程线性化：

假设 $F \in C^1$ （这并非总是如此！）。我们考虑函数

$$F_{ij}(M) := \frac{\partial F}{\partial M_{ij}}(M),$$

也就是说， $F(M)$ 关于矩阵 M 的分量 M_{ij} 的一阶导数。

那么，很容易看出

$$\begin{aligned} F \text{ is uniformly elliptic} &\iff 0 < \lambda\,\mathrm{Id} \leq (F_{ij}(M))_{i,j} \leq \Lambda\,\mathrm{Id}, \qquad \forall M \\ &\iff \text{the linearized equation is uniformly elliptic.} \end{aligned}$$

因此，至少当 F 是 C^1 时，一致椭圆性可以看作线性化方程的一致椭圆性。

不过，一般而言，一致椭圆性条件意味着 F 是利普希茨的，但并不总意味着 C^1。事实上，有一些重要的方程 $F(D^2u) = 0$，其对应的 F 是利普希茨的，但并非总是 C^1。在这种情况下，前面通过 F 的导数刻画椭圆性的方法仍然成立，只需理解为这些导数几乎处处有定义。

注 4.5 （凸（或凹）方程）。方程 $F(D^2u) = 0$ 中一个重要的子类是 F 为凸（或凹）的方程。也就是说，$F(M)$ 作为关于 $F\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ 的函数是凸（或凹）的。在这种情况下，该方程可以写成一个 贝尔曼方程 （见 (C.3)）：

$$F(D^2u) = \max_{\alpha\in\mathcal{A}}\{L_\alpha u\} = 0,$$

其中， $\{L_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 是一族形式如下的线性算子

$$L_\alpha u := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^\alpha \partial_{ij} u + c_\alpha,$$

对于具有一致椭圆性、椭圆性常数为 λ 和 Λ 的系数族 $\{a_{ij}^\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$。

注意，若 u 满足 $F(D^2u) = 0$，且 F 为凸函数，则 $v = -u$ 满足$G(D^2v) = 0$，其中 $G(M) = -F(-M)$，因此 G 是凹函数。

Pucci 算子。 在椭圆性常数为 λ 和 Λ 的全非线性一致椭圆算子类中，极值算子或 *Pucci* 算子，记作 $\mathcal{M}^+$ 和 $\mathcal{M}^-$，是取到极端 值（分别为上界和下界）的算子。或者说，任何其他具有相同椭圆性常数的椭圆算子，都按照下文的 **(4.6)** 式与它们形成序关系。

我们定义 $\mathcal{M}^{\pm}$ 如下。

定义 4.6。 给定 $0 < \lambda \leq \Lambda$，椭圆性常数为 λ 和 Λ的极值 算子或*Pucci* 算子 $\mathcal{M}^{\pm} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^-(M) &:= \inf_{\lambda \mathrm{Id} \leq (a_{ij})_{i,j} \leq \Lambda \mathrm{Id}} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} M_{ij} \right\} = \inf_{\lambda \mathrm{Id} \leq A \leq \Lambda \mathrm{Id}} \{\mathrm{tr}\,(AM)\} \\ \mathcal{M}^+(M) &:= \sup_{\lambda \mathrm{Id} \leq (a_{ij})_{i,j} \leq \Lambda \mathrm{Id}} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} M_{ij} \right\} = \sup_{\lambda \mathrm{Id} \leq A \leq \Lambda \mathrm{Id}} \{\mathrm{tr}\,(AM)\}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

对任意对称矩阵 M。它们是一致椭圆算子，椭圆性常数为 λ 和 Λ。

特别地，根据定义可得

$$\mathcal{M}^{\pm}(\alpha M) = \alpha \mathcal{M}^{\pm}(M), \quad \text{for all} \quad \alpha \geq 0.$$

注意，$\mathcal{M}^{\pm} = \mathcal{M}^{\pm}_{n,\lambda,\Lambda}$。不过，通常在相应的上下文中，椭圆性常数和维数的依赖关系是显而易见的，因此我们会在符号说明中省略它。

有时，通过对应矩阵的特征值，并以椭圆性常数对其进行适当加权，来定义Pucci 算子会更容易，具体如下。

引理 4.7。 式(4.3) 中定义的*Pucci* 算子也可以等价地定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^-(M) &= \lambda \sum_{\mu_i > 0} \mu_i + \Lambda \sum_{\mu_i < 0} \mu_i = \lambda \|M_+\| - \Lambda \|M_-\|, \\ \mathcal{M}^+(M) &= \Lambda \sum_{\mu_i > 0} \mu_i + \lambda \sum_{\mu_i < 0} \mu_i = \Lambda \|M_+\| - \lambda \|M_-\|, \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中 $\mu_i = \mu_i(M)$ 表示对称矩阵 M 的特征值，矩阵 M_+ 和 M_- 满足 $M_{\pm} \geq 0$、$M = M_+ - M_-$，且 $\|A\| = \mathrm{tr}\left((A^TA)^{1/2}\right)$。

证明。 证明可直接利用以下涉及特征值以及两个对称矩阵 A 和 B乘积的重排型不等式得出:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_{n-i}(B) \leq \operatorname{tr}(AB) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B),$$

其中, $\lambda_1(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A)$ 表示 A 的特征值（按序排列）, 而$\lambda_1(B) \leq \cdots \leq \lambda_n(B)$ 表示 B 的特征值（按序排列）。□

由 F 的一致椭圆性定义（定义4.4）可知, 对于任意两个对称矩阵 M、N,

$$\lambda\|N_+\| - \Lambda\|N_-\| \leq F(M+N) - F(M) \leq \Lambda\|N_+\| - \lambda\|N_-\|,$$

其中 $N = N_+ - N_-$, 且 $N_\pm \geq 0$。因此, 由引理 4.7 可得,

$$\mathcal{M}^-(N) \leq F(M+N) - F(M) \leq \mathcal{M}^+(N). \tag{4.5}$$

若取 $M = 0$, 则可见

$$\mathcal{M}^-(N) \leq F(N) - F(0) \leq \mathcal{M}^+(N), \tag{4.6}$$

因此, 这些算子就像上文所述的上下“最坏情况”——相差一个常数因子 $F(0)$。（回想一下, $\mathcal{M}^\pm$ 是椭圆性常数为 λ、 Λ 的全非线性一致椭圆算子。）

如果我们进一步假设 $F(0) = 0$, 那么我们看到, 如果 u 满足任意形如 $F(D^2u) = 0$ 的方程, 则特别有

$$\mathcal{M}^-(D^2u) \leq 0 \leq \mathcal{M}^+(D^2u). \tag{4.7}$$

注 4.8。 方程 (4.7) 被称为具有有界可测系数的非散度型方程。事实上, 注意到, 给定某些一致椭圆系数 $(a_{ij}(x))_{i,\,j}$ 且对 x 不作任何正则性假设, 如果 $u \in C^2$满足 $\sum_{i,\,j} a_{ij}(x)\partial_{ij}u$, 那么特别地, (4.7) 成立。另一方面, 如果 (4.7) 对某个 $u \in C^2$ 成立, 则可以找到某些一致椭圆系数 $(a_{ij}(x))_{i,\,j}$ 使得 $\sum_{i,\,j} a_{ij}(x)\partial_{ij}u$。

4.2. 二元方程

在讨论 $\mathbb{R}^n$ 中全非线性方程的存在性与正则性的一般理论之前, 让我们先研究一个更简单的情形: 二元全非线性方程。

此处的主要正则性估计由Nirenberg [**Nir53**],提出, 内容如下。

定理 4.9。 设 $F: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ 是一致椭圆的, 其椭圆性常数为 λ 和 Λ。设 $u \in C^2(B_1)$ 满足

$$F(D^2u) = 0 \quad in \quad B_1 \subset \mathbb{R}^2.$$

那么，

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \le C\|u\|_{L^\infty(B_1)},$$

对于某些常数 $\alpha > 0$ 和 C，它们仅依赖于 λ 和 Λ。

证明思路如下：定义 $v := \partial_e u$，并沿 e 方向对方程 $F(D^2u) = 0$ 求导，得到

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\partial_{ij}v(x) = 0 \quad \text{in} \quad B_1 \subset \mathbb{R}^2, \tag{4.8}$$

其中 $a_{ij}(x) := F_{ij}(D^2u(x))$，对 $i,\ j \in \{1,2\}$成立。由于 F是一致椭圆的，我们有 $a_{22}(x) \ge \lambda > 0$。因此，我们可以将 (4.8) 除以 $a_{22}(x)$，得到

$$a(x)\partial_{11}v(x) + b(x)\partial_{12}v(x) + \partial_{22}v(x) = 0, \tag{4.9}$$

对于某些系数

$$a(x) = \frac{a_{11}(x)}{a_{22}(x)} \quad \text{and} \quad b(x) = \frac{a_{12}(x) + a_{21}(x)}{a_{22}(x)} = \frac{2a_{12}(x)}{a_{22}(x)}.$$

若记 $w := \partial_1 v$，并对 (4.9) 关于 x_1求导，得到

$$\partial_1\big(a(x)\partial_1 w(x) + b(x)\partial_2 w(x)\big) + \partial_{22}w(x) = \operatorname{div}(A(x)\nabla w) = 0,$$

其中

$$A(x) := \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

也就是说，w 满足一个散度形式的方程，而 A 是一致椭圆的，其椭圆性常数取决于 λ 和 Λ。因此，由 De Giorgi– Nash 结果（定理 3.7），可得 $\partial_1 v = w \in C^{0,\,\alpha}(B_{1/2})$。由于 x_1 和 x_2 的作用可以互换，且 $v = \partial_e u$ （其中 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ 任意），我们推得 $u \in C^{2,\,\alpha}(B_{1/2})$。

现在让我们正式证明这一点。思路正如上文所述，我们在那里用到了 $u \in C^4$。实际上，我们只能使用 $u \in C^2$，因此采用增量商的方法进行证明。

定理 4.9 的证明。定义

$$v(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} \in C^2(B_{1-|h|}),$$

其中 $|h| < \frac{1}{4}$，并按照定理 3.5 的方法进行。由于 F 是平移不变的，我们有

$$F(D^2u(x)) = 0, \quad F(D^2u(x+h)) = 0 \quad \text{in} \quad B_{1-|h|}.$$

然后，根据线积分基本定理，

$$0 = F(D^2u(x+h)) - F(D^2u(x)) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\partial_{ij}\big(u(x+h) - u(x)\big),$$

其中

$$a_{ij}(x)=\int_0^1 F_{ij}\big(tD^2u(x+h)+(1-t)D^2u(x)\big)\,dt.$$

由于 F 一致椭圆，$(a_{ij})_{i,\,j}$ 也一致椭圆（具有相同的椭圆性常数）。也就是说，$v\in C^2(B_{1-|h|})$ 满足一个非散度形式的方程

$$a_{11}(x)\partial_{11}v(x)+2a_{12}(x)\partial_{12}v(x)+a_{22}(x)\partial_{22}v(x)=0\quad\text{in}\quad B_{1-|h|},$$

其中 $a_{12}=a_{21}$ 且 $\partial_{12}v=\partial_{21}v$，因为 $v\in C^2$。由椭圆性条件可得 $\lambda\le a_{22}(x)\le\Lambda$，再除以 $a_{22}(x)$，得到

$$a(x)\partial_{11}v(x)+b(x)\partial_{12}v(x)+\partial_{22}v(x)=0\quad\text{in}\quad B_{1-|h|}.$$

Let

$$A(x):=\begin{pmatrix}a(x) & b(x)\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

不难验证，A 一致椭圆，其椭圆性常数为 λ/Λ 和 Λ/λ。令 $\eta\in C_c^2(B_{1-|h|})$，并注意到，根据分部积分，

$$\int_{B_{1-|h|}}\partial_2\eta\,\partial_{12}v=\int_{B_{1-|h|}}\partial_1\eta\,\partial_{22}v.$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_{B_{1-|h|}}\nabla\eta\cdot A(x)\nabla\partial_1 v&=\int_{B_{1-|h|}}\nabla\eta(x)\cdot\begin{pmatrix}a(x)\partial_{11}v(x)+b(x)\partial_{12}v(x)\\ \partial_{12}v(x)\end{pmatrix}dx\\&=\int_{B_{1-|h|}}\big\{\partial_1\eta\,\big(a(x)\partial_{11}v+b(x)\partial_{12}v\big)+\partial_2\eta\,\partial_{12}v\big\}\,dx\\&=\int_{B_{1-|h|}}\partial_1\eta\,\big(a(x)\partial_{11}v+b(x)\partial_{12}v+\partial_{22}v\big)\,dx\\&=0.\end{aligned}$$

也就是说，$\partial_1 v$ 满足一个带有有界可测系数 $A(x)$ 的散度形式方程。因此，根据德·乔治–纳什定理（见定理 3.16），我们知道 $\partial_1 v\in C^\alpha$ 且

$$\|\partial_1 v\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})}\le C\|\partial_1 v\|_{L^\infty(B_{1-|h|})}\le C\|\partial_1 u\|_{C^{0,1}(B_1)},$$

（注意，对于足够小的 $|h|$，我们可以通过覆盖论证，在定理 3.16 中从 B_1 得到 $B_{1-|h|}$），其中某个常数 C 仅依赖于 λ 和 Λ。令 $|h|\to 0$，借助 **(H7)**，我们得到

$$\|\nabla\partial_1 u\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})}\le C\|\partial_1 v\|_{L^\infty(B_{1-|h|})}\le C\|\partial_1 u\|_{C^{0,1}(B_1)},$$

其中某个常数 C 仅取决于 λ 和 Λ。由对称性，同一不等式对 $\partial_2 v$（以及 $\partial_2 u$）也成立，因此

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})}\le C\|u\|_{C^{1,1}(B_1)}.$$

注意，由插值不等式（见（1.9）），对每个 $\varepsilon > 0$，都存在某个 $C_\varepsilon > 0$，使得

$$\|u\|_{C^{1,1}(B_{1/2})} \leq \varepsilon \|u\|_{C^{2,\alpha}(B_1)} + C_\varepsilon \|u\|_{L^\infty(B_1)}.$$

现在，仿照定理 2.20 的证明，即可通过引理 2.27 完成证明。□

因此，正如我们所见，在二维情形下，为全非线性方程的解证明先验 $C^{2,\alpha}$ 估计相当容易。借助这些估计，通过连续性方法（参见 [**GT77**]或 [**HL97**]），实际上可以证明狄利克雷问题 $C^{2,\alpha}$ 解的存在性。

然而，正如我们将要看到的，在高维情形下，这样的先验估计已不再成立，因此需要通过引入弱解（粘性解）这一新概念，以不同的方式证明解的存在性。

这就是我们在下一节要做的。

4.3. 解的存在性

现在我们将注意力转向 $\mathbb{R}^n$ 中的全非线性椭圆方程。

首先要弄清楚的是解的存在性：给定一个良好的区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，以及良好的边界数据 $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$，我们能否总是求解以下狄利克雷问题?

$$\begin{cases} F(D^2u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

请注意，这里我们无法通过最小化一个泛函来构造解，因为一般而言，这些全非线性方程并非来自任何能量泛函。

要构造解，我们只有两种选择：

– 证明“先验估计”，然后使用连续性方法。 – 使用比较原理和佩龙方法。

连续性方法相当容易使用，但我们需要对解直到边界的 $C^{2,\alpha}$估计。这是一个非常困难的问题；事实上，一般来说，我们对这些方程在 $\mathbb{R}^n$ 中并没有 $C^{2,\alpha}$ 估计。

因此，我们需要构造某种广义的解概念：粘性解。

正确的解概念必须满足：

- 解的存在性。

- 比较原理（尤其是解的唯一性）。
- 稳定性（使解的极限仍为解）。

注意，如果我们只考虑 C^2 解，那么就有比较原理（而且很容易证明），但我们可能无法证明存在性。

另一方面，如果放宽解的概念，那么我们或许能轻易证明解的存在性，但要证明唯一性／比较原理就会更加困难。

恰当的广义解概念见下文定义4.10，称为粘性解。对于粘性意义下的次解，该概念只要求函数是上半连续（USC）；而对于粘性意义下的上解，则可在下半连续（LSC）函数上检验这一概念。这对于证明解的存在性很重要。

回顾一下，函数 f 在 $x_\circ$ 处称为上半连续，如果

$$\limsup_{x\to x_\circ} f(x) \le f(x_\circ).$$

类似地，在 $x_\circ$ 处下半连续，当

$$\liminf_{x\to x_\circ} f(x) \ge f(x_\circ).$$

关于椭圆方程的粘性解的精彩入门介绍，请参阅 [**Sil15**] 。

定义4.10（粘性解）。设 $F:\ \mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ 一致椭圆，并考虑偏微分方程

$$F(D^2u)=0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

- 我们称 $u\in \mathrm{USC}(\Omega)$ 为（粘性意义下的）次解，并记作 $F(D^2u)\ge 0$，若对于任意满足 $\phi\ge u$ 在 Ω 中且$\phi(x_\circ)=u(x_\circ)$、$x_\circ\in\Omega$ 的 $\phi\in C^2$，都有 $F(D^2\phi(x_\circ))\ge 0$。
- 我们称 $u\in \mathrm{LSC}(\Omega)$ 为（粘性意义下的）上解，并记作 $F(D^2u)\le 0$，若对于任意满足 $\phi\le u$ 在 Ω 中且$\phi(x_\circ)=u(x_\circ)$、$x_\circ\in\Omega$ 的 $\phi\in C^2$，都有 $F(D^2\phi(x_\circ))\le 0$。
- 我们称 $u\in C(\Omega)$ 在 $\overline{\Omega}$中以粘性意义解 $F(D^2u)=0$，若它既是次解又是上解。

注意，Ω 中可能存在一些点 $x_\circ\in$，在这些点上没有函数 $\phi\in C^2$从上方和/或下方与之相切 u $x_\circ$。根据前面的定义，这是允许的。

注 4.11（一些历史）。粘性解的概念由 Crandall 和 P.-L. Lions 于 1983 年在研究一阶

方程时提出。此后数年，粘性解的研究主要集中在一阶方程上，因为当时尚不清楚二阶一致椭圆型偏微分方程是否存在唯一的粘性解（或者这些解是否满足比较原理）。1988年，Jensen [**Jen88**], 最终证明了粘性解的比较原理。在随后的几年里，这一概念逐渐成为椭圆型偏微分方程分析中的常用方法。

1994年，P.-L. Lions 因其对非线性偏微分方程的贡献而获得菲尔兹奖，其中一项重要贡献是他在粘性解方面的研究 [**ICM94**]。

粘性解理论中的一个关键结果如下（参见[**Jen88, CC95**]）。

定理 4.12（粘性解的比较原理）。 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为任意有界区域，且 F : $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ 一致椭圆。假设 $u \in$ 连续函数空间中的下半连续函数 和 $v \in$ 连续函数空间中的上半连续函数 满足

$$u \geq v \quad on \quad \partial\Omega, \tag{4.10}$$

and

$$F(D^2u) \leq 0 \leq F(D^2v) \quad in \quad \Omega \quad in\ the\ viscosity\ sense. \tag{4.11}$$

那么，

$$u \geq v \quad in \quad \overline{\Omega}.$$

我们已在命题 4.3 中证明了函数 C^2 functions u ，而且证明非常简单。对于粘性解，证明则要复杂得多。

比较原理证明中的关键步骤如下。

命题 4.13。 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任意有界区域，且 $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$是一致椭圆的。假设 $u \in$ 下半连续(Ω) 和 $v \in$ 上半连续(Ω) 是满足(4.10)和(4.11)的有界函数。那么，

$$\mathcal{M}^-(D^2(u-v)) \leq 0 \quad in \quad \Omega.$$

关于此结果的证明，请参见 [**CC95**，定理 5.3] ，其中该结果是在假设 $u, v \in C(\Omega)$ 的条件下证明的。这里给出的假设下，同样的证明仍然成立。

利用命题 4.13 和下面的引理即可得到比较原理。

引理 4.14. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为任意有界区域，并假设 $w \in$LSC(Ω) 满足

$$w \geq 0 \quad on \quad \partial\Omega,$$

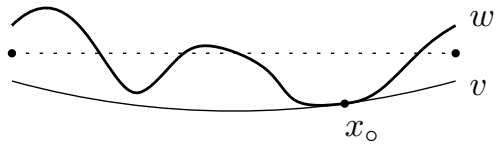


图 4.2. 我们从下方滑动 v，直到它在某个点 $x_\circ$与 w 相切。

and

$$\mathcal{M}^-(D^2w) \le 0 \quad in \quad \Omega.$$

那么，$w \ge 0$ 在 Ω 中。

证明。证明与命题 1.22 的证明类似。事实上，首先注意，经过重新缩放后，我们可以假设 $\Omega \subset B_1$，并用反证法假设 w 在 Ω 中有一个负最小值。于是，由于 $w \ge 0$ 在 $\partial\Omega$ 上，我们有 $\min_\Omega w = -\delta$，其中 $\delta > 0$，且最小值在 Ω 中取得。

现在考虑 $0 < \varepsilon < \delta$，以及 $v(x) := -\kappa + \varepsilon(|x|^2 - 1)$，其中 $\kappa > 0$（即一个足够平坦的抛物面）。

现在注意到，$v < 0$ 在 $\partial\Omega$ 上，并且我们可以选取 $\kappa > 0$，使得 v 在 Ω 内某点从下方与w 相切。换言之，存在 $\kappa > 0$，使得$w \ge v$ 在 Ω 中，且对于某个 $x_\circ \in \Omega$，有 $w(x_\circ) = v(x_\circ)$。（见图 4.2。）于是，根据黏性上解的定义，我们有

$$\mathcal{M}^-(D^2v)(x_\circ) \le 0.$$

然而，直接计算可得 $\mathcal{M}^-(D^2v) = \mathcal{M}^-(2\varepsilon \mathrm{Id}) \equiv 2\lambda n\varepsilon > 0$在 Ω 中，这与假设矛盾。□

一旦我们得到了粘性解的比较原理，就可以利用佩龙方法 证明解的存在性。接下来我们按照[**Sil15**]来证明这一点。

首先注意，对于 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中任意有界函数 u，我们可以将其上半连续包络定义为

$$u^*(x) := \sup\{\limsup_k u(x_k) : x_k \to x\},$$

其中，上确界是对所有 $\Omega \ni x_k \to x$ 序列取的。注意，u^* 是满足 $u^* \in \mathrm{USC}(\Omega)$ 和 $u^* \ge u$ 的最小函数。同样，我们将 $\overline{u}$ 的下半连续包络定义为

$$u_*(x) := \inf\{\liminf_k u(x_k) : x_k \to x\}. \tag{4.12}$$

我们需要以下引理，它是“次解的最大值也是次解”这一事实的推广。

引理 4.15. 设 $F:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ 一致椭圆，且$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是任意有界区域。

设$(u_a)_{a\in\mathcal{A}}$ 是一族次解： $u_a\in$ 上半连续(Ω)，且 $F(D^2u_a)\geq 0$在Ω中，对所有 $a\in\mathcal{A}$均成立。令

$$u(x):=\sup_{a\in\mathcal{A}}u_a,$$

并令

$$u^*(x):=\sup\Big\{\limsup_{k\to\infty}u(x_k):x_k\to x\Big\}.$$

那么， $u^*\in$ 上半连续(Ω) 是一个次解： $F(D^2u^*)\geq 0$ 在Ω中。

证明。 我们将证明分为两步。

第一步。 首先，我们证明：若 u^* 在 $x_\circ$处取得严格局部最大值，则可以为 $k\in\mathbb{N}$抽取指标序列 $a_k\in\mathcal{A}$ ，并取点序列 $x_k\in$ ，其中各点属于Ω，使得 $x_k\to x_\circ$， u_{a_k} 在 x_k处取得局部最大值，且$u_{a_k}(x_k)\to u^*(x_\circ)$。

根据 $u^*(x_\circ)$的定义，我们可以提取一个指标序列 $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$、$a_j\in\mathcal{A}$，以及点 $y_j\to x_\circ$，使得$u_{a_j}(y_j)\to u^*(x_\circ)$。现在证明我们还可以进一步提取一个子序列 $a_k:=a_{j_k}$ ，使所需结论成立。

事实上，令 $r>0$ 满足：对于 $y\in B_r(x_\circ)\setminus\{x_\circ\}$，有 $u^*(y)<u^*(x_\circ)$；再令 $\rho>0$ 足够小，使得若 $K_\rho:=B_r(x_\circ)\setminus B_\rho(x_\circ)$，则

$$\max_{K_\rho}u^*\leq u^*(x_\circ)-\delta,$$

对于某个 $\delta>0$。

现在注意，当 j 足够大时，$u_{a_j}\leq u^*(x_\circ)-\delta/2$ 属于 K_ρ。否则，将存在 $j_m\to\infty$ 和 z_m ，使得$u_{a_{j_m}}(z_m)>u^*(x_\circ)-\delta/2\geq\max_{K_\rho}u^*+\delta/2$。由于 K_ρ 是紧的，取一个子序列后， $z_m\to z_\infty$ 对某个 z_∞ 成立，其中 z_∞ 属于 K_ρ ，且

$$u^*(z_\infty)\geq\limsup_{m\to\infty}u_{a_{j_m}}(z_m)>\max_{K_\rho}u^*+\delta/2.$$

矛盾。因此，当 j 足够大时， $u_{a_j}\leq u^*(x_\circ)-\delta/2$ in K_ρ。

现在令 $x_j\in\overline{B_r(x_\circ)}$ 为 u_{a_j} 在 $B_r(x_\circ)$ 中取得最大值的点。特别地，$\overline{u_{a_j}(x_j)}\geq u_{a_j}(y_j)\to u^*(x_\circ)$，也就是说，当 j 足够大时，$u_{a_j}(x_j)\geq u^*(x_\circ)-\delta/4$。由于 $u_{a_j}\leq u^*(x_\circ)-\delta/2$ in K_ρ（同样，当 j 足够大时），这意味着 $x_j\in B_\rho(x_\circ)$。也就是说，u_{k_j} 在 $B_r(x_\circ)$ 内部的 $B_\rho(x_\circ)$ 中取得最大值。通过重复此论证并选取更小的 $\rho>0$，我们可以提取一个子序列 $a_k:=a_{j_k}$ ，从而得到所需结果。注意 $x_j\to x_\circ$，并且根据构造，$u_{a_j}(x_j)\geq u_{a_j}(y_j)\to u^*(x_\circ)$，因此 $u_{a_j}(x_j)\to u^*(x_\circ)$。这就完成了证明的第一部分。

请注意，到目前为止，我们还没有用到 u_a 是次解这一点。

步骤 2. 现在我们继续证明的第二部分，这部分将证明该引理。设 $\phi \in C^2$ 满足 $\phi(x_\circ) = u^*(x_\circ)$，且 $u \le \phi$ 位于 $x_\circ$附近（也就是说，$u-\phi$ 在 $x_\circ$处取得局部最大值），其中 $x_\circ \in \Omega_\circ$ 考虑$\bar\phi(x) = \phi(x) + |x - x_\circ|^4$，可知 $u - \bar\phi$ 在 $x_\circ$处取得严格局部最大值。现在，我们将证明的第一部分应用于 $v_a := u_a - \phi_\circ$ 也就是说，存在指标序列 $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$以及点 $x_k \to x_\circ$，使得

$u_{a_k} - \phi$ 在 x_k 处取得局部最大值，且 $u_{a_k}(x_k) \to u^*(x_\circ)$（因为 ϕ 是连续的）。特别地，由于 u_{a_k} 在粘性意义下是次解，我们有

$$F\big(D^2\bar\phi(x_k)\big) \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad F\big(D^2\bar\phi(x_\circ)\big) = F\big(D^2\phi(x_\circ)\big) \ge 0,$$

根据 F 和 $D^2\phi$的连续性。因此，u 是一个粘性次解。 □

现在我们可以证明粘性解的存在性。为此，我们假设给定一个有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，满足

$$\begin{aligned} &\text{for every } x_\circ \in \partial\Omega, \text{ there exists some } \psi_+ \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ such that} \\ &\psi_+(x_\circ) = 0, \quad \psi_+|_{\partial\Omega\setminus\{x_\circ\}} > 0, \quad \text{and } \mathcal{M}^+(D^2\psi_+) \le 0 \text{ in } \Omega, \end{aligned} \tag{4.13}$$

这里回顾一下，$\mathcal{M}^+$ 是定义于 (4.3) 中的 Pucci算子，其椭圆性常数为 λ和 $\Lambda_\circ$ 注意，若 (4.13) 成立，则对于每个 $x_\circ \in \partial\Omega$，也存在某个 $\psi_- \in C^2(\Omega)$，使得 $\psi_-(x_\circ) = 0, \psi_-|_{\partial\Omega\setminus\{x_\circ\}} < 0$，并且

$$\mathcal{M}^-(D^2\psi_-) \ge 0 \text{ in } \Omega,$$

其中 ψ_- 由 $\psi_- = -\psi_+$直接给出。

我们稍后将证明，任意有界的 C^2 区域都满足 (4.13)，其中常数 $0 < \lambda \le \Lambda$ 可以任取。

注4.16. 在以下结果中，我们通常假设 $F(0) = 0$。否则，若 $F(0) \ne 0$，我们可以改为考虑一致椭圆算子$\tilde F_t(D^2u) := F\left(D^2(u + t|x|^2/2)\right) = F(D^2u + t\mathrm{Id})$。于是，$\tilde F_t(0) = F(t\mathrm{Id})$，并且我们可以选取 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $F(t\mathrm{Id}) = 0$。事实上，若 $F(0) > 0$，由 (4.6) 可得 $\tilde F_t(0) = F(t\mathrm{Id}) \le \mathcal{M}^+(t\mathrm{Id}) + F(0) = tn\lambda + F(0) < 0$，当 $t < 0$ $\tilde{}$ $\tilde{}$足够负时成立。由于 $F_0(0) = F(0) > 0$，由 F_t 关于 t 的连续性，对于某个 $t \in \big[-F(0)/n\lambda, 0\big)$，结论成立。$F(0) < 0$ 的情形可类似证明。 ——

定理 4.17 (黏性解的存在性与唯一性)。设 $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ 是一致椭圆的，其椭圆性常数为 λ 和 Λ；设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$为满足(4.13) 的任意有界区域，并设 $g \in C(\partial\Omega)$。

那么，狄利克雷问题存在一个（唯一的）粘性解

$$\begin{cases} F(D^2u) = 0 & in\ \Omega \\ u = g & on\ \partial\Omega. \end{cases}$$

证明。 唯一性可直接由比较原理（定理 4.12）得出。根据注4.16，我们将假设 $F(0) = 0$。存在性的证明将通过佩龙方法完成，如下所示。

定义所有次解组成的集合为

$$\mathcal{A} := \{v \in \mathrm{USC}(\overline{\Omega}) : F(D^2 v) \geq 0 \ \text{ in } \ \Omega, \ v \leq g \ \text{ on } \ \partial\Omega\}.$$

然后，我们可以定义 $\mathcal{A}$ 中所有次解的逐点上确界，

$$u(x) := \sup_{v \in \mathcal{A}} v(x).$$

注意，由于常值函数 $-\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ 属于 $\mathcal{A}$，因此该集合非空。还要注意，根据比较原理，$\mathcal{A}$ 的所有元素都必须小于常数 $\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$，因此 u 有界。

我们定义上半连续包络

$$u^*(x) = \sup\{\limsup_{k\to\infty} u(x_k) : x_k \to x\}.$$

注意，根据引理 4.15，我们有 $F(D^2 u^*) \geq 0$ 在 Ω 中。

证明的策略如下。我们首先证明在 $\partial\Omega$ 上 $u^* = g$。这意味着 $u^* \in \mathcal{A}$，因此 $u^* = u$。然后，完成这一步后，我们将把 u_* 定义为 u 的下半连续包络，并证明 u_* 是一个上解。根据比较原理，这将意味着 $u_* \geq u$，从而得到 $u_* = u$。这意味着 u 是连续的，并且既是次解又是上解，正如所要求的那样。

步骤 *1.* 我们先证明在 $\partial\Omega$ 上 $u^* = g$，并且 u^* 在 $\partial\Omega$ 上连续。具体而言，我们证明：对每个 $x_\circ \in \partial\Omega$，以及每个满足 $x_k \in \Omega$ 的 $x_k \to x_\circ$，都有 $\liminf_{k\to\infty} u^*(x_k) = \limsup_{k\to\infty} u^*(x_k) = g(x_\circ)$。

令 $\varepsilon > 0$，并定义

$$w_\varepsilon^- := g(x_\circ) - \varepsilon + k_\varepsilon \psi_- = g(x_\circ) - \varepsilon - k_\varepsilon \psi_+,$$

其中，$k_\varepsilon > 0$ 取得足够大（取决于 ε，也取决于 g 和 Ω），使得在 $\partial\Omega$ 上有 $w_\varepsilon^- \leq g$，而 $\psi_- = -\psi_+$ 是在 $x_\circ$ 处由性质 (4.13) 给出的函数。我们还定义

$$w_\varepsilon^+ := g(x_\circ) + \varepsilon + k_\varepsilon \psi_+,$$

其中，$k_\varepsilon > 0$ 满足在 $\partial\Omega$ 上有 $w_\varepsilon^+ \geq g$（不妨在必要时将其取大一些，假设它与之前相同）。

根据极值算子 (4.3) 的性质，我们有 $\mathcal{M}^-(D^2 w_\varepsilon^-) = k_\varepsilon \mathcal{M}^-(D^2 \psi_-) \geq 0$ 且 $\mathcal{M}^+(D^2 w_\varepsilon^+) = k_\varepsilon \mathcal{M}^+(D^2 \psi_+) \leq 0$ 在 Ω 中。特别地，由 (4.6)（回忆一下 $F(0) = 0$），

$$F(D^2 w_\varepsilon^-) \geq 0 \qquad \text{and} \qquad F(D^2 w_\varepsilon^+) \leq 0 \qquad \text{in} \quad \Omega,$$

且 $w_\varepsilon^- \in \mathcal{A}$。注意，由于 ψ_-的连续性，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在某个 $\delta > 0$，使得 $w_\varepsilon^- \geq g(x_\circ) - 2\varepsilon$ 在 $B_\delta(x_\circ) \cap \Omega$ 中。由此得到，$u^* \geq w_\varepsilon^- \geq g(x_\circ) - 2\varepsilon$ 在 $B_\delta(x_\circ) \cap \Omega$ 中，因此若 $x_k \to x_\circ$，则

$$\liminf_{k\to\infty} u(x_k) \geq g(x_\circ) - 2\varepsilon.$$

另一方面，根据比较原理，对于任意 $\varepsilon > 0$，$\mathcal{A}$ 中的所有元素都小于 w_ε^+。同样，由于 ψ_+的连续性，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在某个 $\delta > 0$，使得 $w_\varepsilon^+ \leq g(x_\circ) + 2\varepsilon$ 在 $B_\delta(x_\circ) \cap \Omega$ 中。因此，$u^* \leq w_\varepsilon^+ \leq g(x_\circ) + 2\varepsilon$ 在 $B_\delta(x_\circ) \cap \Omega$ 中，于是若 $x_k \to x_\circ$，则

$$\limsup_{k\to\infty} u(x_k) \leq g(x_\circ) + 2\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，我们有：若 $x_k \to x_\circ$，则

$$\lim_{k\to\infty} u^*(x_k) = g(x_\circ).$$

因此，$u^* = g$ 在 $\partial\Omega$ 上，且 u 在 $\partial\Omega$ 上连续。特别地，我们有$u^* \in \mathcal{A}$，并且（由于 $u^* \geq u$）$u^* \equiv u_\circ$ 这意味着 $u \in$ 属于 USC(Ω)，且$F(D^2u) \geq 0$ 在 Ω 中。

步骤 2. 现在，我们证明 u 也是一个上解。为此，我们考虑它的下半连续包络 u_*（4.12），并证明在 Ω 中，$F(D^2u_*) \leq 0$。

首先注意到，由于 u 在边界上连续（根据步骤 1），因此 $u_* = g$ 在 $\partial\Omega$ 上。反设 u_* 不是上解，也就是说，存在某个 $x_\circ \in\Omega$，使得对于某个 $\phi \in C^2$，有 $\phi(x_\circ) = u_*(x_\circ)$，$\phi \leq u_*$，但 $F(D^2\phi(x_\circ)) > 0$。

如有必要，取 $\bar{\phi} = \phi - |x - x_\circ|^4$ 后，我们可以假设当$x \neq x_\circ$时 $\phi < u_*$，且仍有 $F(D^2\phi(x_\circ)) > 0$。注意，由于 F和 $D^2\phi$的连续性，对于某个充分小的 $\rho > 0$，在 $B_\rho(x_\circ)$ 中有 $F(D^2\phi) > 0$。

另一方面，考虑 $\phi+\delta$对 $\delta > 0$，并定义 $u_\delta := \max\{u, \phi+\delta\}$。由于对于 $x \neq x_\circ$，$\phi(x) < u_*(x) \leq u(x)$，因此当 $\delta > 0$ 足够小时，我们有 $\phi_\delta < u$ 在 $B_\rho(x_\circ)$ 之外。

现在注意到，u_δ 是次解，因为它在$B_\rho(x_\circ)$之外与 u 重合，并且它在 $B_\rho(x_\circ)$ 中是两个次解的最大值。这意味着 $u_\delta \in \mathcal{A}$，从而 $u_\delta \leq u_\circ$ 然而，这意味着 $\phi + \delta \leq u$在 Ω 中处处成立，因此 $\phi + \delta \leq u_*$，这就产生了矛盾。因此，u_* 必定是上解。

但接着，再次根据比较原理，由于 u 是次解且 $u = u_* = g$ 在 $\partial\Omega$ 上，我们得到 $u_* \geq u$ 在 Ω 中成立，这意味着 $u = u_*$。

因此，u 是连续的，既是次解也是上解，并且$u = g$ 于 $\partial\Omega$上。证明至此完成。□

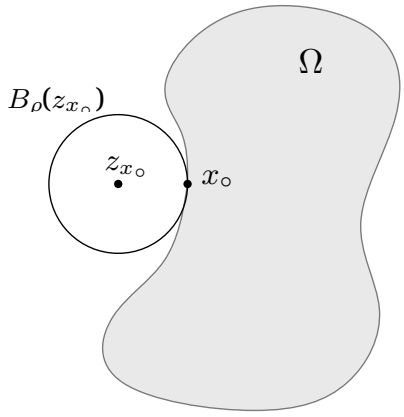


图 4.3. 推论 4.18 证明中所用构造的表示。

由此，我们得到以下结论。

推论 4.18. 设 Ω 为任意有界 C^2 区域，且 $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$是一致椭圆的。那么，对于任意连续的 $g \in C(\partial\Omega)$，狄利克雷问题

$$\begin{cases} F(D^2u) &= 0 \quad in\ \Omega \\ u &= g \quad on\ \partial\Omega, \end{cases}$$

存在唯一的粘性解。

证明. 结论由前一定理得出，我们只需验证任意 C^2 区域都满足 (4.13)。为此，我们需要在每个边界点 $z \in \partial\Omega$ 处构造一个合适的屏障函数。

注意，在 Ω 严格凸这一非常简单的情形下，这样的屏障函数ψ_+ 可以简单地取为一个超平面，其零水平集在给定边界点处与 Ω 相切，并且在 Ω 中为正。

一般而言，由于 Ω 是一个有界 C^2 区域，它满足某个统一半径 $\rho > 0$下的外球条件：也就是说，对于 Ω 中的每个点 $x_\circ \in \partial$，存在某个点 $z_{x_\circ} = z(x_\circ) \in \Omega^c$ 以及一个球 $B_\rho(z_{x_\circ})$，使得$B_\rho(z_{x_\circ}) \subset \Omega^c$，并且 $B_\rho(z_{x_\circ}) \cap \partial\Omega = \{x_\circ\}$。见图 4.3。

让我们为 C^2 区域构造由 (4.13) 给出的屏障函数 ψ_+。考虑 $\mathbb{R}^n \setminus B_\rho$ 中的函数 ψ，其中 $\rho > 0$ 由外球条件给出，

$$\psi(x) = e^{-\alpha\rho^2} - e^{-\alpha|x|^2},$$

其中某些 $\alpha > 0$ 也需要选定。

注意，

$$e^{\alpha|x|^2}D^2\psi(x) = -4\alpha^2\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \dots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & \dots & \dots & x_n^2 \end{pmatrix} + 2\alpha\mathrm{Id}$$
$$= 2\alpha\mathrm{Id} - 4\alpha^2 xx^T.$$

那么，对于 $|x| \geq \rho$ 我们有

$$e^{\alpha|x|^2}\mathcal{M}^+(D^2\psi) \leq 2\alpha\mathcal{M}^+(\mathrm{Id}) - 4\alpha^2\mathcal{M}^-(xx^T) = 2\alpha n\Lambda - 4\alpha^2\lambda|x|^2$$
$$\leq 2\alpha(n\Lambda - 2\alpha\lambda\rho^2).$$

特别地，如果我们选择 $\alpha \geq \frac{n\Lambda}{2\lambda\rho^2}$，则有

$$\mathcal{M}^+(D^2\psi) \leq 0 \quad \text{in} \quad B_\rho^c.$$

因此， ψ 的平移是(4.13)中的函数 ψ_+ 的良好候选者。

现在令 $x_\circ \in \partial\Omega$ 为边界上的任意一点，并取 $\psi_+(x) := \psi(x - z_{x_\circ})$。显然，$\psi_+(x_\circ) = 0$，且对于任意$x \in \Omega \setminus \{x_\circ\}$，$\psi_+(x) > 0$。另一方面，根据上面的讨论，我们知道$\mathcal{M}^+(D^2\psi_+) \leq 0$。因此，$\Omega$ 满足(4.13)。□

注4.19 （利普希茨区域）。实际上可以证明，任意有界利普希茨区域也满足(4.13)。特别地，这说明在此类区域中存在黏性解。

最后，我们还有如下结论：

命题 4.20 (粘性解的稳定性)。设 F_k 是一列一致椭圆算子（其椭圆性常数为 λ 和 Λ），并设 $u_k \in C(\Omega)$ 满足 $F_k(D^2u_k) = 0$ 在 Ω 中以粘性意义成立。

假设 F_k 在紧集上一致收敛于 F，且 $u_k \to u$ 在 Ω 的紧集上一致收敛。那么， $F(D^2u) = 0$ 在 Ω 中以粘性意义成立。

证明。证明采用了与引理 4.15 的证明相同的思路。

设 $x_\circ \in$ 在 Ω 中，且 $\phi \in C^2$ 满足 $\phi(x_\circ) = u(x_\circ)$，并且 $\phi \leq u$ 在 Ω 中。取 $\bar{\phi}(x) = \phi(x) + |x - x_\circ|^4$，则 $u - \bar{\phi}$ 在 $x_\circ$处取得严格局部最大值。

现在令 $v_k := u_k - \phi_\circ$ 取一个子序列，根据引理 4.15 证明中的步骤 1，存在一个序列 $x_k \to x_\circ$，使得 $u_k - \phi$ 在 x_k处取得局部最大值；由 u_k 一致收敛到 u，我们还得到 $u_k(x_k) \to u(x_\circ)$。由于 u_k 特别是

关于算子 F_k 的粘性意义下的次解，因此我们有 $F_k(D^2\bar{\phi}(x_k)) \geq 0$。现在，由于 $x_k \to x_\circ$，且 F_k 一致收敛到 F，令 $k \to \infty$，得到 $F(D^2\bar{\phi}(x_\circ)) = F(D^2\phi(x_\circ)) \geq 0$。

特别地，u 是 F 的粘性次解。对 $-u$ 做同样的处理，我们得到 u 是粘性解。□

注 4.21. 我们已经看到，对于全非线性方程 $F(D^2u) =0$，粘性解具有存在性、唯一性和稳定性。对于更一般的方程，例如 $F(D^2u, x) = f(x)$，若其在 x 中具有连续系数，也可以得到同样的结论，见 [**CC95**]。然而，当我们想研究具有有界可测系数的非散度形式线性方程时

$$\sum a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) = 0 \tag{4.14}$$

事实证明，粘性解的表现并不那么理想；反例见 [**Nad97**]（另见 [**CCKS96**]）。这就是为什么我们不针对 **(4.14)** 这种特定形式的方程来定义粘性解，而是说当 u 满足以下条件时，它是一个具有有界可测系数的（非散度形式）方程的解

$$\mathcal{M}^-(D^2u) \leq 0 \leq \mathcal{M}^+(D^2u)$$

在粘性意义下，其中 $\mathcal{M}^\pm$ 是 Pucci 极值算子（回顾定义 4.6）。如注 4.8 所述，对于 C^2 函数 u，这两个不等式等价于说，u 是某些 系数$a_{ij}(x)$下方程 **(4.14)** 的解。

总结一下：对于粘性解，我们现在已经具备研究正则性问题所需的一切：

– 解的存在性。– 比较原理。–
一致极限下的稳定性。

4.4. 解的正则性：概述

在上一节中我们看到，对于任意（光滑）区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 和任意（连续）边界数据 g，都存在唯一的粘性解 $u \in C(\Omega)$，满足狄利克雷问题

$$\begin{cases} F(D^2u) &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

现在，主要问题在于正则性：

$$\begin{aligned} &\text{If } u \in C(B_1) \text{ solves } F(D^2u) = 0 \text{ in } B_1, \\ &\text{what can we say about the regularity of } u? \end{aligned}$$

下面的蕴含关系是否成立?

$$\text{(4.15)}\qquad \left\{\begin{array}{c} F\in C^\infty \text{ and} \\ \text{uniformly elliptic} \\ \& \\ F(D^2u)=0 \text{ in } B_1 \end{array}\right. \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad u\in C^\infty(B_{1/2}).$$

从某种意义上说，这是一个类似于希尔伯特第十九问题的问题。

全非线性方程的正则性：初步结果。假设u具有某种初始正则性，并且F是C^∞且一致椭圆的。那么，

$$F(D^2u)=0 \quad \underset{\partial_e}{\longrightarrow} \quad \sum_{i,j=1}^n F_{ij}(D^2u)\partial_{ij}(\partial_e u)=0,$$

其中

$$F_{ij}:=\frac{\partial F}{\partial M_{ij}}$$

是$F(M)$关于M_{ij}的导数。因此，如果我们记

$$a_{ij}(x):=F_{ij}(D^2u(x)),$$

那么我们将得到

$$a_{ij}(x) \text{ is uniformly elliptic}, \quad 0<\lambda \mathrm{Id}\le (a_{ij}(x))_{i,j}\le \Lambda \mathrm{Id},$$

这得益于F的一致椭圆性。

记

$$v=\partial_e u,$$

我们有

$$F(D^2u)=0 \quad \Longrightarrow \quad v=\partial_e u \quad \text{solves} \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{ij}(\partial_e u)=0,$$

其中$a_{ij}(x)=F_{ij}(D^2u(x))$。

现在，若$u\in C^2$（或$C^{2,\alpha}$），则系数$a_{ij}(x)$是连续的（或$C^{0,\alpha}$），因此由Schauder型估计可得，

$$u\in C^2 \Rightarrow a_{ij}\in C^0 \Rightarrow v\in C^{1,\alpha} \Rightarrow u\in C^{2,\alpha} \Rightarrow \cdots \Rightarrow u\in C^\infty,$$

其中我们使用了自举论证

$$u\in C^{2,\alpha} \Rightarrow a_{ij}\in C^{0,\alpha} \Rightarrow u\in C^{3,\alpha} \Rightarrow a_{ij}\in C^{1,\alpha} \Rightarrow \cdots \Rightarrow u\in C^\infty.$$

换句话说，这表明有如下结果。

命题 4.22。设F一致椭圆且C^∞。设u是$F(D^2u)=0$在B_1中的任意解，并假设$u\in C^2$。则，$u\in C^\infty$。

证明。思路与上文几行中所述的相同，但我们只能使用 $u \in C^2$（在之前的论证中，我们使用了 u 是 C^3）。为此，我们采用增量商，如定理 3.5 中所示。

设 $u \in C^2(B_1)$，并令 $h \in \mathbb{R}^n$，其中 $|h|$ 足够小。注意到 F 是平移不变的，因此

$$F(D^2u(x)) = 0, \quad F(D^2u(x+h)) = 0 \quad \text{in} \quad B_{1-|h|}.$$

于是，

$$0 = F(D^2u(x+h)) - F(D^2u(x)) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}\big(u(x+h) - u(x)\big),$$

其中

$$a_{ij}(x) = \int_0^1 F_{ij}\big(tD^2u(x+h) + (1-t)D^2u(x)\big)\,dt$$

（参见定理 3.5 或定理 4.9 的证明）。这只是微积分基本定理。特别地，由于 F 是一致椭圆的，$(a_{ij})_{i,\,j}$ 是一致椭圆的（具有相同的椭圆性常数）。由于 $u \in C^2$ 且 F 是光滑的，a_{ij} 是连续的。也就是说，${}^{u_{(\cdot+h)}}{}_{|h|}{}^{-u}$ 满足非散度形式的方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}\left(\frac{u(x+h)-u(x)}{|h|}\right) = 0 \quad \text{in} \quad B_{1-|h|},$$

对于某些连续且一致椭圆的系数 a_{ij}。根据具有连续系数的方程的先验估计（命题 2.31），我们知道，对于任意 $\alpha \in (0,\ 1)$，都有

$$\left\|\frac{u(\cdot+h)-u}{|h|}\right\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \le C\left\|\frac{u(\cdot+h)-u}{|h|}\right\|_{L^\infty(B_{3/4})} \le C\|u\|_{C^{0,1}(B_{3/4})},$$

对于某个与 h无关的常数 C。根据**(H7)**，由第 1 章中的 (1.7) 式，我们得到 $u \in C^{2,\,\alpha}(B_{1/2})$，并通过覆盖论证 $u \in C^{2,\,\alpha}$在 B_1 内。

现在，我们进行迭代。

由于 $u \in C^{2,\,\alpha}$ 在 B_1内，我们有 ${}^{u_{(\cdot+h)}-u}{}_{|h|} \in C^{2,\,\alpha}$ 在 $B_{1-|h|}$内，对所有的 h 都成立。结合 F 光滑这一点，可得 $a_{ij} \in C^{0,\,\alpha}$ 在 $B_{1-|h|}$内。也就是说，现在 ${}^{u_{(\cdot+h)}}{}_{|h|}{}^{-u}$ 满足一个系数为赫尔德连续的非散度型方程。由定理 2.20 可知，${}^{u_{(\cdot+h)}}{}_{|h|}{}^{-u}$ 在 $C^{2,\,\alpha}$ 范数下具有一致有界性，进而得到 $u \in C^{3,\,\alpha}$ 在 B_1 内成立。我们可以利用推论 2.21 中的高阶估计，重复这一论证，从而得到所需结果。□

这与希尔伯特第十九问题中的情形类似：在该问题中，我们证明了 $C^1 \Rightarrow C^\infty$。

不过请注意，对于全非线性方程，“有待填补的差距”（从 C^0 到 C^2）比希尔伯特第十九问题中的“差距”（从 H^1 到 C^1）更大。

现在，需要回答的核心问题是：

解是否总是 C^2?

特别是，我们想知道粘性解是否总是经典解，因此狄利克雷问题是否总能有经典解。

全非线性方程的正则性。 前述论证中的一个重要观察如下：

$$\begin{cases} u \text{ solves} \\ F(D^2u) = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} v = \partial_e u \text{ solves } \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{ij} v = 0, \\ \text{with } a_{ij}(x) = F_{ij}(D^2u(x)). \end{cases}$$

这意味着，至少在形式上，任意全非线性方程的任意解的导数都满足一个具有有界可测系数的方程。

通过考察增量商，可以严谨地论证这一点：

回顾（4.5）中的等价关系

$$F \text{ is uniformly elliptic}$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathcal{M}^-(D^2(u-v)) \le F(D^2u) - F(D^2v) \le \mathcal{M}^+(D^2(u-v)),$$

其中 $\mathcal{M}^\pm$ 是 Pucci 算子。因此，

$$\mathcal{M}^-\big(D^2(u(x+h)-u(x))\big) \le F(D^2u(x+h)) - F(D^2u(x)) \le \\ \le \mathcal{M}^+\big(D^2(u(x+h)-u(x))\big).$$

利用 $F(D^2u) = 0$，并记

$$v_h(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{|h|},$$

于是得到

$$\begin{cases} \mathcal{M}^+(D^2v_h) \ge 0 \\ \mathcal{M}^-(D^2v_h) \le 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c} \text{equation with bounded} \\ \text{measurable coefficients} \end{array} \right).$$

现在的问题是：对于散度型方程，我们已经证明

$$\begin{cases} \text{equation with bounded} \\ \text{meas. coeff. } \operatorname{div}(A(x)\nabla v) = 0 \end{cases} \Longrightarrow v \in C^{0,\alpha} \quad \text{(De Giorgi-Nash)}.$$

对于非散度形式的方程，是否也有类似的结果？答案是 YES。

定理 4.23 （Krylov–Safonov，1979年）。 设 $0 < \lambda \leq \Lambda$ 为椭圆性常数，且 $v \in C$ （ B_1 ） 为下述方程的任意解

$$\begin{cases} \mathcal{M}^+(D^2v) & \geq & 0 & in & B_1 \\ \mathcal{M}^-(D^2v) & \leq & 0 & in & B_1, \end{cases} \tag{4.16}$$

（在粘性意义下）。则，

$$\|v\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\|v\|_{L^\infty(B_1)}$$

对于某个较小的 $\alpha > 0$ 和 C，其仅取决于 n、 λ和 Λ。

这一结果由 [**KS79**]（针对经典解）证明；另见 [**Moo19**]，其中给出了更近期且更简化的证明，以及 [**DS21**]，其中给出了该结果的推广。

回顾一下（见第4.1节末尾），对于 C^2 函数，(4.16) 实际上等价于 v 求解如下类型的方程 $\sum_{i,\ j} a_{ij}(x)\partial_{ij}v$，其中系数是一致椭圆的。因此，(4.16) 被称为“具有有界可测系数的非散度型方程”。

由此结果可得以下结论。为简单起见，我们假设 $F(0) = 0$，否则请参见注4.16。

定理 4.24 (克雷洛夫–萨福诺夫，1979年)。 设 F一致椭圆， $F(0) = 0$，且 $u \in C(B_1)$ 是以下方程的任意粘性解

$$F(D^2u) = 0 \quad in \quad B_1.$$

于是，

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\|u\|_{L^\infty(B_1)}$$

其中某个较小的 $\alpha > 0$ 和 C 仅依赖于 n、 λ和 Λ。

证明。 根据命题 4.13（取 $v \equiv 0$），函数 $u \in C(B_1)$ 本身满足一个系数有界可测的方程

$$\begin{cases} \mathcal{M}^+(D^2u) & \geq & 0 & \text{in} & B_1 \\ \mathcal{M}^-(D^2u) & \leq & 0 & \text{in} & B_1. \end{cases}$$

因此，根据定理 4.23， $u \in C^{0,\ \alpha}$ 在 B_1 内。现在，对于 $\beta \in (0, 1]$，取

$$v_h(x) := \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|^\beta},$$

根据命题 4.13，它也满足一个系数有界且可测的方程，

$$\begin{cases} \mathcal{M}^+(D^2v_h) & \geq & 0 & \text{in} & B_{1-|h|} \\ \mathcal{M}^-(D^2v_h) & \leq & 0 & \text{in} & B_{1-|h|}. \end{cases}$$

然后，根据定理 4.23，我们有

$$\|v_h\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \le C\|v_h\|_{L^\infty(B_{1-|h|})} \le C\|u\|_{C^\beta(B_1)}.$$

由 **(H7)**，我们推得

$$\|u\|_{C^{\alpha+\beta}(B_{1/2})} \le C\|u\|_{C^\beta(B_1)},$$

前提是 $\alpha+\beta$ 不是整数，且 $\beta \le 1$。

将此估计用于 $\beta = \alpha$、2α..... $k\alpha$，经过有限步即可得到 $C^{1,\alpha}$ 正则性。

□

注记 4.25. 请注意：

• 对于有界可测系数，$C^{0,\alpha}$ 估计（定理 4.23）是在维数 $n \ge 3$ 下所能得到的最佳估计；参见 [**Saf87**]。

• 从某种意义上说，定理 4.23 是 De Giorgi– Nash 关于散度型方程结果的对应版本。然而，这还不足以获得 C^2全非线性方程解的正则性。

总结：我们有 $F(D^2u) = 0 \Rightarrow u \in C^{1,\alpha}$ (对于某个较小的 $\alpha > 0$)。此外，$u \in C^2 \Rightarrow u \in C^\infty$。然而，我们（目前）还不知道是否

$$u \in C^{1,\alpha} \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad u \in C^2.$$

在二维情形中，正如我们在定理 4.9（作为先验估计）中所看到的，结果表明我们可以做得更好，而且所有解都是 $C^{2,\alpha}$。这是因为，在 $\mathbb{R}^2$中，有界可测系数方程的解不仅是 $C^{0,\alpha}$，而且是 $C^{1,\alpha}$。

因此，我们有以下结论。

定理 4.26。设 F： $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ 一致椭圆且光滑。设$u \in C(B_1)$ 是任意一个粘性解，满足

$$F(D^2u) = 0 \quad in \quad B_1 \subset \mathbb{R}^2.$$

那么 $u \in C^\infty$。

这就彻底回答了二维中的问题（4.15）。

在高维中，Evans [**Eva82**]和 Krylov [**Kry82**]独立证明了一个著名结果，内容如下。

定理 4.27（埃文斯–克雷洛夫，1982年）。设 F 是任意一个**凸**（或凹）一致椭圆算子，且满足 $F(0) = 0$。设 $u \in C(B_1)$ 是任意一个粘性解，满足

$$F(D^2u) = 0 \quad in \quad B_1.$$

那么，

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \le C\|u\|_{L^\infty(B_1)},$$

对于某些仅依赖于 n、λ和 Λ 的 $\alpha > 0$ 和 C。特别地，若 F 光滑，则 $u \in C^\infty$。

我们参见 [**CS10**]，其中给出了这一结果的一个更简短证明。

因此，对于满足 **(4.2)** 的任意解，若 F 一致椭圆且光滑，则有：

- 若 $u \in C^2$，则 $u \in C^\infty$。
- $u \in C^{1,\alpha}$ 总是成立（克雷洛夫–萨福诺夫，1979年）。
- 在二维中，$u \in C^\infty$ （Nirenberg，1952年）。
- 若 F 是凸的，则 $u \in C^\infty$ （埃文斯–克雷洛夫，1982年）

问题：一般情况下会怎样?

数十年来，是否所有解都是C^2 一直是个未决问题。这个问题最终由纳迪拉什维利和弗拉杜茨在21世纪初 [**NV07、NV08、NV13**]给出了答案：

定理4.28 （纳迪拉什维利–弗拉杜茨，2007—2013年）。存在不 C^2的解（4.2）。这些反例存在于维数为 $n \geq 5$的情形。

此外，对于每个 $\tau > 0$，都存在一个维数 n 以及椭圆性常数 λ 和 Λ，使得存在解 u 满足（D^2u） $= 0$ ，且$u \notin C^{1,\tau}$。

更多参考资料和详细内容请参阅专著 [**NTV14**] 。

目前尚不知道 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}^4$中会发生什么。这是椭圆型偏微分方程领域最引人注目的未决问题之一。

4.5. 进一步结果与未决问题

如上所述，关于该问题的一个主要未解决问题是

$$F(D^2u) = 0 \quad \text{in} \quad B_1 \subset \mathbb{R}^n \tag{4.17}$$

如下：

设 u 是 $\mathbb{R}^3$ 或 $\mathbb{R}^4$中的任意一个方程 **(4.17)** 的解。是否有 $u \in C^2$?

我们已经看到，一般而言，不能认为全非线性方程（在维数为 $n \geq 5$ 时）的解在 F 仅一致椭圆这一假设下是 C^2 。另一方面，凸性是一项强条件，在此条件下可以达到 C^2 正则性；遗憾的是，在一些重要应用中并不满足这一条件。即便如此，当 F 是凸且一致椭圆的（不一定光滑）时，解的最优正则性究竟如何，仍不清楚。定理 4.27 目前只能给出某个较小 $\alpha > 0$下的先验 $C^{2,\alpha}$ 正则性。

这些观察一方面促使我们更深入地研究一般全非线性椭圆方程解的正则性（以及奇异性的大小），另一方面也促使我们研究凸性假设下的最优正则性。

部分正则性。回顾一下，F 的椭圆性要求意味着 F 是利普希茨的。在稍严格一些的要求下，即 F也满足 C^1，Armstrong、Silvestre 和 Smart 在 [**ASS12**]中证明了以下部分正则性 结果：

定理 4.29 ([**ASS12**])。设 F 一致椭圆，并进一步假设 $F \in C^1$。令 $u \in C^0(B_1)$ 为 *(4.17)* 的任意一个粘性解。

那么，存在一些仅依赖于 n、 λ和 Λ的 $\varepsilon > 0$，以及一个闭子集$\Sigma \subset B_1$，满足维数$_{\mathcal{H}}\, \Sigma \leq n - \varepsilon$，使得 $u \in C^2(B_1 \setminus \Sigma)$。

这里，$\dim_{\mathcal{H}}$ 表示集合的豪斯多夫维数；参见 [**Mat95**]。注意，如果 $\dim_{\mathcal{H}} \Sigma \leq n - \varepsilon$，那么特别地 Σ 测度为零。

这是目前已知的关于维数为 $n \geq 3$的（非凸）全非线性方程解的最佳部分正则性结果。值得注意的是，奇异集的大小尚不清楚是否最优（它可能小得多！）。此外，一个重要的未决问题是，去掉正则性假设 $F \in C^1$后，同样的结论是否仍然成立。

当 F是凸函数时的最优正则性。当 F是凸且一致椭圆时，已知方程 (4.17) 的解属于 $C^{2,\,\alpha}$ 其中某个小的 $\alpha > 0$。如果$F \in C^\infty$，那么自举论证可得 u具有更高的正则性，但这需要 F 具有更高的正则性。如果我们只要求 F 是凸且一致椭圆，会怎样?

由于 F 是凸的，表达式 (4.17) 可以改写为一族线性一致椭圆算子的上确界：

$$\sup_{a \in \mathcal{A}} L_a u = 0 \quad \text{in} \quad B_1 \subset \mathbb{R}^n,$$

也称为贝尔曼方程（见附录 C 中的 (C.3)），其中每个算子 L_a 都是线性一致椭圆算子。

这里尚未解决的问题是：

贝尔曼方程的解具有怎样的最优正则性?

在仅有两个不同算子的简单模型中，前一个方程为

$$\max\{L_1 u, L_2 u\} = 0 \quad \text{in} \quad B_1 \subset \mathbb{R}^n. \tag{4.18}$$

这方面已知的最佳结果由 Caffarelli、De Silva 和 Savin 于 2018 年证明，确立了二维情形下 **(4.18)** 的解的最优正则性：

定理 4.30 ([**CDS18**])。 设 u 是$B_1 \subset \mathbb{R}^2$中式(4.18) 的任意粘性解。那么

$$\|u\|_{C^{2,1}(B_{1/2})} \leq C\|u\|_{L^\infty(B_1)},$$

其中常数 C 仅依赖于 λ 和 Λ。

在 [**CDS18**] 中用于证明这一结果的方法在高维 $n \geq 3$下行不通，因此下面的问题仍未解决：

设 u 是式 **(4.18)** 的任意解，且满足 $n \geq 3$。是否有 $u \in C^{2,1}$?

第 5 章

障碍问题

在最后这一章中，我们将关注第三类非线性椭圆型偏微分方程：**自由边界问题**。对于这类问题，我们关注的不再只是解 u 的正则性，还要研究先验未知的相界面 Γ（自由边界）。

正如后文将要解释的，物理学、工业、生物学、金融及其他领域中有许多问题，都可以用具有自由边界的偏微分方程来描述。这类问题中有许多可以写成变分不等式，其解可通过极小化一个约束能量泛函得到。其中最重要、最典型的例子之一就是**障碍问题**。[1]

给定一个光滑函数 φ，障碍问题如下：

$$\text{minimize} \qquad \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \qquad \text{among all functions } v \geq \varphi. \tag{5.1}$$

这里，极小化是在边界条件 $v|_{\partial\Omega} = g$ 的约束下进行的。

这类问题的含义很明确：我们要寻找能量最小的函数 v，但容许函数所构成的集合仅包含那些位于某个特定“障碍物” φ之上的函数。

在二维情形中，可以将解 v 想象成一张具有弹性、且被限制在 φ 上方的“膜”（见图 5.1）。

[1]其他重要的自由边界问题还包括单相问题或伯努利问题、薄障碍问题或分数阶障碍问题等。感兴趣的读者可参阅 [**CS05, PSU12, Vel23, Fer22**]及其中的参考文献。

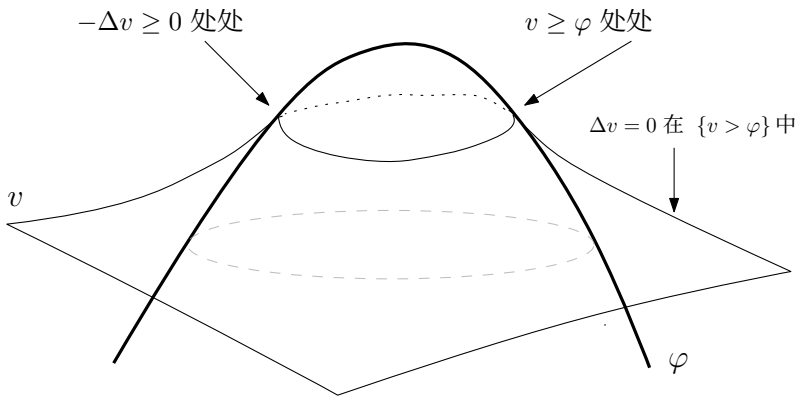


图 5.1。 函数 v 在所有具有相同边界值且位于障碍物上方的函数中，使狄利克雷能量达到最小。

极小化问题的欧拉–拉格朗日方程如下：

$$\left\{\begin{array}{rcll} v & \geq & \varphi & \text{in } \Omega \\ \Delta v & \leq & 0 & \text{in } \Omega \\ \Delta v & = & 0 & \text{in the set } \{v > \varphi\}, \end{array}\right. \tag{5.2}$$

并满足边界条件 $v|_{\partial\Omega} = g$。

事实上，注意到如果我们将 $\mathcal{E}(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx$ 记为，那么我们就有

$$\mathcal{E}(v + \varepsilon\eta) \geq \mathcal{E}(v) \quad \text{for every } \varepsilon \geq 0 \text{ and } \eta \geq 0,\ \eta \in C_c^\infty(\Omega),$$

这推出 $\Delta v \leq 0$ 属于 Ω。也就是说，我们可以用非负函数（$\varepsilon\eta$）扰动 v，并且总能得到容许函数（$v + \varepsilon\eta$）。然而，由于约束 $v \geq \varphi$，我们不能在整个 Ω 中用负函数扰动 v，而只能在集合 $\{v > \varphi\}$ 中进行。因此，我们在 Ω 中处处得到 $\Delta v \leq 0$，但在 $\{v > \varphi\}$ 中仅得到 $\Delta v = 0$。（我们稍后将证明，(5.1) 的任何极小化子v 都是连续的，因此 $\{v > \varphi\}$ 是开集。）

另一种方法是考虑 $u := v - \varphi$，该问题等价于

$$\left\{\begin{array}{rcll} u & \geq & 0 & \text{in } \Omega \\ \Delta u & \leq & f & \text{in } \Omega \\ \Delta u & = & f & \text{in the set } \{u > 0\}, \end{array}\right. \tag{5.3}$$

其中 $f := -\Delta\varphi$。

这样的解 u 可以按如下方式得到：

$$\text{minimize} \quad \int_\Omega \left\{\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu\right\} dx \quad \text{among all functions } u \geq 0. \tag{5.4}$$

换句话说，我们可以通过添加一个右端项 f，让障碍物 变成零。这里，极小化受边界条件$u|_{\partial\Omega} = \tilde{g}$约束，其中 $\tilde{g} := g - \varphi$。

关于欧拉–拉格朗日方程。 如上所述，极小化问题 (5.1) 的欧拉–拉格朗日方程为：

(i) $v \geq \varphi$ 在 Ω 中（v 在障碍物上方）。*(ii)* 在 *Ω* 中（是一个上解）。
(iii) $\Delta v = 0$ 在 $\{v > \varphi\}$ 中（v 在未与障碍物接触的地方是调和的）。

这些是不等式，而非单个偏微分方程。或者，也可以用以下方式写出欧拉–拉格朗日方程：

$$\min\{-\Delta v,\, v - \varphi\} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

（注意，这与全非线性方程 $\min\{L_1 u,\, L_2 u\} = 0$ 相似，但在当前情形下，两个算子之一是零阶的。）

当然，对于等价问题 (5.3) 也可以这样处理。此外，在这种情况下，极小化问题 (5.4) 等价于

$$\text{minimize} \qquad \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + f u^+ \right\} dx, \tag{5.5}$$

其中 $u^+ = \max\{u, 0\}$。这样，我们可以将问题看作泛函中含有一个非光滑项 u^+ 的极小化问题，而非受约束的极小化问题。这个泛函的欧拉–拉格朗日方程为

$$\Delta u = f \chi_{\{u>0\}} \quad \text{in} \quad \Omega. \tag{5.6}$$

（这里，χ_A 表示集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的示性函数。）我们稍后会详细说明这一点。

自由边界。 让我们仔细考察障碍问题 (5.3)。

这类问题最重要的特征之一是它有两个未知量：解 u和接触集 $\{u = 0\}$。换句话说，Ω 中有两个区域：一个区域内 $u = 0$；另一个区域内 $\Delta u = f$。

这些区域由极小化问题 (5.4) 刻画。此外，若记

$$\Gamma := \partial\{u > 0\} \cap \Omega,$$

那么这就称为自由边界，见图 5.2。

障碍问题是一个自由边界问题，因为问题中涉及一个未知界面 Γ。

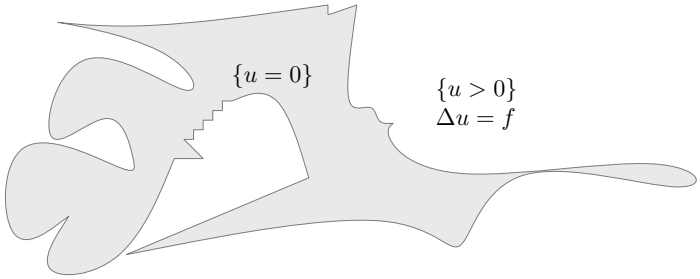


图 5.2. 自由边界原则上可能非常不规则。

此外，不难看出， u 是非负上解这一事实必然意味着在 Γ 上有 $\nabla u = 0$ ，也就是说， $u \geq 0$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{in } \{u > 0\} \\ u &= 0 \quad \text{on } \Gamma \\ \nabla u &= 0 \quad \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

这是书写该问题的欧拉–拉格朗日方程的另一种方式。这样一来，界面 Γ 就清晰地呈现出来了，而且我们看到，在 Γ上同时具有两种狄利克雷和诺伊曼条件。

这通常会是一个超定问题（在 Γ上有过多的边界条件），但由于 Γ 也是自由的，结果证明该问题有唯一解（当然， Γ 也是解的一部分）。

5.1. 一些动机与应用

我们简要谈谈研究障碍问题的一些主要动机与应用；相关内容将在附录 D 中进一步展开（另见附录 C）。有关障碍型问题的更多详情及进一步应用，请参阅以下著作： [**DL76、KS80、Rod87、Fri88、PSU12**], 。

流体渗滤。 所谓的大坝问题旨在描述水在多孔坝内部的渗滤。设有一座大坝，将两个水位不同的蓄水池分隔开来；大坝由可渗透水的多孔介质构成。于是，水会穿过大坝流动，而坝体内部则分为水流经的湿润部分和干燥部分。在这种情形下，压力关于各点水柱高度的积分满足障碍问题，而自由边界恰好对应于分隔大坝湿润部分和干燥部分的相界面。

相变。 斯特藩问题可追溯至 19 世纪，是最经典、最重要的自由边界问题之一。它描述了

发生相变的均匀介质的温度，通常是浸在水中的零度冰体。

在此背景下，温度 $\theta(x,t)$ 的积分，即 $u(x,t) := \int_0^t \theta$，满足抛物型障碍问题，

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= \chi_{\{u>0\}} \qquad \text{in} \quad \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ \partial_t u &\geq 0, \\ u &\geq 0. \end{cases}$$

分隔固相与液相的移动相界面恰好就是自由边界 $\partial\{u > 0\}$。

赫勒-肖流。 这个二维模型可追溯至 1898年，描述的是两块平行放置、间隔极窄的平板之间的流体流动。流体力学中的各种问题都可以近似为赫勒-肖流，因此理解这种流动十分重要。

赫勒-肖池是一种实验装置，其中黏性流体被夹在两块平行板之间的狭窄间隙中。在某些区域，间隙中充满流体，而在其他区域则充满空气。向装置内注入液体（例如通过顶板上的一个小孔）时，液体所占区域会扩大。在此背景下，压力的积分对每个固定时刻 t 都满足障碍问题。与大坝问题类似，自由边界对应于流体区域与空气区域之间的界面。

最优停止、金融。 在概率论和金融学中，考虑随机过程的最优停止问题时会出现障碍问题。

事实上，考虑在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$内的随机游走（布朗运动），以及定义在同一区域上的收益函数 φ。我们可以在任意时刻停止随机游走，并获得其当前位置对应的收益。我们的目标是最大化期望收益（通过适当选择停止策略）。结果表明，从给定位置 x 出发所能获得的最高期望收益 $v(x)$ 满足障碍问题 (5.2)，其中接触集 $\{v = \varphi\}$ 是我们应立即停止随机游走并获取收益的区域，而 $\{v > \varphi\}$ 则是我们应当等待的区域（更多细节参见附录 C）。

相互作用粒子系统。 由大量相互作用粒子组成的系统出现在物理学、生物学或材料科学中。

在某些模型中，粒子相距较远时会相互吸引，靠近时则会受到排斥力。在统计力学中，其他相关模型里的粒子（例如电子）会因库仑

力而相互排斥，人们希望了解它们在某种约束它们的外场作用下的行为。

在这类模型中，一个自然且有趣的问题是确定“平衡构型”。例如，在库仑系统中，电荷会聚集在某个区域内，该区域的边界清晰可辨。有趣的是，这些问题等价于障碍问题——也就是说，由电荷产生的电势 $u = u(x)$ 满足这样的障碍问题——而接触集 $\{u = 0\}$ 对应于粒子聚集的区域。

准稳态电化学成形。 考虑电解液中的一块金属，在电势作用下，由于化学反应，金属随时间逐渐缩小。那么，电势关于时间的积分在每个固定时刻都满足障碍问题，其自由边界对应于金属在该时刻的形状。

热控制。 在适当条件下，仅使用加热设备来自动控制房间温度，也会导出障碍问题（此处针对温度）。这里，自由边界将加热设备正在运行的区域与未运行的区域分隔开来。

弹性。 最后，在弹性理论中，我们或许能找到障碍问题最直观的表示。设想一张只受张力作用（因此会试图使面积最小）的薄膜，它近似地满足障碍问题，其中接触区域就是薄膜与障碍物接触的区域。

5.2. 解的基本性质 I

现在我们来研究障碍问题解的基本性质：解的存在性、最优正则性和非退化性。

我们将先研究 (5.1) 的极小化子 $v \geq \varphi$ 的所有这些性质，然后在下一节中分别研究 (5.4) 或 (5.5) 的极小化子 $u \geq 0$。

这样做不仅是为了使论述完备、清晰，也能让我们从两种角度来看问题。例如，解的最优正则性的证明可以通过两种截然不同的方法完成，每种方法对应一种设定。

解的存在性。解的存在唯一性很容易由以下事实得出：泛函 $\int_\Omega |\nabla v|^2 dx$ 是凸的，而且我们要在闭凸集 $\{v \in H^1(\Omega) : v \geq \varphi\}$中将其最小化。

回顾一下，只要 w 在 $\partial\Omega$ 上的迹有定义， $w|_{\partial\Omega}$ 就表示该迹。

命题 5.1 （存在唯一性）。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任意有界利普希茨区域，并设 $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ 和 $\varphi \in H^1(\Omega)$ 满足

$$\mathcal{C} = \left\{ w \in H^1(\Omega) : w \geq \varphi \text{ in } \Omega,\ w|_{\partial\Omega} = g \right\} \neq \varnothing.$$

那么，在所有满足条件 $v \geq \varphi$ （在 Ω 中）且满足 $v|_{\partial\Omega} = g$ 的函数 $v \in H^1(\Omega)$ 中，存在唯一的极小化子 $\int_\Omega |\nabla v|^2 dx$ 。

证明。 证明与定理 1.10 的证明十分相似。事实上，设

$$\theta_\circ := \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w|^2 dx \ :\ w \in H^1(\Omega),\ w|_{\partial\Omega} = g,\ w \geq \varphi \text{ in } \Omega \right\},$$

也就是说，在所有容许函数 w 中， $\mathcal{E}(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx$ 的下确界。

取一列函数 $\{v_k\}$ ，使得

- $v_k \in H^1(\Omega)$
- $v_k|_{\partial\Omega} = g$ 和 $v_k \geq \varphi$ 在 Ω 中。
- $\mathcal{E}(v_k) \to \theta_\circ$ 如 $k \to \infty_\circ$

根据庞加莱不等式（定理 1.6），序列 $\{v_k\}$ 在 $H^1(\Omega)$ 中一致有界，因此子序列 $\{v_{k_j}\}$ 将收敛到某个函数 v ，在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛，在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛。此外，根据迹算子的紧性（见第 1 章中的 **(S5)** ），我们有 $v_{k_j}|_{\partial\Omega} \to v|_{\partial\Omega}$ 在 $L^2(\partial\Omega)$ 中，因此 $v|_{\partial\Omega} = g_\circ$ 此外，这样的函数 v将满足 $\mathcal{E}(v) \leq \liminf_{j\to\infty} \mathcal{E}(v_{k_j})$（根据第 1 章中 **(S4)** 里的 **(1.4)-(1.5)**），因此它将是能量泛函的极小化子。由于 $v_{k_j} \geq \varphi$在 Ω 中且 $v_{k_j} \to v$ 在 $L^2(\Omega)$ 中，我们有 $v \geq \varphi$ 在 Ω 中。因此，我们证明了极小化子 v的存在性。

极小化子的唯一性可由泛函 $\mathcal{E}(v)$ 的严格凸性推出，证明与定理 1.10 完全相同。□

与调和函数的情形一样，容易证明，若函数v 满足

$$\begin{cases} v \geq \varphi & \text{in } \Omega \\ \Delta v \leq 0 & \text{in } \Omega \\ \Delta v = 0 & \text{in the set } \{v > \varphi\}, \end{cases}$$

那么它实际上就是该泛函的极小化子。

构造障碍问题解有两种可选方法：将其构造为“障碍上方的最小超解”，或通过“惩罚问题”来构造。下面简要介绍这两种方法。

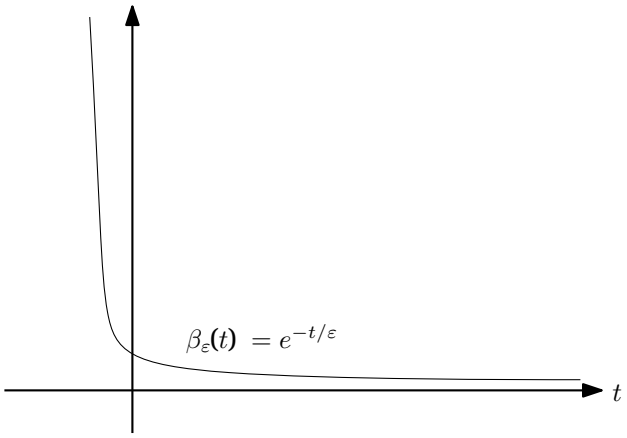


图 5.3. 函数 $\beta_\varepsilon \to \beta_0$ 如 $\varepsilon \downarrow 0$。

- 最小上解：这与第4章中所述的粘性解存在性有关。具体来说，我们考虑

$$v(x) := \inf\Big\{ w(x) : w \in C(\overline{\Omega}),\ -\Delta w \geq 0 \text{ in } \Omega,\ w \geq \varphi \text{ in } \Omega,\ w|_{\partial\Omega} \geq g \Big\}.$$

这里，Ω 中的不等式 $-\Delta w \geq 0$ 应在粘性意义下理解。

于是，如同在佩龙方法中（回顾第1章和第4章），可知v 本身是一个连续上解，它在 $\{v > \varphi\}$ 中满足 $\Delta v = 0$，因此它是障碍问题的解。因此，

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{least} \\ \text{supersolution} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{minimizer of} \\ \text{the functional} \end{array} \right\}.$$

- 惩罚问题：我们考虑 $\beta_\varepsilon :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 光滑且凸，并收敛到

$$\beta_0(t) := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{if} \quad t \geq 0 \\ \infty & \text{if} \quad t < 0. \end{array} \right.$$

例如，我们可以取 $\beta_\varepsilon(t) := e^{-t/\varepsilon}$，见图 5.3。

然后，我们将该泛函最小化

$$J_\varepsilon(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega \beta_\varepsilon(v-\varphi)dx,$$

并在 $\partial\Omega$ 上施加适当的边界条件，从而得到 Ω 中 $\Delta v_\varepsilon = \beta_\varepsilon'(v_\varepsilon - \varphi)$ 的一个解 $v_\varepsilon \in C^\infty$。

由于 $\beta_\varepsilon' \leq 0$ 处处成立，且对于 $t \geq 0$，$\beta_\varepsilon'(t) = 0$，因此我们有

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v_\varepsilon & \geq & 0 & \text{everywhere in } \Omega \\ \Delta v_\varepsilon & = & 0 & \text{in } \{v_\varepsilon > \varphi\}. \end{array} \right.$$

由于 $\varepsilon \to 0$，我们有 $v_\varepsilon \to v$，其中 v 是障碍问题的解。更多详情请参阅 [**PSU12**] 。

解的基本性质。 接下来我们证明，(5.1) 的任意极小化子 v 实际上都是连续的，并且满足 (5.2)。

从现在起，我们将不再考虑障碍物的正则性，并假设其光滑程度足以满足需要。这就是我们总是处理障碍物 $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ 的原因。对于 φ，在弱得多的正则性假设下，也可以得到类似结果；具体要求取决于要证明的结果类型。障碍物正则性的作用超出了本书的讨论范围，因此我们总是假设 φ 是光滑的。

我们从下面这个引理开始。

引理 5.2。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任意有界利普希茨区域，$\varphi \in C^\infty(\Omega)$，并且 $v \in H^1(\Omega)$ 是满足边界条件$v|_{\partial\Omega} = g$的 *(5.1)* 的任意极小化子。

那么，$-\Delta v \geq 0$ 在Ω中。

证明。令

$$\mathcal{E}(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx.$$

那么，由于 v 在所有高于障碍物 φ 的函数中（并且在 $\partial\Omega$上满足固定边界条件）使 $\mathcal{E}$ 取得最小值，我们有

$$\mathcal{E}(v + \varepsilon\eta) \geq \mathcal{E}(v) \quad \text{for every } \varepsilon \geq 0 \text{ and } \eta \geq 0,\ \eta \in C_c^\infty(\Omega).$$

这就得到

$$\varepsilon\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\eta + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dx \geq 0 \quad \text{for every } \varepsilon \geq 0 \text{ and } \eta \geq 0,\ \eta \in C_c^\infty(\Omega),$$

从而

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\eta \geq 0 \quad \text{for every } \eta \geq 0,\ \eta \in C_c^\infty(\Omega).$$

这意味着 $-\Delta v \geq 0$ 在Ω中以弱意义成立，正如所需。 □

由此，首先证明 $\{v > \varphi\}$ 是开集，即可得到该泛函的欧拉–拉格朗日方程：

命题 5.3。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任意有界利普希茨区域，$\varphi \in C^\infty(\Omega)$，且 $v \in H^1(\Omega)$ 是满足边界条件 $v|_{\partial\Omega} = g$ 的 (5.1) 的任意极小化子。

于是，$v \in C(\Omega)$，并且它满足

$$\text{(5.7)} \qquad \begin{cases} v \geq \varphi & \text{in } \Omega \\ \Delta v \leq 0 & \text{in } \Omega \\ \Delta v = 0 & \text{in } \{v > \varphi\} \cap \Omega. \end{cases}$$

证明。根据构造，我们已经知道 $v \geq \varphi$ 属于 Ω，并且由引理 5.2 可知，$-\Delta v \geq 0$ 属于 Ω，即 v 是（弱意义下）超调和的。将 v 在一个零测集上替换后，我们还可以假设 v 是下半连续的（由引理 1.17）。因此，我们只需证明 $\Delta v = 0$属于 $\{v > \varphi\} \cap \Omega$，并且 v 实际上是连续的。

为此，我们首先证明 $\{v > \varphi\} \cap \Omega$ 是开集。设$x_\circ \in \{v > \varphi\} \cap \Omega$ 满足 $v(x_\circ) - \varphi(x_\circ) > \varepsilon_\circ > 0$。由于 v 是下半连续的，而 φ 是连续的，因此存在某个 $\delta > 0$，使得对所有 $x \in B_\delta(x_\circ)$，都有$v(x) - \varphi(x) > \varepsilon_\circ/2$，于是 $B_\delta(x_\circ) \subset \{v > \varphi\}$。由于$x_\circ$是任意的，这意味着 $\{v > \varphi\}$ 是开集。这也说明，$\Delta v = 0$ 在 $\{v > \varphi\} \cap \Omega$ 中弱意义下成立。事实上，对于任意 $x_\circ \in \{v > \varphi\}$ 以及满足 $|\eta| \leq 1$的$\eta \in C_c^\infty(B_\delta(x_\circ))$，对所有 $|\varepsilon| < \varepsilon_\circ/2$都有 $v \pm \varepsilon\eta \geq \varphi$ 属于 Ω，因此它是极小化问题的一个可容许竞争函数。于是，对所有 $|\varepsilon| < \varepsilon_\circ$，都有 $\mathcal{E}(v + \varepsilon\eta) \geq \mathcal{E}(v)$；对 ε 求导后，我们推得 v 在 $\{v > \varphi\} \cap \Omega$ 中是调和的。

最后，让我们证明 v 是连续的。根据调和函数的正则性（例如推论 1.12），我们已经知道 v 在 $\{v > \varphi\} \cap \Omega$ 中连续。现在让我们进一步证明 v 在 $\{v = \varphi\} \cap \Omega$ 中也连续。

取 $y_\circ \in \{v = \varphi\} \cap \Omega$，并用反证法。也就是说，由于 v 是下半连续的，假设存在一个序列 $y_k \to y_\circ$，使得 $v(y_k) \to v(y_\circ) + \varepsilon_\circ = \varphi(y_\circ) + \varepsilon_\circ$，其中某个 $\varepsilon_\circ > 0$成立。由于 φ 是连续的，我们还可以假设 $y_k \in \{v > \varphi\}$。记 z_k 为 y_k 向 $\{v = \varphi\}$的投影，则 $\delta_k := |z_k - y_\circ| \leq 2|y_k - y_\circ| \downarrow 0$且 $v(z_k) \to v(y_\circ) = \varphi(y_\circ)$。现在，由 (1.20)，$v$ 是超调和的，

$$v(z_k) \geq \fint_{B_{2\delta_k}(y_k)} v = (1 - 2^{-n}) \fint_{B_{2\delta_k}(y_k) \setminus B_{\delta_k}(y_k)} v + 2^{-n} \fint_{B_{\delta_k}(y_k)} v = I_1 + I_2.$$

注意，对于第一项，由于 v 是下半连续的，且 $\delta_k \downarrow 0$，我们可以假设，当 k 足够大时，$v \geq \varphi(y_\circ) - 2^{-n}\varepsilon_\circ$ 在 $B_{2\delta_k}$中，因此$I_1 \geq (1 - 2^{-n})[\varphi(y_\circ) - 2^{-n}\varepsilon_\circ]$。另一方面，由于 v 在$B_{\delta_k}(y_k)$中调和，根据平均值性质可得 $I_2 = 2^{-n} v(y_k)$。综合以上各项，得到

$$v(z_k) \geq (1 - 2^{-n})[\varphi(y_\circ) - 2^{-n}\varepsilon_\circ] + 2^{-n} v(y_k) \to \varphi(y_\circ) + 2^{-2n}\varepsilon_\circ$$

这与我们已有的事实 $v(z_k) \to v(y_\circ) = \varphi(y_\circ)$矛盾。因此，$v$ 在 Ω 中连续。□

我们接下来证明以下结果，它指出 v 可以被刻画为障碍物上方的最小上解。

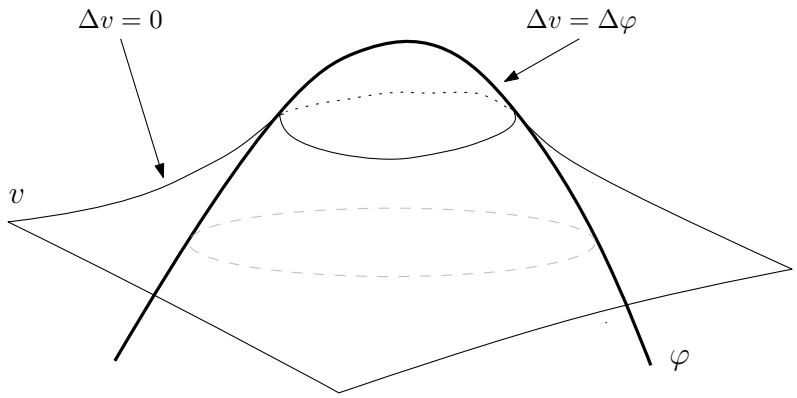


图 5.4. 二阶导数通常在自由边界处不连续。

命题 5.4 (最小上解)。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任意有界 *Lipschitz* 区域， $\varphi \in H^1(\Omega)$，且 $v \in H^1(\Omega)$ 是满足边界条件 $v|_{\partial\Omega} = g$ 的 *(5.1)* 的任意极小化子。

那么，对于任意满足 $-\Delta w \geq 0$ 属于 Ω、 $w \geq \varphi$ 属于 Ω 且 $w|_{\partial\Omega} \geq v|_{\partial\Omega}$ 的函数 w，我们有 $w \geq v$ 属于 Ω。换句话说，如果 w 是障碍物 φ 上方的任意上解，那么 $w \geq v$。

证明。如果 w 是任意满足 $-\Delta w \geq 0$ 属于 Ω、 $w \geq \varphi$ 属于 Ω 且 $w|_{\partial\Omega} \geq v|_{\partial\Omega}$ 的函数，那么由最大值原理（命题 1.13）可直接推出 $w \geq v$。事实上，我们有 $-\Delta w \geq -\Delta v$ 属于 $\Omega \cap \{v > \varphi\}$，并且在该集合的边界上有 $w|_{\partial\Omega} \geq v|_{\partial\Omega}$，且 $w \geq \varphi = v$ 在 $\{v = \varphi\}$ 上。□

解的最优正则性。 根据命题 5.3，我们知道 (5.1) 的任意极小化子都是连续的，并且满足 (5.7)。从现在起，我们将对问题进行局部化，并在一个球内研究它：

$$\begin{cases} v \geq \varphi & \text{in } B_1 \\ \Delta v \leq 0 & \text{in } B_1 \\ \Delta v = 0 & \text{in } \{v > \varphi\} \cap B_1. \end{cases} \tag{5.8}$$

我们的下一个目标是回答以下问题：

问题： 解的最优正则性是什么？

首先，来看看几个重要的要点。注意，在集合 $\{v > \varphi\}$中，我们有 $\Delta v = 0$；而在 $\{v = \varphi\}$ 的内部，我们有 $\Delta v = \Delta\varphi$ （因为那里有$v = \varphi$）；参见图 5.4。

因此，由于 $\Delta\varphi$ 通常不为零， Δv 通常在自由边界 $\partial\{v > \varphi\}$ 两侧不连续。特别地， $v \notin C^2$。

我们现在将证明，(5.1) 的任何极小化子实际上都是 $C^{1,1}$，由此得到：

答案： $v \in C^{1,1}$ （二阶导数有界但不连续）

精确的陈述和证明如下。

定理 5.5 （最优正则性）。 设 $\varphi \in C^\infty(B_1)$，且 v 是 *(5.8)* 的任意一个解。那么， v 在 $B_{1/2}$ 中是 $C^{1,1}$，并满足估计

$$\|v\|_{C^{1,1}(B_{1/2})} \le C\big(\|v\|_{L^\infty(B_1)} + \|\varphi\|_{C^{1,1}(B_1)}\big).$$

常数 C 仅取决于 n。

为了证明这一点，关键步骤如下。

引理 5.6。 令 $\varphi \in C^\infty(B_1)$，且 v 为方程 (5.8)的任意一个解。令 $x_\circ \in B_{1/2}$为 $\{v = \varphi\}$上的任意一点。

那么，对于任意 $r \in (0, \frac{1}{4})$，都有

$$0 \le \sup_{B_r(x_\circ)} (v - \varphi) \le Cr^2,$$

其中 C 只依赖于 n 和 $\|\varphi\|_{C^{1,1}(B_1)}$。

证明。 必要时将 v 除以一个常数后，我们可以假设$\|\varphi\|_{C^{1,1}(B_1)} \le 1$。

令 $\ell(x) := \varphi(x_\circ) + \nabla\varphi(x_\circ)\cdot(x - x_\circ)$ 为 φ 在 $x_\circ$处的线性部分。令 $r \in (0, \frac{1}{4})$。那么，根据 $C^{1,1}$ 的 φ正则性，在 $B_r(x_\circ)$ 中有

$$\ell(x) - r^2 \le \varphi(x) \le v(x).$$

我们希望证明，在球 $B_r(x_\circ)$ 中（见图 5.5），有

$$v(x) \le \ell(x) + Cr^2.$$

为此，考虑

$$w(x) := v(x) - \big[\ell(x) - r^2\big].$$

这个函数 w 满足 $w \ge 0$ 于 $B_r(x_\circ)$，且 $-\Delta w = -\Delta v \ge 0$ 于 $B_r(x_\circ)$。

将 w 分解为

$$w = w_1 + w_2,$$

with

$$\begin{cases} \Delta w_1 = 0 & \text{in } B_r(x_\circ) \\ w_1 = w & \text{on } \partial B_r(x_\circ) \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} -\Delta w_2 \ge 0 & \text{in } B_r(x_\circ) \\ w_2 = 0 & \text{on } \partial B_r(x_\circ). \end{cases}$$

注意到

$$0 \le w_1 \le w \quad \text{and} \quad 0 \le w_2 \le w.$$

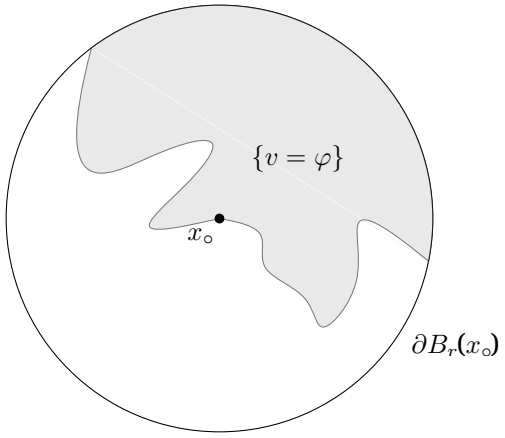


图 5.5. 解 v 和一个自由边界点 $x_\circ$

我们有

$$w_1(x_\circ) \le w(x_\circ) = v(x_\circ) - \left[\ell(x_\circ) - r^2\right] = r^2,$$

因此，根据 Harnack不等式

$$\|w_1\|_{L^\infty(B_{r/2}(x_\circ))} \le Cr^2.$$

对于 w_2，注意到 $\Delta w_2 = \Delta v$，尤其是 $\Delta w_2 = 0$ 在 $\{v > \varphi\}$中。这意味着 w_2 在 $\{v = \varphi\}$上取得最大值。但在集合 $\{v = \varphi\}$中，我们有

$$w_2 \le w = \varphi - \left[\ell - r^2\right] \le Cr^2,$$

因此我们推得

$$\|w_2\|_{L^\infty(B_r(x_\circ))} \le Cr^2.$$

结合 w_1 和 w_2的估计，我们得到$\|w\|_{L^\infty(B_r(x_\circ))} \le Cr^2$。将其转化为 v，并利用$\|\varphi\|_{C^{1,1}(B_1)} \le 1$，可得 $v - \varphi \le Cr^2$ 在 $B_{r/2}(x_\circ)$ 中。□

因此，我们已经证明：

在每个自由边界点 $x_\circ$处， v 与 φ 至多二次地分离。

如下所示，这很容易推出 $C^{1,1}$ 正则性。

定理 5.5 的证明。 如有必要，将 v 除以一个常数后，我们可以假设$\|v\|_{L^\infty(B_1)} + \|\varphi\|_{C^{1,1}(B_1)} \le 1$。

我们已经知道 $v \in C^\infty$ 属于集合 $\{v > \varphi\}$ （因为 v 是调和的），并且也位于集合 $\{v = \varphi\}$ 的内部（因为 $\varphi \in C^\infty$）。此外，我们已证明，在界面 $\Gamma = \partial\{v > \varphi\}$ 上有二次增长 $\sup_{B_r(x_\circ)}(v - \varphi) \le Cr^2$。下面证明这会得到我们所需的 $C^{1,1}$ 界。

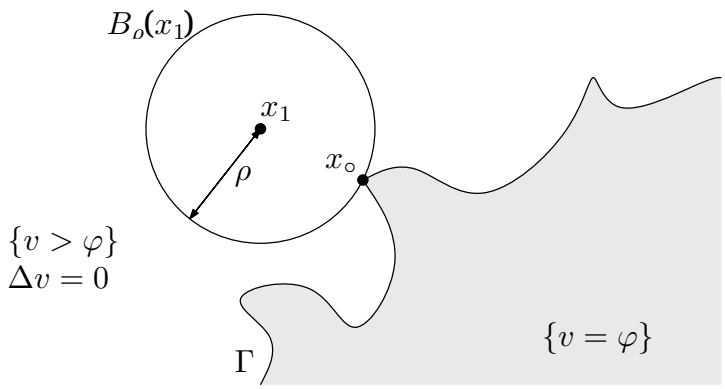


图 5.6. 一个满足 $\Delta v = 0$ 的解 v，位于 $B_\rho(x_1) \subset \{v > \varphi\}$ 中。

设 $x_1 \in \{v > \varphi\} \cap B_{1/2}$，令 $x_\circ \in \Gamma$ 为最近的自由边界点。记 $\rho = |x_1 - x_\circ|$。那么，我们有 $\Delta v = 0$ 属于 $B_\rho(x_1)$（见图 5.6 中的设定），因此也有 $\Delta(v - \ell) = 0$ 属于 $B_\rho(x_1)$，其中 ℓ 是 φ 在 $x_\circ$处的线性部分。

根据调和函数的估计，我们得到

$$\|D^2 v\|_{L^\infty(B_{\rho/2}(x_1))} = \|D^2(v-\ell)\|_{L^\infty(B_{\rho/2}(x_1))} \le \frac{C}{\rho^2}\|v-\ell\|_{L^\infty(B_\rho(x_1))}.$$

但根据前一个引理证明的增长性质，我们有$\|v-\ell\|_{L^\infty(B_\rho(x_1))} \le C\rho^2$，由此得到

$$\|D^2 v\|_{L^\infty(B_{\rho/2}(x_1))} \le \frac{C}{\rho^2}\,\rho^2 = C.$$

特别地，$|D^2 v(x_1)| \le C$。我们可以对所有 $x_1 \in \{v > \varphi\} \cap B_{1/2}$都这样做，并且在 $\partial\{v > \varphi\}$ 上，根据引理 5.6，函数具有二次增长，因此可得 $\|v\|_{C^{1,\,1}(B_{1/2})} \le C$，如所需。□

最优正则性的证明总体策略总结于图 5.7。

非退化性。现在我们要证明，在所有自由边界点，v 与 φ 的分离速度至少是二次的（我们已经知道至多 是二次的）。

也就是说，我们要证明

$$0 < cr^2 \le \sup_{B_r(x_\circ)} (v - \varphi) \le Cr^2 \tag{5.9}$$

对所有自由边界点 $x_\circ \in \partial\{v > \varphi\}$ 均成立。

这一性质对于之后研究自由边界至关重要。

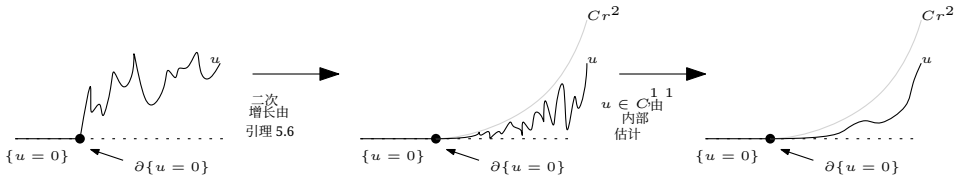


图 5.7. 定理 5.5 的证明策略。

注 5.7。 由于 $-\Delta v \geq 0$ 处处，显然，如果 $x_\circ \in \partial\{v > \varphi\}$ 是一个自由边界点，那么必然有 $-\Delta\varphi(x_\circ) \geq 0$ （否则我们会有 $-\Delta\varphi(x_\circ) < 0$，而且由于 u 在 $x_\circ$处从上方与 φ 相切，也有$-\Delta v(x_\circ) < 0$，这就产生了矛盾）。

此外可以证明，事实上，如果 $\Delta\varphi$ 和 $\nabla\Delta\varphi$ 不 同时为零，那么在所有 自由边界点 [**Caf98**]附近都有 $-\Delta\varphi > 0$ 。

这促使我们提出以下假设:

假设: 障碍物 φ满足

$$-\Delta\varphi \geq c_\circ > 0$$

在球 $B_{1\circ}$

特别地，根据注 5.7，如果 $\Delta\varphi$ 和 $\nabla\Delta\varphi$ 不同时为零，那么在任意自由边界点附近都有 $-\Delta\varphi > 0$ ，因此，必要时通过放大，我们总能使假设在某个小的 B_1 中成立，其中 $c_\circ > 0$ 足够小。

因此，这里唯一真正的假设是 $\Delta\varphi$ 和 $\nabla\Delta\varphi$ 不同时为零，这是一个非常温和的假设。此外，从某种意义上说，这也是必要的假设：若不作此假设，非退化性 (5.9) 就不成立，也就无法证明自由边界的任何正则性结果。（若不作此假设，实际上可以构造出反例，其中自由边界是一个周长无限的分形集。）

命题 5.8 （非退化性）。 设 $\varphi \in C^\infty(B_1)$，且 v 是 *(5.8)* 的任意一个解。假设 φ 在 B_1中满足 $-\Delta\varphi \geq c_\circ > 0$ 。那么，对每个自由边界点 $x_\circ \in \partial\{v > \varphi\} \cap B_{1/2}$，都有

$$0 < cr^2 \leq \sup_{B_r(x_\circ)} (v - \varphi) \leq Cr^2 \qquad \textit{for all } r \in (0, \tfrac{1}{4}),$$

其中常数 $c > 0$ 仅取决于 n 和 $c_\circ$。

证明。 令 $x_1 \in \{v > \varphi\}$ 为任意一个靠近 $x_\circ$ 的点（最后我们将令 $x_1 \to x_\circ$）。

考虑函数

$$w(x) := v(x) - \varphi(x) - \frac{c_\circ}{2n}|x - x_1|^2.$$

那么，在 $\{v > \varphi\}$ 中有

$$\Delta w = \Delta v - \Delta\varphi - c_\circ = -\Delta\varphi - c_\circ \geq 0$$

因此 $-\Delta w \leq 0$ 属于 $\{v > \varphi\} \cap B_r(x_1)$。此外， $w(x_1) > 0$。

由最大值原理， w 在 $\partial(\{v > \varphi\} \cap B_r(x_1))$ 上取得一个正的最大值。但在自由边界 $\partial\{v > \varphi\}$ 上，显然有 $w < 0$。因此，在 $\partial B_r(x_1)$ 上存在一点，使得 $w > 0$。换言之，

$$0 < \sup_{\partial B_r(x_1)} w = \sup_{\partial B_r(x_1)} (v - \varphi) - \frac{c_\circ}{2n} r^2.$$

现在令 $x_1 \to x_\circ$，我们得到 $\sup_{\partial B_r(x_\circ)}(v - \varphi) \geq cr^2 > 0$，如所求。 □

基本性质总结。设 v 是障碍问题的任意一个解

$$\begin{cases} v & \geq & \varphi & \text{in } B_1 \\ \Delta v & \leq & 0 & \text{in } B_1 \\ \Delta v & = & 0 & \text{in } \{v > \varphi\} \cap B_1. \end{cases}$$

于是，我们有：

- 最优正则性：$\|v\|_{C^{1,\,1}(B_{1/2})} \leq C\big(\|v\|_{L^\infty(B_1)} + \|\varphi\|_{C^{1,\,1}(B_1)}\big)$
- 非退化性：如果 $-\Delta\varphi \geq c_\circ > 0$，则

$$0 < cr^2 \leq \sup_{B_r(x_\circ)} (v - \varphi) \leq Cr^2 \qquad \text{for all } r \in (0, \tfrac{1}{2})$$

在所有自由边界点 $x_\circ \in \partial\{v > \varphi\} \cap B_{1/2}$ 处。

- 与零障碍等价：该问题等价于

$$\begin{cases} u & \geq & 0 & \text{in } B_1 \\ \Delta u & \leq & f & \text{in } B_1 \\ \Delta u & = & f & \text{in } \{u > 0\} \cap B_1, \end{cases}$$

其中 $f = -\Delta\varphi \geq c_\circ > 0$。

接下来，我们将介绍一种研究最优正则性的替代方法。

5.3. 解的基本性质 II

现在，我们继续研究障碍问题 (5.4) 或 (5.5) 的解的基本性质 $u \geq 0$ 。如前所述，这里的关键在于，我们独立于前一节证明最优正则性。

在本节中，我们始终假设

$$f \geq 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

解的存在性。由于问题 (5.4) 与 (5.1) 等价，解的存在性和唯一性可由命题 5.1 轻易得出，如下所示。

命题 5.9（存在唯一性）。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为任意有界利普希茨区域，并设 $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ 满足

$$\mathcal{C} = \left\{u \in H^1(\Omega) : u \geq 0 \text{ in } \Omega,\ u|_{\partial\Omega} = g\right\} \neq \varnothing.$$

那么，对于任意 $f \in L^2(\Omega)$，存在唯一的极小化子

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega fu$$

在所有满足 $u \geq 0$ 属于Ω 且 $u|_{\partial\Omega} = g$的函数 $u \in H^1(\Omega)$ 中。

证明。我们沿用命题 5.1 的证明。令

$$\theta_\circ := \inf\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + \int_\Omega fw \ :\ w \in H^1(\Omega),\ w|_{\partial\Omega} = g,\ w \geq 0 \text{ in } \Omega\right\},$$

也就是说，在所有可容许函数 w中，$\mathcal{E}(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + \int_\Omega fw$的下确界。注意，由 H¨older 不等式可知，若 $w \in H^1(\Omega)$，则 $\mathcal{E}(w) < +\infty$ 。

我们再次取一个函数序列 $\{v_k\}$，使得 $v_k \in H^1(\Omega), v_k|_{\partial\Omega} = g, v_k \geq 0$ 属于 Ω，且当 $k \to \infty$ 时，$\mathcal{E}(v_k) \to \theta_\circ$。由庞加莱不等式（定理 1.6）、H¨older 不等式以及 $\mathcal{E}(v_k) \leq \theta_\circ + 1$ 这一事实可知，对于足够大的 k

$$\begin{aligned}\|v_k\|^2_{H^1(\Omega)} &\leq C\left(\int_\Omega |\nabla v_k|^2 + \int_{\partial\Omega} g^2\right) \leq C\left(\theta_\circ + 1 + \int_\Omega |fv_k| + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} g^2\right)\\ &\leq C\left(\theta_\circ + 1 + \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v_k\|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} g^2\right).\end{aligned}$$

特别地，$\|v_k\|_{H^1(\Omega)} \leq C$ 对于某个常数 C，该常数仅依赖于 n、Ω、g、f 和 $\theta_\circ$（回忆一下，根据第 1 章中的迹定理，$g \in L^2(\partial\Omega)$，(**S5**)）。因此，子序列 $\{v_{k_j}\}$ 在$L^2(\Omega)$ 中强收敛，并在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛到某个函数 v。由迹算子的紧性，$v_{k_j}|_{\partial\Omega} \to v|_{\partial\Omega} = g$在 $L^2(\partial\Omega)$ 中。此外，v满足 $\mathcal{E}(v) \leq \liminf_{j\to\infty} \mathcal{E}(v_{k_j})$（根据 (**S4**) 中的 (1.4)-(1.5) 以及弱收敛），因此它将是一个

能量泛函的极小化子。由于 $v_{k_j} \geq 0$ 在 Ω 中且 $v_{k_j} \to v$ 在 $L^2(\Omega)$ 中，我们有 $v \geq 0$ 在 Ω 中。因此，存在一个极小化子 v。

极小化子的唯一性源于泛函 $\mathcal{E}(v)$ 的严格凸性，这与定理 1.10 中的情形完全相同。□

注 5.10. 或者，我们也可以将 $v := u + \varphi$ 记作 φ，使得 $-\Delta\varphi = f$ 在 Ω 中，并使用命题 5.1。

此外，我们有以下等价关系。（回忆一下，我们记 $u^+ = \max\{u, 0\}$，以及 $u^- = \max\{-u, 0\}$，因此 $u = u^+ - u^-$。）

命题 5.11. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任意有界利普希茨区域，并设 $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ 满足

$$\mathcal{C} = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u \geq 0 \text{ in } \Omega,\ u|_{\partial\Omega} = g \right\} \neq \varnothing.$$

那么，以下条件等价。

(i) u 在满足 $u \geq 0$ *in* Ω *and* $u|_{\partial\Omega} = g$ 的所有函数中，使 $\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega fu$ 最小化。*(ii)* u 在满足 $u|_{\partial\Omega} = g$ 的所有函数中，使 $\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega fu^+$ 最小化。

证明。 当 $u \geq 0$ 时，这两个泛函相同。因此，唯一的关键在于证明 (ii) 中的极小化子必定非负，即 $u = u^+$。（注意，$\mathcal{C} \neq \varnothing$ 意味着 $g \geq 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立。）为此，回想一下，任意 H^1 函数的正部仍属于 H^1，而且 $|\nabla u|^2 = |\nabla u^+|^2 + |\nabla u^-|^2$（见第 1 章中的(S9)）。因此，我们有（回想一下，$f \geq 0$ 在 Ω 中）

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u^+|^2 + \int_\Omega fu^+ \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega fu^+,$$

除非 $u = u^+$，否则严格不等式成立。这意味着，(ii) 中泛函的任意极小化子 u 都必须是非负的，因此结论得证。□

解的基本性质。 接下来我们证明，(5.4) 的任意极小化子实际上都是下文 (5.10) 的一个解。

我们回顾一下，我们始终假设障碍物具有所需的光滑性，$\varphi \in C^\infty(\Omega)$，因此这里也假设 $f \in C^\infty(\Omega)$。

命题 5.12。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任意有界利普希茨区域，$f \in C^\infty(\Omega)$，且 $u \in H^1(\Omega)$ 是满足边界条件 $u|_{\partial\Omega} = g$ 的 *(5.4)* 的任意极小化子。

那么，u 满足

$$\Delta u = f\chi_{\{u>0\}} \quad in \quad \Omega \tag{5.10}$$

弱意义下的方程。

特别地，对于每个 $\alpha \in (0,1)$， u 在Ω内是 $C^{1,\alpha}_{,}$。

证明。 注意到，根据命题 5.11， u 实际上是以下泛函的极小化子：

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega f u^+$$

满足边界条件 $u|_{\partial\Omega} = g$。

因此，对于任意 $\eta \in H^1_0(\Omega)$ 和 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\mathcal{E}(u+\varepsilon\eta) \geq \mathcal{E}(u).$$

特别地，我们得到

$$0 \leq \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\mathcal{E}(u+\varepsilon\eta)-\mathcal{E}(u)}{\varepsilon} = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\eta + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\Omega f\frac{(u+\varepsilon\eta)^+ - u^+}{\varepsilon}.$$

注意到

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{(u+\varepsilon\eta)^+-u^+}{\varepsilon} = \begin{cases} \eta & \text{in} \quad \{u>0\} \\ \eta^+ & \text{in} \quad \{u=0\}, \end{cases}$$

因此我们有

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\eta + \int_\Omega f\eta\chi_{\{u>0\}} + \int_\Omega f\eta^+\chi_{\{u=0\}} \geq 0 \quad \text{for all} \quad \eta\in H^1_0(\Omega).$$

首先假设 $\eta \geq 0$，于是

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\eta + \int_\Omega f\eta \geq 0 \quad \text{for all} \quad \eta\in H^1_0(\Omega), \quad \eta\geq 0,$$

这意味着 $\Delta u \leq f$ 在弱意义下成立。另一方面，若 $\eta \leq 0$，则

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\eta + \int_\Omega f\eta\chi_{\{u>0\}} \geq 0 \quad \text{for all} \quad \eta\in H^1_0(\Omega), \quad \eta\leq 0,$$

这意味着 $\Delta u \geq f\chi_{\{u>0\}}$ 在弱意义下成立。总之（回想一下，$f \geq 0$），

$$f\chi_{\{u>0\}} \leq \Delta u \leq f \quad \text{in} \quad \Omega.$$

（特别地，注意到 $\Delta u = f$ 属于 $\{u>0\}$。）现在，由于 f 光滑，这意味着 $\Delta u \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$。根据命题 2.18，我们推得 $u \in C^{1,\,1-\varepsilon}$ 对每个 $\varepsilon > 0$ 都成立。此外，由于 $\Delta u \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$，我们有 $\Delta u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$，并且根据 Calder´on-Zygmund 估计（例如参见注 2.13），有 $u \in W^{2,\,2\,\text{loc}}(\Omega)$。因此，在水平集 $\{u=0\}$ 中几乎处处有 $\Delta u = 0$（参见第 1 章中的**(S9)**），并且我们有

$$\Delta u = f\chi_{\{u>0\}} \quad \text{a.e. in} \quad \Omega.$$

由此我们可以在弱意义下推出 $\Delta u = f\chi_{\{u>0\}}$ 属于 Ω。 □

请注意，在前一节讨论 (5.1) 的极小化子 v 时，要证明 v 连续并不容易（见命题 5.3）。而在这里，得益于命题 5.12，我们只需使用拉普拉斯算子的 Schauder 型估计，就能直接推出 u 是 $C^{1,\,1-\varepsilon}$，这就是解的近最优正则性。

解的最优正则性。得益于前面的结果，我们知道，(5.4) 的任何极小化子都是连续的，并且满足 (5.10)。从现在开始，我们将对问题进行局部化，并在一个球中研究它：

$$\begin{cases} u \geq 0 & \text{in } B_1 \\ \Delta u = f\chi_{\{u>0\}} & \text{in } B_1. \end{cases} \tag{5.11}$$

我们的下一个目标是回答以下问题：

问题：解的最优正则性是什么？

首先，考虑几个重要事项。注意，在集合 $\{u>0\}$ 中，我们有 $\Delta u = f$；而在 $\{u=0\}$ 的内部，我们有 $\Delta u = 0$（因为在那里有 $u \equiv 0$）。

因此，由于 f 一般不为零，Δu 通常在自由边界 $\partial\{u>0\}$ 处是不连续的。特别地，$u \notin C^2$。

现在我们将证明，(5.4) 的任意极小化子实际上都是 $C^{1,\,1}$，从而得到：

答案：$u \in C^{1,\,1}$（二阶导数有界但不连续）

接下来给出精确表述及其证明。

定理 5.13（最优正则性）。设 $f \in C^\infty(B_1)$，并设 u 是 *(5.11)* 的任意解。则，u 在 $B_{1/2}$ 内是 $C^{1,\,1}$，且满足估计

$$\|u\|_{C^{1,1}(B_{1/2})} \leq C\big(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{\mathrm{Lip}(B_1)}\big).$$

常数 C 仅依赖于 n。

为证明这一点，关键步骤如下。

引理 5.14. 设 u 是 (5.11) 的任意一个解。设 $x_\circ \in B_{1/2}$ 是 $\overline{\{u=0\}}$ 上的任意一点。那么，对于任意 $r \in (0,\,1/4)$，我们有

$$0 \leq \sup_{B_r(x_\circ)} u \leq Cr^2,$$

其中 C 仅取决于 n 和 $\|f\|_{L^\infty(B_1)}$。

证明。我们有 $\Delta u = f\chi_{\{u>0\}}$ 属于 B_1，其中 $f\chi_{\{u>0\}} \in L^\infty(B_1)$。因此，由于 $u \geq 0$，我们可以对方程 $\Delta u = f\chi_{\{u>0\}}$ 在 $B_{2r}(x_\circ)$ 中应用 Harnack 不等式（定理 2.9），得到

$$\sup_{B_r(x_\circ)} u \leq C\left(\inf_{B_r(x_\circ)} u + r^2\|f\chi_{\{u>0\}}\|_{L^\infty(B_{2r}(x_\circ))}\right).$$

由于 $u \geq 0$ 和 $u(x_\circ) = 0$，因此得到 $\sup_{B_r(x_\circ)} u \leq C\|f\|_{L^\infty(B_1)}r^2$，如所需。□

请注意，这个证明比前一节（引理 5.6）中的证明短得多。这是使用公式（5.10）的一个优点。

我们已经证明了以下结论：

在每个自由边界点 $x_\circ$ 处，u 至多二次地增长。

如下所示，这很容易推出 $C^{1,1}$ 正则性。

定理 5.13 的证明。必要时将 u 除以一个常数，我们可以假设 $\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{\mathrm{Lip}(B_1)} \leq 1$。

我们已经知道 $u \in C^\infty$ 在集合 $\{u > 0\}$ 中（因为 $\Delta u = f \in C^\infty$在那里），并且也在集合 $\{u = 0\}$ 内部（因为 $u = 0$ 在那里）。此外，我们已证明在界面 $\Gamma = \partial\{u > 0\}$ 上有二次增长 $\sup_{B_r(x_\circ)} u \leq Cr^2$。下面证明这将推出我们所需的 $C^{1,1}$ 界。

设 $x_1 \in \{u > 0\} \cap B_{1/2}$，并令 $x_\circ \in \Gamma$ 为最近的自由边界点。记 $\rho = |x_1 - x_\circ|$。于是，我们有 $\Delta u = f$ 在 $B_\rho(x_1)$ 中。

由 Schauder估计，我们得到

$$\|D^2u\|_{L^\infty(B_{\rho/2}(x_1))} \leq C\left(\frac{1}{\rho^2}\|u\|_{L^\infty(B_\rho(x_1))} + \|f\|_{\mathrm{Lip}(B_1)}\right).$$

但根据前一个引理中证明的增长性质，我们有 $\|u\|_{L^\infty(B_\rho(x_1))} \leq C\rho^2$，由此可得

$$\|D^2u\|_{L^\infty(B_{\rho/2}(x_1))} \leq C.$$

特别地，

$$|D^2u(x_1)| \leq C.$$

我们可以对每个 $x_1 \in \{u > 0\} \cap B_{1/2}$ 都这样做，因此 $\|u\|_{C^{1,1}(B_{1/2})} \leq C$，正如所需。□

此外，请注意，根据前面的结果，只要方程 (5.11) 的解的接触集非空，其 $C^{1,1}$范数就具有普适上界。

推论 5.15. 设 u 是 (5.11) 的任意解，并假设$u(0) = 0$ 且$\|f\|_{\mathrm{Lip}(B_1)} \le 1$。那么，

$$\|u\|_{C^{1,1}(B_{1/2})} \le C$$

其中某个 C 仅依赖于 n。

证明。这直接由定理 5.13 和引理 5.14 得出。□

非退化性。 为完整起见，我们现在陈述这一情形下的非退化性（类似于命题 5.8）。也就是说，在所有自由边界点处， u至少 二次地增长（我们已经知道它至多 二次地增长）。我们希望得到:

$$0 < cr^2 \le \sup_{B_r(x_\circ)} u \le Cr^2$$

对所有自由边界点 $x_\circ \in \partial\{u > 0\}$。

这一性质对于之后研究自由边界至关重要。和之前一样，为此我们需要以下自然的假设:

假设: 右端项 f 满足

$$f \ge c_\circ > 0$$

在球 $B_{1\circ}$

命题 5.16 （非退化性）。 设 u 是 (5.11) 的任意一个解。假设 $f \ge c_\circ > 0$ 属于 B_1。那么，对于每个自由边界点 $x_\circ \in \partial\{u > 0\} \cap B_{1/2}$，我们有

$$0 < cr^2 \le \sup_{B_r(x_\circ)} u \le Cr^2 \qquad \textit{for all } r \in (0, \tfrac{1}{2}),$$

其中常数 $c > 0$ 仅依赖于 n 和 $c_\circ$。

证明。 证明与命题 5.8 中的证明相同。 □

基本性质总结。 设 u 是障碍问题

$$\begin{cases} u \ge 0 & \text{in } B_1, \\ \Delta u = f\chi_{\{u>0\}} & \text{in } B_1. \end{cases}$$

于是，我们有:

- Optimal regularity: $\|u\|_{C^{1,1}(B_{1/2})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{\mathrm{Lip}(B_1)}\right)$
- 非退化性: 如果 $f \ge c_\circ > 0$, 那么

$$0 < cr^2 \le \sup_{B_r(x_\circ)} u \le Cr^2 \qquad \text{for all } r \in (0, \tfrac{1}{2})$$

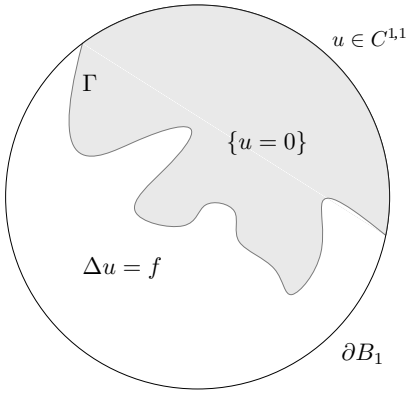


图 5.8. B_1中的障碍问题的一个解。

在所有自由边界点 $x_\circ \in \partial\{u > 0\} \cap B_{1/2}$ 处。

利用这些性质，我们现在可以开始研究自由边界。

5.4. 自由边界的正则性：概述

从现在起，我们考虑任意一个满足以下条件的解

$$\begin{cases} u \in C^{1,1}(B_1), \\ u \geq 0 \quad \text{in } B_1, \\ \Delta u = f \quad \text{in } \{u > 0\}, \end{cases} \tag{5.12}$$

（见图 5.8），其中

$$f \geq c_\circ > 0 \qquad \text{and} \qquad f \in C^\infty. \tag{5.13}$$

注意，在界面上

$$\Gamma = \partial\{u > 0\} \cap B_1$$

我们有

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma,$$
$$\nabla u = 0 \quad \text{on } \Gamma.$$

障碍问题中的核心数学挑战是

理解自由边界 Γ. 的几何学/正则性

注意，即使我们已经知道 u 的最优正则性（它是$C^{1,\,1}$），我们对自由边界 Γ 仍一无所知。先验地， Γ 可能是一个非常不规则的对象，甚至是一个具有无限周长的分形集。

正如我们将看到的，在自然的假设 $f \geq c_\circ > 0$ 下，自由边界总是光滑的，某个集合之外可能存在

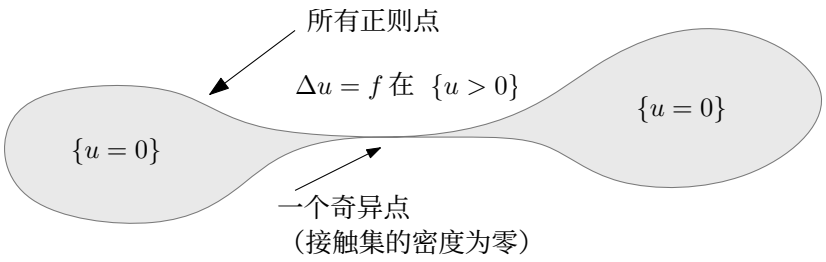


图 5.9. 奇异点是指接触集密度为零的点。

奇异点。事实上，为了简化证明，我们将假设 $f \equiv 1$ （或为常数）。这样做是为了避免对 x 的依赖及其相关的技术细节，从而使证明更加简洁。由此，自由边界正则性背后的主要思想得以呈现。

自由边界的正则性：主要结果。 从现在起，假设 u 是 (5.12)-(5.13) 的解。那么，关于自由边 $\Gamma = \partial\{u > 0\}$ 已知的主要结果可概括如下：

- 在每个自由边界点 $x_\circ \in \Gamma$处，我们有

$$0 < cr^2 \leq \sup_{B_r(x_\circ)} u \leq Cr^2 \qquad \forall r \in (0, r_\circ)\,.$$

- 自由边界 Γ分为正则点和奇异点。
- 正则点构成自由边界的一个开子集，并且 Γ 在这些点附近是C^∞ 。
- 奇异点是指接触集 $\{u = 0\}$ 密度为零的点，而这些点（如果存在）包含在一个 $(n-1)$ 维 C^1 流形中。

总而言之，自由边界是光滑的，可能只有某个奇异点集合除外。见图 5.9。

到目前为止，我们甚至还没有证明 Γ具有有限周长，也完全不了解 Γ。我们的目标是证明 Γ 在 C^∞ 正则点附近。这是障碍问题中最主要、最重要的结果。该结果由 Caffarelli 于 1977年证明，也是他在 2012年获得沃尔夫奖、在 2018年获得邵逸夫奖的主要成果之一。

策略概述。为了证明这些自由边界正则性结果，我们考虑放大极限</style。具体来说，给定任意一个自由边界点 $x_\circ$。

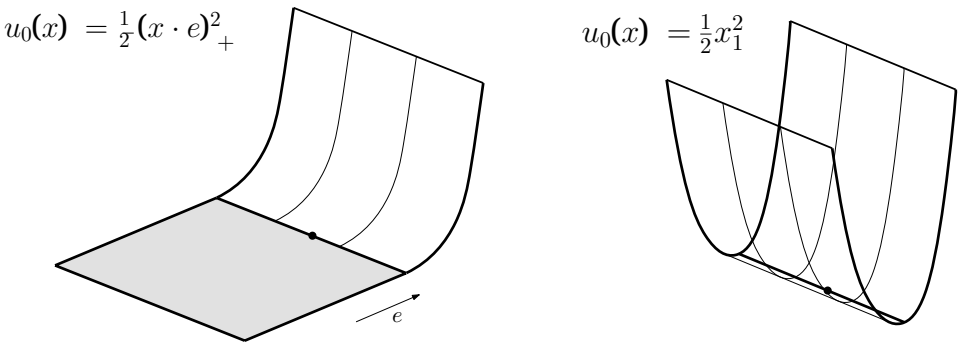


图 5.10. 障碍问题的解在自由边界点处可能出现的放大极限。

对于方程 (5.12)-(5.13) 的解 u，我们进行如下缩放

$$u_r(x) := \frac{u(x_\circ + rx)}{r^2},$$

当 $r > 0$ 较小时。这类似于在自由边界点处"放大观察"。

因子 r^{-2} 的选取使得

$$\|u_r\|_{L^\infty(B_1)} \approx 1$$

由于 $r \to 0$；回顾一下，$0 < cr^2 \le \sup_{B_r(x_\circ)} u \le Cr^2$。

然后，根据 $C^{1,1}$ 估计，我们将证明，u_r 的一个子序列在 $\mathbb{R}^n$ 中局部一致地收敛于一个函数 u_0，当 $r \to 0$时。这样的函数 u_0 称为 u 在 $x_\circ$处的爆破。

任何爆破 u_0 都是障碍问题的一个全局解，其中 $f \equiv 1$（或其中 $f \equiv$为 > 0 常数）。

然后，主要问题是对放大极限进行分类：也就是说，要证明

$$\begin{aligned} \text{either} \quad & u_0(x) = \tfrac{1}{2}(x \cdot e)_+^2 && \text{（这发生在正则点处）} \\ \text{or} \quad & u_0(x) = \tfrac{1}{2}x^T A x && \text{（这发生在奇异点处）。} \end{aligned}$$

这里，$e \in \mathbb{S}^{n-1}$ 是一个单位向量，$A \ge 0$ 是一个满足 $\operatorname{tr} A = 1$ 的半正定矩阵。注意，对于正则点，接触集 $\{u_0 = 0\}$ 会变成一个半空间；而对于奇异点，它的测度为零；见图 5.10。

完成这一步后，必须将关于放大极限 u_0 的信息"转移"到原始解 u上。具体而言，可以证明，自由边界在正则点附近是 $C^{1,\alpha}$（对某个小的 $\alpha > 0$）。

最后，一旦我们知道自由边界是 $C^{1,\alpha}$，就会将正则性"自举"到 C^∞。这与希尔伯特第十九问题（第3章）的思路有些相似：在那里，真正困难的一点是

证明极小化子总是 $C^{1,\alpha}$。做到这一点后，通过Schauder估计（第2章）和自举论证，我们看到解实际上是 C^∞。

对放大极限进行分类并不容易。一般来说，对放大极限进行分类的难度与证明正则性估计相当——回想一下第2章中的爆破论证。

那么，我们该如何对放大极限进行分类呢？关于 u_0，我们能否得到一些关于 u所没有的额外信息？（否则，似乎毫无希望！）

答案是是： Convexity。我们将证明，所有放大极限始终都是凸的。这是一个巨大的进步，因为由此可知，接触集 $\{u_0 = 0\}$ 也是凸的。在此之前，我们还将证明放大极限也是齐次的。

因此，在放大之前，我们对集合 $\{u = 0\}$一无所知；但放大之后，我们得到 $\{u_0 = 0\}$ 是一个凸锥。有了这一点，我们就能够对放大极限进行分类，从而证明自由边界的正则性。

证明自由边界正则性的主要步骤如下：

(1) $0 < cr^2 \leq \sup_{B_r(x_\circ)} u \leq Cr^2$(2) 放大极限是齐次的且凸。(3) 如果接触集在 $x_\circ$ 处具有正密度，那么 $u_0(x) = \frac{1}{2}(x \cdot e)_+^2$。(4) 推导出自由边界在 $x_\circ$ 附近是 $C^{1,\alpha}$。(5) 推导出自由边界在 $x_\circ$ 附近是 $\underline{C}^\infty$。

我们将在此给出的爆破解凸性证明是新的，其依据是这些放大极限是齐次的。关于爆破解分类和/或自由边界正则性的不同证明，请参阅 [**Caf98**], [**PSU12**],[**Wei99**], 和 [**KN77**], 。

5.5. 爆破解的分类

本节旨在对所有可能的放大极限 u_0 进行分类。为此，我们将首先证明放大极限是齐次的，然后证明它们是凸的，最后建立其完备分类。

爆破解的齐次性。我们首先证明放大极限是齐次的。这并非证明自由边界正则性的必要条件（见 [**Caf98**]），但实际上这样会使证明更简单。

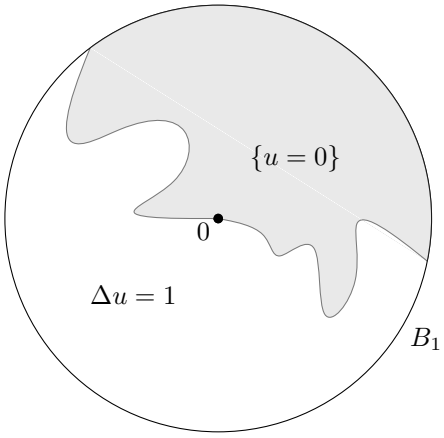


图5.11. 障碍问题的一个解 u，其中 $f \equiv 1$。

回顾一下，为简便起见，从现在起我们假设 $f \equiv 1$in B_1。这只是为了避免方程对 x 的依赖，并使一些证明更简单。

因此，从现在起，我们考虑满足以下条件的解 u （见图 5.11）：

$$\begin{aligned} &u \in C^{1,1}(B_1) \\ &u \geq 0 \quad \text{in } B_1 \\ &\Delta u = 1 \quad \text{in } \{u > 0\} \\ &0 \text{ is a free boundary point.} \end{aligned} \tag{5.14}$$

我们将围绕原点证明所有结果（不失一般性）。

我们将表明，对于区域 B_1 中的原始解 u，观察自由边界点 $x_\circ$ 时看得越近，解就越接近齐次解。

命题 5.17 (爆破解的齐次性**)**。 设 u 是(5.14) 的任意一个解。那么， u 在0 处的任意爆破都是2 次齐次的。

需要特别指出的是，并非所有 $\mathbb{R}^n$ 中的障碍问题全局解都是齐次的。例如，存在一些全局解 u_0 是凸的， $C^{1,\,1}$，并且其接触集 $\{u_0 = 0\}$ 是一个椭球。然而，得益于前面的结果，我们发现，这类非齐次解不可能作为爆破出现，即所有放大极限都必须是齐次的。

我们给出命题 5.17 的两种不同证明。第一种证明使用了 Weiss 引入的单调性公式；第二种证明则不需要任何单调性公式，归功于 Spruck。

爆破解的齐次性 `依照 *Weiss* 的方法。 对于命题 5.17 的第一个证明，我们需要以下由 Weiss 得出的单调性公式 [**Weiss99**]。

定理 5.18 (Weiss 单调性公式)。 设 u 是式(5.14)的任意一个解。那么，量

$$W_u(r) := \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} \left\{ \tfrac{1}{2} |\nabla u|^2 + u \right\} - \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} u^2 \tag{5.15}$$

关于 r是单调的，即

$$\frac{d}{dr} W_u(r) = \frac{1}{r^{n+4}} \int_{\partial B_r} (x \cdot \nabla u - 2u)^2 dx \geq 0$$

对于 $r \in (0,1)$。

证明。 令 $u_r(x) = r^{-2} u(rx)$，并注意到

$$W_u(r) = \int_{B_1} \left\{ \tfrac{1}{2} |\nabla u_r|^2 + u_r \right\} - \int_{\partial B_1} u_r^2.$$

利用这一点以及

$$\frac{d}{dr} (\nabla u_r) = \nabla \frac{d}{dr} u_r,$$

我们得到

$$\frac{d}{dr} W_u(r) = \int_{B_1} \left\{ \nabla u_r \cdot \nabla \frac{d}{dr} u_r + \frac{d}{dr} u_r \right\} - 2 \int_{\partial B_1} u_r \frac{d}{dr} u_r.$$

现在，通过分部积分可得

$$\int_{B_1} \nabla u_r \cdot \nabla \frac{d}{dr} u_r = - \int_{B_1} \Delta u_r \frac{d}{dr} u_r + \int_{\partial B_1} \partial_\nu (u_r) \frac{d}{dr} u_r.$$

由于 $\Delta u_r = 1$ 属于 $\{u_r > 0\}$，且 $\frac{d}{dr} u_r = 0$ 属于 $\{u_r = 0\}$，我们有

$$\int_{B_1} \nabla u_r \cdot \nabla \frac{d}{dr} u_r = - \int_{B_1} \frac{d}{dr} u_r + \int_{\partial B_1} \partial_\nu (u_r) \frac{d}{dr} u_r.$$

因此，我们推得

$$\frac{d}{dr} W_u(r) = \int_{\partial B_1} \partial_\nu (u_r) \frac{d}{dr} u_r - 2 \int_{\partial B_1} u_r \frac{d}{dr} u_r.$$

利用在 ∂B_1 上有 $\partial_\nu = x \cdot \nabla$，结合

$$\frac{d}{dr} u_r = \frac{1}{r} \{ x \cdot \nabla u_r - 2 u_r \}$$

可得

$$\frac{d}{dr} W_u(r) = \frac{1}{r} \int_{\partial B_1} (x \cdot \nabla u_r - 2 u_r)^2,$$

这就得到了所需结果。 □

现在给出:

命题 5.17 的第一个证明。令 $u_r(x) = r^{-2}u(rx)$，并注意到我们具有缩放性质

$$W_{u_r}(\rho) = W_u(\rho r),$$

对任意 $r,\ \rho > 0$。

如果 u_0 是 u 在 0 处的任意一个爆破，那么存在一个序列 $r_j \to 0$，满足 $u_{r_j} \to u_0$ 于 $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中。因此，对于任意 $\rho > 0$，我们有

$$W_{u_0}(\rho) = \lim_{r_j \to 0} W_{u_{r_j}}(\rho) = \lim_{r_j \to 0} W_u(\rho r_j) = W_u(0^+).$$

注意，由于 W 的单调性，极限 $W_u(0^+) := \lim_{r\to 0} W_u(r)$ 存在；又因为 $u \in C^{1,1}$ 意味着对所有 $r \geq 0$，都有 $W_u(r) \geq -C$。

因此，函数 $W_{u_0}(\rho)$ 关于 ρ 是常数。然而，由定理 5.18 可知，这意味着 $x \cdot \nabla u_0 - 2u_0 \equiv 0$ 属于 $\mathbb{R}^n$，因此 u_0 是二次齐次的。□

注记 5.19。这里，我们用到了：一个 C^1 函数 u_0 是二次齐次的（即对所有 $\lambda \in \mathbb{R}_+$，$u_0(\lambda x) = \lambda^2 u_0(x)$）当且仅当 $x \cdot \nabla u_0 \equiv 2u_0$。这是因为 $\partial_\lambda|_{\lambda=1}\left\{\lambda^{-2}u_0(\lambda x)\right\} = x \cdot \nabla u_0 - 2u_0$。

爆破解的齐次性 `遵循 *Spruck*。我们给出一个关于爆破解齐次性的替代性（且截然不同的）证明。该证明归于 Spruck[**Spr83**]，并不基于任何单调性公式。

命题 5.17 的第二个证明。令 u_0 为沿着序列 $r_k \downarrow 0$取极限得到的一个爆破，

$$u_0(x) := \lim_{k\to\infty} r_k^{-2}u(r_k x).$$

取极坐标（$\varrho,\ \theta$）$\in [0,+\infty)\times\mathbb{S}^{n-1}$，其中 $x = \varrho\theta$，并记 $\tilde{u}_0(\varrho,\ \theta) = u_0(\varrho\theta) = u_0(x)$，我们将证明 $u_0(x) = \varrho^2\tilde{u}_0(1,\ \theta) = |x|^2 u_0(x/|x|)$。

定义 $\tau := -\log\varrho$, $\tilde{u}(\varrho,\ \theta) = u(x)$，并令 $\psi = \psi(\tau,\ \theta)$ 为

$$\psi(\tau,\theta) := \varrho^{-2}\tilde{u}(\varrho,\theta) = e^{2\tau}u(e^{-\tau}\theta)$$

对于 $\tau \geq 0$。我们注意到，由于 $\|u\|_{L^\infty(B_r)} \leq Cr^2$，$\psi$ 是有界的。此外，根据 u 的正则性，$\psi \in C^1((0,\infty)\times\mathbb{S}^{n-1}) \cap C^2(\{\psi > 0\})$；并且 $\partial_\tau\psi$ 和 $\nabla_\theta\psi$ 不仅连续，而且在 $[0,\infty)\times\mathbb{S}^{n-1}$ 中一致有界。事实上，

$$\left|\nabla_\theta\psi(\tau,\theta)\right| \leq e^\tau\left|\nabla u(e^{-\tau}\theta)\right| \leq C,$$

因为 $\|\nabla u\|_{L^\infty(B_r)} \leq Cr$ 由 $C^{1,1}$ 正则性以及 $\nabla u(0) = 0$这一事实。出于同样的原因，我们还得到

$$\left|\partial_\tau\psi(\tau,\theta)\right| \leq 2\psi(\tau,\theta) + e^\tau\left|\nabla u(e^{-\tau}\theta)\right| \leq C.$$

注意，根据假设，若记 $\tau_k := -\log r_k$,

$$\psi(\tau_k, \theta) \to \tilde{u}_0(1, \theta) \text{ 在 } \mathbb{S}^{n-1} \text{ 上一致地，当 } k \to \infty. \tag{5.16}$$

现在我们来写出关于 ψ 的方程。为此，由于我们知道 $\Delta u = \chi_{\{u>0\}}$ 和 $\chi_{\{u>0\}} = \chi_{\{\psi>0\}}$，因此有

$$\Delta\big(\varrho^2\psi(-\log\varrho, \theta)\big) = \chi_{\{\psi>0\}}.$$

将拉普拉斯算子用极坐标展开，$\Delta = \partial_{\varrho\varrho} + \frac{n-1}{\varrho}\partial_\varrho + \varrho^{-2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$（其中 $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 表示球面拉普拉斯算子，即作用于 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子），我们得到

$$2n\psi - (n+2)\partial_\tau\psi + \partial_{\tau\tau}\psi + \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}\psi = \chi_{\{\psi>0\}}. \tag{5.17}$$

将前一个等式乘以 $\partial_\tau\psi$，并对 $[0,\tau]\times\mathbb{S}^{n-1}$ 积分。我们可以分别处理各项，先对 τ 积分，

$$2n\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\tau \psi\partial_\tau\psi = n\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\big(\psi^2(\tau,\theta) - \psi^2(0,\theta)\big)\,d\theta$$

and

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\tau \partial_{\tau\tau}\psi\partial_\tau\psi = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\big((\partial_\tau\psi)^2(\tau,\theta) - (\partial_\tau\psi)^2(0,\theta)\big)\,d\theta,$$

然后先对 θ 分部积分，再对 τ 积分：

$$\begin{aligned}\int_0^\tau\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}\psi\partial_\tau\psi &= -\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\partial_\tau|\nabla_\theta\psi|^2\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\big(|\nabla_\theta\psi|^2(0,\theta) - |\nabla_\theta\psi|^2(\tau,\theta)\big)\,d\theta.\end{aligned}$$

最后，由于当 $\psi = 0$ 时 $\partial_\tau\psi = 0$，我们有 $\chi_{\{\psi>0\}}\partial_\tau\psi = \partial_\tau\psi$，并且

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\tau \chi_{\{\psi>0\}}\partial_\tau\psi = \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\big(\psi(\tau,\theta) - \psi(0,\theta)\big)\,d\theta.$$

总之，将前面的表达式代回（5.17），并利用 $\partial_\tau\psi$ 和 $\nabla_\theta\psi$ 在 $[0,\infty$ 中一致有界$)\times\mathbb{S}^{n-1}$，我们得到

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(\partial_\tau\psi)^2 = \int_0^\infty \|\partial_\tau\psi\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \le C < \infty. \tag{5.18}$$

最后，注意到对于任意固定的 $|s| \le C_*$，以及充分大的 k（使得 $\tau_k + s \ge 0$），

$$\begin{aligned}\|\psi(\tau_k+s,\cdot) - \tilde{u}_0(1,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} &\le \|\psi(\tau_k+s,\cdot) - \psi(\tau_k,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}\\ &\quad + \|\psi(\tau_k,\cdot) - \tilde{u}_0(1,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}.\end{aligned}$$

根据（5.16），最后一项趋于零。另一方面，对于第一项，由 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}\|\psi(\tau_k+s,\cdot)-\psi(\tau_k,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} &\le \left\|\int_0^s \partial_\tau\psi(\tau_k+\tau,\cdot)\,d\tau\right\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}\\ &\le C_*\left|\int_{\tau_k}^{\tau_k+s}\|\partial_\tau\psi\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}\right|\to 0,\end{aligned}$$

当 $k\to\infty$ 时，其中我们使用了 (5.18)。因此，对于任意固定的 $s\in\mathbb{R}$，当 $k\to\infty$ 时，$\psi(\tau_k+s,\cdot)\to\tilde{u}_0(1,\cdot)$ 在 $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 中成立。另一方面，

$$\psi(\tau_k+s,\theta)=e^{2s}r_k^{-2}u(e^{-2}r_k\theta)\to e^{2s}u_0(e^{-s}\theta)=e^{2s}\tilde{u}_0(e^{-s},\theta).$$

也就是说，对于任意 $\rho=e^{-s}>0$,

$$\tilde{u}_0(1,\cdot)=\rho^{-2}\tilde{u}_0(\rho,\theta),$$

正如我们希望看到的那样。 □

爆破解的凸性。 利用我们已知放大极限是二次齐次这一事实，现在我们可以简短地（并以一种新的方式）证明它们也是凸的。更准确地说，我们将证明，障碍问题的二次齐次全局解是凸的（特别地，由命题 5.17 可知，放大极限是凸的）。

定理 5.20。 设 $u_0\in C^{1,1}$ 是任意一个2-齐次全局解，满足

$$\begin{cases} u_0 \ge 0 & \text{in } \mathbb{R}^n\\ \Delta u_0 = 1 & \text{in } \{u_0>0\}\\ 0 \text{ is a free boundary point.}\end{cases}$$

那么， u_0 是凸的。

前一个结果的证明背后的启发性思路如下：二阶导数 D^2u_0 在 $\{u_0>0\}$ 中是调和的，并且满足在 $\partial\{u_0>0\}$ 上 $D^2u_0\ge 0$（因为 $u_0\ge 0$，它在“自由边界处是凸的”）。由于 D^2u_0也是零次齐次的，我们可以应用最大值原理，从而得出 $D^2u_0\ge 0$ 处处成立。也就是说， u_0 是凸的。下面将前述启发性思路形式化为一个实际的证明。

在给出证明之前，我们先陈述一个简短的引理：如果$w\ge 0$ 在 $\{w>0\}$ 中是超调和的，那么它处处超调和。为了一般性起见，我们针对一般的 H^1 函数陈述这个引理，但我们只会将它用于同时连续的函数。

引理 5.21。 设 $\Lambda\subset B_1$ 为闭集。设 $w\in H^1(B_1)$ 满足 $w\ge 0$ 于 Λ 上成立，且 w 在 $B_1\setminus\Lambda$ 中按弱意义为超调和函数。那么$\min\{w,0\}$ 在 B_1 中按弱意义为超调和函数。

证明。 首先假设 w 还具有连续性。在此情形下，我们定义 $w_\varepsilon = \min\{w, -\varepsilon\} \in H^1(B_1)$。注意到，根据连续性，在 $\{w = -\varepsilon\}$ 的某个邻域内，w 是超调和的（$\Delta w \leq 0$）。由引理 3.9（我们将该引理应用于 $v = -w - \varepsilon$），可得 $\Delta w_\varepsilon \leq 0$ 在弱意义下成立，即 w_ε 是超调和的。此外，它们在 H^1 中一致有界，因此取子序列后，它们弱收敛于 $\min\{w, 0\}$。由于弱超调和函数的弱极限仍是超调和函数，我们便得到所需结论。

最后，为了去掉关于 $w \in H^1(B_1)$ 的连续性假设，我们重复引理 3.9 的证明。我们唯一需要验证的是 $F'(v)\eta \in H_0^1(B_1 \setminus \Lambda)$；这是因为这样的函数属于 $H^1(B_1)$，且在 Λ 中消失；例如参见 [**AH96**，定理 9.1。3]。□

现在我们给出：

定理 5.20 的证明。 令 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$，并考虑二阶导数$\partial_{ee} u_0$。我们定义

$$w_0 := \min\{\partial_{ee} u_0, 0\}$$

并且我们断言 w_0 在 $\mathbb{R}^n$ 中是超调和的，其意义如 (1.20) 所示。

事实上，令 $\delta_t^2 u_0(x)$ 对于 $t > 0$ 定义如下：

$$\delta_t^2 u_0(x) := \frac{u_0(x + te) + u_0(x - te) - 2u_0(x)}{t^2}.$$

现在，由于 $\Delta u_0 = \chi_{\{u_0 > 0\}}$，我们有

$$\Delta \delta_t^2 u_0 = \frac{1}{t^2}\big(\chi_{\{u_0(\cdot + te)\}} + \chi_{\{u_0(\cdot - te)\}} - 2\big) \leq 0 \quad \text{in} \quad \{u_0 > 0\}$$

在弱意义下。另一方面，$\delta_t^2 u_0 \geq 0$ 在 $\{u_0 = 0\}$ 中且 $\delta_t^2 u_0 \in C^{1,\,1}$。因此，由引理 5.21，$w_t := \min\{\delta_t^2 u_0, 0\}$ 是弱超调和的，因而满足 (1.20)。还要注意，$\delta_t^2 u_0(x)$一致有界，且与 t无关，因为 $u_0 \in C^{1,\,1}$，因此 w_t 在 t 中一致有界，并在 $t \downarrow 0$时逐点收敛到 w_0。特别地，由引理 1.16 可知，w_0 在 (1.20) 的意义下是超调和的，正如所声称的那样。

至多在一个零测集上改变后，由引理 1.17，w_0 是下半连续的。特别地，由于 w_0 是零次齐次的，它必定在某个点 $y_\circ \in B_1$处取得最小值。但由于 $\int_{B_r(y_\circ)} w_0$ 关于 $r > 0$非增，我们必有 w_0 为常数。由于它在自由边界上为零，因此 $w_0 \equiv 0$。也就是说，对于任意 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$，都有 $\partial_{ee} u_0 \geq 0$，因此 u_0 是凸的。□

注记 5.22（爆破解的凸性 `依照 Caffarelli）。 Caffarelli 关于放大极限凸性的原始证明更为复杂，[**Caf77, Caf98**], 但得到了关于凸性的定量估计

且不需要齐次性假设（尤其是，它对任意全局解都成立）。

更确切地说，对于 B_1中的任意满足 **(5.14)** 的解 u

$$\partial_{ee}u(x) \geq -\frac{C}{\left|\log|x|\right|^{\varepsilon}} \qquad \text{for all} \quad e \in \mathbb{S}^{n-1},\ x \in B_{1/2},$$

对于某个 $\varepsilon > 0$。注意，当 $x \to 0$时， $C\left|\log|x|\right|^{-\varepsilon} \to 0$。因此，随着我们趋近自由边界， u 会越来越接近凸函数。将此结果重新缩放至 B_R，并令 $R \to \infty$，即可推出任意全局解都是凸的。

最后，我们还可参阅**PSU12**，定理 5.1]，其中给出了爆破解凸性的另一种不同证明。

爆破解的分类。 接下来，我们希望对障碍问题 **(5.14)** 的解的所有可能放大极限进行分类。首先，我们将证明以下结论。

命题 5.23。 设 u 是(5.14)的任意解，并设

$$u_r(x) := \frac{u(rx)}{r^2}.$$

那么，对于任意序列 $r_k \to 0$，都存在一个子序列 $r_{k_j} \to 0$，使得

$$u_{r_{k_j}} \longrightarrow u_0 \quad \textit{in } C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

当 $k_j \to \infty$ 时，收敛至某个满足以下条件的函数 u_0

$$\begin{cases} u_0 \in C^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \\ u_0 \geq 0 \quad \textit{in } B_1 \\ \Delta u_0 = 1 \quad \textit{in } \{u_0 > 0\} \\ 0 \textit{ is a free boundary point} \\ u_0 \textit{ is convex} \\ u_0 \textit{ is homogeneous of degree 2.} \end{cases}$$

证明。 由 $C^{1,\,1}$ u 的正则性以及非退化性，我们得到

$$\frac{1}{C} \leq \sup_{B_1} u_r \leq C$$

对于某个 $C > 0$。此外，再次由 $C^{1,\,1}$ u 的正则性，我们得到

$$\|D^2 u_r\|_{L^\infty(B_{1/(2r)})} \leq C.$$

由于序列 $\{u_{r_k}\}$（对于 $r_k \to 0$）在每个紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 上都在 $C^{1,\,1}($ $K)$ 中一致有界，因此存在一个子序列 $r_{k_j} \to 0$，使得

$$u_{r_{k_j}} \longrightarrow u_0 \quad \text{in } C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

对于某个 $u_0 \in C^{1,1}(K)$。此外，这样的函数 u_0 满足 $\|D^2 u_0\|_{L^\infty(K)} \le C$，其中 C 与 K 无关，并且显然 $u_0 \ge 0$ 属于 K。

事实 $\Delta u_0 = 1$ in $\{u_0 > 0\} \cap K$ 可按如下方式验证。对于任意光滑函数 $\eta \in C_c^\infty(\{u_0 > 0\} \cap K)$，当 k_j 足够大时，我们有 $u_{r_{k_j}} > 0$ 属于 η 的支集，因此

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_{r_{k_j}} \cdot \nabla \eta \, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx.$$

由于 $u_{r_{k_j}} \to u_0$ in $C^1(K)$，我们可以取极限 $k_j \to \infty$ 得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_0 \cdot \nabla \eta \, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx.$$

由于这对任意 $\eta \in C_c^\infty(\{u > 0\} \cap K)$ 以及每个 $K \subset \mathbb{R}^n$ 都成立，因此可得 $\Delta u_0 = 1$ in $\{u_0 > 0\}$。

0 是 u_0 的自由边界点这一事实，只需令极限趋于 $u_{r_{k_j}}(0) = 0$ 和 $\|u_{r_{k_j}}\|_{L^\infty(B_\rho)} \approx \rho^2$，其中任意 $\rho \in (0,1)$ 均成立。最后，u_0 的齐次性和凸性由命题 5.17 和定理 5.20 得出。□

我们的下一个目标是证明以下结论。

定理 5.24（爆破解的分类）。设 u 是 *(5.14)* 的任意一个解，并设 u_0 是 u 在 0 处的任意一个放大极限。那么，

(a) 要么

$$u_0(x) = \frac{1}{2}(x \cdot e)_+^2$$

对某个 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ 成立。

(b) 要么

$$u_0(x) = \frac{1}{2} x^T A x$$

对某个矩阵 $A \ge 0$，有 迹 $A = 1$。

需要在此指出，先验地，不同的子序列可能会导出不同的放大极限 u_0。

为了证明定理 5.24，我们需要以下结果。

引理 5.25. 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ 是任意一个内部非空、顶点位于原点的闭凸锥。设 $w \in C(\mathbb{R}^n)$ 是一个函数，满足 $\Delta w = 0$ 属于 Σ^c、$w > 0$ 属于 Σ^c，且 $w = 0$ 属于 Σ。

进一步假设 w 是*1*次齐次的。那么，Σ 必定是一个半空间。

证明。由 Σ的凸性可知，存在一个半空间 $H = \{x \cdot e > 0\}$，满足$e \in \mathbb{S}^{n-1}$，使得 $H \subset \Sigma^c$。

令 $v(x) = (x \cdot e)+$，它在 H 中是调和且正的，并在 H^c 中取零。根据 Hopf 引理（见引理 1.15），我们有 $w \geq c_\circ d_\Sigma$ in$\Sigma^c \cap B_1$，其中 $d_\Sigma(x) = \text{dist}(x, \Sigma)$，且 $c_\circ$ 是一个较小的正数。特别地，由于 w 和 d_Σ 都是 1 次齐次的，我们推得 $w \geq c_\circ d_\Sigma$ 在整个 Σ^c 中成立。注意，为了应用 Hopf 引理，我们利用了这样一个事实：由 Σ 的凸性可知，区域 Σ^c 满足内切球条件。

因此，由于 $d_\Sigma \geq d_{H^c} = v$，我们推得，对于某个 $c_\circ > 0$，有 $w \geq c_\circ v_\circ$ 现在的思路是考虑函数 w 和 cv，并让 $c > 0$ 不断增大，直到这两个函数在某一点相切，这将导致矛盾（回想一下，两个调和函数不可能在一个内点相切）。为严谨起见，定义

$$c_* := \sup\{c > 0 : w \geq cv \quad \text{in} \quad \Sigma^c\}.$$

注意到 $c_* \geq c_\circ > 0$。接下来，我们考虑函数 $w - c_* v \geq 0$。假设 $w - c_* v$ 并非恒等于零。该函数在 H 中是调和函数，因此根据强最大值原理，$w - c_* v > 0$ 在 H中成立。然后，在 H中应用 Hopf 引理（见引理 1.15），我们推得 $w - c_* v \geq c_\circ d_{H^c} = c_\circ v$，因为 v 恰好是到 H^c的距离。但这样一来，我们得到 $w - (c_* + c_\circ)v \geq 0$，这与 c_*的定义矛盾。

因此，必有 $w - c_* v \equiv 0$。这意味着 w 是v的倍数，因此 $\Sigma = H^c$是一个半空间。□

注记 5.26（另一种证明）。对于前一个引理，也可以用下面的方法来论证。任何在锥 Σ^c 中调和且次数为 α 的函数 w，都可以写成球面上的一个函数，并满足 $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} w = \mu w$，其中 $\mathbb{S}^{n-1} \cap \Sigma^c$ 上的 $\mu = \alpha(n + \alpha - 2)$——在本例中为 $\alpha = 1$。（这里，$\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 表示球面拉普拉斯算子，即作用于 $\mathbb{S}^{n-1}$上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子。）换句话说，齐次调和函数在球面上满足一个特征值问题。

利用这一点，我们注意到，$w > 0$ 属于 Σ^c 且 $w = 0$ 属于 Σ，这意味着 w 是 $\mathbb{S}^{n-1} \cap \Sigma^c$的第一特征函数，且第一特征值为 $\mu = n - 1$。但另一方面，区域 $H = \{x \cdot e > 0\}$也有同样的结论，因为 $v(x) = (x \cdot e)+$ 是 H中的一个正调和函数。这意味着区域 $\mathbb{S}^{n-1} \cap \Sigma^c$和 $\mathbb{S}^{n-1} \cap H$具有相同的第一特征值 μ。然而，根据第一特征值关于区域包含关系的严格单调性，我们可推出 $H \subset \Sigma^c$ 蕴含 $H = \Sigma^c$，证毕。

我们还需要以下结论。

引理 5.27. 假设 $\Delta u = 1$ 属于 $\mathbb{R}^n \setminus \partial H$，其中 ∂H 是一个超平面。如果 $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$，那么 $\Delta u = 1$ 属于 $\mathbb{R}^n$。

证明。假设 $\partial H = \{x_1 = 0\}$。对于任意球 $B_R \subset \mathbb{R}^n$，我们考虑 $\Delta w = 1$ 在 B_R中的解，满足 $w = u$ 在 ∂B_R上，并定义 $v = u - w$。于是，我们有 $\Delta v = 0$ 在 $B_R \setminus \partial H$ 中，且 $v = 0$ 在 ∂B_R上。我们要证明 u与 w重合，也就是说， $v \equiv 0$ 在 B_R中。

为此，注意到由于 v 有界，当 $\kappa > 0$ 足够大时，我们有

$$v(x) \leq \kappa(2R - |x_1|) \quad \text{in} \quad B_R,$$

其中 $2R - |x_1|$ 在 B_R 中为正，且在 $B_R \setminus \{x_1 = 0\}$中调和。因此，我们可以考虑 $\kappa^* := \inf\{\kappa \geq 0 : v(x) \leq \kappa(2R - |x_1|) \text{ 在 } B_R\}$中。假设$\kappa^* > 0$。由于 v和 $2R - |x_1|$ 在 B_R 中连续，且 $v = 0$ 在 ∂B_R 上，我们必存在一点 $p \in B_R$，使得 $v(p) = \kappa^*(2R - |p_1|)$。此外，由于 v是 C^1，且函数 $2R - |x_1|$ 在 $\partial H = \{x_1 = 0\}$上有一个楔形尖点，我们必有 $p \in B_R \setminus \partial H$。然而，这是不可能的，因为两个调和函数不可能在内点 p处相切。这意味着 $\kappa^* = 0$，因此 $v \leq 0$ 在 B_R中。用 $-v$ 代替v重复同样的论证，我们可推得 $v \equiv 0$ 在 B_R中，从而引理得证。□

最后，我们将使用凸函数的以下基本性质。

引理 5.28. 设 $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为一个凸函数，且集合 $\{u = 0\}$包含直线 $\{te' : t \in \mathbb{R}\}$，$e' \in \mathbb{S}^{n-1}$。那么，对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 和所有 $t \in \mathbb{R}$，均有 $u(x + te') = u(x)$。

证明.经过旋转后，我们不妨设 $e' = e_n$。接着，令 $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$，则对于所有 $x_n \in \mathbb{R}$，都有 $u(0, x_n) = 0$；我们要证明，对于所有 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$和所有 $x_n \in \mathbb{R}$，均有 $u(x', x_n) = u(x', 0)$。

现在，根据凸性，给定 x' 和 x_n，对于每个 $\varepsilon > 0$ 和 $M \in \mathbb{R}$，我们有

$$(1 - \varepsilon)u(x', x_n) + \varepsilon u(0, x_n + M) \geq u((1 - \varepsilon)x', x_n + \varepsilon M).$$

由于 $u(0, x_n + M) = 0$，选取 $M = \lambda/\varepsilon$并令 $\varepsilon \to 0$，我们便可推得

$$u(x', x_n) \geq u(x', x_n + \lambda).$$

由于这对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $x_n \in \mathbb{R}$都成立，因此结论得证。 □

最后，我们给出正则点处放大极限的分类。

定理 5.24 的证明。设 u_0 是 u 在 0 处的任意一个爆破。我们已经证明 u_0 是凸的二次齐次函数。我们将证明分为两种情形。

情况 *1.* 假设 $\{u_0 = 0\}$ 具有非空内部。那么，我们有$\{u_0 = 0\} = \Sigma$，它是一个具有非空内部的闭凸锥。

对于满足 $-\tau \in \mathring{\Sigma}$ 的任意方向 $\tau \in \mathbb{S}^{n-1}$，我们断言

$$\partial_\tau u_0 \geq 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n.$$

事实上，对每个 $x \in \mathbb{R}^n$，我们都有 $u_0(x + \tau t)$ 在 $t \ll -1$ 上为零，因此由 u_0 的凸性可知，$\partial_t u_0(x + \tau t)$ 关于 t 单调不减，并且在 $t \ll -1$ 上为零。这意味着 $\partial_t u_0 \geq 0$，因此 $\partial_\tau u_0 \geq 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中，正如所述。

现在，对于任意这样的 τ，我们定义 $w := \partial_\tau u_0 \geq 0$。注意，至少对于某个满足 $-\tau \in \mathring{\Sigma}$ 的 $\tau \in \mathbb{S}^{n-1}$，函数 w 并非恒等于零。此外，由于它在 Σ^c 中是调和的——回想一下，$\Delta u_0 = 1$ 在 Σ^c 中——那么 $w > 0$ 在 Σ^c 中。

但是，由于 w 是1次齐次的，我们可以应用引理 5.25 得出结论：Σ 必定是一个半空间。

由 u_0 的凸性和引理 5.28可知，这意味着 u_0 是一个单变量函数，即对某个 U，有 $u_0(x) = U(x \cdot e)$，且 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和某个$e \in \mathbb{S}^{n-1}$。因此，我们有 $U \in C^{1,1}$ 在 $t > 0$上满足 $U''(t) = 1$，且 $U(t) = 0$，其中 $t \leq 0$。由此可推得 $U(t) = \frac{1}{2}t_+^2$，因此$u_0(x) = \frac{1}{2}(x \cdot e)_+^2$。

情形 *2*。现在假设 $\{u_0 = 0\}$ 的内部为空。于是，由凸性可知，$\{u_0 = 0\}$ 包含于一个超平面 ∂H中。因此，$\Delta u_0 = 1$ 属于 $\mathbb{R}^n \setminus \partial H$，其中$\partial H$ 是一个超平面，且 $u_0 \in C^{1,1}$。由引理 5.27可知，$\Delta u_0 = 1$ 在整个 $\mathbb{R}^n$上成立。但此时，u_0 的所有二阶导数在 $\mathbb{R}^n$中都是调和且全局有界的，因此它们必为常数。于是，u_0 是一个二次多项式。最后，由于 $u_0(0) = 0$、$\nabla u_0(0) = 0$以及 $u_0 \geq 0$，我们推得对某个 $A \geq 0$，有 $u_0(x) = \frac{1}{2}x^T Ax$；又由于 $\Delta u_0 = 1$，故有 $\operatorname{tr} A = 1$。
□

5.6. 自由边界的正则性

本节的目标是证明下面的定理 5.38，即如果 u 是方程 (5.14) 的任意一个解，并满足

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\big|\{u = 0\} \cap B_r\big|}{|B_r|} > 0 \tag{5.19}$$

（也就是说，接触集在原点处具有正密度），那么在原点的某个邻域内，自由边界 $\partial\{u > 0\}$ 是 C^∞。

为此，我们将使用前一节建立的爆破解的分类。

$C^{1,\alpha}$ 自由边界的正则性。这里的第一步是将 (5.19) 给出的关于 u 的局部信息转化为爆破 u_0。更准确地说，

接下来我们证明

$$(5.19) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{爆破 } u_0 \text{ 的接触集具有非空内部。}$$

引理 5.29. 设 u 是 (5.14) 的任意一个解，并假设(5.19) 成立。那么， u 在 0 处至少有一个爆破 u_0 ，其接触集$\{u_0 = 0\}$ 具有非空内部。

证明。 设 $r_k \to 0$ 是一个序列，使得

$$\lim_{r_k \to 0} \frac{\left|\{u = 0\} \cap B_{r_k}\right|}{|B_{r_k}|} \geq \theta > 0.$$

根据假设 (5.19)，这样的序列存在（只要 $\theta > 0$ 足够小）。

回顾一下，得益于命题 5.23，存在一个子序列 $r_{k_j} \downarrow 0$，使得 $u_{r_{k_j}} \to u_0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的紧集上一致收敛，其中 $u_r(x) = r^{-2}u(rx)$ 且 u_0 是凸的。

反设 $\{u_0 = 0\}$ 的内部为空。那么，由凸性可知， $\{u_0 = 0\}$ 包含于某个超平面中，记作 $\{u_0 = 0\} \subset \{x_1 = 0\}$。

由于 $u_0 > 0$ 属于 $\{x_1 \neq 0\}$ ，且 u_0 连续，因此对于每个 $\delta > 0$

$$u_0 \geq \varepsilon > 0 \quad \text{in } \{|x_1| > \delta\} \cap B_1$$

对于某个 $\varepsilon > 0$。

因此，由 $u_{r_{k_j}}$ 在 B_1 上一致收敛到 u_0 ，存在足够小的 $r_{k_j} > 0$，使得

$$u_{r_{k_j}} \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \text{in } \{|x_1| > \delta\} \cap B_1.$$

特别地， $u_{r_{k_j}}$ 的接触集包含于 $\{|x_1| \leq \delta\} \cap B_1$，因此

$$\frac{\left|\{u_{r_{k_j}} = 0\} \cap B_1\right|}{|B_1|} \leq \frac{\left|\{|x_1| \leq \delta\} \cap B_1\right|}{|B_1|} \leq C\delta.$$

重新缩放回 u，得到

$$\frac{\left|\{u = 0\} \cap B_{r_{k_j}}\right|}{|B_{r_{k_j}}|} = \frac{\left|\{u_{r_{k_j}} = 0\} \cap B_1\right|}{|B_1|} < C\delta.$$

由于对每个 $\delta > 0$ 都可以这样做，我们得到 $\lim_{r_{k_j} \to 0} \frac{|\{u=0\} \cap B_{r_{k_j}}|}{|B_{r_{k_j}}|} = 0$，这就产生了矛盾。因此，引理得证。□

结合前一个引理与上一节的爆破解的分类，我们可得:

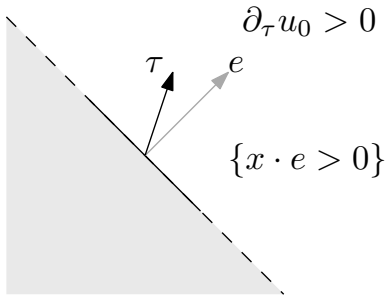


图 5.12. 当 $\tau \cdot e \geq \frac{1}{2}$ 时，导数 $\partial_\tau u_0$ 非负。

推论 5.30. 设 u 是 (5.14) 的任意一个解，并假设 (5.19) 成立。那么， u 在 0 处至少存在一个如下形式的爆破

$$u_0(x) = \frac{1}{2}(x \cdot e)_+^2, \qquad e \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

证明. 该结果由引理 5.29 和定理 5.24 得出。 □

现在我们要利用这些信息证明自由边界在 0 的某个邻域内必定是光滑的。为此，我们先给出以下命题。

命题 5.31. 设 u 是 (5.14) 的任意一个解，并假设 (5.19) 成立。任取 $\varepsilon > 0$。那么，存在 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ 和 $r_\circ > 0$，使得

$$\left|u_{r_\circ}(x) - \tfrac{1}{2}(x \cdot e)_+^2\right| \leq \varepsilon \qquad in \quad B_1,$$

and

$$\left|\partial_\tau u_{r_\circ}(x) - (x \cdot e)_+(\tau \cdot e)\right| \leq \varepsilon \qquad in \quad B_1$$

对所有 $\tau \in \mathbb{S}^{n-1}$ 均成立。

证明。 由推论 5.30 和命题 5.23 可知，存在一个子序列 $r_j \to 0$，使得 $u_{r_j} \to \frac{1}{2}(x \cdot e)_+^2$ 属于 $C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$，其中 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$。特别地，对于每个 $\tau \in \mathbb{S}^{n-1}$，我们都有 $u_{r_j} \to \frac{1}{2}(x \cdot e)_+^2$ 和 $\partial_\tau u_{r_j} \to \partial_\tau\left[\frac{1}{2}(x \cdot e)_+^2\right]$，且在 B_1 上一致地成立。

这意味着，给定 $\varepsilon > 0$，存在 $j_\circ$ 使得

$$\left|u_{r_{j_\circ}}(x) - \tfrac{1}{2}(x \cdot e)_+^2\right| \leq \varepsilon \qquad \text{in} \quad B_1,$$

and

$$\left|\partial_\tau u_{r_{j_\circ}}(x) - \partial_\tau\left[\tfrac{1}{2}(x \cdot e)_+^2\right]\right| \leq \varepsilon \qquad \text{in} \quad B_1.$$

由于 $\partial_\tau\left[\frac{1}{2}(x \cdot e)_+^2\right] = (x \cdot e)_+(\tau \cdot e)$，命题得证。 □

现在注意，如果 $(\tau \cdot e) > 0$，那么导数 $\partial_\tau u_0 = (x \cdot e)_+(\tau \cdot e)$ 是非负的，并且在 $\{x \cdot e > 0\}$ 中严格为正（见图 5.12）。

我们希望将这一信息转移到 $u_{r_\circ}$，并证明对于所有满足 $\tau\cdot e\geq\frac{1}{2}$ 的 $\tau\in\mathbb{S}^{n-1}$， $\partial_\tau u_{r_\circ}\geq 0$ 都在 B_1 中。为此，我们需要一个引理。

引理 5.32。设 u 是 *(5.14)* 的任意一个解，并考虑 $u_{r_\circ}(x) \quad =r_\circ^{-2}u(r_\circ x)$ 和 $\Omega\ =\{u_{r_\circ}>0\}$。

假设函数 $w\in C(B_1)$ 满足：

(a) w 在 $\Omega\cap B_1$ 中有界且调和。*(b)* $w=0$ 在 $\partial\Omega$ $\cap B_1$ 上。*(c)* 记 $N_\delta:=\{x\in B_1:\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)<\delta\}$，我们有

$$w\geq -c_1 \quad in \quad N_\delta \qquad and \qquad w\geq C_2>0 \quad in \quad \Omega\setminus N_\delta.$$

如果 c_1/C_2 足够小，且 $\delta>0$ 足够小，那么 $w\geq 0$ 在 $B_{1/2}\cap\Omega$ 中。

证明。注意，在 $\Omega\setminus N_\delta$ 中，我们已经知道 $w>0_\circ$ 设 $y_\circ\in N_\delta\cap\Omega$ $\cap B_{1/2}$，并反设 $w(y_0)<0_\circ$

考虑在 $B_{1/4}(y_\circ)$ 中的函数

$$v(x)=w(x)-\gamma\left\{u_{r_\circ}(x)-\frac{1}{2n}|x-y_\circ|^2\right\}.$$

于是， $\Delta v=0$ 在 $B_{1/4}(y_\circ)\cap\Omega$ 中，且 $v(y_\circ)<0_\circ$ 因此， v 必定在 $\partial\big(B_{1/4}(y_\circ)\cap\Omega\big)$ 中取得负最小值。

然而，如果 c_1/C_2 和 δ 足够小，那么我们会得到如下矛盾：

在 $\partial\Omega$ 上有 $v\geq 0_\circ$ 在 $\partial B_{1/4}(y_\circ)\cap N_\delta$ 上，我们有

$$v\geq -c_1-C_\circ\gamma\delta^2+\frac{\gamma}{2n}\left(\frac{1}{4}\right)^2\geq 0 \quad \text{on} \quad \partial B_{1/4}(y_\circ)\cap N_\delta.$$

在 $\partial B_{1/4}(y_\circ)\cap(\Omega\setminus N_\delta)$ 上，我们有

$$v\geq C_2-C_\circ\gamma\geq 0 \quad \text{on} \quad \partial B_{1/4}(y_\circ)\cap\big(\Omega\setminus N_\delta\big).$$

这里我们用到了 $\|u_{r_\circ}\|_{C^{1,\ 1}(B_1)}\leq C_\circ$，并选择了 $C_\circ c_1\leq\gamma\leq C_2/C_\circ$。 □

利用前面的引理，我们现在可以证明，存在一个方向锥 τ，使得解在原点附近是单调的。

命题 5.33. 设 u 是 (5.14) 的任意一个解，并假设 (5.19) 成立。设 $u_r(x)$ $=r^{-2}u(rx)$。那么，存在 $r_\circ>0$ 和 $e\in\mathbb{S}^{n-1}$，使得

$$\partial_\tau u_{r_\circ}\geq 0 \quad in \quad B_{1/2}$$

对每个满足 $\tau\cdot e\geq\frac{1}{2}$ 的 $\tau\in\mathbb{S}^{n-1}$。–

证明。 根据命题 5.31，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ 和 $r_\circ > 0$，使得

$$\left|u_{r_\circ}(x) - \tfrac{1}{2}(x \cdot e)_+^2\right| \le \varepsilon \qquad \text{in} \quad B_1 \tag{5.20}$$

and

$$\left|\partial_\tau u_{r_\circ}(x) - (x \cdot e)_+(\tau \cdot e)\right| \le \varepsilon \qquad \text{in} \quad B_1 \tag{5.21}$$

对所有 $\tau \in \mathbb{S}^{n-1}$。

现在我们想利用引理 5.32 推导出 $\partial_\tau u_{r_\circ} \ge 0 \,\text{if}\, \tau \cdot e \ge \frac{1}{2}$。首先，我们断言

$$u_{r_\circ} > 0 \quad \text{in} \quad \{x \cdot e > C_\circ\sqrt{\varepsilon}\},$$

$$u_{r_\circ} = 0 \quad \text{in} \quad \{x \cdot e < -C_\circ\sqrt{\varepsilon}\}, \tag{5.22}$$

因此，自由边界 $\partial\Omega = \partial\{u_{r_\circ} > 0\}$ 包含于条带$\{|x \cdot e| \le C_\circ\sqrt{\varepsilon}\}$中，其中 $C_\circ$ 仅依赖于 n （见图 5.13）。为证明这一点，注意若 $x \cdot e > C_\circ\sqrt{\varepsilon}$，则

$$u_{r_\circ} > \frac{1}{2}(C_\circ\sqrt{\varepsilon})^2 - \varepsilon > 0,$$

而如果 $\{x \cdot e < -C_\circ\varepsilon\}$ 中存在一个自由边界点 $x_\circ$，那么根据非退化性，我们会得到

$$\sup_{B_{C_\circ\sqrt{\varepsilon}}(x_\circ)} u_{r_\circ} \ge c(C_\circ\sqrt{\varepsilon})^2 > 2\varepsilon,$$

这与 (5.20) 矛盾。

因此，我们有

$$\partial\Omega \subset \{|x \cdot e| \le C_\circ\sqrt{\varepsilon}\}.$$

现在，对于每个满足 $\tau \cdot e \ge \frac{1}{2}$ 的 $\tau \in \mathbb{S}^{n-1}$，我们定义

$$w := \partial_\tau u_{r_\circ}.$$

为了使用引理 5.32，我们注意到：

(a) w 在 $\Omega \cap B_1$ 中有界且调和。(b) $w = 0$ 在 $\partial\Omega \cap B_1$ 上。(c) 根据 (5.21)，若 $\delta \gg \sqrt{\varepsilon}$，则 w 满足

$$w \ge -\varepsilon \quad \text{in} \quad N_\delta$$

and

$$w \ge \delta/4 > 0 \quad \text{in} \quad (\Omega \setminus N_\delta) \cap B_1.$$

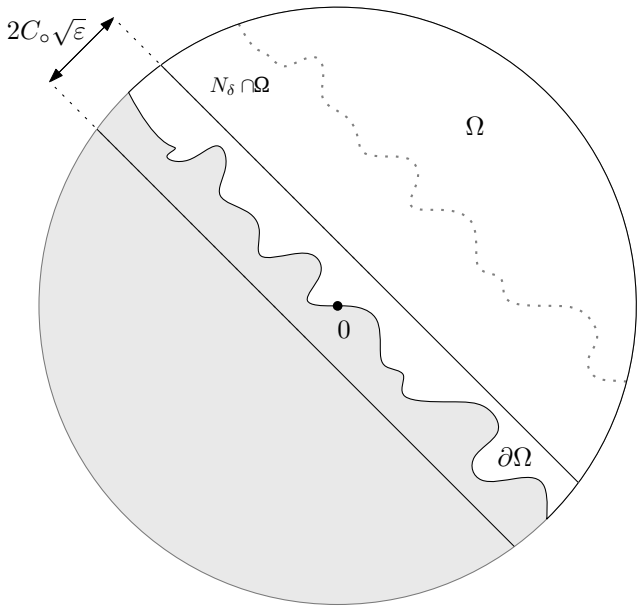


图 5.13。 我们使用引理 5.32 的情形。

(回顾一下 $N_\delta := \{x \in B_1 : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}_\circ$)

事实上，为了验证最后一个不等式，我们利用 (5.22) 得到
$\{x \cdot e < \delta - C_\circ\sqrt{\varepsilon}\}^- \cap \Omega \subset N_{\delta\circ}$ 因此，由 (5.21) 可知，对所有 $x \in (\Omega \setminus N_\delta) \cap B_1$

$$w \geq \frac{1}{2}(x \cdot e)_+ - \varepsilon \geq \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}C_\circ\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon \geq \frac{1}{4}\delta,$$

前提是 $\delta \gg \sqrt{\varepsilon}_\circ$

利用 (a)-(b)-(c)，由引理 5.32 可推出

$$w \geq 0 \quad \text{in} \quad B_{1/2}.$$

由于我们可以对每个满足 $\tau \cdot e \geq \frac{1}{2}$ 的 $\tau \in \mathbb{S}^{n-1}$ 都这样做，因此命题得证。□

作为前一个命题的推论，我们得到：

推论 5.34. 设 u 是 (5.14) 的任意一个解，并假设(5.19)成立。那么，存在 $r_\circ > 0$ ，使得自由边界 $\partial\{u_{r_\circ} > 0\}$ 在 $B_{1/2}$ 中是利普希茨 的。特别地，u, $\partial\{u > 0\}$ 的自由边界在 $B_{r_\circ/2}$中是利普希茨的。

证明。 这由以下事实推出：对于所有满足 $\tau \cdot e \geq \frac{1}{2}$ 的 $\tau \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\partial_\tau u_{r_\circ} \geq 0$ 属于 $B_{1/2}$ （由命题 5.33 得出），具体说明如下。

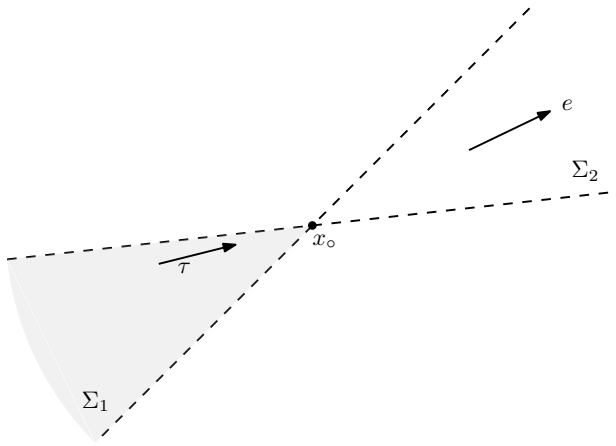


图 5.14. Σ_1 和 Σ_2的表示。

设 $x_\circ \in B_{1/2} \cap \partial\{u_{r_\circ} > 0\}$ 是 $B_{1/2}$ 中任意一个自由边界点，并令

$$\Theta := \left\{\tau \in \mathbb{S}^{n-1} : \tau \cdot e > \tfrac{1}{2}\right\},$$

$$\Sigma_1 := \left\{x \in B_{1/2} : x = x_\circ - t\tau, \text{ with } \tau \in \Theta,\ t > 0\right\},$$

and

$$\Sigma_2 := \left\{x \in B_{1/2} : x = x_\circ + t\tau, \text{ with } \tau \in \Theta,\ t > 0\right\},$$

见图 5.14。

我们断言

$$\begin{cases} u_{r_\circ} = 0 & \text{in } \Sigma_1, \\ u_{r_\circ} > 0 & \text{in } \Sigma_2. \end{cases} \tag{5.23}$$

事实上，由于 $u_{r_\circ}(x_\circ) = 0$，由单调性 $\partial_\tau u_{r_\circ} \geq 0$ 以及 $u_{r_\circ}$ 的非负性可知，对于所有 $t > 0$ 和$\tau \in \Theta$，都有 $u_{r_\circ}(x_\circ - t\tau) = 0$。特别地，在 Σ_1 中不可能存在自由边界点。

另一方面，利用同样的论证，如果对于某个$x_1 \in \Sigma_2$ 有 $u_{r_\circ}(x_1) = 0$，那么我们就会有 $u_{r_\circ} = 0$ 在 $\left\{x \in B_{1/2}\right.$ 中：$\left. x = x_1 - t\tau,\ \text{其中 } \tau \in \Theta,\ t > 0\right\} \ni x_\circ$，特别地，$x_\circ$ 就不是自由边界点。因此，对于所有 $x_1 \in \Sigma_2$，都有 $u_{r_\circ}(x_1) > 0$，于是（5.23）得证。

最后，注意到 (5.23) 表明，自由边界 $\partial\{u_{r_\circ} > 0\} \cap B_{1/2}$ 同时满足内锥条件和外锥条件，因此它是利普希茨的。□

一旦我们知道自由边界是利普希茨的，就可以不失一般性地假设 $e = e_n$ 并且

$$\partial\{u_{r_\circ} > 0\} \cap B_{1/2} = \{x_n = g(x')\} \cap B_{1/2}$$

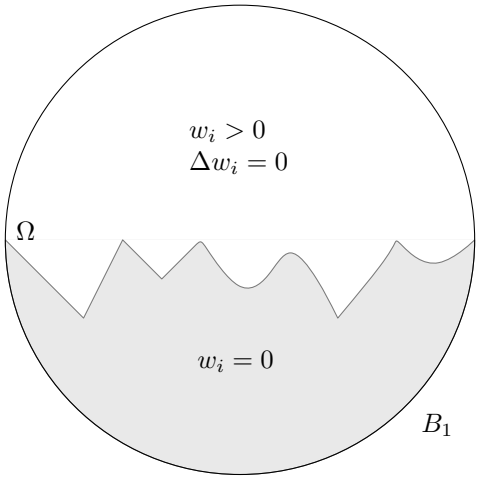


图 5.15. 边界哈纳克原理的设定。

对于一个利普希茨函数 g： $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$。这里， $x = (x', x_n)$，其中 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$并且 $x_n \in \mathbb{R}$。

现在，我们要证明利普希茨自由边界是 $C^{1,\alpha}$。为此，一个关键要素是调和函数的以下基本性质（设定的示意见图 5.15）。

定理 5.35 （边界哈纳克原理）。 设 w_1 和 w_2 是 正调和函数，定义在 $B_1 \cap \Omega$上，其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任意一个 利普希茨区域。

假设 w_1 和 w_2 在 $\partial\Omega \cap B_1$上为零，且 $C_\circ^{-1} \leq \|w_i\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C_\circ$ 对于 $i = 1,2$。那么，

$$\frac{1}{C} w_2 \leq w_1 \leq C w_2 \qquad in \quad \overline{\Omega} \cap B_{1/2}.$$

此外，

$$\left\| \frac{w_1}{w_2} \right\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \cap B_{1/2})} \leq C$$

对于某个较小的 $\alpha > 0$。常数 α 和 C 仅依赖于 n、 $C_\circ$ 和 Ω。

为使论述完整，我们在附录 B 中给出这一结果的证明。关于更一般算子的边界哈纳克原理，请参阅 [**DS20**]； 关于带右端项方程的边界哈纳克原理，请参阅[**AS19, RT21**]。

注 5.36。 定理 5.35 的关键在于，允许 Ω 是利普希茨区域。如果 Ω 是光滑的（例如，C^2 甚至 $C^{1,\alpha}$），那么通过简单的屏障论证即可得出， w_1 和 w_2 都与到 $\partial\Omega$ 的距离相当，也就是说，它们从 $\partial\Omega$ 出发以线性速率趋于零。然而，对于利普希茨

区域，这一结果无法通过简单的屏障论证证明，建立该结果要精细得多。

边界哈纳克原理是研究自由边界问题，尤其是障碍问题的一项关键工具。在这里，我们用它来证明，对于某个足够小的 $\alpha > 0$，自由边界是 $C^{1,\alpha}$。

命题 5.37. 设 u 是 (5.14) 的任意一个解，并假设 (5.19) 成立。那么，存在 $r_\circ > 0$，使得对于某个足够小的 $\alpha > 0$，自由边界 $\partial\{u_{r_\circ} > 0\}$ 在 $B_{1/4}$ 中是 $C^{1,\alpha}$。特别地，u，$\partial\{u > 0\}$的自由边界在 $B_{r_\circ/4}$ 中是 $C^{1,\alpha}$。

证明. 设 $\Omega = \{u_{r_\circ} > 0\}$。根据推论 5.34，如果 $r_\circ > 0$ 足够小，那么（可能经过一次旋转后）我们有

$$\Omega \cap B_{1/2} = \{x_n \geq g(x')\} \cap B_{1/2}$$

并且自由边界由下式给出

$$\partial\Omega \cap B_{1/2} = \{x_n = g(x')\} \cap B_{1/2},$$

其中 g 是利普希茨的。

Let

$$w_2 := \partial_{e_n} u_{r_\circ}$$

and

$$w_1 := \partial_{e_i} u_{r_\circ} + \partial_{e_n} u_{r_\circ}, \qquad i = 1, ..., n-1.$$

由于对于所有满足 $\tau \cdot e_n \geq \frac{1}{2}$ 的 $\tau \in \mathbb{S}^{n-1}$，$\partial_\tau u_{r_\circ} \geq 0$ 都属于 $B_{1/2}$，因此我们有 $w_2 \geq 0$属于 $B_{1/2}$，且 $w_1 \geq 0$ 属于 $B_{1/2}$。

这是因为 $\partial_{e_i} + \partial_{e_n} = \partial_{e_i+e_n} = \sqrt{2}\partial_\tau$，其中 $\tau \cdot e_n = 1/\sqrt{2} > \frac{1}{2}$。注意，我们在 w_1 中加入项 $\partial_{e_n} u_{r_\circ}$，以得到一个非负函数 $w_2 \geq 0$。

现在，由于 w_1 和 w_2 是 $\Omega \cap B_{1/2}$ 中的正调和函数，并且在 $\partial\Omega \cap B_{1/2}$ 上取零，因此我们可以利用边界哈纳克原理和定理 5.35（或推论 B.2），得到

$$\left\| \frac{w_1}{w_2} \right\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \cap B_{1/4})} \leq C$$

对于某个较小的 $\alpha > 0$。因此，由于 $w_1/w_2 = 1 + \partial_{e_i} u_{r_\circ} / \partial_{e_n} u_{r_\circ}$，我们推得

$$\left\| \frac{\partial_{e_i} u_{r_\circ}}{\partial_{e_n} u_{r_\circ}} \right\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \cap B_{1/4})} \leq C. \tag{5.24}$$

现在，我们断言这意味着自由边界是 $C^{1,\alpha}$ 位于 $B_{1/4}$ 中。事实上，如果 $u_{r_\circ}(x) = t$，那么水平集 $\{u_{r_\circ} = t\}$ 的法向量为

由下式给出

$$\nu^i(x) = \frac{\partial_{e_i} u_{r_\circ}}{|\nabla u_{r_\circ}|} = \frac{\partial_{e_i} u_{r_\circ}/\partial_{e_n} u_{r_\circ}}{\sqrt{1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\partial_{e_j} u_{r_\circ}/\partial_{e_n} u_{r_\circ}\right)^2}}, \qquad i = 1, ..., n.$$

根据 (5.24)，这是一个 $C^{0,\,\alpha}$ 函数，因此我们可以取 $t \to 0$，从而得知自由边界是 $C^{1,\,\alpha}$（因为自由边界的法向量由一个 $C^{0,\,\alpha}$ 函数给出）。□

到目前为止，我们已经证明

$$\left(\begin{array}{c}\{u=0\} \text{ has positive}\\ \text{density at the origin}\end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{any blow-up is}\\ u_0 = \frac{1}{2}(x\cdot e)_+^2\end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{free boundary}\\ \text{is } C^{1,\alpha} \text{ near } 0\end{array}\right)$$

作为本节的最后一步，我们现在将证明 $C^{1,\,\alpha}$ 自由边界实际上是 C^∞。

自由边界的高阶正则性。 最后，我们要证明正则点附近的自由边界是光滑的。

定理 5.38（正则点附近自由边界的光滑性）。 设u 是 *(5.14)* 的任意一个解，并假设 *(5.19)* 成立。那么，在原点的一个邻域内，自由边界 $\partial\{u>0\}$ 是 C^∞。

为此，我们需要以下结果。

定理 5.39 (高阶边界哈纳克不等式)。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是任意 $C^{k,\alpha}$区域，满足 $k \geq 1$ 和 $\alpha \in (0,\ 1)$。设 w_1、 w_2 是 $\Delta w_i = 0$ 在 $B_1 \cap \Omega$ 中的两个解， $w_i = 0$ 在 $\partial\Omega \cap B_1$上，且 $w_2 > 0$ 在 Ω中。

假设 $C_\circ^{-1} \leq \|w_i\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C_\circ$。那么，

$$\left\|\frac{w_1}{w_2}\right\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}\cap B_{1/2})} \leq C,$$

其中 C 仅依赖于 n、 k、 α、 $C_\circ$和 Ω。

与定理 5.35 不同，定理 5.39 的证明采用扰动论证，其思路源自第3章中的 Schauder估计（但要精细得多）。这里不证明高阶边界哈纳克不等式；关于此类结果的证明，请参见 [**DS16**] 。

利用定理 5.39，我们终于可以证明定理 5.38：

定理 5.38 的证明。 设 $u_{r_\circ}(x) = r_\circ^{-2} u(r_\circ x)$。由命题 5.37 可知，若 $r_\circ > 0$ 足够小，则自由边界 $\partial\{u_{r_\circ} > 0\}$ 是 $C^{1,\,\alpha}$ 在 B_1 中，且（可能经过一次旋转后） $\partial_{e_n} u_{r_\circ} > 0$ 在 $\{u_{r_\circ} > 0\} \cap B_1$ 中。

因此，利用 $w_1 = \partial_{e_i} u_{r_\circ}$ 和 $w_2 = \partial_{e_n} u_{r_\circ}$ 的高阶边界哈纳克不等式（定理 5.39），我们得到

$$\left\| \frac{\partial_{e_i} u_{r_\circ}}{\partial_{e_n} u_{r_\circ}} \right\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega} \cap B_{1/2})} \leq C.$$

实际上，通过一个简单的覆盖论证，我们得到

$$\left\| \frac{\partial_{e_i} u_{r_\circ}}{\partial_{e_n} u_{r_\circ}} \right\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega} \cap B_{1-\delta})} \leq C_\delta \tag{5.25}$$

对任意 $\delta > 0$。

现在，与命题 5.37 的证明一样，我们注意到，若 $u_{r_\circ}(x) = t$，则水平集 $\{u_{r_\circ} = t\}$ 的法向量为

$$\nu^i(x) = \frac{\partial_{e_i} u_{r_\circ}}{|\nabla u_{r_\circ}|} = \frac{\partial_{e_i} u_{r_\circ} / \partial_{e_n} u_{r_\circ}}{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^n \left(\partial_{e_j} u_{r_\circ} / \partial_{e_n} u_{r_\circ} \right)^2}}, \qquad i = 1, ..., n.$$

由 (5.25)，对于任意 $\delta > 0$，这是 $B_{1-\delta}$ 上的一个 $C^{1,\alpha}$ 函数，因此我们可以取 $t \to 0$，从而得到自由边界的法向量在 B_1 内为 $C^{1,\alpha}$。但这意味着自由边界实际上是 $C^{2,\alpha}$。

现在重复同样的论证，并利用自由边界对于任意 $\delta > 0$ 在 $B_{1-\delta}$ 中是 $C^{2,\alpha}$ 这一点，我们得到

$$\left\| \frac{\partial_{e_i} u_{r_\circ}}{\partial_{e_n} u_{r_\circ}} \right\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega} \cap B_{1-\delta'})} \leq C_{\delta'},$$

由此可得，法向量为 $C^{2,\alpha}$ 因此自由边界为 $C^{3,\alpha}$。反复应用这一论证，我们发现自由边界 $\partial\{u_{r_\circ} > 0\}$ 位于 B_1 内部，因此 $\partial\{u > 0\}$ 在原点的某个邻域内是 C^∞ 的。□

至此，我们完成了对正则自由边界点的研究。接下来还需了解接触集密度为零的点处会发生什么（例如参见图 5.9）。这就是下一节的内容。

5.7. 奇异点

最后，我们研究奇异点处自由边界的行为，即当

$$\lim_{r \to 0} \frac{\left| \{u = 0\} \cap B_r \right|}{|B_r|} = 0. \tag{5.26}$$

为此，我们首先注意到，作为前一节结果的推论，可以得到以下结论。

命题 5.40. 设 u 是 (5.14) 的任意一个解。那么，我们有如下二分：

(a) 要么 (5.19) 成立，且 u 在 0 处的所有放大极限都具有以下形式

$$u_0(x) = \frac{1}{2}(x \cdot e)_+^2,$$

对某个 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$。

(b) 或者 (5.26) 成立，并且 u 在0 处的所有放大极限都具有如下形式

$$u_0(x) = \frac{1}{2}x^T Ax,$$

对某个矩阵 $A \geq 0$，满足 $\operatorname{tr} A = 1$。

(a)类点已在前一节中研究过；它们称为正则 点，自由边界在它们附近是 C^∞ （特别地，放大极限是唯一的）。(b)类点是接触集密度为零的点，称为奇异 点。

为证明该结果，我们需要以下内容：

引理 5.41. 设 u 是 (5.14) 的任意一个解，并假设(5.26) 成立。那么， u 在0 处的每个爆破都满足 $|\{u_0 = 0\}| = 0$。

证明。设 u_0 是 u 在 0 处的一个爆破，即，沿着序列 $r_k \to 0$，有 $u_{r_k} \to u_0$ 属于 $C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$，其中 $u_r(x) = r^{-2}u(rx)$。

注意，函数 u_r 满足

$$\Delta u_r = \chi_{\{u_r>0\}} \quad \text{in} \quad B_1,$$

其含义是

$$\int_{B_1} \nabla u_r \cdot \nabla \eta \, dx = \int_{B_1} \chi_{\{u_r>0\}} \eta \, dx \qquad \text{for all } \eta \in C_c^\infty(B_1). \tag{5.27}$$

此外，由假设 (5.26)，我们有 $\big|\{u_r = 0\} \cap B_1\big| \longrightarrow 0$，因此在 (5.27) 中取极限 $r_k \to 0$，可推出 $\Delta u_0 = 1$ 属于 B_1。由于我们知道 u_0 是凸的、非负的且齐次的，这意味着$|\{u_0 = 0\}| = 0$。□

现在我们可以给出：

定理 5.40 的证明。根据爆破解的分类（定理 5.24），可能的放大极限只能有上述两种形式之一。如果至少有一个放大极限满足 (5.19)，那么由于自由边界的光滑性（由命题 5.37 得出），所有放大极限都满足该条件，因此由推论 5.30，$u_0(x) = \frac{1}{2}(x \cdot e)_+^2$ （事实上，在这种情况下，自由边界的光滑性保证了爆破的唯一性）。

若 (5.26) 成立，则由引理 5.41，爆破 u_0 必须满足 $\big|\{u_0 =0\}\big| = 0$，因此我们处于情形 (b)（见定理 5.24 的证明）。□

在前一节中，我们证明了在任意正则点的某个邻域内，自由边界是 C^∞ 。那么，一个自然的问题是更好地理解奇异点附近的解 u 。这方面的主要结果之一如下。

定理 5.42（奇异点处爆破解的唯一性）。设 u 是 (5.14) 的任意解，并假设 0 是一个奇异自由边界点。

那么，存在一个齐次二次多项式 $p_2(x) = \frac{1}{2}x^T Ax$，满足 $A \geq 0$ 和 $\Delta p_2 = 1$，使得

$$u_r \longrightarrow p_2 \qquad in \quad C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

特别地， u 在 0 处的爆破是唯一的，并且 $u(x) = p_2(x) + o(|x|^2)$ 。

为证明这一点，我们需要下面由 Monneau 得到的单调性公式。

定理 5.43（Monneau 单调性公式）。设 u 是 (5.14) 的任意解，并假设 0是一个奇异自由边界点。

令 q 为任意齐次二次多项式，满足 $q \geq 0$, $q(0) = 0$，且 $\Delta q = 1$。则，以下量

$$M_{u,q}(r) := \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} (u-q)^2$$

关于 r 单调，即 $\frac{d}{dr} M_{u,\,q}(r) \geq 0$。

证明。我们在此略述论证，并请参阅 [**PSU12**，定理 7.4]以了解更多细节。

我们首先注意到

$$M_{u,q}(r) = \int_{\partial B_1} \frac{(u-q)^2(rx)}{r^4},$$

因此，直接计算可得

$$\frac{d}{dr} M_{u,q}(r) = \frac{2}{r^{n+4}} \int_{\partial B_r} (u-q)\left\{x \cdot \nabla(u-q) - 2(u-q)\right\}.$$

另一方面，结果表明

$$\frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} (u-q)\left\{x \cdot \nabla(u-q) - 2(u-q)\right\} = W_u(r) - W_u(0^+) + \\ + \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B_r} (u-q)\Delta(u-q),$$

其中，由于定理 5.18， $W_u(r)$（如 (5.15) 中所定义）关于 $r > 0$ 单调递增。因此，我们有

$$\frac{d}{dr} M_{u,q}(r) \geq \frac{2}{r^{n+3}} \int_{B_r} (u-q)\Delta(u-q).$$

但是，由于 $\Delta u = \Delta q = 1$ 属于 $\{u > 0\}$，且 $(u-q)\Delta(u-q) = q \geq 0$ 属于 $\{u = 0\}$，我们有

$$\frac{d}{dr} M_{u,q}(r) \geq \frac{2}{r^{n+3}} \int_{B_r \cap \{u=0\}} q \geq 0,$$

正如所需。 □

现在我们可以给出：

定理 5.42 的证明。由命题 5.40（以及命题 5.23），我们知道，在任意奇异点处，都存在一个子序列 $r_j \to 0$，使得 $u_{r_j} \to p$ 在 $C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中，其中 p 是一个二次齐次多项式，满足 $p(0) = 0$, $p \geq 0$，并且 $\Delta p = 1$。因此，我们可以将 Monneau 单调性公式应用于这样的多项式 p，从而得到

$$M_{u,p}(r) := \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} (u-p)^2$$

关于 $r > 0$ 单调递增。特别地，极限 $\lim_{r\to 0} M_{u,p}(r) := M_{u,p}(0^+)$ 存在。

现在，回想一下，我们有一个序列 $r_j \to 0$，使得 $u_{r_j} \to p$。特别地，$r_j^{-2}\{u(r_j x) - p(r_j x)\} \longrightarrow 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中局部一致，即，

$$\frac{1}{r_j^2} \|u-p\|_{L^\infty(B_{r_j})} \longrightarrow 0$$

如 $r_j \to 0$。由此可得

$$M_{u,p}(r_j) \leq \frac{1}{r_j^{n+3}} \int_{\partial B_{r_j}} \|u-p\|^2_{L^\infty(B_{r_j})} \longrightarrow 0$$

沿着子序列 $r_j \to 0$，因此 $M_{u,p}(0^+) = 0$。

下面说明这意味着放大极限的唯一性。事实上，若还存在另一个子序列 $r_\ell \to 0$，使得沿此子序列 $u_{r_\ell} \to q$ 在 $C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中收敛，其中 q 为一个 2-齐次二次多项式，那么我们可以重复上述论证，得到 $M_{u,q}(0^+) = 0$。但由此，根据 p 和 q 的齐次性，

$$\int_{\partial B_1} (p-q)^2 = \frac{1}{r^{n+3}} \int_{\partial B_r} (p-q)^2 \leq 2M_{u,p}(r) + 2M_{u,q}(r) \longrightarrow 0,$$

从而

$$\int_{\partial B_1} (p-q)^2 = 0.$$

这意味着 $p = q$，因此 u 在 0 处的爆破是唯一的。

最后，让我们证明 $u(x) = p(x) + o(|x|^2)$，即 $r^{-2}\|u-p\|_{L^\infty(B_r)} \to 0$ 当 $r \to 0$ 时。事实上，反设存在一个子序列

$r_k \to 0$ 沿着该子序列

$$r_k^{-2}\|u-p\|_{L^\infty(B_{r_k})} \geq c_1 > 0.$$

那么，存在 r_{k_i} 的一个子序列，沿着该子序列，$u_{r_{k_i}} \to u_0$ 属于 $C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$，其中某个放大极限 u_0 满足 $\|u_0 - p\|_{L^\infty(B_1)} \geq c_1 > 0$。然而，根据放大极限的唯一性，它必定是 $u_0 = p$，因此我们得出矛盾。□

关于奇异点处放大极限唯一性的另一种证明方法（不依赖单调性公式），请参见 [**SY23, Bon01**] 。

综上，我们证明了以下结果：

定理 5.44. </style}设是 (5.14) 的任意解。那么，我们有以下二分：

(a) 要么，u 在 0 处的所有放大极限都具有以下形式

$$u_0(x) = \frac{1}{2}(x\cdot e)_+^2 \qquad \textit{for some} \quad e \in \mathbb{S}^{n-1},$$

并且自由边界在原点的某个邻域内是 C^∞ 。

(b) 或者存在一个齐次二次多项式 p，满足 p（**0**）$= 0$、$p \geq 0$ 和 $\Delta p = 1$，使得

$$\|u-p\|_{L^\infty(B_r)} = o(r^2) \qquad as \quad r \to 0.$$

特别地，在这种情况下，我们有

$$\lim_{r\to 0} \frac{\big|\{u=0\}\cap B_r\big|}{|B_r|} = 0.$$

最后一个尚待回答的问题是：奇异点集合可以有多大？这就是下一节的主题。

5.8. 关于奇异集的大小

我们将以讨论有关奇异点集合的最新成果（以及一些未解决问题）来结束本章节。

回顾一下，自由边界点 $x_\circ \in \partial\{u>0\}$ 在以下情形下称为奇异点：

$$\lim_{r\to 0} \frac{\big|\{u=0\}\cap B_r(x_\circ)\big|}{|B_r(x_\circ)|} = 0.$$

关于奇异集大小的主要已知结果如下。

定理 5.45 ([**Caf98**])。 设 u 是 (5.14) 的任意一个解。设 $\Sigma \subset B_1$ 为奇异点集合。

那么， $\Sigma \cap B_{1/2}$局部包含在一个维数为 $n-1$ 的 C^1 流形中。

这一结果是尖锐的，因为不难构造出奇异集为（$n-1$）维的例子；参见 [**Sch77**]。

如下文所述，这一结果基本上可由上一节中确立的奇异点处放大极限的唯一性推出。

事实上，给定任意一个奇异点 $x_\circ$，设 $p_{x_\circ}$ 是 u 在 $x_\circ$ 处的爆破（回顾一下，$p_{x_\circ}$ 是一个非负二次齐次多项式）。设 k 为集合 $\{p_{x_\circ}=0\}$ 的维数——注意，这是 $\mathbb{R}^n$ 的真线性子空间，因此 $k\in\{0,...,n-1\}$——并定义

$$\Sigma_k := \big\{x_\circ\in\Sigma : \dim(\{p_{x_\circ}=0\})=k\big\}. \tag{5.28}$$

显然，$\Sigma=\bigcup_{k=0}^{n-1}\Sigma_k$。

以下结果对奇异集给出了更精确的描述。

命题 5.46 ([**Caf98**])**.** 设 u 是 *(5.14)* 的任意一个解。设 $\Sigma_k\subset B_1$ 由 (5.28) 定义，$k=1$，...，$n-1$。那么，Σ_k 局部包含于一个维数为 k 的 C^1 流形中。

这一结果的证明思路大致如下。为简单起见，假设 $n=2$，于是 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_0$。

取一点 $x_\circ\in\Sigma_0$。那么，根据定理 5.44，我们有如下展开式

$$u(x)=p_{x_\circ}(x-x_\circ)+o\big(|x-x_\circ|^2\big) \tag{5.29}$$

其中 $p_{x_\circ}$ 是 u 在 $x_\circ$ 处的放大极限（回顾一下，这是由 $x_\circ$处放大极限的唯一性得到的）。根据 Σ_0的定义，多项式 $p_{x_\circ}$ 在原点之外必为正，因此由齐次性可知满足 $p_{x_\circ}(x-x_\circ)\geq c|x-x_\circ|^2$，其中 $c>0$。结合 (5.29)，可知 u 在 $x_\circ$的某个邻域内必为正。特别地，Σ_0 中的所有点都是孤立的。

另一方面，现在取一点 $x_\circ\in\Sigma_1$。那么，根据 Σ_1 的定义，放大极限必定具有如下形式：$p_{x_\circ}(x)=\frac{1}{2}(x\cdot e_{x_\circ})^2$,，其中 $e_{x_\circ}\in\mathbb{S}^{n-1}$。再次利用展开式 (5.29)，我们发现 u 在如下区域内为正

$$\big\{x\in B_\rho(x_\circ) : \big|(x-x_\circ)\cdot e_{x_\circ}\big|>\omega(|x-x_\circ|)\big\},$$

其中 ω 是某种连续模，且 $\rho>0$ 很小（见图 5.16）。

这大致是在说，集合 Σ_1 在 $x_\circ$ 处“有一个切平面”。在任意其他点 $\tilde{x}_\circ\in\Sigma_1$ 重复同样的论证，我们会发现 Σ_1 中每一点都如此；此外，如果 $\tilde{x}_\circ$ 接近 $x_\circ$，那么 $e_{\tilde{x}_\circ}$必须接近 $e_{x_\circ}$——否则，$\tilde{x}_\circ$ 处和 $x_\circ$ 处的展开式 (5.29) 就无法吻合。最后，由于模 ω 可以取为与

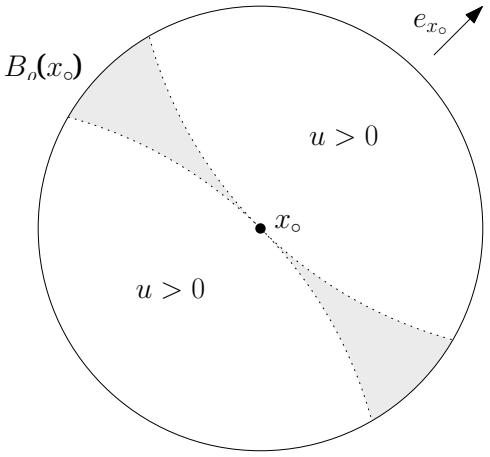


图 5.16. u 在 $\{x \in B_\rho(x_\circ)$ 中为正：$|(x - x_\circ) \cdot e_{x_\circ}| > \omega(|x - x_\circ|)\}$。

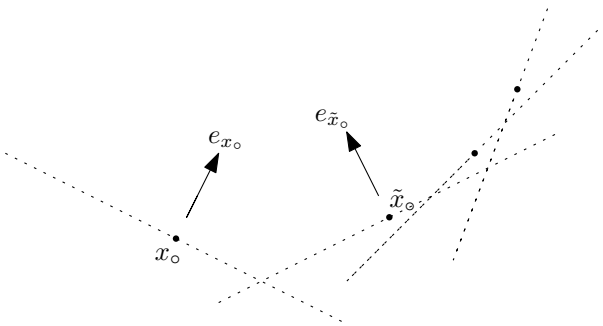


图 5.17. 奇异点 $x_\circ$，$\tilde{x}_\circ \in \Sigma_{1\circ}$

点无关（由紧性论证可知），结果表明，集合 Σ_1 包含在一条 C^1 曲线中（见图 5.17）。

我们在这里讨论的只是一个启发式论证；实际证明使用了惠特尼延拓定理，例如可见 [**PSU12**]。最后，关于奇异点集合的一些近期更精细的结果，可参见 [**CSV18**], [**FS19**], 和 [**FZ21**] （以及综述文章[**Fig18b**]）。

一般正则性。 在可能出现奇点的偏微分方程问题中，理解这些奇点是否会“经常”出现，或者“多数”解是否实际上没有奇点，是非常自然且重要的。

在障碍问题中，关键问题是理解自由边界的一般正则性。明确的例子表明，障碍问题中的奇异点可以形成一个维数非常大的集合，

$n-1$（与正则集一样大）。尽管如此，奇异点仍被认为很稀少（见 [**Sch74**]）：

猜想（Schaeffer，1974）：一般而言，障碍问题的弱解也是强解，亦即自由边界是一个 C^∞ 流形。

换句话说，该猜想指出，一般而言，自由边界没有奇异点。

这一方向上的首个结果由 Monneau 于2003年证明，具体如下。

定理5.47（[**Mon03**]）。*Schaeffer*猜想在 $\mathbb{R}^2$中成立。

更准确地说，Monneau 考虑一个解的单参数族 u_λ，其中 $\lambda \in$ 属于(0, 1)，满足

$$\begin{cases} \Delta u_\lambda &= \chi_{\{u_\lambda>0\}} & \text{in } \Omega \\ u_\lambda &= g_\lambda & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

在 $g_\lambda = g + \lambda$ 和 $g \geq 0$ 上取 $\partial\Omega$。

接下来，第一步是注意到，不仅每个奇异集$\Sigma_\lambda \subset \Omega$都包含于一个 C^1 维数为（$n-1$）的流形中，而且实际上并集 $\bigcup_{\lambda\in(0,1)} \Sigma_\lambda \subset \Omega$ 仍包含于一个（$n-1$）维流形中。

之后，我们将自由边界视为 $\Omega\times$(0,1) $\ni (x,\lambda)$ 中的一个集合，并注意到它可以写成图像 $\{\lambda = h(x)\}$，其中 h是某个函数。证明中的第二个关键步骤是证明 h 是利普希茨的，而且在任意奇异点处其梯度为零。结合余面积公式，这就得到：对于几乎处处的$\lambda \in$ (0,1)，在 $\mathbb{R}^2$ 中奇异点的集合为空，从而推出定理5.47。

最后，朝这一方向取得的目前最佳结果，是 Figalli、Serra 和第二位作者最近共同证明的。

定理5.48 ([**FRS20**])。*Schaeffer*猜想在 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}^4$中成立。

这一结果的证明基于对奇异点的一种全新而精细的理解。为此，[**FRS20**] 综合运用了几何测度论工具、偏微分方程估计、若干降维论证，甚至还使用了几种新的单调性公式。

Schaeffer 猜想在维数 $n \geq 5$ 下是否成立，仍是一个未决问题。

附录 A

H¨older 空间的一些性质

在本附录中，我们证明第 1 章中陈述的性质 **(H¹ 空间)**-**(H8)** 。

回忆一下，给定 $\alpha \in (0,1]$, H¨older 空间 $C^{0,\alpha}(\Omega)$ 是满足以下条件的函数集合 $u \in C(\overline{\Omega})$:

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < \infty.$$

H¨older 范数为

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} + [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

当 $\alpha = 1$ 时，这就是通常的利普希茨函数空间。

更一般地，给定 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in (0,1]$, 空间 $C^{k,\alpha}(\Omega)$ 是满足以下条件的函数集合 $u \in C^{k}(\Omega)$，其范数有限

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} &:= \sum_{j=1}^{k} \|D^{j}u\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|D^{k}u(x)-D^{k}u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \\ &= \|u\|_{C^{k}(\Omega)} + [D^{k}u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.\end{aligned}$$

最后，当 $\beta > 0$不是 整数时，我们记 $C^{\beta}(\Omega) := C^{k,\,\alpha}(\Omega)$，其中 $\beta = k+\alpha$，且 $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,\ 1)$。

接下来，我们给出本书中一直使用的 H¨older 空间性质的证明。除非另有说明，在下述陈述中我们假设 $\alpha \in (0,\ 1)$。

(H1) 假设

$$\mathrm{osc}_{B_r(x)} u \le C_\circ r^\alpha \qquad for\ all\ B_r(x) \subset \overline{B_1},$$

其中 $\mathrm{osc}_A u := \sup_A u - \inf_A u$。

于是， $u \in C^{0,\overline{\alpha}}(B_1)$ 以及 $[u]_{C^{0,\overline{\alpha}}(B_1)} \le CC_\circ$，其中 C 仅依赖于n, α。

• **（H1）的证明** 我们要证明，对于所有 z， $x \in B_1$，都有 $|u(z) - u(x)| \le CC_\circ |z-x|^\alpha$。给定 z， $x \in B_1$，令 $r = |z-x|$。为此，我们可以假设 $r < 1/10$ 并区分两种情况：

(i) 若 $B_r(x) \subset B_1$，则直接利用假设可得

$$|u(z) - u(x)| \le \mathrm{osc}_{B_r(x)} u \le C_\circ r^\alpha = C_\circ |z-x|^\alpha.$$

(ii) 否则，我们分别在线段 $0x$ 和 $0z$ 上取 $\bar{x}$ 和 $\overline{\bar{z}}$，使得 $|x - \bar{x}| = r$ 和 $|z - \bar{z}| = r_\circ$ 于是，根据假设有$|u(x) - u(\bar{x})| \le C_\circ r^\alpha$, $|u(z) - u(\bar{z})| \le C_\circ r^\alpha$，以及 $|u(\bar{x}) - u(\bar{z})| \le C_\circ r^\alpha$。最后一个不等式成立，是因为 $|\bar{x} - \bar{z}| < r$，这可由 $\bar{x}$ 和 $\bar{z}$ 的构造轻易验证。结合上述三个不等式，我们推出 $|u(x) - u(z)| \le 3C_\circ r^\alpha$，证毕。

□

我们还陈述并证明对**(H1)**的如下略作修改的版本，它将在后续证明中派上用场。注意，与前述表述的区别在于，现在给定 B_1中的任意一个球，我们控制半径为其一半的球中的振荡。

(H1') 假设

$$\mathrm{osc}_{B_r(x)} u \le C_\circ r^\alpha \qquad for\ all\ B_{2r}(x) \subset \overline{B_1},$$

其中 $\mathrm{osc}_A u := \sup_A u - \inf_A u$。

那么， $u \in C^{0,\overline{\alpha}}(B_1)$ 且$[u]_{C^{0,\overline{\alpha}}(\overline{B_1})} \le CC_\circ$，其中 C 仅依赖于n、 α。

• **(H1')的证明**。我们仿照**(H1)**的证明进行。令 z， $x \in B_1$，并令 $r = |z-x|$。不妨设 $r < 1/10$。若 $B_{2r}(x) \subset B_1$，则由假设可得结论。

否则，分别在 $0x$ 和 $0z$上线段上取 $\bar{x}$ 和 $\bar{z}$，使得 $|x - \overline{\bar{x}}| = 2r$和 $|z - \bar{z}| = 2r_\circ$ 定义 $x_k = (1-2^{-k})x + 2^{-k}\bar{x}$和 $z_k = (1-2^{-k})z + 2^{-k}\bar{z}_\circ$ 注意到 $|x_{k+1} - x_k| = |z_{k+1} - z_k| = 2^{-k} r_\circ$ 此外， $|x_k| = |x| - 2^{-k+1} r$，因此 $B_{2|x_{k+1}-x_k|}(x_k) \subset B_1$。也就是说，我们可以利用关于 x_k 和 x_{k+1} 的假设，得到

$$|u(x_k) - u(x_{k+1})| \le C_\circ |x_k - x_{k+1}|^\alpha = C_\circ 2^{-k\alpha} r^\alpha.$$

（对于 z_k也有类似结果。）另一方面，根据 $\bar{x}$ 和 z的选取，它们也可以通过 u 的振荡进行比较，如下所示

$$|u(\bar{x}) - u(\bar{z})| \le C_\circ |\bar{x} - \bar{z}|^\alpha \le C_\circ r^\alpha.$$

综合以上结果，我们得到

$$\begin{aligned} |u(x) - u(z)| &\le \sum_{k\ge 0} |u(x_{k+1}) - u(x_k)| + |u(\bar{x}) - u(\bar{z})| + \sum_{k\ge 0} |u(z_{k+1}) - u(z_k)| \\ &\le 2\sum_{k\ge 0} C_\circ 2^{-k\alpha} r^\alpha + C_\circ r^\alpha \le C C_\circ r^\alpha, \end{aligned}$$

对于某个常数 C，它仅依赖于 $\alpha_\circ$ □

(H2) 设 $u_{x,\ r} := \fint_{B_r(x)} u_\circ$ 假设

$$\|u - u_{x,r}\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C_\circ r^\alpha \qquad for\ all\ B_r(x) \subset \overline{B_1}.$$

那么， $u \in C^{0,\ \alpha}(\overline{B_1})$ 且 $[u]_{C^{0,\ \alpha}(\overline{B_1})} \le C C_\circ$，其中 C 仅依赖于 n、 $\alpha_\circ$

• **(H2) 的证明**。根据三角不等式，我们有

$$\operatorname{osc}_{B_r(x)} u \le 2\|u - u_{x,r}\|_{L^\infty(B_r(x))} \le 2C_\circ r^\alpha,$$

因此，结论由**(H^1 空间)**得出。 □

(H3) 令 $u_{x,r} := \fint_{B_r(x)} u_\circ$ 假设

$$\left(\fint_{B_r(x)} |u - u_{x,r}|^2 \right)^{1/2} \le C_\circ r^\alpha \qquad for\ all\ B_r(x) \subset \overline{B_1}.$$

那么， $u \in C^{0,\alpha}(\overline{B_1})$ 以及 $[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{B_1})} \le C C_\circ$，其中 C 仅依赖于 $n, \alpha_\circ$

• **(H3) 的证明**。注意，对于每个 $z \in B_1$,

$$\left|u_{x,r} - u_{x,\frac{r}{2}}\right|^2 \le 2|u(z) - u_{x,r}|^2 + 2\left|u(z) - u_{x,\frac{r}{2}}\right|^2.$$

因此，在 $B_{r/2}(x)$ 上积分并利用假设，我们得到

$$\begin{aligned} |u_{x,r} - u_{x,\frac{r}{2}}|^2 &\le 2 \fint_{B_{r/2}(x)} |u - u_{x,r}|^2 + 2 \fint_{B_{r/2}(x)} \left|u - u_{x,\frac{r}{2}}\right|^2 \\ &\le 2^{n+1} \fint_{B_r(x)} |u - u_{x,r}|^2 + 2 \fint_{B_{r/2}(x)} \left|u - u_{x,\frac{r}{2}}\right|^2 \le C C_\circ^2 r^{2\alpha}. \end{aligned}$$

这意味着

$$\left|u_{x,r} - u_{x,\frac{r}{2}}\right| \le C C_\circ r^\alpha,$$

对几何级数求和可得

$$|u_{x,r} - u(x)| \le \sum_{k\ge 0} \left|u_{x,\frac{r}{2^k}} - u_{x,\frac{r}{2^{k+1}}}\right| \le \sum_{k\ge 0} C C_\circ \left(\frac{r}{2^k}\right)^\alpha = 2C C_\circ r^\alpha.$$

这里我们利用了：在将 u 重新定义于一个零测集上之后，根据勒贝格微分定理（定理 1.1），有 $u_{x,\,r} \to u(x)$ 当 $r \to 0$ 时成立。

现在令 $x, y \in B_1$, $r = 2|x-y|$，并假设 $B_r(x) \subset B_1$。那么，我们有

$$\begin{aligned}|u_{x,r} - u_{y,r}|^2 \le & \fint_{B_{r/2}(x)} |u - u_{x,r}|^2 + \fint_{B_{r/2}(x)} \left|u - u_{y,r}\right|^2 \\ & \le 2^n \fint_{B_r(x)} |u - u_{x,r}|^2 + 2^n \fint_{B_r(y)} \left|u - u_{y,r}\right|^2 \le CC_\circ^2 r^{2\alpha},\end{aligned}$$

因此

$$\left|u_{x,r} - u_{y,r}\right| \le CC_\circ r^\alpha.$$

结合前面的估计，我们推出，对于任意满足 $B_{2|x-y|}(x) \subset B_1$ 的 x, $y \in B_1$，都有

$$|u(x) - u(y)| \le |u(x) - u_{x,r}| + |u_{x,r} - u_{y,r}| + |u_{y,r} - u(y)| \le 3CC_\circ r^\alpha.$$

一旦得到这一点，根据 **(H1')** 我们就完成了。 □

(H4) 假设对每个 x，都存在一个常数 C_x，使得

$$\|u - C_x\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C_\circ r^\alpha \qquad for\ all\ B_r(x) \subset \overline{B_1}.$$

那么，$u \in C^{0,\,\alpha}(B_1)$ 以及 $[u]_{C^{0,\,\alpha}(B_1)} \le CC_\circ$，其中 C 仅依赖于 n、α。

假设对每个 x，都存在一个线性函数 $\ell_x(y) = a_x + b_x \cdot (y-x)$，使得

$$\|u - \ell_x\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C_\circ r^{1+\alpha} \qquad for\ all\ B_r(x) \subset \overline{B_1}.$$

那么，$u \in \overline{C^{1,\,\alpha}}(B_1)$ 以及 $[Du]_{\overline{C^{0,\,\alpha}}(B_1)} \le CC_\circ$，其中 C 仅依赖于n、α。

假设对每个 x，都存在一个二次多项式 $P_x(y)$，使得

$$\|u - P_x\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C_\circ r^{2+\alpha} \qquad for\ all\ B_r(x) \subset \overline{B_1}.$$

那么，$u \in \overline{C^{2,\,\alpha}}(B_1)$ 以及 $[D^2u]_{\overline{C^{0,\,\alpha}}(B_1)} \le CC_\circ$，其中 C 仅依赖于n、α。

- **(H4) 的证明**。（i）第一个结论——采用 $C^{0,\,\alpha}$ 范数——由 **(H1)** 得出。

(ii) 让我们概述第二个结论的证明——使用 $C^{1,\alpha}$范数。令 $x, y \in B_1$，其中 $y \in B_r(x) \subset B_1$。注意，在假设中除以 r并取 $r \to 0$ 后，可知 u 在x 处可微，且 ℓ_x 必定由 $\ell_x(y) = u(x) + \nabla u(x) \cdot (y - x)$ 给出。因此，由假设可得

$$u(y) = u(x) + \nabla u(x) \cdot (y - x) + O(r^{1+\alpha})$$

并且，对于每个满足 $|z-y| \approx |z-x| \approx |y-x| \approx r$ 的 $z \in B_r(x)$，

$$\begin{aligned} u(z) &= u(x) + \nabla u(x) \cdot (z-x) + O(r^{1+\alpha}) \\ &= u(y) + \nabla u(y) \cdot (z-y) + O(r^{1+\alpha}) \\ &= u(x) + \nabla u(x) \cdot (y-x) + \nabla u(y) \cdot (z-y) + O(r^{1+\alpha}). \end{aligned}$$

由此，我们推得

$$\nabla u(x) \cdot (z-y) = \nabla u(y) \cdot (z-y) + O(r^{1+\alpha}).$$

取 z 使得 $z-y$ 平行于 $\nabla u(y) - \nabla u(x)$，则得到

$$\nabla u(x) = \nabla u(y) + O(r^{\alpha}),$$

正如所需。

(iii) 我们来证明关于 $C^{2,\alpha}$ 范数的第三个结论——下面的证明更为一般，也适用于情形 **(ii)**。

设 $x, y \in B_r(x_\circ)$，其中 $|x-y| = r$，并假设 $B_{2r}(x_\circ) \subset B_{1\circ}$ 我们以 $x_\circ$ 为中心对 u 重新缩放，即 $u_r(z) := u(x_\circ + rz)$，使得 $|\bar{x} - \bar{y}| = 1$，其中 $x_\circ + r\bar{x} = x$ 且 $x_\circ + r\bar{y} = y_\circ$ 我们还定义

$$P_{x,r}(z) := P_x(x_\circ + rz) \qquad \text{and} \qquad P_{y,r} := P_y(x_\circ + rz).$$

那么，

$$\begin{aligned} \|u_r - P_{x,r}\|_{L^\infty(B_1(\bar{x}))} &= \|u - P_x\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C_\circ r^{2+\alpha}, \\ \|u_r - P_{y,r}\|_{L^\infty(B_1(\bar{y}))} &= \|u - P_y\|_{L^\infty(B_r(y))} \le C_\circ r^{2+\alpha}. \end{aligned}$$

因此，若记为 $\bar{w} = \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$，则 $B_{1/2}(\bar{w}) \subset B_1(\bar{x}) \cap B_1(\bar{y})$，并且

$$\begin{aligned} \|P_{x,r} - P_{y,r}\|_{L^\infty(B_{1/2}(\bar{w}))} &\le \|u_r - P_{x,r}\|_{L^\infty(B_1(\bar{x}))} + \|u_r - P_{y,r}\|_{L^\infty(B_1(\bar{y}))} \\ &\le C C_\circ r^{2+\alpha}. \end{aligned}$$

这意味着，多项式 $P_{x,\,r} - P_{y,\,r}$ 的所有系数都由 $\tilde{C} C_\circ r^{2+\alpha}$ 控制。

现在注意，若记 $P_x(z) = a_x + b_x \cdot (z-x) + (z-x)^T M_x (z-x)$，则 $P_{x,\,r}(z) = a_x + r b_x \cdot (z-\bar{x}) + r^2 (z-\bar{x})^T M_x (z-\bar{x})$，而对于 $P_{y,\,r}$ 也有类似的表达式。因此，我们可以写成

$$\begin{aligned} P_{x,r}(z) - P_{y,r}(z) =& \big(a_x - a_y + r b_x \cdot (\bar{y}-\bar{x}) + r^2 (\bar{y}-\bar{x})^T M_x (\bar{y}-\bar{x})\big) \\ &+ r\big(b_x - b_y + 2r(\bar{y}-\bar{x})^T M_x\big) \cdot (z-\bar{y}) \\ &+ r^2 (z-\bar{y})^T (M_x - M_y)(z-\bar{y}). \end{aligned}$$

特别地，通过考察此类多项式的二次项系数和线性系数，我们证明了

$$|M_x - M_y| \le \tilde{C} C_\circ r^{\alpha}$$

and

$$\big|b_x - b_y + 2r(\bar{y}-\bar{x})^T M_x\big| \le C C_\circ r^{1+\alpha}.$$

由于 $r(\bar{y}-\bar{x}) = y-x$，这等价于

$$\left|b_y - b_x - 2(y-x)^T M_x\right| \le CC_\circ r^{1+\alpha}.$$

另请注意，

$$\|u - a_x - b_x\cdot(\cdot - x)\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C_\circ r^{2+\alpha} + C_x r^2 \le 2C_x r^2$$

若 r 足够小，则特别地，按照 (i) 中的论证，u 在 x 处可微，且 $a_x = u(x)$，$b_x = \nabla u(x)$。

因此，利用 $r = 2|x-y|$，我们有

$$\left|\nabla u(y) - \nabla u(x) - 2(y-x)^T M_x\right| \le CC_\circ |y-x|^{1+\alpha},$$

令 $y \to x$，即可推出 ∇u 在 x 处可微，且 $D^2u(x) = 2M_x$。对 M_y 也有类似结果，因此我们证明了，对任意 $x,\ y \in B_r(x_\circ)$，其中 $|x-y| = r$ 且 $B_{2r}(x_\circ) \subset B_1$，

$$\left|D^2u(x) - D^2u(y)\right| \le \tilde{C}C_\circ r^\alpha.$$

结论由 **(H1')** 得出。 □

注。注意到，**(H4)** 的逆命题也成立。例如，当 $k=1$ 时，若 $u \in C^{1,\alpha}(B_1)$，那么我们有

$$\|u - \ell_x\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C_\circ r^{1+\alpha} \qquad \text{for all } B_r(x) \subset \overline{B_1},$$

其中 $\ell_x(y) = u(x) + \nabla u(x)\cdot(y-x)$。事实上，为了证明这一点，我们利用

$$u(y) = u(x) + \int_0^1 \nabla u(ty + (1-t)x)\cdot(y-x)dt,$$

结合

$$\left|\nabla u\big(ty + (1-t)x\big) - \nabla u(x)\right| \le C_\circ |ty + (1-t)x - x|^\alpha \le C_\circ |y-x|^\alpha,$$

得到

$$\left|u(y) - u(x) - \nabla u(x)\cdot(y-x)\right| \le \int_0^1 C_\circ |y-x|^\alpha |y-x| dt = C_\circ |y-x|^{1+\alpha},$$

如所需。

(H5) 设 $\rho_\circ \in (0,1)$。假设对每个 $x \in B_{1/2}$，都存在一个由二次多项式构成的序列，$(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得

$$\|u - P_k\|_{L^\infty(B_{\rho_\circ^k}(x))} \le C_\circ \rho_\circ^{k(2+\alpha)} \qquad \textit{for all } k \in \mathbb{N}.$$

于是，$u \in C^{2,\alpha}(B_{1/2})$ 以及 $[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \le CC_\circ$，其中 C 仅依赖于n、α和 $\rho_\circ$。

• **(H5) 的证明**。取 $x = 0$。根据假设，我们有

$$\begin{aligned}\|P_{k-1} - P_k\|_{L^\infty(B_{\rho_\circ^k})} &\le \|u - P_{k-1}\|_{L^\infty(B_{\rho_\circ^k})} + \|u - P_k\|_{L^\infty(B_{\rho_\circ^k})} \\ &\le CC_\circ \rho_\circ^{k(2+\alpha)}.\end{aligned}$$

接下来，我们使用以下结论：

断言. 假设 P 是满足 $\|P\|_{L^\infty(B_r)} \le \gamma$ 的二次多项式。若记 $P(z) = a + b \cdot z + z^T M z$，则有

$$|a| \le C\gamma, \qquad |b| \le \frac{C\gamma}{r}, \qquad |M| \le \frac{C\gamma}{r^2},$$

其中 C 是仅依赖于 n 的常数。

为证明该断言，注意到经过重新缩放，我们有 $P_r(z) := P(rz) = a_r + b_r \cdot z + z^T M_r z$，其中 $a_r = a$, $b_r = rb$, $M_r = r^2 M$。根据假设，有 $\|P_r\|_{L^\infty(B_1)} \le \gamma$。由于 B_1 上的多项式系数受 L^∞ 范数控制，因此得到 $|a_r| \le C\gamma$, $|b_r| \le C\gamma$，以及 $|M_r| \le C\gamma$。这就证明了该断言。

利用前一个断言以及对 $P_{k-1} - P_k$ 的界，我们推得

$$|a_{k-1} - a_k| \le CC_\circ \rho_\circ^{k(2+\alpha)}, \qquad |b_{k-1} - b_k| \le CC_\circ \rho_\circ^{k(1+\alpha)},$$

and

$$|M_{k-1} - M_k| \le CC_\circ \rho_\circ^{k\alpha},$$

其中 $P_k(z) = a_k + b_k \cdot z + z^T M_k z$。

由此可知，P_k 一致地收敛于多项式 $P(z) = a + b \cdot z + z^T M z$，并且

$$\begin{aligned}\|u - P\|_{L^\infty(B_{\rho_\circ^k})} &\le \|u - P_k\|_{L^\infty(B_{\rho_\circ^k})} + |a_k - a| + \rho_\circ^k |b_k - b| + \rho_\circ^{2k} |M_k - M| \\ &\le CC_\circ \rho_\circ^{k(2+\alpha)}\end{aligned}$$

对所有 $k \ge 1$ 均成立。因此，对于每个 $r \in (0,1)$，我们有

$$\|u - P\|_{L^\infty(B_r)} \le CC_\circ r^{2+\alpha}$$

（只需注意，对于任意 r，我们有 $\rho_\circ^{k+1} \le r \le \rho_\circ^k$，其中某个 k）。因此，由于对每个 $x \in B_{1/2}$ 都可以这样做，由 **(H4)** 可知 $[D^2 u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \le CC_\circ$。□

关于性质**(H5)**的推广，请参见下文的注 **A.1**。

(H6) 假设 $\alpha \in (0, 1)$，$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \le C_\circ$，并且

$$\sup_{\substack{h \in B_1 \\ x \in \overline{B_{1-|h|}}}} \frac{\big|u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)\big|}{|h|^\alpha} \le C_\circ. \tag{A.1}$$

那么，$u \in C^{0,\overline{\alpha}}(B_1)$ 和 $\|u\|_{C^{0,\overline{\alpha}}(B_1)} \le CC_\circ$，其中 C 仅依赖于 n、α。

假设 $\alpha \in (0,1)$，$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \le C_\circ$，并且

$$\sup_{\substack{h\in B_1\\ x\in\overline{B_{1-|h|}}}} \frac{\big|u(x+h)+u(x-h)-2u(x)\big|}{|h|^{1+\alpha}} \le C_\circ. \tag{A.2}$$

那么，$u \in \overline{C^{1,\alpha}}(B_1)$ 且 $\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_1)} \le CC_\circ$，其中 C 仅依赖于 n、α。然而，当 $\alpha = 0$ 时，这种性质不再成立。

- **(H6) 的证明**。(i) 我们先讨论情形 (A.2)。

给定 $h \in B_1$ 和 $x \in B_{1-|h|}$，令

$$w(h) := \frac{u(x+h)-u(x)}{|h|}.$$

那么，根据假设，我们有

$$\big|w(h)-w(h/2)\big| = \frac{|u(x+h)+u(x)-2u(x+h/2)|}{|h|} \le C_\circ|h|^\alpha.$$

因此，对于每个 $k \ge 0$,

$$\big|w(h/2^k)-w(h/2^{k+1})\big| \le C_\circ|h|^\alpha 2^{-k\alpha}.$$

这意味着极限 $\lim_{t\to 0} w(th)$ 存在，并且通过求和一个几何级数，我们得到

$$\big|w(h)-\lim_{t\to 0} w(th)\big| \le CC_\circ|h|^\alpha.$$

由于

$$\lim_{t\to 0} w(th) = \lim_{t\to 0}\frac{u(x+th)-u(x)}{t|h|} = \frac{h}{|h|}\cdot\nabla u(x),$$

这就得到

$$\big|u(x+h)-u(x)-h\cdot\nabla u(x)\big| \le CC_\circ|h|^{1+\alpha}.$$

利用 **(H4)**，我们看到，最后一个不等式意味着 $[Du]_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le CC_\circ$。最后，利用 $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \le C_\circ$，即可得到结论。

(ii) 现在来讨论情形 (A.1)。

和之前一样，定义 $w(h) := \frac{u(x+h)-u(x)}{|h|}$，并注意到

$$\big|w(h)-w(h/2)\big| = \frac{|u(x+h)+u(x)-2u(x+h/2)|}{|h|} \le C_\circ|h|^{\alpha-1}.$$

那么，对于每个 $k \ge 0$，我们有

$$\big|w(2^k h)-w(2^{k+1}h)\big| \le C_\circ|h|^{\alpha-1}2^{-k(1-\alpha)}.$$

取满足 $2^{k_\circ}|h| \approx 1$ 的 $k_\circ \geq 0$（并且使得 [1] 仍然满足 $x + 2^{k_\circ}h \in B_1$），然后对所有 $0 \leq k < k_\circ$ 将前一个不等式相加。于是，通过求和几何级数，我们可得

$$\big|w(2^{k_\circ}h) - w(h)\big| \leq CC_\circ|h|^{\alpha-1}.$$

由于

$$\big|w(2^{k_\circ}h)\big| \leq C\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq CC_\circ \leq CC_\circ|h|^{\alpha-1},$$

我们最终得到

$$\big|w(h)\big| \leq \big|w(2^{k_\circ}h)\big| + CC_\circ|h|^{\alpha-1} \leq CC_\circ|h|^{\alpha-1}.$$

将结果换回 u，便得到所需结论。

(iii) 最后，我们来证明函数

$$u(x) = x\log|x|, \qquad x \in (-1,1),$$

满足 **(A.2)**，其中 $\alpha = 0$，但它不属于 $C^{0,1}$。

事实上，让我们证明

$$\frac{\big|(x+h)\log|x+h| + (x-h)\log|x-h| - 2x\log|x|\big|}{|h|} \leq C_\circ$$

对于所有 x，$h \in (-1,\ 1)$，以及某个 $C_\circ > 0$。为此，注意到

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)\log|x+h| + (x-h)\log|x-h| - 2x\log|x|}{h} &= \\ &= \frac{\big(1+\frac{h}{x}\big)\log\big|1+\frac{h}{x}\big| + \big(1-\frac{h}{x}\big)\log\big|1-\frac{h}{x}\big|}{\frac{h}{x}} \\ &= \frac{(1+t)\log|1+t| + (1-t)\log|1-t|}{t},\end{aligned}$$

其中 $t = h/x$。这样的函数在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 中关于 t 光滑，并且在$t = 0$和 $t = \infty$处有有限极限。因此，它在 $\mathbb{R}$ 上全局有界，界为某个常数$C_\circ$（实际上，$C_\circ < 2$）。□

注。 关于刻画 **(H6)**的高阶版本，请参见 [**And97**，第 2]节。

(H7) 假设 $\alpha \in (0,\ 1]$，$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq C_\circ$，并且对于每个 $h \in B_1$，我们都有

$$\left\|\frac{u(x+h) - u(x)}{|h|^\alpha}\right\|_{C^\beta(B_{1-|h|})} \leq C_\circ,$$

其中 $C_\circ$ 与 h无关。进一步假设 $\alpha + \beta$ 不是整数。那么，$u \in C^{\alpha+\beta}(B_1)$ 且 $\|u\|_{C^{\alpha+\beta}(B_1)} \leq \overline{C}C_\circ$，其中 C 仅取决于n、α、β。

[1] 注意，例如，当 $x,\ y \in B_{9/10}$时，这总是可行的。如果 $x,\ y$靠近边界 ∂B_1，那么例如当 $(x-y)\cdot\frac{x}{|x|} > \frac{1}{2}|y-x|$时，这也是可行的。容易看出，我们总能将问题归约到这种情形。

然而，当 $\alpha+\beta$ 是整数时，这种性质不成立。

• **(H7) 的证明**。我们在 $\beta\in(0,1]$, 的情形下证明； $\beta>1$ 的证明类似。定义

$$v_h(x)=\frac{u(x+h)-u(x)}{|h|^\alpha}.$$

那么，由假设可得

$$\sup_{x,y\in B_{1-|h|}}\frac{|v_h(x)-v_h(y)|}{|x-y|^\beta}\le C_\circ.$$

这等价于

$$\sup_{x,y\in B_{1-|h|}}\frac{|u(x+h)-u(x)-u(y+h)+u(y)|}{|h|^{\alpha+\beta}}\le C_\circ.$$

取 $y=x-h$，可得

$$\sup_{x\in B_{1-2|h|}}\frac{|u(x+h)+u(x+h)-2u(x)|}{|h|^{\alpha+\beta}}\le C_\circ.$$

由 **(H6)**，我们推得 $\|u\|_{C^{\alpha+\beta}(B_1)}\le C\!\!\!/C_\circ$ ——只要 $\alpha+\beta\neq 1$。 □

(H8) 假设 $u_i\to u$ 在 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 中一致地成立，且 $\|u_i\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}\le C_\circ$，其中 $\alpha\in(0,1]$，并且存在与 i 无关的 $C_\circ$。于是，$u\in C^{k,\alpha}(\Omega)$，并且

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}\le C_\circ.$$

• **(H8) 的证明**。先假设 $k=0$。那么，对于每个 $x,y\in\Omega$，都有 $x\neq y$，

$$\|u_i\|_{L^\infty(\Omega)}+\frac{|u_i(x)-u_i(y)|}{|x-y|^\alpha}\le C_\circ.$$

取极限 $u_i\to u$，可推出同一不等式对 u 也成立，因此 $\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\le C_\circ$，如所求。

现在假设 $k\ge 1$。由 Arzel`a–Ascoli 定理可知，对于 $m\le k$，$D^m u_i\to D^m u$ 在 Ω 中一致地成立。因此，与前面一样，在不等式中取极限

$$\|u_i\|_{C^k(\overline{\Omega})}+\frac{|D^k u_i(x)-D^k u_i(y)|}{|x-y|^\alpha}\le C_\circ,$$

结论得证。 □

注释 A.1。关于性质 **(H5)**，可以将 $\mathscr{L}^{\infty,\beta}$ 定义为如下函数的集合 $u: B_1\to\mathbb{R}$ 满足：对于每个 $x\in\mathbb{R}$ 以及每个 $r\in(0,1-|x|)$，存在某个多项式 $P_{x,r}$，其次数为 $\lfloor\beta\rfloor$，使得

$$\|u-P_{x,r}\|_{L^\infty(B_r(x))}\le Cr^\beta$$

对于某个 C 普适的值，其中 $\lfloor\beta\rfloor$ 表示 β的整数部分。更一般地，对于 $p \in [1,\infty]$，可以将[2] $\mathscr{L}^{p,\beta}$定义为满足以下条件的函数集合 u

$$r^{-\frac{n}{p}}\|u - P_{x,r}\|_{L^p(B_r)} \le Cr^\beta.$$

于是可以证明，对于任意的 $\beta > 0$ 和 $p \ge 1$, $\mathscr{L}^{p,\beta} = \mathscr{L}^{\infty,\beta}$；参见[**JTW83**，定理 2]。此外，类似于我们在 **(H5)** 中所做的，可以证明，若 $\beta = k + \alpha$, 则

$$\mathscr{L}^{p,k+\alpha} = \mathscr{L}^{\infty,k+\alpha} = C^{k,\alpha}, \qquad \text{if} \quad \alpha \in (0,1) \text{ and } k \in \mathbb{N}.$$

另一方面，当 β 是整数时，这些空间与 H¨older 空间并不相同。事实上，对于 $\beta = 1$，有

$$\mathscr{L}^{p,1} = \mathscr{L}^{\infty,1} = \Lambda^1,$$

（参见 [**JW84**，第 1.6] 节），而对于 $\beta > 1$,

$$u \in \mathscr{L}^{p,\beta} \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla u \in \mathscr{L}^{p,\beta-1},$$

（参见 [**JTW83**，定理 3]。）这里，Λ^1 表示齐格蒙德空间，即满足下述条件的函数集合 $u : B_1 \to \mathbb{R}$

$$\sup_{\substack{h\in B_1\\ x\in\overline{B}_{1-|h|}}} \frac{\big|u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)\big|}{|h|} \le C,$$

其中某个常数 C是普适的。最后，当 $\beta = 0$ 时，有

$$\mathscr{L}^{p,0} = \mathscr{L}^{1,0} = \mathrm{BMO}, \qquad \text{if} \quad p \in [1,\infty),$$

其中，BMO 表示有界平均振荡函数空间，参见[**JN61, JW84**]。还要注意，$\nabla u \in$ BMO 蕴含 $u \in \Lambda^1$，但反之则不成立，参见 [**Str80**，定理 3.4]。

[2]当 $p < \infty$ 且 $\beta < 1$时，这些空间称为 *Morrey-Campanato spaces*。

附录 B

边界哈纳克不等式的证明

本附录的目标是证明利普希茨区域中的边界哈纳克不等式，即定理 5.35。这里给出的证明归功于 De Silva 和 Savin [**DS20**], , 不同于书中给出的证明 [**CS05**]。

为简单起见，我们考虑满足以下条件的区域 Ω:

$$\begin{gathered}\Omega \cap B_1 \text{ is given by a Lipschitz graph in the } e_n \text{ direction,} \\ \text{with Lipschitz norm} \leq 1, \text{ and with } 0 \in \partial\Omega.\end{gathered} \tag{B.1}$$

换句话说，我们考虑 $(x',\ x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$，并令

$$\begin{gathered}g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}, \qquad [g]_{C^{0,1}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq 1, \qquad g(0) = 0, \\ \Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > g(x')\}.\end{gathered} \tag{B.2}$$

利普希茨区域中的边界哈纳克不等式如下。（定理所处的情形见图 B.1。）

定理 B.1 (边界哈纳克原理)。 设 w_1 和 w_2 是 在 $B_1 \cap \Omega$中 的正调和函数，其中Ω 是一个 利普希茨区域，如 (B.1)-(B.2)所示。

假设 w_1 和 w_2 在 $\partial\Omega \cap B_1$上连续取零，并且 $C_\circ^{-1} \leq \|w_i\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C_\circ$ 对 $i = 1,2$成立。那么，

$$C^{-1} w_2 \leq w_1 \leq C w_2 \qquad in \quad \overline{\Omega} \cap B_{1/2}.$$

常数 C 仅依赖于 n 和 $C_\circ$。

此外，对前述结果进行适当迭代即可得到以下结论。

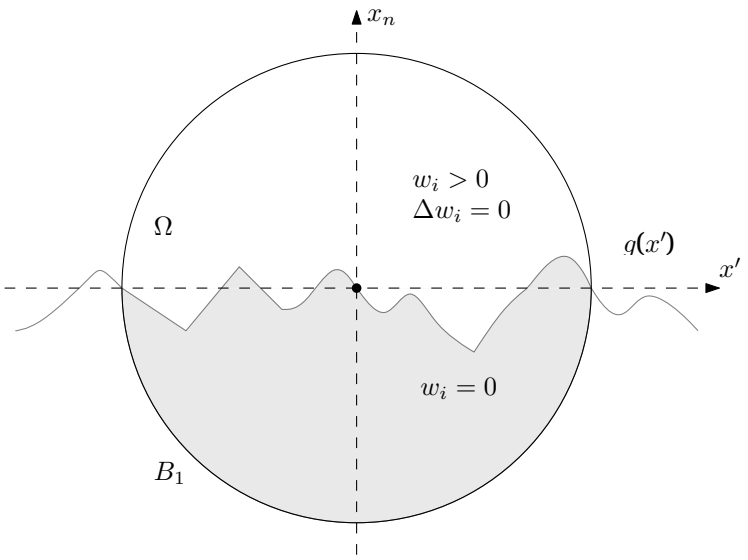


图 B.1. 定理 B.1 和推论 B.2 中情形的示意图。

推论 B.2. 设 w_1 和 w_2 如定理 *B.1* 中所述。则，

$$\left\| \frac{w_1}{w_2} \right\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \cap B_{1/2})} \leq C$$

对于某个较小的 $\alpha > 0$。常数 α 和 C 仅取决于 n 和 C_0。

备注 B.3. 注意，为简单起见，我们只考虑 Lipschitz 常数不超过 1 的利普希茨区域。因此，定理 B.1 中出现的常数均不依赖于区域 Ω。这里给出的证明也可以推广到一般的利普希茨区域。

我们考虑 Lipschitz 常数不超过 1 的区域，原因是这样可以避免引入更多符号说明，而且 B_1 中的区域 Ω 只有一个连通分支。此外请注意，应用命题 5.37 中的边界哈纳克原理时，我们处理的是 Lipschitz 常数小于 1 的利普希茨区域（因此可以直接应用推论 B.2）。

下面将用到关于次调和函数和超调和函数的两个（众所周知的）引理。请注意，这些都是内部正则性性质。

引理 B.4（上解的弱哈纳克不等式）。令 $u \in C(B_1)$。则

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 & in\ B_1 \\ u \geq 0 & in\ B_1 \end{cases} \implies \inf_{B_{1/2}} u \geq c \|u\|_{L^1(B_{1/2})},$$

其中 $c>0$ 仅依赖于 n。

证明。 根据拉普拉斯方程的平均值性质，对于任意 $x_\circ \in B_{1/3}$ ，我们有

$$u(x_\circ) \geq \frac{1}{|B_{2/3}|}\int_{B_{2/3}(x_\circ)} u = c\|u\|_{L^1(B_{2/3})(x_\circ)} \geq c\|u\|_{L^1(B_{1/3})},$$

其中 c 是一个维数相关常数，因此我们已经证明了在半径为 $1/3$ 的球内成立该性质。现在取任意 $\bar{x}_\circ \in \partial B_{1/3}$ ，并考虑球 $B_{1/6}(\bar{x}_\circ)$ 。注意，我们可以重复前面的步骤，推导出

$$\inf_{B_{1/6}(\bar{x}_\circ)} u \geq c\|u\|_{L^1(B_{1/6})(\bar{x}_\circ)}.$$

此外，若记 $\mathcal{B} := B_{1/3}\cap B_{1/6}(\bar{x}_\circ)$ ，则

$$\|u\|_{L^1(B_{1/6})(\bar{x}_\circ)} \geq \int_{\mathcal{B}} u \geq |\mathcal{B}| \inf_{\mathcal{B}} u \geq c \inf_{B_{1/3}} u.$$

根据本证明中的第一个结果，我们可以得出

$$\inf_{B_{1/2}} u \geq c_1 \inf_{B_{1/3}} u \geq c_2\|u\|_{L^1(B_{1/3})} \geq c_3\|u\|_{L^1(B_{1/2})}$$

其中某个维数相关常数为 c_3。最后一步中，我们利用了超调和函数的平均值关于半径的单调性；例如参见（1.12）。□

第二个引理如下。

引理 B.5 (L^∞ 次解的界)。 设 $u\in C(B_1)$。那么，

$$-\Delta u \leq 0 \quad in \quad B_1 \quad \Rightarrow \quad \sup_{B_{1/2}} u \leq C_\varepsilon \|u\|_{L^\varepsilon(B_1)},$$

对任意 $\varepsilon>0$，存在某个仅依赖于 n 和 ε的 C_ε 。

证明。 同样，由平均值性质可知，对任意 $r>0$,

$$\|u\|_{L^\infty(B_{r/2})} \leq C \fint_{B_r} u \leq C\|u\|^{1-\varepsilon}_{L^\infty(B_r)} \fint_{B_r} |u|^\varepsilon.$$

现在我们想要使用插值不等式。注意，对任意 $\delta>0$，存在某个 C_δ（仅依赖于 δ 和 ε），使得对所有 $\xi \geq 0$都有 $\xi^{1-\varepsilon} \leq \delta\xi + C_\delta$。取满足以下条件的 $\xi = \frac{A}{B}$

$$A = \|u\|_{L^\infty(B_r)}, \qquad B = \left(C \fint_{B_r} |u|^\varepsilon\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

我们推得，对于任意 $\delta>0$，存在某个 C_δ 使得

$$\|u\|_{L^\infty(B_{r/2})} \leq C\|u\|^{1-\varepsilon}_{L^\infty(B_r)} \fint_{B_r} |u|^\varepsilon \leq \delta \|u\|_{L^\infty(B_r)} + C_\delta \left(C \fint_{B_r} |u|^\varepsilon\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

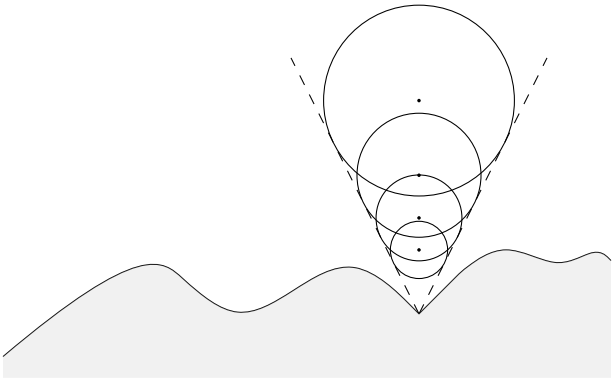


图 B.2. 用于依次应用 Harnack不等式的球链。

特别地,

$$\|u\|_{L^\infty(B_{r/2})} \le \delta \|u\|_{L^\infty(B_r)} + C_\delta r^{-\frac{n}{\varepsilon}} \|u\|_{L^\varepsilon(B_1)}.$$

现在我们可以对 $S(A) = \|u\|_{L^\infty(A)}$,$k = \frac{n}{\varepsilon}$ 和 $\gamma = C_\delta \|u\|_{L^\varepsilon(B_1)}$应用引理 2.27，从而推出

$$\|u\|_{L^\infty(B_{1/2})} \le C \|u\|_{L^\varepsilon(B_1)},$$

其中常数 C 仅取决于 n 和 ε，这正是所需结果。 □

作为前面几个引理的推论，我们得到以下两个有用的结果，它们是证明定理 B.1 的部分步骤。第一个结果给出了一个 L^∞ 界，将 u 表示为函数 atan 位于 Ω 内部点处的值。

引理 B.6. 设 $u \in C(B_1)$ 是区域 $B_1 \cap \Omega$ 中的正调和函数，且$u = 0$ 在 $B_1 \setminus \Omega$上，其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个利普希茨区域，如(B.1)-(B.2)所述。此外，假设 $u(\frac{1}{2}e_n) = 1$。那么，

$$\|u\|_{L^\infty(B_{1/2})} \le C,$$

其中某个常数 C 仅取决于 n。

证明。注意，由于当 $u > 0$ 时 $u \ge 0$ 是调和函数，且它是连续的，因此在粘性意义下，我们有 $\Delta u \ge 0$ 于 B_1。

另一方面，由于 (B.1) 中的 g 的 Lipschitz 常数不超过 1，我们有 $B_\varrho(\frac{1}{2}e_n) \subset \{\Delta u = 0\}$，其中 $\varrho = \frac{1}{2\sqrt{2}}$。特别地，由哈纳克不等式（见 (2.3)）可得，$u \le C_n$ in $B_{1/4}(\frac{1}{2}e_n)$。也就是说，对于 $x_n \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$，有 $u(0, x_n) \le C_n$。迭代重复这一过程，可得，对于 $x_n \in (2^{-k-1}, 2^{-k})$，有 $u(0, x_n) \le C_n^k$（这串不等式的示意见图 B.2），因此，对于 $t \in (0, \frac{1}{2})$，有 $u(0, t) \le t^{-K}$，其中 K 是某个较大的维数相关常数。我们

可以通过依次迭代哈纳克不等式，在 $B_{1/2}$ 中的所有点重复相同的过程，从而推出

$$u \le d^{-K} \qquad \text{in} \quad B_{1/2}, \qquad \text{where} \quad d(x) := \operatorname{dist}(x, \Omega^c).$$

特别地，对于足够小的 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\int_{B_{1/2}} |u|^{\varepsilon} \le C.$$

由引理 B.5，我们推出 $\|u\|_{L^\infty(B_{1/4})} \le C$，而 $B_{1/2}$ 中的结论可通过一个简单的覆盖论证得到。□

第二个引理如下。

引理 B.7. 设 $\delta > 0$ 足够小，设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是如(B.1)-(B.2)中所述的利普希茨区域，并设 $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \text{距离}(x, \Omega^c) \ge \delta\}$。设 $u \in C(B_1)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & in\ \Omega \cap B_1 \\ u = 0 & on\ \partial\Omega \cap B_1 \end{cases} \qquad and \qquad \begin{cases} u \ge 1 & in\ B_1 \cap \Omega_\delta \\ u \ge -\delta & in\ B_1. \end{cases}$$

那么，对于所有满足 $k\delta \le \frac{3}{4}$ 的 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$u \ge -\delta(1 - c_\circ)^k \quad in \quad B_{1-k\delta}$$

其中某个常数 $c_\circ$ 仅取决于 n。

证明。令 $u^- = \min\{u, 0\}$。注意，u^- 是超调和的（在粘性意义下），因为当 $u^- < 0$ 时 $\Delta u^- = 0$，且 $u^- \le 0$，所以我们有 $\Delta u^- \le 0$。令 $w = u^- + \delta$。根据假设，$w \ge 0$ 且 $\Delta w \le 0$。

令 $x_\circ \in \partial\Omega \cap B_{1-2\delta}$。将引理 B.4 应用于以 $x_\circ$ 为中心、半径为 2δ 的球，因此（缩放后）我们可推出

$$\inf_{B_\delta(x_\circ)} w \ge c\delta^{-n} \|w\|_{L^1(B_\delta(x_\circ))}.$$

注意，现在，由于区域是利普希茨的，且 $w \ge \delta$ 位于 Ω^c 中，我们可以估计 $\|w\|_{L^1(B_\delta(x_\circ))} \ge \delta |\{w \ge \delta\} \cap B_\delta(x_\circ)| \ge c\delta^{n+1}$，其中某个 c 仅取决于 n（见图 B.3）。因此，

$$\inf_{B_\delta(x_\circ)} w \ge c_\circ \delta.$$

特别地，由于 $w \ge \delta$ 属于 $B_1 \cap \Omega_\delta$，我们有 $w \ge c_\circ\delta$ 属于 $B_{1-\delta}$，因此 $u \ge -\delta(1 - c_\circ)$ 属于 $B_{1-\delta}$。对半径为 $1 - 2\delta$、$1 - 3\delta$、.....的球反复应用这一不等式，即可得到所需结果。□

现在我们可以证明以下结果，这是证明定理 B.1 的关键步骤。

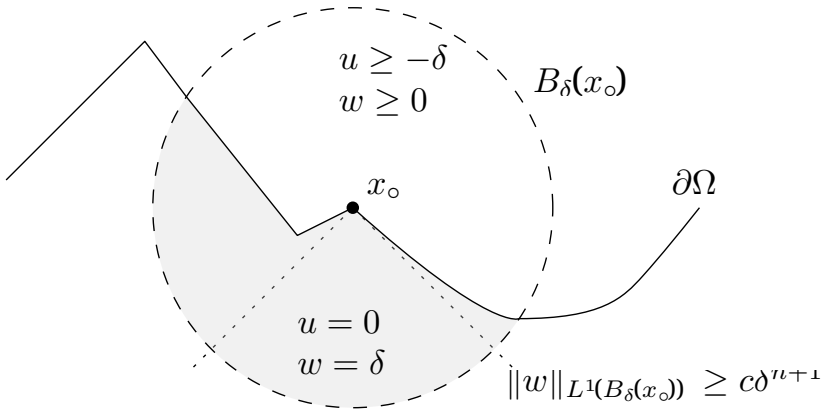


图 B.3. 区域为利普希茨区域这一事实，使我们能够从下方估计 w 在 $B_\delta(x_\circ)$ 中的 L^1 范数。

命题 B.8. 存在仅依赖于 n 的 $\delta > 0$，使得下述结论成立。

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是 (B.1)-(B.2) 中的利普希茨区域，并设 $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \text{距离}(x, \Omega^c) \geq \delta\}$。假设 $u \in C(B_1)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & in\ \Omega \cap B_1 \\ u = 0 & on\ \partial\Omega \cap B_1 \end{cases} \quad and \quad \begin{cases} u \geq 1 & in\ B_1 \cap \Omega_\delta \\ u \geq -\delta & in\ B_1. \end{cases}$$

那么，$u \geq 0$ 在 $B_{1/2}$ 中。

证明。只需证明，对于某个 $a > 0$，有

$$\begin{cases} u \geq a & \text{in } B_{1/2} \cap \Omega_{\delta/2} \\ u \geq -\delta a & \text{in } B_{1/2}. \end{cases} \tag{B.3}$$

事实上，在所有尺度以及所有点 $z \in \partial\Omega \cap B_{1/2}$ 处反复应用 (B.3)，可得

$$\begin{cases} u \geq a^k & \text{in } B_{2^{-k}}(z) \cap \Omega_{2^{-k}\delta} \\ u \geq -\delta a^k & \text{in } B_{2^{-k}}(z) \end{cases}$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 都成立。特别地，第一个不等式推出 $u(z + te_n) \geq 0$ 对于 $z \in \partial\Omega \cap B_{1/2}$ 和 $t > 0$ 成立，因此 $u \geq 0$ 属于 $B_{1/2}$。

我们来证明 (B.3)。先从第一个不等式开始。设 $x_\circ \in B_{1/2} \cap \Omega_{\delta/2}$，并假设 $\frac{\delta}{2} \leq \text{dist}(x_\circ, \Omega^c) < \delta$（否则，根据假设结论显然成立）。考虑函数 $w = u + \delta$，根据假设，它在 Ω 中满足 $w \geq 0$。

注意，我们可以用 Ω 中一列（三个）重叠球连接点 $x_\circ$ 和 $x_\circ + \frac{1}{2}\delta e_n$，从而对 w 应用哈纳克不等式，得出

$$w(x_\circ) \geq \frac{1}{C}\, w\big(x_\circ + \tfrac{1}{2}\delta e_n\big) \geq \frac{1}{C},$$

其中某个维数相关常数为 $C_\circ$。最后一步用到了假设 $w\left(x_\circ+\frac{1}{2}\delta e_n\right)\geq 1+\delta_\circ$ 特别地，取小于 $\frac{1}{2C}$ 的 $\delta>0$，可得

$$u(x_\circ)\geq \frac{1}{C}-\delta\geq \frac{1}{2C}\qquad \text{for all}\quad x_\circ\in B_{1/2}\cap\Omega_{\delta/2}.$$

另一方面，根据引理 B.7，我们知道，只要 $k\delta\leq\frac{3}{4}$，$u\geq -\delta(1-c_\circ)^k$ 在$B_{1-k\delta}$中成立。取 $k=\frac{1}{2\delta}$，我们得到

$$u\geq -\delta(1-c_\circ)^{\frac{1}{2\delta}}\quad \text{in}\quad B_{1/2},$$

并取足够小的 δ，使得 $(1-c_\circ)^{\frac{1}{2\delta}}\leq\frac{1}{2C}$，证毕。 □

注 B.9（小 Lipschitz 常数情形下的命题 B.8）。在区域具有较小 Lipschitz 常数的情况下，引理 B.7 和命题 B.8 的证明可以大大简化。

事实上，假设命题 B.8 的条件成立，其中区域 Ω 满足（B.1）—（B.2），但 Lipschitz 常数为 $L<\frac{1}{n-1}$，并考虑调和函数

$$\varphi(x)=x_n^2-\frac{1}{n-1}\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\right).$$

于是，当 δ 足够小时，$\varphi\leq u$ 在 $\partial B_{1/2}\cap\Omega$ 上成立，并且根据区域 Lipschitz 常数的假设，我们有 $\varphi\leq 0$ 在 $\partial\Omega\cap B_1$上成立。综上，最大值原理给出 $\varphi\leq u$ 在 $B_{1/2}\cap\Omega$ 中成立，这意味着对于 $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，$u(te_n)\geq 0_\circ$ 在 $\partial\Omega\cap B_{1/2}$中的所有边界点处重复相同的论证，我们得到 $u\geq 0$ 在 $B_{1/2}$中成立。

现在我们可以给出定理 B.1 的证明。

定理 B.1 的证明。由引理 B.6 可知，除去一个依赖于 $C_\circ$ 的常数因子，我们可以假设 $w_1(\frac{1}{2}e_n)=w_2(\frac{1}{2}e_n)=1_\circ$ 接下来，定义

$$v=Mw_1-\varepsilon w_2$$

其中 M（较大）和 ε（较小）是待选常数。由命题 B.8，取 $\delta>0$。由于 w_2 有界，

$$v\geq -\varepsilon w_2\geq -\delta\quad \text{in}\quad B_{1/2}$$

当 $\varepsilon>0$ 足够小时成立。另一方面，根据内部 Harnack 不等式，我们可以取足够大的 M，使得 $Mw_1\geq 1+\delta$ 属于 $B_{1/2}\cap\Omega_\delta$；这里回忆一下，$\Omega_\delta=\{x\in\Omega\colon$ 距离$(x,\ \Omega^c)\geq\delta\}_\circ$ 也就是说，

$$v=Mw_1-\varepsilon w_2\geq 1\quad \text{in}\quad B_{1/2}\cap\Omega_\delta,$$

对于仅依赖于 n 的充分大的 M。因此，命题 B.8 的假设得到满足，从而我们推得 $v\geq 0$ 属于 $B_{1/2\circ}$

这意味着，对于某个仅依赖于 n 的常数 C，有 $w_2 \le Cw_1$ 属于 $B_{1/4}$。$B_{1/2}$ 中的不等式可通过覆盖论证得到。最后，交换 w_1 和 w_2 的角色，即可得到所需结果。□

最后，我们给出：

推论 B.2 的证明。记

$$W := \frac{w_1}{w_2},$$

从而我们必须证明 W 在 $\Omega \cap B_{1/2}$ 中的 Hölder 正则性。

注意，根据定理 B.1，我们知道

$$\frac{1}{C} \le W \le C \quad \text{in} \quad B_{1/2} \cap \Omega,$$

对于某个仅依赖于 n 的 C。我们首先断言，对于某个 $\theta > 0$ 以及所有 $k \in \mathbb{N}$，有

$$\operatorname*{osc}_{B_{2^{-k-1}}} W \le (1-\theta) \operatorname*{osc}_{B_{2^{-k}}} W. \tag{B.4}$$

事实上，令

$$a_k := \sup_{B_{2^{-k}}} W \qquad \text{and} \qquad b_k := \inf_{B_{2^{-k}}} W.$$

若记为 $p_k = \frac{1}{2^{k+1}} e_n$，则要么 $W(p_k) \ge \frac{1}{2}(a_k + b_k)$，要么 $W(p_k) \le \frac{1}{2}(a_k + b_k)$。

先假设 $W(p_k) \ge \frac{1}{2}(a_k + b_k)$，并定义

$$v := \frac{w_1 - b_k w_2}{a_k - b_k}.$$

注意，由假设可知，

$$\frac{1}{2} w_2(p_k) \le v(p_k) \le w_2(p_k).$$

特别地，我们可以对球 $B_{2^{-k}}$ 内的函数 v 和 w_2 应用定理 B.1，从而推出 $v \ge \frac{1}{C} w_2$ 在 $B_{2^{-k-1}}$ 中，即

$$\frac{w_1 - b_k w_2}{a_k - b_k} \ge \frac{1}{C} w_2 \quad \text{in} \quad B_{2^{-k-1}} \quad \Longleftrightarrow \quad \inf_{B_{2^{-k-1}}} W \ge \frac{1}{C}(a_k - b_k) + b_k.$$

由于 $\sup_{B_{2^{-k-1}}} W \le \sup_{B_{2^{-k}}} W \le a_k$，我们推出

$$\operatorname*{osc}_{B_{2^{-k-1}}} W \le a_k - \frac{1}{C}(a_k - b_k) - b_k = \left(1 - \frac{1}{C}\right)(a_k - b_k) = (1-\theta) \operatorname*{osc}_{B_{2^{-k}}} W,$$

结合 $\theta = \frac{1}{C}$，即得所需结论。

若改为假设 $W(p_k) \le \frac{1}{2}(a_k + b_k)$，则采用 $v := (a_k w_2 - w_1)/(a_k - b_k)$ 的论证也类似。总之，(B.4) 成立。

特别地，我们已经证明，对于某个仅依赖于n的小 α ，有

$$\operatorname*{osc}_{B_r(x_\circ)} W \le Cr^\alpha \quad \text{for all} \quad r \in (0, \tfrac{1}{4}) \quad \text{and} \quad x_\circ \in \partial\Omega \cap B_{1/2}, \tag{B.5}$$

（与推论 2.7 的证明比较）。现在我们需要将 (B.5) 与调和函数的内部估计结合起来，从而推出所需结果。

事实上，令 $x, y \in \Omega \cap B_{1/2}$，我们要证明

$$|W(x) - W(y)| \le C|x-y|^\alpha, \tag{B.6}$$

存在一个只依赖于 n 的常数 C ，使得

令 $2r = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = |x - x_*|$，其中 $x_* \in \partial\Omega$。我们分两种情况讨论：

• 如果 $|x-y| \ge \frac{r}{2}$ ，那么我们在半径为 $\rho = 2r + |x-y|$ 的球 $B_\rho(x_*)$ 中应用 (B.5)，从而得到

$$|W(x) - W(y)| \le \operatorname*{osc}_{B_\rho(x_*)} W \le C(2r + |x-y|)^\alpha \le C|x-y|^\alpha.$$

• 若 $|x-y| \le \frac{r}{2}$，则由 (B.5) 可知，$\operatorname{osc}_{B_r(x)} W \le Cr^\alpha$。特别地，若记 $c_* := W(x)$，则

$$\|w_1 - c_* w_2\|_{L^\infty(B_r(x))} = \|w_2 (W - c_*)\|_{L^\infty(B_r(x))} \le Cr^\alpha \|w_2\|_{L^\infty(B_r(x))}.$$

另一方面，由于 $w_1 - c_* w_2$ 在 $B_r(x)$ 中调和，由推论 2.7（重新缩放后）可知

$$[w_1 - c_* w_2]_{C^{0,\alpha}(B_{r/2}(x))} \le \frac{C}{r^\alpha} \|w_1 - c_* w_2\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C\|w_2\|_{L^\infty(B_r(x))}.$$

因此，

$$|W(y) - W(x)| = \left| \frac{w_1(y) - c_* w_2(y)}{w_2(y)} \right| \le C|x-y|^\alpha \frac{\|w_2\|_{L^\infty(B_r(x))}}{w_2(y)}.$$

最后注意到，对 w_2 在 $B_{2r}(x)$ 中应用哈纳克不等式可得 $\|w_2\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C w_2(y)$，其中某个 C 仅依赖于 n。

结合这两种情况，我们证明了 (B.6)。结果得证。 □

注 B.10。 如上所述，本附录中的证明均在 Ω 如 (B.1) 所示为利普希茨区域且 Lipschitz 常数不超过 1 的情形下进行。这使符号说明稍微简化，并且 $\Omega \cap B_1$ 只有一个连通分支。

对于一般的利普希茨区域（其 Lipschitz 常数不超过 L），只要对底层几何稍加留意，同样可以完成这些证明。一个简单的方法是证明所有结果时将 $B_{1/2}$ 替换为 B_ρ，其中 $\rho > 0$ 取决于 L且足够小。

另一种方法是使用圆柱体而非球，如 [**DS20**] 中所示。

附录 C

全非线性方程的概率解释

在本附录中，我们以启发式的方式描述全非线性椭圆偏微分方程的概率解释。这将第 1.3 节中关于拉普拉斯算子的讨论加以推广。

我们首先回顾第 1 章中关于调和函数的以下概率解释：

我们有一个从 $x \in \Omega$出发的布朗运动 X_t^x，以及一个收益函数$g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$。当运动首次到达边界 $\partial\Omega$上的某个点$z \in \partial\Omega$时，我们会获得报酬 $g(z)$。那么问题是：

$$\text{What is the expected payoff?}$$

事实证明，

$$u(x) := \left\{ \begin{array}{c} \text{expected} \\ \text{payoff} \end{array} \right\} = \mathbb{E}\big[g\left(X_\tau^x\right)\big] \quad \text{satisfies} \quad \left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0 & \text{in } \Omega \\ u & = & g & \text{on } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

其中 τ 是 X_t^x 首次到达 $\partial\Omega$ 的时间。

我们已经在第 1 章中见过这一点。现在，我们将探讨更一般的“概率游戏”，它们会导出更一般的椭圆型偏微分方程。

随机过程。随机过程 X_t 是由一组随机变量构成的，这些随机变量以某个参数为索引；对我们而言，这个参数是 $t \geq 0$，它们取值于某个状态空间；对我们而言，这个状态空间是 $\mathbb{R}^n$。可以把它们简单地看作一个在 $\mathbb{R}^n$ 中随机移动的“粒子”，其中 $t \geq 0$ 是时间。

最著名、最重要的随机过程是布朗运动，我们已在第 1.3 节中介绍过。回顾一下，它具有以下特征：

(1) $X_0 = 0$ 几乎必然成立。(2) X_t 具有无记忆性 （与过去独立，或具有独立增量）。(3) X_t 具有平稳增量： $X_{t+s} - X_s$ 与 X_t同分布。(4) X_t 具有连续路径 （$t \mapsto X_t$ 连续），且几乎必然成立。(5) X_t 具有各向同性，即其分布具有旋转对称性。

去掉假设 (5) 后，可以得到一类更一般的随机过程。

无穷小生成元。 随机过程 X_t 的无穷小生成元是一个算子 L，定义为作用于函数 u: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得

$$Lu(x) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}\left[u\left(x + X_t\right)\right] - u(x)}{t}. \tag{C.1}$$

它接收函数 u，并给出 Lu。

对于布朗运动，我们有 L 是拉普拉斯算子 Δ。

更一般地，在假设 (1)-(2)-(3)-(4) 下，无穷小生成元 L 将是具有如下形式的二阶椭圆算子

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u + cu.$$

为什么这个无穷小生成元有用?

随机过程的无穷小生成元编码了该过程的所有信息。事实上，根据 L 的定义，可以得到如下公式

$$\mathbb{E}\left[u(x + X_t)\right] = u(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^t Lu(x + X_s)\, ds\right]. \tag{C.2}$$

（这类似于微积分基本定理！）

我们可以回到“期望收益”问题：

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个固定区域，并考虑一个从 $x \in \Omega$ 出发、满足上文 (2)-(3)-(4) 的随机过程 $(x + X_t)$。给定收益函数 $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$，有如下结论：当 X_t^x 首次到达边界 $\partial\Omega$ 时，时刻为 $z \in \partial\Omega$，我们获得收益 $g(z)$。（见图 C.1。）

期望收益是多少?

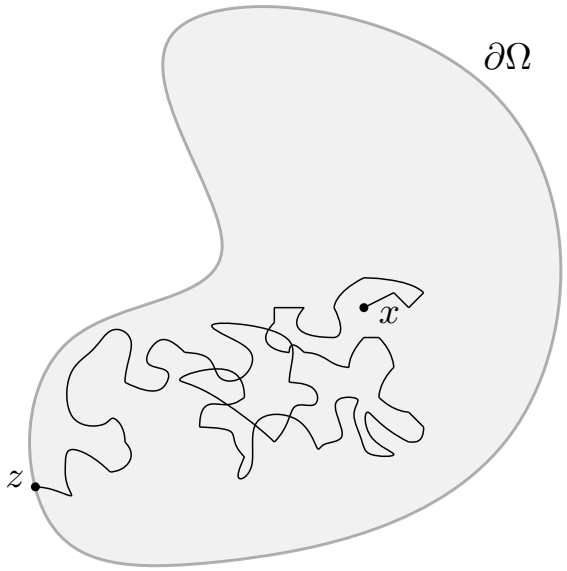


图 C.1. 一个定义在 Ω 中的随机过程 X_t^x，从 x 出发，直到首次到达边界 $z \in \partial\Omega$ 上的点。

当然，期望收益取决于 $x \in \Omega$。对于布朗运动，我们定义 $u(x)$ 为从 x 出发时的期望收益，$\mathbb{E}[g(X_\tau^x)]$，其中 τ 是我们首次到达 $\partial\Omega$ 的时间。然后我们注意到，由于布朗运动具有各向同性，u 必须满足平均值性质，因此 u 在 Ω 中是调和的：$\Delta u = 0$。

现在，对于更一般的随机过程，我们必须使用 (C.2)。事实上，我们像之前一样定义 u（期望收益），并注意到，如果 $t > 0$ 足够小，那么 $x + X_t$ 仍会位于 Ω 内，因此期望收益只等于 $\mathbb{E}[u(x + X_t)]$（误差很小），即

$$u(x) = \mathbb{E}[u(x + X_t)] + o(t) \qquad (\text{for } t > 0 \text{ small enough}).$$

其中，项 $o(t)$ 的出现是因为即使时间 $t > 0$ 任意小，$x + X_t$ 仍有可能落在 Ω 之外。

现在，利用无穷小生成元的定义 (C.1)，我们得到

$$Lu(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[u(x + X_t)] - u(x)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0.$$

因此，对于每个 $x \in \Omega$，我们得到 $Lu(x) = 0$。显然，我们在 $u = g$ $\partial\Omega$ 上有 u，因此，u 必须是以下方程的解

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

总结:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Expected}\\ \text{payoff for } X_t\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Dirichlet problem for } L\\ \text{(infinitesimal generator)}\end{array}\right\}.$$

我们可以用类似的方法解决其他与 X_t 相关的概率问题:

– 如果从 x 出发，离开 Ω 需要多长的期望时间?

$$\left\{\begin{array}{rcll} -Lu & = & 1 & \text{in } \Omega \\ u & = & 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

– X_t 在 $\mathbb{R}^n$ 中的概率密度 $p(x,t)$ 是多少?

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t p - Lp & = & 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ p(\cdot,0) & = & \delta_{\{x=0\}} & \text{on } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

接下来，我们来看看存在控制或双人博弈时会发生什么。在这种情况下，我们得到非线性偏微分方程。

最优停止。 我们从最优停止问题开始。这类问题在数学金融中非常常见，例如。

给定一个 X_t 中的过程 $\mathbb{R}^n$，我们可以在每个时刻决定是否停止它。停止时，我们会获得收益 φ （它取决于停止时所在的点）。我们的目标是找出最优策略，使收益最大化。

考虑从 $x \in \mathbb{R}^n$ 开始的过程 $x + X_t$，以及收益$\varphi \in C_c^\infty$（$\mathbb{R}^n$）。对于任意停止时刻 θ，我们都会获得收益 $\mathbb{E}[\varphi（x + X_\theta）]$,，因此我们希望最大化

$$u(x) := \max_\theta \mathbb{E}[\varphi(x + X_\theta)]$$

在所有可能的停止时刻 θ 中（注意，停止时刻 θ 实际上是一个 y 随机变量；更多详情请参见 [**Eva13**]）。

我们能否为 u（x）找到一个偏微分方程?

粗略来说，这里需要决定的唯一重要事项是:

如果我们处于 x，是停下来获得 $\varphi(x)$ 更好，还是继续下去，希望之后能获得更高的收益?

让我们来求 u 对应的偏微分方程:

– 首先，由于我们总是可以停止（取 $\theta = 0$），因此对每个 $x \in \mathbb{R}^n$，都有 $u(x) \geq \varphi(x)$。– 其次，由于我们总是可以继续一段时间（取 $\theta \geq t_\circ > 0$），因此对于 $t \leq t_\circ$，有 $u(x) \geq \mathbb{E}[u(x + X_t)]$。结合 (C.2)（或定义 (C.1)），可得

$$Lu(x) \leq 0 \quad \text{for every } x \in \mathbb{R}^n.$$

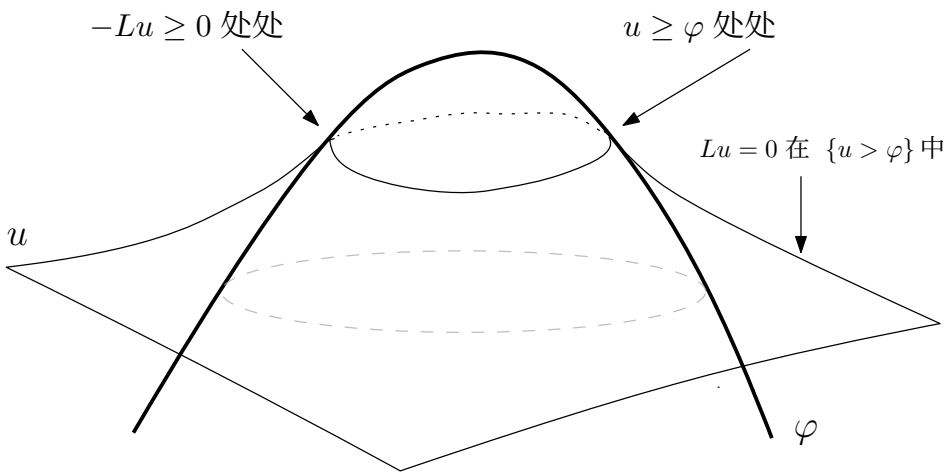


图 C.2. 障碍问题。

– 第三，在满足 $u(x) > \varphi(x)$ 的那些点上，我们显然不会在那里停止，因此当 t非常小时，有 $u(x) = \mathbb{E}[u(x + X_t)] + o(t)$，从而只要 $u(x) > \varphi(x)$，就有 $Lu(x) = 0$。

u 的偏微分方程为

$$\begin{cases} u \geq \varphi & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ -Lu \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ Lu = 0 & \text{in } \{u > \varphi\}, \end{cases} \longleftrightarrow \min\{-Lu, u - \varphi\} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n.$$

这是来自第 5 章的 $\mathbb{R}^n$ 障碍问题。（参见图 C.2。）

请注意，一旦我们知道 u，就知道集合 $\{u = \varphi\}$ 和 $\{u > \varphi\}$，因此我们就有了最优策略！

受控扩散。 现在我们来考虑另一个问题，尽管它与最优停止问题相当相似。

考虑两个随机过程 $X_t^{(1)}$ 和 $X_t^{(2)}$，它们的无穷小生成元分别为 L_1 和 L_2。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个区域，并设 $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$为收益。我们有和之前一样的“游戏”（到达边界时我们会获得收益），但现在我们有一个控制：对于每个 $x \in \Omega$，我们可以选择按照 $X_t^{(1)}$ 或 $X_t^{(2)}$ 移动。

那么问题是：

如果我们想要最大化收益，最优策略是什么？

请注意，现在的策略是在每个 $x \in \Omega$ 中选择 $X_t^{(1)}$ 和 $X_t^{(2)}$。和之前一样，我们定义

$$u(x) := \max_{\substack{\text{all possible choices} \\ \text{of } a:\Omega \to \{1,2\}}} \mathbb{E}\left[g(X_\tau^a)\right]$$

（其中 τ 是我们到达边界 $\partial\Omega$ 的时间）。注意，对于每个 $a:\Omega \to \{1,2\}$，我们都有 X_t^a，这是一个可能随点而变化的过程。

u是否有偏微分方程?

最优性条件为:

- First, when we are at x we can simply decide to continue with $X_t^{(1)}$, and therefore, $u(x) \geq \mathbb{E}\left[u(x + X_t^{(1)})\right]$ for every $x \in \Omega$. This yields $L_1 u(x) \leq 0$ for every $x \in \Omega$.
- Similarly, we can do the same for $X_t^{(2)}$, and get $L_2 u(x) \leq 0$ for every $x \in \Omega$.
- Finally, it turns out that either

$$u(x) = \lim_{t \downarrow 0} \mathbb{E}\left[u(x + X_t^{(1)})\right] \quad \text{or} \quad u(x) = \lim_{t \downarrow 0} \mathbb{E}\left[u(x + X_t^{(2)})\right],$$

因为在 x 附近，我们采取的要么是 $X_t^{(1)}$，要么是 $X_t^{(2)}$。这意味着对于每个 $x \in \Omega$，要么 $L_1 u(x) = 0$，要么 $L_2 u(x) = 0$。

因此， u满足

$$\begin{cases} -L_1 u \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \\ -L_2 u \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \text{either } L_1 u = 0 \text{ or } L_2 u = 0 \text{ in } \Omega \end{cases} \longleftrightarrow \quad \max\{L_1 u, L_2 u\} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

更一般地，如果我们有一族过程 X_t^α，且满足 $\alpha \in \mathcal{A}$，那么 u 对应的偏微分方程变为

$$\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \{L_\alpha u\} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega. \tag{C.3}$$

更一般地，我们可以有两名玩家：一名希望使收益最大化，另一名则希望使收益最小化。他们有两个参数， $X_t^{\alpha\beta}$ 、 $\alpha \in \mathcal{A}$、 $\beta \in \mathcal{B}$，每名玩家控制一个参数。那么，最优收益满足偏微分方程

$$\min_{\beta \in \mathcal{B}} \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \{L_{\alpha\beta} u\} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega. \tag{C.4}$$

上面的方程 (C.3) 称为贝尔曼方程（随机控制）。上面的方程 (C.4) 称为 Isaacs 方程（微分博弈）。这两个方程是全非线性椭圆方程!

事实上，假设我们有 (C.3)，且无穷小生成元$L_\alpha u$ 的形式为

$$L_\alpha u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)} \partial_{ij} u, \qquad (\alpha \in \mathcal{A})$$

具有 $a_{ij}^{(\alpha)}$ 一致椭圆性：$0 < \lambda \mathrm{Id} \leq (a_{ij}^{(\alpha)})_{ij} \leq \Lambda \mathrm{Id}$。于是，方程 (C.3) 为

$$\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)} \partial_{ij} u \right\} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

这是海森矩阵 $D^2 u$的非线性函数：

$$F(D^2 u) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad \text{with} \qquad F(M) := \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)} M_{ij} \right\}.$$

函数 $F : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ 是线性函数的最大值。特别地，F 是凸的。

此外，F 是一致椭圆的：

$$0 < \lambda \|N\| \leq \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)} N_{ij} \right\} \leq F(M+N) - F(M) \leq$$

$$\leq \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)} N_{ij} \right\} \leq \Lambda \|N\|$$

对于任意对称矩阵 $N \geq 0$（这里我们利用了 $\max f + \min g \leq \max(f+g) \leq \max f + \max g$）。

此外，任意凸函数都可以表示为若干线性函数的最大值（见图 C.3），因此：

注 C.1. 任何一致椭圆且凸的 $F : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ 都可以表示为

$$F(M) = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \mathrm{tr}\,(A^{(\alpha)} M) + c_\alpha \right\} \qquad (\text{where } c_\alpha \text{ are constants}).$$

（如果 F 是 1 次齐次的，那么我们就不需要 c_α。）

特别地，每个全非线性一致椭圆方程

$$F(D^2 u) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega,$$

若其中的 F 是凸的，则可以表示为一个贝尔曼方程

$$\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \{L_\alpha u\} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad \text{with} \quad L_\alpha u = \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)} \partial_{ij} u + c_\alpha.$$

最后，对于非凸 F，结果表明：

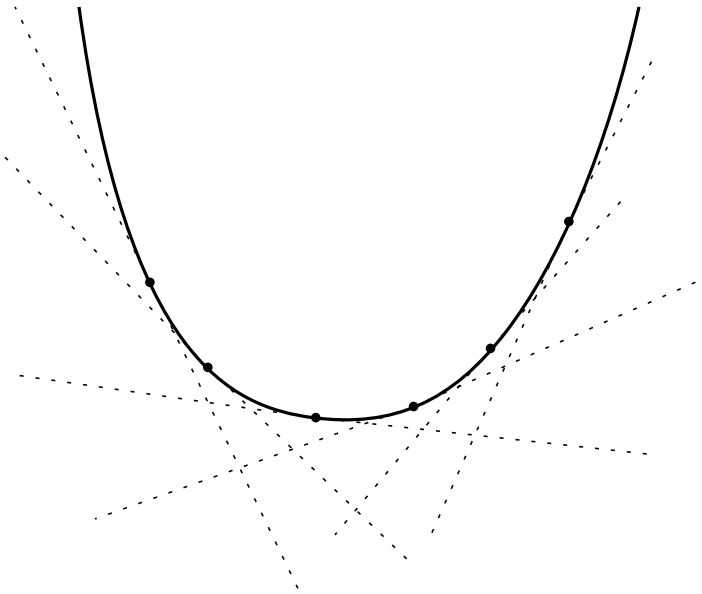


图 C.3. 凸函数可表示为线性函数的最大值。

观察。 任何 $F:\ \mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$，只要它是一致椭圆的（不一定是凸的），就可以写成

$$F(M)=\min_{\beta\in\mathcal{B}}\max_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(\alpha\beta)}M_{ij}+c_{\alpha\beta}\right\}=\min_{\beta\in\mathcal{B}}\max_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{\operatorname{tr}\left(A^{(\alpha,\beta)}M\right)+c_{\alpha\beta}\right\}.$$

这是因为任意利普希茨函数 F 都可以写成凸函数的最小值，而凸函数可以写成线性函数的最大值。

特别地，每个全非线性一致椭圆方程

$$F(D^2u)=0\quad\text{in}\quad\Omega$$

都可以写成 Isaacs 方程

$$\min_{\beta\in\mathcal{B}}\max_{\alpha\in\mathcal{A}}\{L_{\alpha\beta}u\}=0\quad\text{in}\quad\Omega\quad\text{with}\quad L_{\alpha\beta}u=\textstyle\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(\alpha,\beta)}\partial_{ij}u+c_{\alpha\beta}.$$

摘要：每个全非线性椭圆偏微分方程都可以用概率博弈来解释！

偏微分方程的概率解释。

期望收益	$\longleftrightarrow$	狄利克雷问题 $\begin{cases} Lu = 0 & \text{在 } \Omega \\ u = g & \text{在 } \partial\Omega. \end{cases}$
期望离开时间（或运行成本/非齐次环境）	$\longleftrightarrow$	狄利克雷问题 $\begin{cases} -Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$
过程的分布	$\longleftrightarrow$	热方程 $\partial_t u - Lu = 0.$
最优停止	$\longleftrightarrow$	障碍问题 $\min\{-Lu, u-\varphi\} = 0.$
受控扩散	$\longleftrightarrow$	全非线性方程 $F(D^2u) = 0, \quad F$ 凸。
双人博弈	$\longleftrightarrow$	全非线性方程 $F(D^2u) = 0.$

甚至可以考虑含有 x 依赖的方程，或含有低阶项的方程。第4章和第5章研究的所有方程都有概率解释。

附录 *D*

障碍问题的动机与应用

这里，我们简要概述第 5 章中列出的障碍问题的动机与应用。有关更多细节以及障碍型问题的其他应用，请参阅以下著作： [**DL76**、**KS80**、**Rod87**、**Fri88**、**PSU12**] 。

流体渗滤。考虑两个高度不同的蓄水池，中间由一座多孔坝隔开。为简单起见，我们假设坝体是平的，横截面为矩形，这样便得到一个 n 维实数空间中的问题 $\mathbb{R}^2$。或者，也可以考虑可变横截面，从而得到一个类似的障碍问题 $\mathbb{R}^3$ 。

除坝体的基部外，坝体都能透水。因此，两个蓄水池之间有流体穿过坝体流动，横截面的一部分会被水浸湿，而这只取决于它到两个水源的相对距离。

假设一个蓄水池的水位高度为 1，另一个为 $0 < h < 1$。用 $\varphi(x)$ 表示水流经坝体横截面时的水面轮廓。情况示意图见图 D.1。

我们将 $u = u(x, y) : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ 记作流体的水力测压水头，它等于压力 $p(x, y)$ 与

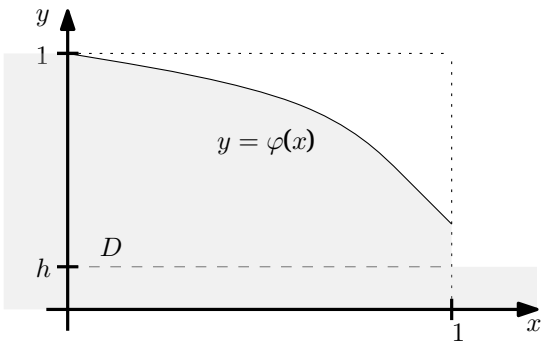


图 D.1。 多孔坝横截面的图像表示。

高程水头（即流体的势能）：

$$u(x,y) = y + \frac{1}{\gamma}p(x,y),$$

其中， γ 是取决于流体的常数。水头定义于存在流体的区域，即

$$D := \big\{(x,y) \in (0,1)\times(0,1) : y < \vartheta(x)\big\},$$

并满足：对于 $0 \le y \le 1$， $u(0,y) = 1$ ；对于 $0 \le y \le h$， $u(1,y) = h$ ；以及对于 $h \le y \le \vartheta$， $u(1,y) = y$ (1)。

这里， u 本身是未知量，但还需要确定 D （因此， ϑ）。在这种情况下，我们有 $u(x,y) \ge y$ 在 D 中；如果我们定义

$$w(x,y) := \int_y^{\varphi(x)} \big(u(x,\zeta) - \zeta\big)\, d\zeta \quad \text{for} \quad (x,y) \in D,$$

并且 $w(x,\ y) \equiv 0$ 对于 $(x,\ y) \in [0,1]\times[0,1] \setminus D$，那么 w 满足该方程

$$\Delta w = \chi_{\{w>0\}} = \chi_D \quad \text{in} \quad [0,1]\times[0,1].$$

也就是说， w 是障碍问题（见 (5.6)）的一个解，其中 $f \equiv 1$。

关于大坝问题的更多细节，请参阅 [**Bai74**] 及其中的参考文献。

相变。 斯特藩问题可追溯至 19 世纪，是最经典、最重要的自由边界问题。它旨在描述发生相变的均匀介质中的温度分布，例如冰融化成水。

我们用 $\theta(x,\ t)$ 表示温度（位置 x 和时间 t处），并假设 $\theta \ge 0$。函数 θ 在区域 $\{\theta > 0\}$内满足热方程 $\partial_t\theta - \Delta\theta = 0$ ，而自由边界 $\partial\{\theta > 0\}$ 的演化

由 $\partial\{\theta > 0\}$ 上的斯特藩条件 $\partial_t\theta = |\nabla_x\theta|^2$ 决定——其中梯度是从 $\{\theta > 0\}$内部计算的。

经过变换 $u(x,\ t) := \int_0^t \theta(x,\ \tau)d\tau$（见 [**Duv73, 图18**]）后，该问题在局部等价于

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= -\chi_{\{u>0\}} \qquad \text{in} \quad B_1 \times (0,T) \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\ u &\geq 0 \\ \partial_t u &\geq 0. \end{cases}$$

这是障碍问题 $\Delta u = \chi_{\{u>0\}}$ in B_1 的抛物型版本。

赫勒-肖流。这一模型可追溯至1898年，用于描述两块平行平板之间狭窄间隙中的流体流动。流体力学中的各种问题都可以近似为赫勒-肖流，因此理解这类流动十分重要。

赫勒-肖池是一种实验装置，其中黏性流体夹在两块平行板之间的狭窄间隙中。在某些区域，间隙中充满流体，而在其他区域则充满空气。当液体通过某些汇（例如，通过上方平板上的小孔）注入装置内部时，液体充满的区域会扩大。

我们用 $p(x,t)$ 表示流体在位置 x 、时间 t 的压力。根据定义，$\{p > 0\}$ 是液体充满的区域，而 $\{p = 0\}$ 中只有空气。压力 p 在 $\{p > 0\}$ 中是调和的，而自由边界 $\partial\{p > 0\}$ 的演化由 $\partial\{p > 0\}$ 上的 $\partial_t p = |\nabla_x p|^2$ 决定——梯度是从 $\{p > 0\}$ 内部计算的。注意，这与斯特藩问题惊人地相似——这里唯一重要的区别是，在 p 为正的区域内，它是调和的（而不是热势的）。

经过变换 $u(x,t) = \int_0^t p(x,\tau)d\tau$ 后，可以发现 u 在局部满足以下方程（即在液体注入区域之外）

$$\begin{cases} \Delta u &= \chi_{\{u>0\}} \qquad \text{in} \quad B_1 \times (0,T) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ u &\geq 0 \\ \partial_t u &\geq 0. \end{cases}$$

这意味着，对于每个固定的时间 t，$u(\cdot,t)$ 都是（定常）障碍问题的一个解。

最优停止，金融。如附录 C 所述，在考虑随机过程的最优停止问题时，会出现障碍问题。

一个典型例子是用于美式期权定价的布莱克-斯科尔斯模型。美式期权是一种合约，赋予其持有人在任何时候——通常是在某个指定日期之前——以某个指定价格（“行权价”）购买某种金融资产（通常是某家公司的股票）的权利。

这种期权具有一定价值，因为如果资产不断波动的市场价格高于行权价，就可以通过“行权”以较低价格买入该资产。Black-Sholes模型旨在计算期权在到期日之前任意时刻的合理价格 $u = u(x,\ t)$，该价格取决于金融资产的当前价格 x 。由于期权可以在任何时候行权，确定“行权区域”（即行权更有利的区域）也是问题的一部分。有趣的是，这个问题会引出一个在 $\mathbb{R}^n$ 中提出的障碍问题（通常是抛物型问题），其中维数 n 是资产的数量。

关于这类模型的更多详情，请参阅 [**LS09**] 及其中的参考文献。

相互作用粒子系统。 自然科学中的若干模型涉及大量相互作用粒子（例如，可以想想物理学或生物学中的物理粒子）。在这类系统中，离散能量可以由连续相互作用能很好地近似。我们用 μ表示代表粒子密度的（概率）测度。

在若干模型中，粒子相距较远时会相互吸引，而距离较近时则会受到排斥力 [**CDM16**]。与相互作用势 $W \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ 相关的相互作用能 E 由下式给出

$$E[\mu] := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} W(x-y)d\mu(x)\,d\mu(y).$$

一般来说，相互作用势可以具有非常不同的结构。通常假设粒子距离很近时表现为排斥性（在距离为零处发散），而距离较远时表现为吸引性。一个典型的假设是，在原点附近有 $W(z) \sim |z|^{-1}$ 。

在统计力学的其他模型中，粒子（例如电子）通过库仑力相互排斥，人们希望了解它们在某种将其限制在一定范围内的外场中的行为 [**Ser18**]。在这种情况下，与该系统相关的相互作用能为

$$E[\mu] := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\mu(x)\,d\mu(y)}{|x-y|} + \int_{\mathbb{R}^3} V d\mu.$$

研究这些系统时的主要问题之一，是理解其“平衡构型”，即能量的极小化子 E。

结果表明，在这两种情况下，任意极小化子 $\mu_\circ$ 都由 $\mu_\circ = -\Delta u$给出，其中 u （局部）满足障碍问题

$$\min\{-\Delta u,\ u-\varphi\} = 0,$$

对于某个依赖于 W （或依赖于 V）的障碍物 φ 。自由边界对应于粒子聚集区域的边界。

关于这些问题的深入研究，请参阅 [**CDM16, Ser18**] 及其中的参考文献。

准稳态电化学成形。电解加工（ECM）是一种电化学方法，通过将材料作为阳极置于电解槽中，并使其周围环绕固定的阴极，从而去除金属（导电材料）。随后，在浸没于适当电解液中的阴极与阳极之间施加电势，从而产生化学反应，去除阳极上的金属，并形成移动边界。这种方法用于加工极硬材料，制造复杂形状，而这些形状用其他方法很难获得。

假设具有圆柱对称性（即阳极和阴极都是细长的圆柱形材料），这样我们便可以研究其横截面，从而将问题限制在二维情形。类似的方法也适用于三维情形。

令 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 表示由阴极围成的区域，并令 $\Lambda(0) \subset \Omega$ 表示时刻 $t = 0$ 的阳极（在 $\partial\Omega$ 与 $\partial\Lambda(0)$ 之间施加电势差，其中区域 $\Omega \setminus \Lambda(0)$ 包含电解液）。随后，金属开始被去除，因此经过时间 $t \geq 0$后，我们用 $\Lambda(t)$ 表示定义阳极的集合。通过这一过程可知，若$t \geq t'$，则 $\Lambda(t) \subset \Lambda(t')$。边界 $\Gamma(t) = \partial\Lambda(t)$ 是未知的，它是一个自由边界，我们假设它由函数 γ 表示：$\Omega \to \mathbb{R}$

$$\Gamma(t) = \{(x, y) \in \Omega : \gamma(x, y) = t\},$$

其中 γ 是待确定的某个函数。我们假设 $\gamma(x, y) = 0$ 位于 $\Omega \setminus \Lambda(0)$ 中。若用 $\pi = \pi(t) > 0$ 表示时刻$t > 0$ 阳极与阴极之间的电势差，那么电解加工问题就是求一个函数 $\eta(t, x, y)$，使其满足

$$\Delta\eta(t, x, y) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \setminus \Gamma(t), \qquad \eta(t, x, y) = 0 \quad \text{on} \quad \{t > 0\} \times \partial\Omega,$$
$$\eta(t, x, y) = \pi(t), \quad \nabla\eta(t, x, y) \cdot \nabla\gamma(x, y) = \lambda \quad \text{on} \quad \{t > 0\} \times \Gamma(t)$$

（约定梯度和拉普拉斯算子只对空间变量求导），其中某个常数为 $\lambda > 0$ （电解加工常数）。注意，根据最大值原理，$0 \leq \eta(t, x, y)$ 在 $\Lambda(t)$ 中为 $\leq \pi(t)$，并将 η 延拓到 Ω，使其在 $\Lambda(t)$ 中为 $= \pi(t)$($\eta(t, x, y)$。现在，如果我们定义

$$u(t, x, y) = \int_0^t (\pi(s) - \eta(s, x, y))\, ds,$$

那么 $u \geq 0$ 并且在 $\Lambda(0)$ 中，u 满足

$$\Delta u(t, \cdot, \cdot) = \lambda\chi_{\{u(t,\cdot,\cdot)>0\}} \quad \text{for any} \quad t > 0.$$

也就是说，对于每个时刻 $t > 0$， u 满足一个障碍问题（与 (5.6) 比较），其中 $f \equiv \lambda$。更多详情请参阅 [**Rod87**] 。

热控制。 给定区域 Ω 和温度 $T_\circ$，Ω 上均匀分布着一些加热设备，需要确保温度$u(x)$， $x \in \Omega$，尽可能接近 $T_\circ$，方法是注入与 $u(x)$ 和 $T_\circ$ 之间的距离成正比的通量。由于设备功率有限，它们产生的热通量需要保持在区间 $(-q, 0]$ 内，其中$q \geq 0$。

因此，注入的热通量为

$$\Phi(u) = \max\{C(u - T_\circ)_-, -q\}$$

其中某个常数为 $C > 0$。在平衡态下，温度满足

$$\Delta u = \Phi(u) \quad \text{in} \quad \Omega,$$

特别地，令 $C \to \infty$，前一个方程变为

$$\Delta u = -q\chi_{\{u<T_\circ\}} \quad \text{in} \quad \Omega.$$

注意，这种结构与障碍问题（上下颠倒）几乎相同。也就是说，如果我们定义 $w = T_\circ - u$ ，那么前一个方程变为

$$\Delta w = q\chi_{\{w>0\}} \quad \text{in} \quad \Omega,$$

（参见含 $f \equiv q > 0$ 的（5.6）的平行表述）。如果 $w \geq 0$ （即 $u \leq T_\circ$），那么这正是障碍问题。可以在 $\partial\Omega$ 上施加 $u|_{\partial\Omega} \leq T_\circ$ 的狄利克雷边界条件来得到这一问题（例如，在一个侧墙没有隔热的房间里）。有关更多细节，请参阅 [**DL76**] 。

弹性。 最后，我们介绍障碍问题最直观的物理解释：弹性理论中薄膜的形变。

考虑一个由函数表示的弹性膜 $\mathbb{R}^2$，$u:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，其中 $u(x,\ y)$ 表示相对于 xy-平面的垂直位移。给定一个区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，我们假设该膜具有固定边界，即通过某个（比如连续的）函数 $g:\ \partial\Omega \to \mathbb{R}$ 规定其在 $\partial\Omega$ 上的取值 u 。我们假设这是一张在各个方向上均匀拉伸的均匀薄膜，其形状由表面张力决定。为简单起见，我们还假设不存在外力。

在这种设定下，膜的形状将使其总面积在所有边界取值相同的可能构形中达到最小。

也就是说，下面的泛函

$$\int_\Omega \sqrt{1+|\nabla w|^2}\,dx\,dy$$

在满足 $w|_{\partial\Omega}=g$ 的函数 $w\in H^1(\Omega)$ 中取极小值。这便得到经典的普拉托问题。狄利克雷能量是前述泛函的低阶近似。具体来说，若假设垂直位移不大（也就是说，膜相当平坦），那么对该泛函进行泰勒展开可得

$$\int_\Omega \sqrt{1+|\nabla w|^2}\,dx\,dy \sim \int_\Omega \left(1+\frac{1}{2}|\nabla w|^2\right)\,dx\,dy,$$

因此，面积的极小化大致等同于狄利克雷能量的极小化。

障碍问题研究的是：在具有给定边界且位于给定障碍物 $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 之上的膜中，寻找使狄利克雷能量（因而近似地使面积）达到极小的膜。

符号说明

下面介绍本书中将使用的一些符号。

矩阵记号。

$A=(a_{ij})_{ij}$ 矩阵，其i,j项记为 a_{ij}。$\mathcal{M}_n$ 大小为 $n\times n$ 的矩阵空间。Id 单位矩阵。tr A 矩阵 A 的迹，tr $A=a_{11}+\cdots+a_{nn}$。det A 矩阵 A 的行列式。A^T 矩阵 A 的转置。

几何记号。

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ n维欧几里得空间，n球面。$e_i\in\mathbb{S}^{n-1}$ $i-$基的第 $e_i=$ 个元素，$(0,\ldots,0,(_i)1,0,\ldots 0)$。$x\in\mathbb{R}^n$ 典型点 $x=(x_1,\ldots,x_n)$。$|x|$ 点 x的模，$|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$。集合 $U\subset\mathbb{R}^n$的 $|U|$ n 维勒贝格测度。$\mathbb{R}^n_+$ $\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ x_n>0\}$。集合 $U\subset\mathbb{R}^n$的边界。$V\subset\subset U$ 集合 V 紧含于 U，即 $V\subset U$。$B_r(x)$ 以 x 为中心、半径为 r 的球 $B_r(x):=\{y\in\mathbb{R}^n:\ |x-y|<r\}$。对于 $x,y\in\mathbb{R}^n$，x 和 y 的标量积，$x\cdot y=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$。

函数记号。

u 一般而言，u 表示函数 $u\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$（除非另有说明）。$u^+, u^-$ 函数的正部和负部，$u^+ = \max\{u, 0\}$，$u^- = \max\{-u, 0\}$。集合 E 的示性函数，$\chi_E(x) = 1$ 当 $x \in E$ 时，以及 $\chi_E(x) = 0$ 当 $x \notin E$ 时。$\operatorname{supp} u$ u 的支集，$\operatorname{supp} u = \{x\colon\ u(x) \neq 0\}$。正测度集合 A 上的平均积分，$\fint_A f := \frac{1}{|A|}\int_A f$。

函数空间。设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开集。

$C(U)$ $C^0(U)$ 连续函数空间 $u\colon\ U \to \mathbb{R}$。$C(\overline{U})$ $C^0(\overline{U})$ 在边界上连续的函数。$u \in C(\overline{U})$ $C^k(U)$ $C^k(U)$ k 次连续可微的函数空间。$C^{k,\alpha}(U)$ Hölder 空间，见第1.1节。$C^\infty(U)$ $C^\infty(U)$ 对所有 $k \geq 1$，属于 $C^k(U)$ 或 $C^k(U)$ 的函数集合。$C_c(U)$ $C_c^k(U)$ 在 U 中具有紧支集的函数集合。$C_0(U)$ $C_0^k(U)$ 在 ∂U 上具有 $u = 0$ 的函数集合。L^p L^p 空间，见第1.1节。L^∞ L^∞ 空间，见第1.1节（见下文 $\operatorname{esssup}_\Omega u$）。$\operatorname{esssup}_\Omega u$ Ω 中 u 的本质上确界：本质上界的下确界，$\operatorname{esssup}_\Omega u := \inf\{b > 0\colon\ |\{u > b\}| = 0\}$。$W^{1,p}, W^{1,p}_0$ Sobolev 空间，见第1.1节和 (S7)。H^1, H^1_0 具有 $p = 2$ 的 Sobolev 空间，见第1.1节和 (S7)。$\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ 函数空间 $\mathcal{F} \in \{C^0, C^k, L^p, \dots\}$ 中的范数，在首次使用时定义。

微分记号。令 $u\colon\ U \to \mathbb{R}$ 为一个函数。

$\partial_i u, \partial_{x_i} u, u_{x_i}$ 沿 e_i 方向的偏导数，$\frac{\partial u}{\partial x_i}$。$\partial_e u$ 沿 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ 方向的导数。∇u，Du 梯度，$\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$。$\partial_{ij} u, \partial_{x_i x_j} u, u_{x_i x_j}$ 沿方向 e_i 和 e_j 的二阶偏导数，$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$。

$D^2 u$ 海森矩阵，$D^2 u = (\partial_{ij} u)_{ij} \in \mathcal{M}_n$。$D^k u$ 高阶导数形式，$D^k u := (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} u)_{i_1,\dots,i_k}$。$|\underline{D^k u}(x)|$ 的范数（任意等价范数）。$\|D^k u(x)\|_{\mathcal{F}}$ 的范数。$D^k u$，$\||D^k u|\|_{\mathcal{F}}$。$\Delta u$ u 的拉普拉斯算子，$\Delta u = \partial_{11} u + \dots + \partial_{nn} u$。

区域。我们称 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为区域，如果它是一个开连通集。

如果区域 Ω $C^{k,\alpha}$（分别地，C^k）满足 $\partial\Omega$ 局部上可以表示为某个 $C^{k,\alpha}$（分别地，C^k）函数的图像，则称其为

参考文献

[AH96] D. Adams, L. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, Springer, 数学科学基础丛书, 1996年。[AS19] M. Allen, H. Shahgholian, , *A new boundary Harnack principle (equations with right hand side)*, **234** 2019 1413 1444 《数学分析与应用档案》（），-。[ACM18] L. Ambrosio, A. Carlotto, A. Massaccesi, , *Lectures on Elliptic Partial Differential Equations*, **18**, 2018 比萨高等师范学校讲义 Springer, 。[And97] P. Andersson, *Characterization of pointwise Hölder regularity*, 《应用计算与调和分析》4（1997年）, 429-443。[ASS12] S. N. Armstrong, L. Silvestre, C. K. Smart, , *Partial regularity of solutions of fully nonlinear uniformly elliptic equations*, **65** 2012 1169 1184 Comm. Pure Appl. Math.（）, -。[Bai74] C. Baiocchi, , *Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media*, 1974 载于《国际数学家大会论文集》。[Bon01] L. P. Bonorino, , *Regularity of the free boundary for some elliptic and parabolic problems. I*, **26** 2001 175 203 《偏微分方程通讯》（），-。[Bre11] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011。[Caf77] L. Caffarelli, *The regularity of free boundaries in higher dimensions*, 《数学学报》139（1977年）, 155-184。[Caf89] L. Caffarelli, *Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations*, 《数学年刊》130（1989）, 189-213。[Caf98] L. Caffarelli, *The obstacle problem revisited*, 《傅里叶分析与应用杂志》4（1998）, 383-402。[CC95] L. Caffarelli, X. Cabr´e, *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, 美国数学会丛书第43卷, 美国数学会, 1995。[CCKS96] L. Caffarelli, M. Crandall, M. Kocan, A. ´Swiech, , *On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients*, **49** 1996 Comm. Pure Appl. Math.（）, 365-398。[CDS18] L. Caffarelli, D. De Silva, O. Savin, , *Two-phase anisotropic free boundary problems and applications to the Bellman equation in 2D*, **228** 《数学分析与应用档案》（2018）, 477-493。

[CS05] L. Caffarelli, S. Salsa, *A Geometric Approach to Free Boundary Problems*, 美国数学会, 2005。[CS10] L. Caffarelli, L. Silvestre, *On the Evans-Krylov theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 138（2010年）, 263-265。[CV10] *The De Giorgi method for regularity of solutions of elliptic equations and its applications to fluid dynamics* L. Caffarelli, A. Vasseur, , Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 3（2010年）, 409-427。[CDM16] *Regularity of local minimizers of the interaction energy via obstacle problems* J. A. Carrillo, M. G. Delgadino, A. Mellet, , **343** 2016 747 781 Comm. Math. Phys.（）, -。[CSV18] *A logarithmic epiperimetric inequality for the obstacle problem* M. Colombo, L. Spolaor, B. Velichkov, , **28** 2018 1029 1061 《几何与泛函分析》（）, -。[DeG57] *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari* E. De Giorgi, , 都灵科学院物理、数学与自然科学学部院刊3（1957年）, 25-43。[DS10] D. De Silva, O. Savin, *Minimizers of convex functionals arising in random surfaces*, Duke Math. J. 151（2010年）, 487-532。[DS16] D. De Silva, O. Savin, *A note on higher regularity boundary Harnack inequality*, Disc. Cont. Dyn. Syst. 35（2015）, 6155-6163。[DS20] D. De Silva, O. Savin, *A short proof of boundary Harnack inequality*, 《微分方程杂志》269（2020年）, 2419-2429。[DS21] D. De Silva, O. Savin, *Quasi-Harnack inequality*, 《美国数学杂志》143（2021年）, 307-331。[DV21] *Elliptic Partial Differential Equations from an Elementary Viewpoint* N. Dipierro, E. Valdinoci, , 2021 arXiv预印本（）。[Duv73] *Résolution d'un problème de Stefan (Fusion d'un bloc de glace a zero degrées)* G. Duvaut, , **276** 1973 1461 1463 巴黎科学院通讯（）, -。[DL76] G. Duvaut, J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, 数学科学基础丛书, 第219卷, 施普林格出版社, 1976。[EM17] *Some remarks on the L^p regularity of second derivatives of solutions to non-divergence elliptic equations and the Dini condition* L. Escauriaza, S. Montaner, , Rend. Lincei-Mat. Appl. 28（2017）49-63。[Eva82] *Classical solutions of fully nonlinear convex second-order elliptic equations* L. C. Evans, , , , **35** 1982 333 363 Comm. Pure Appl. Math.（）, -。[Eva98]L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 美国数学会, 1998。[Eva13] L. C. Evans, *An Introduction to Stochastic Differential Equations*, 美国数学会, 2013年。[EG92] L. C. Evans, R. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC出版社, 1992。[Fer22] X. Fern´andez-Real, *The thin obstacle problem: a survey*, Publ. Mat. 66（2022）, 3-55。[Fig18] A. Figalli, *Regularity of interfaces in phase transitions via obstacle problems*, 载于《国际数学家大会论文集》（2018年国际数学家大会）, 第I卷, 第225-247页, 世界科学出版社, 哈肯萨克, 新泽西州, 2019年; 载于《2018年国际数学家大会论文集》。[Fig18b] A. Figalli, *Free boundary regularity in obstacle problems*, 《偏微分方程讲座》（2018）, 2, 24页。

[FRS20] A. Figalli, X. Ros-Oton, J. Serra, *Generic regularity of free boundaries for the obstacle problem*, 《高等科学研究所数学出版物》132 (2020年), 181-292.[FS19] A. Figalli, J. Serra, *On the fine structure of the free boundary for the classical obstacle problem* **215** 2019 311 366 , Invent. Math. ( ), - .[FZ21] ´ *C*∞ *partial regularity of the singular set in the obstacle* F. *problem* 2021 Franceschini, W. Zaton, , 预印本 arXiv ( ).[Fri88] A. Friedman, *Variational Principles and Free Boundary Problems*, 第2版, Robert E. Krieger Publishing Co., 马拉巴尔, 佛罗里达州, 1988年.[GT77] *Elliptic Partial Differential Equations Of Second* D. *Order* Gilbarg, N. S. Trudinger, , 数学科学基础丛书, 第224卷, 施普林格出版社, 1977年.[HL97] Q. Han, F. Lin, *Elliptic Partial Differential Equations*, 美国数学会, 1997年.[JTW83] S. Janson, M. Taibleson, G. Weiss, *Elementary characterizations of the Morrey-Campanato spaces*, 载于调和分析, 数学讲义, Springer Berlin Heidelberg, 1983.[Jen88] *The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second* R. *order partial differential equations* **101** 1988 1 27 Jensen, , Arch. Rational Mech. Anal. ( ), - .[JMV09] *Pathological solutions to elliptic problems* T. Jin, *in divergence form with continuous coefficients* **347**, V. Maz'ya, J. Van Schaftingen, , C. R. Math. Acad. Sci. Paris (2009年) 773-778.[JN61] F. John, L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961年), 415-426.[JW84] A. Jonsson, H. Wallin *Function spaces on subsets of* $\mathbb{R}^n$, Mathematical Reports, Harwood Academic Publishers, 1984年.[Ken94] *Harmonic Analysis Techniques for Second Order Elliptic Boundary* C. *Value Problems* 83, Kenig, , 数学科学会议委员会出版, 第卷, 华盛顿特区; 由美国数学会出版, 罗得岛州普罗维登斯, 1994年.[KN77] D. Kinderlehrer, L. Nirenberg, *Regularity in free boundary problems*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 4 (1977年), 373-391.[KS80] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications* 1980 , 工业与应用数学学会, .[Kry82] N. V. Krylov, *Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 46 (1982年), 487-523.[Kry96] N. V. Krylov, *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder spaces*, 美国数学会, 1996.[KS79] *An estimate for the probability of a diffusion process* N. V. *hitting a set of positive measure* **245** 1979 18 20 Krylov, M. V. Safonov, , 苏联科学院院刊 ( ), .[LS09] P. Laurence, S. Salsa, *Regularity of the free boundary of an American option on several assets* **62** 2009 969 994 , Comm. Pure Appl. Math. ( ), - .[Law10] G. F. Lawler, *Random Walk and the Heat Equation*, 美国数学会, 2010 年 .[LZ17] *A note on the Harnack inequality for elliptic equations in diver-* D. Li, *gence form* **145** 2017 135 137 K. Zhang, , Proc. Amer. Math. Soc. ( ), - .[Mag11] F. Maggi, *Dispense del Corso di Calcolo delle Variazioni*, (意大利语) 讲义 (2011)。

[Mat95] P. Mattila, , *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*, 剑桥大学出版社, 1995.

[Mon03] R. Monneau, , *On the number of singularities for the obstacle problem in two dimensions*, J. Geom. Anal. **13** (2003), 359-389.

[Moo12] C. Mooney, *Notes on Elliptic PDE*, 讲义见作者网页(2012年).

[Moo19] C. Mooney, *A proof of the Krylov-Safonov theorem without localization*, 《偏微分方程通讯》44 (2019年), 681-690.

[Moo20] C. Mooney, *Minimizers of convex functionals with small degeneracy set*, 《变分法与偏微分方程》59 (2020年), 74.

[Mos61] J. Moser, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961年), 577-591.

[Nad97] N. Nadirashvili, , *Nonuniqueness in the martingale problem and the Dirichlet problem for uniformly elliptic operators*, 《比萨高等师范学校科学类年刊》 **24** (1997), 537-549.

[NTV14] N. Nadirashvili, V. Tkachev, S. Vladuts, , *Nonlinear Elliptic Equations and Nonassociative Algebras*, 美国数学学会数学调查与专著, 2014.

[NV07] N. Nadirashvili, S. Vladuts, , *Nonclassical solutions of fully nonlinear elliptic equations*, 《几何与泛函分析》 **17** (2007), 1283-1296.

[NV08] N. Nadirashvili, S. Vladuts, , *Singular viscosity solutions to fully nonlinear elliptic equations*, 《纯粹与应用数学杂志》 **89** (2008), 107-113.

[NV13] N. Nadirashvili, S. Vladuts, , *Singular solutions of Hessian elliptic equations in five dimensions*, 《纯粹与应用数学杂志》 **100** (2013), 769-784.

[Nas57] J. F. Nash, *Parabolic equations*, 《美国国家科学院院刊》43 (1957年), 754-758.

[Nas58] J. F. Nash, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, 《美国数学杂志》80 (1958年), 931-954.

[Nir53] L. Nirenberg, , *On nonlinear elliptic Partial Differential Equations and Hölder continuity*, Comm. Pure Appl. Math. **6** (1953), 103-156.

[PSU12] A. Petrosyan, H. Shahgholian, N. Uraltseva, , *Regularity of free boundaries in obstacle-type problems*, 数学研究生教材, 第**136**卷。美国数学学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2012年.

[Rod87] J.-F. Rodrigues, *Obstacle Problems in Mathematical Physics*, 北荷兰出版社数学研究134, 1987年.

[RT21] X. Ros-Oton, D. Torres-Latorre, , *New boundary Harnack inequalities with a right hand side*, 《微分方程杂志》 **288** (2021), 204-249.

[Saf87] M. V. Safonov, , *Unimprovability of estimates of Hölder constants for solutions of linear elliptic equations with measurable coefficients*, （俄文）《数学文集》（新系列）(1987年), 275-288；英译见《苏联数学文集》60 (1988年), 269-281. **132**

[SY23] O. Savin, H. Yu, , *Regularity of the singular set in the fully nonlinear obstacle problem*, 《欧洲数学会杂志》 (2023), 即将出版.

[Sch74] D. G. Schaeffer, *An example of generic regularity for a nonlinear elliptic equation*, 《数学分析与应用档案》57 (1974), 134-141.

[Sch77] D. G. Schaeffer, *Some examples of singularities in a free boundary*, 《比萨高等师范学校科学类年刊》4 (1977年), 133-144.

[Ser18] S. Serfaty, *Systems of points with Coulomb interactions*, 载于《国际数学家大会论文集》（2018年国际数学家大会）, 第I卷, 第935-977页, 世界科学出版社, 哈肯萨克, 新泽西州, 2019年。

[Sil15] L. Silvestre, *Viscosity solutions to elliptic equations*, 作者网页上的讲义（2015）。[Sim97] L. Simon, *Schauder estimates by scaling*, 《Calc. Var. Partial Differential Equations》**5** （1997），391-407。[Spr83] J. Spruck, *Uniqueness in a diffusion model of population biology*, 《偏微分方程通讯》**8** （1983），1605-1620。[Str80] R. Strichartz, *Bounded mean oscillation and Sobolev spaces*, 《Indiana Univ. Math. J.》**29** （1980年），539-558。[ICM94] S. R. S. Varadhan, *The work of Pierre-Louis Lions*, 载于《1994年国际数学家大会论文集》。[Vas16] A. Vasseur, , Part - Morningside 数学讲义，Int. Press，萨默维尔，MA，2016。[Vel23] B. Velichkov, *Regularity of the One-Phase Free Boundaries*, 《Lect. Notes Unione Mat. Ital.》，Springer，查姆，2023年。[Wan06] X.-J. Wang, *Schauder estimates for elliptic and parabolic equations*, 《Chinese Ann. Math. Ser. B》**27** （2006），637-642。[Wei99] G. S. Weiss, *A homogeneity improvement approach to the obstacle problem*, Invent. Math. **138** （1999），23-50。

索引

阿尔泽拉-阿斯科利定理，9 平均积分，3

贝尔曼方程，100，206 边界哈纳克原理，168，191 高阶正则性，170 边界正则性 拉普拉斯方程，69 布朗运动，21

爆破解的分类，150，158 比较原理 全非线性方程（经典），98 全非线性方程（粘性），107 拉普拉斯方程，14 受控扩散，205 凸全非线性方程，100 覆盖论证，36

德乔治–纳什，74，81 狄利克雷问题 全非线性方程，113 拉普拉斯方程，9 散度型偏微分方程，25

弹性，216 椭圆性条件 全非线性方程，98 椭圆性常数 全非线性方程，99 线性方程，25 能量不等式，84

能量方法，10 带有有界可测系数的散度形式方程，74，81 带有有界可测系数的非散度形式方程，102 二元全非线性方程，102，120 障碍问题的欧拉-拉格朗日方程，126 埃文斯–克雷洛夫定理，120 存在性与唯一性 拉普拉斯方程，12 凸泛函的极小化子，75 障碍问题，131，141 粘性解，110 期望离开时间，204 期望击中时间，23 期望收益，22，202 极值算子，101

流体渗滤，211 自由边界，127 全非线性方程，97 基本解，13

一般正则性，177

Hölder范数，6 Hölder半范数，6 Hölder空间，6 Harnack不等式，26 哈纳克不等式，31

热控制，216 赫勒-肖流，213 高阶Schauder估计 散度形式，59 拉普拉斯算子，38 非散度形式，46 希尔伯特第十九问题，71，94 爆破解的齐次性，151 Hopf 引理，16

无穷小生成元，202 分部积分，4 相互作用粒子系统，214 插值不等式，9 Isaacs 方程，206

Krylov–Safonov 定理，119

最小上解，134 勒贝格微分定理，3 刘维尔定理，18，30 最大值原理 散度形式，60 拉普拉斯方程，14 非散度形式，48 平均值性质，16 Monneau 单调性公式，173 Morrey 不等式，6 Nadirashvili–Vladuts 反例，121 非散度型偏微分方程，25 非退化性，障碍问题，139，146 障碍问题，125 最优正则性，障碍问题，136，144 最优停止，204，213 振荡衰减，28，31，89 黏性解的 Perron 方法，108 相变，212 Poincar´e 不等式，6 泊松核，13 偏微分方程的概率解释，209 Pucci 算子，101 准稳态电化学成形，215

正则点，148 自由边界的正则性，169 高阶正则性，170 Schaeffer 猜想，178 Schauder 估计 散度形式，59 拉普拉斯算子，36 非散度形式，46 连续系数的 Schauder 估计 散度形式，65 非散度形式，64 奇异点，148 大小，175 索博列夫不等式，5 Sobolev 空间，4 粘性解的稳定性，114 次调和函数，14 超调和函数，14 双人博弈，206 一致椭圆性条件，25 全非线性方程，99，100 线性方程，47 奇异点处爆破解的唯一性，173 粘性解，19，106 黏性次解，106 黏性上解，106 弱解，11 Weiss 单调性公式，152