arXiv:2301.01567v3 [math.AT] 8 Nov 2024

光滑卡拉比–丘结构与非交换勒让德变换

马克西姆·孔特　塞维奇、亚历克斯·武田与伊安尼斯·弗拉索　普洛斯

Abstract. 我们阐明了光滑卡拉比–丘结构与预卡拉比–丘结构之间的关系。我们证明，给定一个 A_∞-范畴 A 上的光滑卡拉比–丘结构，可以在 A 上构造一个预卡拉比–丘结构；正如我们在先前的工作中所定义的，这是一种可积多向量场的移位非交换版本。我们说明了这种关系如何类似于勒让德变换，以及它如何在某种同调意义下定义一一映射。为使论述具体，我们将这一形式体系应用于（可能非单连通的）庞加莱对偶空间的基点环路空间上的链，并完整计算了圆的情形。

目录

1. 引言 2 记号与约定.4

2. 光滑卡拉比–丘结构 5
2.1. 链级非退化性.5 2.2. 示例.9 2.2.1. 可定向流形的基点环路空间上的链 . 9 2.2.2. 路径微分分次范畴.10 2.2.3. 常值环路的包含.11 2.2.4. 圆.12

3. 非交换勒让德变换 14
3.1. 交换与奇勒让德变换.14 3.1.1. 向量丛上的勒让德变换.14 3.1.2. 奇勒让德变换.15 3.1.3. 勒让德变换的求逆.17 3.1.4. 非交换版本路线图.18 3.2. 管状箭图.19 3.3. 管状箭图上的微分.20 3.3.1. 链边界微分.20 3.3.2. 旋转微分. 20 3.4. 循环性与负循环同调.22 3.4.1. 管状箭图的循环复形.22 3.4.2. 对负循环同调的作用.23 3.4.3. 旋转不变管状箭图.24 3.5. 勒让德变换的定义. 24 3.5.1. 纤维导数.25 3.5.2. 能量函数与勒让德变换 28

4. 非退化轨迹 28
4.1. 非交换勒让德变换的求逆 . . . . . 28 4.1.1. 示例：圆，续.33 4.2. 单纯形提升.36 4.2.1. 单纯Maurer-Cartan集合.36 4.2.2. 德利涅群胚.38 4.2.3. 单纯形等价.39 4.2.4. 特殊情形：群胚.42

参考文献 44

1. Introduction

本文是我们先前工作的延续 [KTV21]。在那篇论文中，我们描述了一种代数结构，并将其称为 A_∞-代数/范畴上的预卡拉比–丘结构 A；它是适当卡拉比–丘结构和光滑卡拉比-丘结构的推广。在那篇论文中，我们阐述了如何运用带状箭图（即具有无环定向的带状图）形式体系，利用预循环结构映射来描述某个 PROP 在 A 的态射空间以及其霍赫希尔德链 $C_*(A)$ 上的作用。相关的微分分次 PROP 的运算空间由开闭曲面模空间上的链给出，这些曲面具有带框架边界，且至少有一个输入和一个输出。

我们可以借助配边假设的语言来阐释这一结果： A 上的预循环结构应当给出一个部分定义的完全扩张的二维定向拓扑量子场论，其取值于代数与双模的 2-范畴的（ ∞-范畴版本），将 A 指派给点，并将 $HH_*(A)$ 指派给带框架圆。这个理论的定义只是部分的，因为它并不为每个配边都指派一个值，而只为那些能够仅由指标一把手生成的配边指派值；这类配边至少有一个输入和一个输出。

如果改为允许由指标为一和二的把手生成的配边，就可以封闭配边的输出，从而得到所有至少有一个输入的配边。这类拓扑量子场论已知可由适当卡拉比–丘结构描述；参见 Lurie 对 Costello 在 [Cos07; Cos05] 中结果的阐述 [Lur09b] 。换言之，要求满足适当性这一有限性条件 A （即 $H^*(A)$ 为有限秩），便可在拓扑量子场论中计算帽，而帽会被映射为由适当卡拉比–丘结构定义的迹 $HH_*(A) \to \Bbbk$ 。

还有一个与适当性对偶的有限性条件，即同调光滑性：若 A 的对角双模 A_Δ 是 (A, A)-双模范畴中的完美对象，则称 A 是同调光滑的。在上述引用的著作中，Lurie 顺带提到，基于抽象的理由，Costello 对这种拓扑量子场论的描述应当存在一个对偶的理论： A 上的光滑卡拉比-丘结构应当给出一种对偶类型的部分定义的拓扑量子场论，它现在带有一个杯；杯被映射到一个余迹 $\Bbbk \to HH_*(A)$。实际上，这些拓扑量子场论也可以用某些 PROP 上的代数结构来描述，这些 PROP 由具有非空入射/出射边界的曲面空间上的链给出。关于这些对象的同伦论已在其他文献中得到详细研究；关于这些 PROP 及其与德利涅-芒福德紧化之间关系的近期描述，参见 [Des22] 。

作为关于配边和拓扑量子场论的这些结论的推论，光滑卡拉比-丘结构应当定义一个预循环结构。本工作的主要目的是尽可能明确地呈现这一结果：我们证明，利用我们先前定义的带状箭图形式体系，存在一个算法式过程，它以 A_∞-范畴 A 上的光滑卡拉比-丘结构为起点，并在同一个 A 上生成预循环结构的结构映射。如此明确地描述这一过程的意义在于，拓扑学和几何学中许多重要的范畴/代数都具有这样的光滑 CY 结构 [Gan19; BCS21; BCS22; KS19; ST16]。利用本文中的描述，可以将 [KTV21] 的结果应用于这些范畴，并计算由所得预循环结构给出的拓扑量子场论运算。

让我们回顾一下这些对象的定义。维数为d 的 A 上的光滑 Calabi–Yau 结构，是一个负循环链 $\omega \in CC_*^-(A)$，它满足非退化性条件：其在 $HH_*(A)$中的像诱导出一个拟同构$A^!\![d] \to A$ ，将逆对偶化双模 $A^!$ 与对角双模 A_Δ的某个移位联系起来。这一定义的一个变体最早出现在 Ginzburg [Gin06], 的工作中，其中不要求提升到负循环同调；在文献中，这类结构通常被称为“Ginzburg卡拉比-丘结构”或“弱光滑卡拉比-丘结构”。要求负循环提升最早由本文第一作者和第三作者于2013年提出，其动机正是这一拓扑量子场论视角：为了用一个杯“闭合输入”，与该杯相关联的余迹 $k \to HH_*(A)$应当通过 S^1-作用的（同伦）不动点进行分解。

关于微分分次情形和 A_∞- 情形下光滑 CY 结构更近来的精确定义，参见 [BD19；BD18；Gan13]。我们还需要一种更明确的描述；在第 2 节中，我们解释了光滑 CY 非退化条件的链级版本。另一方面，预循环结构的定义已经在“上链级”给出：维数为 d 的 A_∞-范畴 (A, μ) 上的预循环结构，是选择一个元素

$$m = \mu + m_{(2)} + m_{(3)} + \cdots \in C^*_{[d]}(A)$$

它扩张了 A_∞-结构映射，并满足 Maurer–Cartan 方程 $[m, m] = 0$。关于空间 $C^*_{[d]}(A)$ 的定义，请参阅 [KTV21，第 3] 节；这里只提及其非交换几何诠释：若将霍赫希尔德链空间 $C^*(A)$ 视为与 A 相关联的某个非交换空间上的向量场空间，那么空间 $C^*_{[d]}(A)$ 就是多向量场空间（其移位取决于 d），并带有 Schouten–Nijenhuis 括号的类比结构；预循环结构可视为泊松结构的非严格版本；“双向量场” $m_{(2)}$ 并非严格满足对合条件 $[m_{(2)}, m_{(2)}] = 0$，而是满足到由 $m_{(3)}$ 给出的修正项为止；而该修正项本身又满足对合条件，直到更高阶修正项，如此等等。

一方面的 CY／预 CY 结构与另一方面的导出辛／泊松结构之间的这些关系，已针对微分分次范畴的情形，运用障碍理论技术在 [Yeu18], 中加以描述；而在 [Pri20], 中，则运用导出非交换几何的技术，描述了光滑 CY 结构与预 CY 结构之间的对偶性。本文旨在基于 [KTV21]的图示演算，对这种关系给出更明确的阐释；在第 3 节中，我们将介绍一些映射

$$(CC_d^-(A))_{\mathrm{nondeg}} \leftrightarrows (\mathcal{M}_{d-\mathrm{pre-CY}})_{\mathrm{nondeg}} \tag{1}$$

这些映射在维数为 d 的光滑 CY 结构与相同维数的预 CY 结构之间相互转换，后者的“双向量场”$m_{(2)}$ 是非退化的。结果表明，这些映射是勒让德变换及逆勒让德变换的非交换类比（例如，在实向量丛的总空间及其对偶丛上的函数之间进行的变换）。为使这一类比更易理解，我们从奇向量丛这一情形（具有温和的非交换性）入手。

完全非交换情形可用某些带状箭图的组合来描述；我们通过将正确的结构映射插入顶点，并遵循 [KTV21，第 6] 节中的指示来对其求值。通过求解一个迭代提升问题，可以构造带状箭图的线性组合$\Gamma_{(2)}$、$\Gamma_{(3)}$……；将它们作用于某个光滑 CY 结构 λ并求值，即可得到预循环结构映射。

一般而言，这一过程在实践中实现起来非常复杂。不过，对于某些简单情形，可以运用这一方法计算预循环结构，甚至手工完成。我们针对一种特别简单的微分分次范畴——三角形的路径范畴 A ——进行计算。这等价于圆的基点环路空间上的链所构成的微分分次代数 $k[x^{\pm 1}]$ 。我们将在第 2.2.2 节讨论一般单纯集合对应的这些路径微分分次范畴；此类单纯集合的几何实现上的一个定向，会在 A 上赋予一个光滑 Calabi–Yau 结构。随后，我们将具体讨论圆，并说明在A的情形下如何理解链级非退化条件。之后，在第 4.1.1 节中，我们将完成计算，并求得该情形下完整的对应预循环结构。

最后，我们讨论式 (1) 中的映射在何种意义下互为逆映射。通常的勒让德变换在 E 上的纤维凸函数与 $E^\vee$ 上的纤维凸函数之间建立一一对应；非交换情形中的映射也具有这一性质，但意义更为微妙。最自然的表述是，这些映射可提升为单纯集合之间的弱同伦等价；于是，在式 (1) 左侧，我们有一个单纯集合，它对应于（在 Dold-Kan等价下）截断负循环复形的非退化轨迹；在右侧，则是由 [Hin96; Get09] 所描述的 Maurer–Cartan 方程的解所构成的单纯集合。

致谢：我们感谢 Damien Calaque、Sheel Ganatra、卢德米尔·卡察尔科夫、伯恩哈德·凯勒、约斯特·诺伊滕、Manuel Rivera、Vivek Shende、Bertrand To¨en、布鲁诺·瓦莱特和王正方，感谢他们给予的有益讨论。我们感谢高等科学研究所提供了优越的工作条件。本研究得到西蒙斯同调镜像对称合作项目的支持。

记号与约定。本文中，我们固定一个特征为零的域 $\Bbbk$ ，并将 $\Bbbk$ 上的张量积/Hom（向量空间、复形、模等）简记为 $\otimes$。

本文假设所有对象都是 $\mathbb{Z}$-分次的，但所有结果对 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次也同样成立。给定一个 A_∞ 范畴 A，以及一个 $a \in A$ 齐次次数的元素，我们用 deg(a) 表示它在 A 中的次数，用 $\bar{a}$ 表示它在 $A[1]$中的次数。至于其他复形中的次数，我们会经常在同调次数和上同调次数之间切换；为避免混淆，我们尽可能明确指出所指的次数。按照惯例，上标表示上同调次数，下标表示同调次数，两者之间的关系为 $(-)^i = (-)_{-i}$。

我们始终假设我们的 A_∞-代数/范畴是严格含幺的。为方便记号，我们总用 $C^*(A,M)$ 和 $C_*(A,M)$ 表示约化霍赫希尔德上链/链复形。也就是说，若 A 是一个 A_∞-代数，则有

$$C^*(A,M)=\prod_{n\geq 0}\mathrm{Hom}(\overline{A}[1]^{\otimes n},M),\quad C_*(A,M)=\prod_{n\geq 0}M\otimes\overline{A}[1]^{\otimes n}$$

其中 $\overline{A}=A/\Bbbk.1_A$。这些复形可通过将通常的复形对含有 $1_A\in A[1]$ 的元素取商得到。类似地，对于一个范畴，我们对严格单位取商，见 [She20]。我们用 b 表示链微分，用 d 表示上链微分。

最后，我们分别用 A_Δ 和 $A^!$ 表示 A 的对角双模和逆对偶化双模；关于这些对象的双模结构映射的定义以及所有符号，见 [Gan13]。我们的约定与其中的符号一致，唯一的区别是，我们将结构映射 $\mu(\dots)$ 中的参数按相反顺序书写。

2. Smooth Calabi-Yau structures

如果一个 A_∞-范畴的对角双模 A_Δ 是紧对象，那么它就是（同调意义上的）光滑的；等价地说，该对象拟同构于一个有限个“Yoneda 双模”构成的复形的一个直和项（参见 [Gan13]）。例如，如果 A 是一个微分分次代数，且 A_Δ 有一个由自由双模$A\otimes A$的直和构成的有限分解，那么 A 就是光滑的。

当 A 光滑时，存在一个复形之间的拟同构

$$C_*(A)\simeq\mathrm{Hom}_{A-A}(A^!,A_\Delta)$$

它建立了霍赫希尔德链与从逆对偶双模到对角双模的 A-双模态射之间的对应关系。还要回顾的是，$C_*(A)$ 带有圆的同调的作用，而该作用的同伦不动点由负循环复形 $CC_*^-(A)=(C_*(A)[[u]],b+uB)$ 计算，其中 B 是 Connes 微分，其同调次数为 $+1$。

以下定义是对 Ginzburg CY 代数[Gin06]这一概念的细化。

定义 1. d 上维数为 A 的光滑卡拉比-丘结构是一个负循环链 $\lambda=\lambda_0+\lambda_1u+\lambda_2u^2+\cdots\in CC_d^-(A)$，其像 $\lambda_0\in C_d(A)\cong\mathrm{Hom}_{A-A}(A^!,A_\Delta[-d])$ 是一个拟同构。

几年前，我们中的两位曾提出要求将此提升到负循环同调。这一概念此后已出现在许多地方；关于微分分次的讨论，见[BD19；BD18]；关于 A_∞ 的讨论，见 [Gan13；Gan19]。

2.1. 链级非退化性。现在我们使用 [KTV21] 中所述的图形演算，以表述光滑 Calabi-Yau 结构的非退化条件。给定 $\lambda=\lambda_0+\lambda_1u+\lambda_2u^2+\cdots\in CC_d^-(A)$ 一个负循环 d-链，我们将链级上的 λ_0 非退化条件表述如下：在拟同构 $C_*(A)\simeq\mathrm{Hom}_{A-A}(A^!,A_\Delta)$ 下，它必须映射为一个 A-双模之间的拟同构，也就是说，它必须存在一个拟逆

$$\alpha=\text{“}(\lambda_0)^{-1}\text{”}\in\mathrm{Hom}_{A-A}(A_\Delta,A^!)\simeq C^*_{(2)}(A)$$

其中 $C^*_{(2)}(A)$ 是高阶霍赫希尔德上链的复形（有两个输出），并配有我们在 [KTV21, 第 4 节中说明的拟同构2]。

从双模态射的角度来看，显然存在一个复合映射

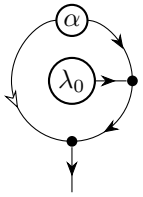
$$\mathrm{Hom}_{A-A}(A_\Delta, A^!) \otimes \mathrm{Hom}_{A-A}(A^!, A_\Delta) \to \mathrm{Hom}_{A-A}(A_\Delta, A_\Delta)$$

利用这些拟同构，可以将其表示为复形之间的映射

$$C^*_{(2)}(A) \otimes C_*(A) \to C^*(A),$$

我们给出该映射的以下显式代表。

引理 1. 复合映射可以表示为由带状箭图给出的复形映射 $(\alpha, \lambda_0) \mapsto \lambda_0 \circ \alpha \in C^*(A)$

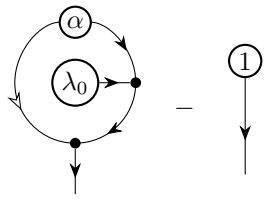


也就是说，我们通过将 α 代入顶部的二价顶点，将 λ_0 代入中心的源，并按照 [KTV21 第 6.1 节4]中的指示计算该图，得到映射 $C^*_{(2)}(A) \otimes C_*(A) \to C^*(A)$。利用拟同构的显式描述以及 [Gan13 第 2] 节中的计算，可知这确实表示所需的映射。

由于我们假设 A 是严格含幺的，因此存在一个特殊元素 $1 \in C^0(A)$，即单位上链，它只有长度为零的分量非零，对应于单位元。[1] 此外，在拟同构 $C^*(A) \simeq \mathrm{Hom}_{A-A}(A_\Delta, A_\Delta)$ 下，单位上链映射为恒等映射。

命题 2. 设 (A, μ) 是一个光滑的 A_∞-范畴。元素 $\lambda_0 \in C_d(A)$ 和 $\alpha \in C^d_{(2)}(A)$ 表示互逆的同调类，当且仅当它们关于相应的微分闭合，并且存在一个元素 $\beta \in C^{-1}(A)$，使得

$$[\mu, \beta] =$$



其中 $[-,-]$ 是霍赫希尔德上链上的格斯滕哈伯括号。换句话说，$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 u^1 + \ldots$ 表示一个光滑卡拉比-丘结构，当且仅当存在 α 和 β，使得第一项 λ_0 满足上述方程。

其中一个方向显然可由上面的引理推出；这正是条件 $[\lambda_0 \circ \alpha] = [\mathrm{id}]$ in $\mathrm{Hom}_{A\text{-}A}(A, A)$，因此该等式说明 α 表示 λ_0的一个右逆。

[1]在范畴情形中，也就是说，当 A 有多个对象时，回想一下，我们的图表周围的区域会标上对象，因此，当顶点周围的区域标记为任意对象 X 时，上链 1 只返回恒等态射 $1_X \in \mathrm{End}_A(X)$。

现在我们将论证，若假设 A 是光滑的，它也就是一个左逆。在此之前，我们先用有限维向量空间 V及其线性对偶 $V^\vee$作一个类比：设 $f\colon V \to V^\vee$ 和 $g\colon V^\vee \to V$是满足 $g\circ f = \mathrm{id}_V$的线性映射。显然， f和 g都满秩，且均为双射，因此 $f\circ g = \mathrm{id}_{V^\vee}$。

冒着让读者感到厌烦的风险，我们再为这个简单的事实给出一个证明：由于 V 是有限维的，典范映射 $V \to (V^\vee)^\vee$ 是一个同构，因此对复合映射 $g\circ f$ 取对偶，并利用这一识别

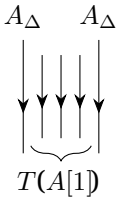
$$(V \xrightarrow{f} V^\vee \xrightarrow{g} V) \mapsto (V^\vee \xleftarrow{f^\vee} V \xleftarrow{g^\vee} V^\vee)$$

即可得出复合映射 $f^\vee\circ g^\vee$ 是 $V^\vee$ 上的恒等映射。注意，如果我们在 V 上任取一个对称双线性形式，就可以用矩阵表示映射 f、g；于是映射 $f^\vee$、$g^\vee$ 就是这些矩阵的转置。在有限维情形下，每个矩阵都与其转置共轭。因此， g 也有一个左逆，而由方程 $f\circ g\circ f = f$ 可知，这个左逆只能是 f。

现在，我们来说明在光滑范畴 A中与这一推理相对应的论证，首先要确定转置映射所起的作用。

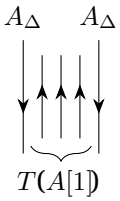
引理 3. 设 A 是一个光滑范畴，且 $\alpha \in C^*_{(2)}(A) \cong \mathrm{Hom}_{A\text{-}A}(A^!, A)$。令$\alpha^! \in \mathrm{Hom}_{A\text{-}A}(A^!,(A^!)^!)$ 为通过取双模对偶得到的态射。将 $(A^!)^! \cong A$ 认同后， $\alpha^!$ 的同调类由 α 顶点的 $\mathbb{Z}/2$ 旋转表示。

证明。这可由我们在 [KTV21] 中发展的某些图示演算得出。回顾一下，对于任意 A_∞-范畴 A，我们都有一个拟同构 $A_\Delta \otimes_{A\text{-}A} A_\Delta \xrightarrow{\sim} A_\Delta$；我们将前者的一个元素看作一组 $A[1]$-箭头，它们沿一条带向下延伸，并且两侧各有一个 A_Δ 箭头：



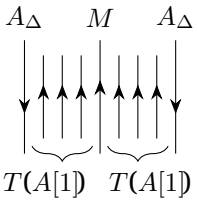
更准确地说， $A_\Delta \otimes_{A\text{-}A} A_\Delta \xrightarrow{\sim} A_\Delta$ 的一个元素就是可以输入到这张图顶端的某个对象。

类似地，我们将 $A^!$ 的一个元素表示为一条带，其中内部箭头沿带向上移动：



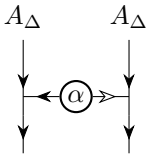
再准确地说， $A^!$ 的一个元素是我们可以输入到这个图顶部的对象。这可以从 [Gan13，定义 2.40]中给出的左对偶 $A^!$的显式表示看出。更一般地，对于任意完美的（A， A）-双模 M，其

左对偶由这条带表示



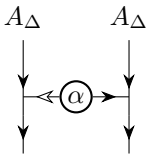
中间有一支向上的 M 箭头。

在这些对应关系下，给定一个元素 $\alpha \in C^*_{(2)}(A)$，映射 $A^! \to A_\Delta$ 通过对偶化得到的结果由下图表示



其中，按照惯例，白色箭头标记 α 的第一个输出。

左对偶 $\alpha^! : (A^!)^! \to A^!$ 上诱导的映射，便是将此图反转后插入 M 箭头所在的位置。但由于 A 是光滑的， $A^!$ 是完美的，且映射 $A \to (A^!)^!$ 是拟同构，因此我们可以简化所得的图，并得出图



也是 $\alpha^!$ 的一个代表；将它与前一个图比较，便得到所需结论。□

现在我们可以证明命题 2 了。

证明。还需证明，若 α 和 λ_0 满足给定的等式，则 $[\alpha] \circ [\lambda_0] = [\mathrm{id}_{A^!}]$。我们借鉴上文关于有限维向量空间的讨论：我们已经知道复合映射

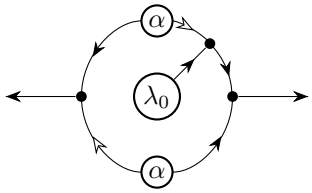
$$A_\Delta \xrightarrow{\alpha} A^! \xrightarrow{\lambda_0} A_\Delta$$

与 A_Δ 上的恒等映射拟同构，因此取左对偶后，我们知道复合映射

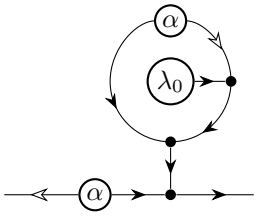
$$A^! \xleftarrow{\alpha^!} (A^!)^! \xleftarrow{(\lambda_0)^!} A^!$$

在 $A^!$ 上拟同构于恒等映射。因此， $[\alpha^!]$ 具有右逆。

现在考虑由下图给出的 $C^*_{(2)}(A)$中的元素



利用带状箭图的图示演算，当 α 和 λ_0 闭合时，该元素与下图给出的元素上同调等价



因此，根据命题陈述中 α 和 λ_0 满足该方程的假设，这个元素也与 α 上同调等价；我们已在上文证明，α 代表左对偶映射 $\alpha^!$。类似的计算表明，它也与 α上同调等价，即 α 。因此， $[\alpha]$ 也有一个右逆，而这个右逆的同调类必然与 $[\lambda_0]$相同。□



2.2. 例子。到目前为止，我们已经说明，给定 A_∞-范畴 A上的光滑 CY 结构 λ，原则上可以找到一个链级代表元，即命题 2 中方程的一个解 α，我们稍后将用它在 A上构造所需的预循环结构。

一般而言，为 α 找到一个显式解可能很困难，因为这需要求解一个双模之间态射的反函数问题。不过，在某些值得关注的特定情形下，这个问题可以显式求解。

2.2.1. 可定向流形的基点环路空间上的链。考虑带基点道路连通拓扑空间 (X,x)；环路拼接给出一个态射

$$\Omega_x X \times \Omega_x X \to \Omega_x X$$

从而在链复形 $C_*(\Omega_x X,\Bbbk)$ 上诱导出乘积，使其成为微分分次代数。

人们早已认识到，这个代数上的结构与弦拓扑运算密切相关。20 世纪 80 年代，Goodwillie [Goo85] 以及 Burghelea 和 Fiedorowicz [BF86] 的工作给出了一个等价关系

$$H_*(LX,\Bbbk) \cong HH_*(C_*(\Omega_x X),\Bbbk)$$

它建立了自由环路空间的同调与微分分次代数 $A = C_*(\Omega_x X,\Bbbk)$ 的霍赫希尔德同调之间的对应。这种对应关联了两边的某些 BV 代数结构：它们分别在霍赫希尔德复形上以代数方式构造，并在环路空间同调上以拓扑方式构造。

关于 A 的 Hochschild 理论与环路空间运算之间的这种关系，已有大量论述；但在此我们想关注庞加莱对偶性的影响。设 X 是一个 n维（$\Bbbk$-）庞加莱对偶空间，并选定一个基本链，即配备一个 n-链 $c_X \in H_n(X,\Bbbk)$，使得帽积 $c_X\cap\colon H^*(X,\Bbbk) \to H_{n-*}(X,\Bbbk)$ 是同构。

如今众所周知，在这种情况下， $A = C_*(\Omega_x X,\Bbbk)$ 是一个维数为 n 的光滑 CY 代数。在弱 CY 结构层面（也就是说，不提升到负循环同调）， [Abb13] 遵循 [FHT95]，的论证，对此给出了明确证明；而 Cohen-Ganatra 的草稿 [CG] 则讨论了提升到负循环复形的问题。我们总结如下：

命题 4. 存在一个映射 $\iota\colon C_*(X,\Bbbk) \to CC_*^-(A)$，使得若 $c_X \in C_d(X,\Bbbk)$ 满足 $[c_X] \in H_d(X,\Bbbk)$ 是 X 的基本类，则其像 $\iota(c_X)$ 是 $A = C_*(\Omega_x X,\Bbbk)$ 上一个维数为 d 的光滑 Calabi–Yau 结构。

映射 ι（更准确地说，是它与到霍赫希尔德链的典范映射 $CC_*^-(A) \to C_*(A)$ 的复合）应被视为映射 $X \hookrightarrow LX$ 的代数体现；该映射由将 X 包含为常值环路给出。

我们希望为 c_X 的像找到一个链级逆元，也就是说，为命题 2 陈述中的 α 顶点找到一个适当的取值。根据上述结果，总能找到这样的取值；但对于一般的 Poincar´e 对偶空间，以算法方式实现这一点则相当复杂。我们将把完整的描述留待未来工作，但至少可以给出大致思路和一个简单的例子。

2.2.2. 路径微分分次范畴。我们先将代数 A 替换为一个等价的微分分次范畴，其描述更具局部性和组合性。设 Λ 是一个单纯复形，其顶点集 Λ_0 带有全序；这定义了一个相应的单纯集合。我们将 Λ 中一个 n-单形 σ 的顶点 v_0、……、v_n（按顺序排列）记作 $(v_0 \dots v_n)_\sigma$；若无歧义，也可简记为 $(v_0 \dots v_n)$。

定义 2. 单纯复形 Λ 的路径微分分次范畴 P_Λ 以 Λ_0 为对象集；对于顶点 s 和 t，其态射空间是由以下形式的符号张成的分次 $\Bbbk$-向量空间

$$(v_0^1 v_1^1 \dots v_{n_1}^1)_{\sigma_1} * (v_0^2 \dots v_{n_2}^2)_{\sigma_2} * \dots * (v_1^j v_0^j)_{\sigma_i}^{-1} \dots (v_0^N \dots v_{n_N}^N)_{\sigma_N},$$

其中 $v_{n_j}^k = v_0^{k+1}$、$v_0^1 = s$ 和 $v_{n_N}^N = t$，并对由以下关系生成的关系取商

$$x * (u_0 u_1)_\sigma * (u_0 u_1)_\sigma^{-1} * y = x * y$$

其中 x 和 y 是上述任意序列。上述形式的生成元置于 $\sum_k (1 - n_k)$ 次。如果 $u = v$，我们还加入恒等态射 e_u。

也就是说，生成元是可复合的序列，其元素要么是 Λ 的单形（维数非零），要么是 1-单形的形式逆元。我们将 n-单形置于 $n-1$ 次，并赋予该向量空间如下微分：

$$d(v_0 \dots v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left((v_0 \dots \hat{v_i} \dots v_n) - (v_0 \dots v_i) * (v_i \dots v_n) \right)$$

并且相对于 $*$ 满足莱布尼茨法则。

文献中有时将这些单形的复合称为“项链”（不要与我们在 [KTV21] 中定义的“项链括号”混淆），因为可以把单形想象成未扣合项链上的珠子。我们中的一位曾在 [Kon09] 中提出，这些项链范畴（如上所述，将 1-单形形式地求逆之后）可为基点环路空间提供模型。这种关系在 [DS11a; DS11b; RZ18; Riv19; HT10] 中得到研究；特别是，[RS19] 详细描述了对 1-单形进行局部化的过程，从而得到一个从单纯集合 $\mathfrak{C}$ 到某个“项链集”范畴的函子，使这一对应成为函子性的。

我们的微分分次范畴 P_Λ 只是该函子在对象上的像，再复合取 $C_*(-,\Bbbk)$。我们不需要上述参考文献中构建的完整单纯形描述，因此概述如下：

命题5. 若(X,x)是带基点的连通拓扑空间，且 X与 Λ的几何实现同伦等价，则微分分次范畴 P_Λ 等价于微分分次代数 $C_*(\Omega_x X)$，后者视为仅有一个对象的微分分次范畴；也就是说，存在一列本质满的微分分次函子构成的锯齿链，并且这些函子在态射复形上都诱导拟同构。

具体而言，每个次数为 $-n$ 的态射 $x \to y$ 描述了路径 x 与 y之间路径空间中的一个 n 维立方体；例如，由 $(v_0v_1) * (v_1v_2v_3)$ 给出的态射，其边界为 $-(v_0v_1) *(v_1v_3) + (v_0v_1) *(v_1v_2) * (v_2v_3)$，描述了 1维立方体（即区间）上的一族路径，它从路径 $v_0 \to v_1 \to v_3$ 扫掠至路径 $v_0 \to v_1 \to v_2 \to v_3$，并使其跨越 2-单形 $(v_1v_2v_3)$ 变形。与上文代数 $C_*(\Omega_x X)$ 的比较结果依赖于这样一个事实：这个立方复形计算的是基点环路空间的同调。

2.2.3. 常值环路的包含。可以使用此模型来描述映射 ι，该映射对应于将常值环路包含到自由环路空间中。映射的一个显式代表

$$C_*(X) \to CC_*^-(C_*(\Omega_x X))$$

从 X 上的单纯链出发，可按照经典著作 Adams [Ada56]中的构造，在 [Abo11, App.B], 中加以描述。我们可以用微分分次范畴 P_Λ的术语重新表述如下：

命题6. 存在一个链映射 ι： $C_*(\Lambda) \to CC_*^-(P_\Lambda)$，其与典范映射 $CC_*^-(P_\Lambda) \to C_*(P_\Lambda)$ 的复合，在同一化 $HH_*(P_\Lambda) \cong H_*(L(|\Lambda|)$下，与由常值环路的包含所诱导的映射一致。

证明。可以在每个单形上局部地构造此映射，并按维数归纳。我们首先将每个0-单形（v）$\mapsto e_v$ 发送到（即， $CC_*^-(P_\Lambda)$中的长度为1、仅由恒等态射 $e_v \in P_\Lambda(v,v)$组成的零链）。

现在假设我们已经为所有维数不超过 $n-1$ 的单形定义了映射，而且对于每个这样的单形 τ，其闭包 $\overline{\tau}$ 上的像都落在子复形$CC_*^-(P_{\overline{\tau}}) \subseteq CC_*^-(P_\Lambda)$ 中。设 σ 是一个 n- 单形；要将映射延拓到 σ，只需找到 $CC_*^-(P_{\overline{\sigma}})$ 中某个次数为 n 的元素 x，使得

$$(b+uB)x = \iota(\partial\sigma)$$

但根据假设，$(b+uB)\iota(\partial\sigma) = 0$，因此 $[\iota(\partial\sigma)]$ 是 $HC_{n-1}^-(P_{\overline{\sigma}})$ 中的一个同调类。由于 $\overline{\sigma}$ 是可缩的，该同调类对 $n \geq 1$ 为零。□

然而，上述论证并未给出显式构造 $\iota(\sigma)$ 的代表元的方法；在高维情形下，这可能涉及相当复杂的表达式。对于一个 1-单形 (v_0v_1)，我们可以选择对应的霍赫希尔德链为 $(v_0v_1)[(v_0v_1)^{-1}]$。为简化记号，将其记为 $01[10]$。它可提升为负循环链

$$01[10] - 01[10|01|10]u + 01[10|01|10|01|10]u^2 \ldots$$

对于一个 2-单形（$v_0v_1v_2$），接下来我们需要赋予它一个边界为 $01[10] + 12[21] - 02[20]$ 的霍赫希尔德 2-链；一种可能的选择是

$$01*12[21|10] - 01*12[20|02*21*10] + 01*12*20[012*21*10] - 012*20*012*21*10.$$

至于我们与 1-单形关联的链，上述霍赫希尔德链可以提升为某个负循环链，其表达式并无特别启发之处，等等。

现在，给定一个庞加莱对偶空间 X 的单纯三角剖分 Λ，我们可以考察其基本链 c_X 的像 $\lambda = \iota(c_X)$，并求出其 $u = 0$ 分量 λ_0 的逆元 α，也就是满足命题 2 陈述中方程的 $C^*_{(2)}(P_\Lambda)$ 中的元素 α。

2.2.4. 圆。我们以最简单的非平凡情形——圆——来说明如何进行这一操作。我们选取一个三角剖分，使其呈现为 2-单形 $(v_0v_1v_2)$ 的边界。基本链 $(v_0v_1) + (v_1v_2) - (v_0v_2)$ 映射为霍赫希尔德链

$$\lambda_0 = 01[10] + 12[20] - 02[20],$$

再次使用我们的简写记法。

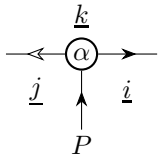
我们要寻找 λ_0 的逆元 α。回想一下，这是一个顶点，它在上方和下方接收任意数量的 $A[1]$ 箭头，并在 A 中输出两个箭头；如果 A 是一个 A_∞-代数，这将是空间 $\mathrm{Hom}(T(A[1] \otimes T(A[1]) A \otimes A)$；由于我们选取的 A 有多个对象，因此要用态射空间替换 A 因子，并对对象求和。

我们按输入的长度进行归纳。由于 A 集中于非负次数，且我们希望 α 的（上同调）次数为 $+1$，因此其在两侧输入数均为零时的分量 $\alpha^{0,\,0}$ 必然为零。

第一个需要指定的非平凡次数是分量 $\alpha^{0,\,1}$，也就是说，顶部没有输入、底部有一个输入。注意，由于 A 是一个范畴，而非代数，图中的区域由对象标记；我们将用 0、1 和 2 分别表示 A 的各个对象（三角形的顶点）。

回想一下，我们采用的是约化霍赫希尔德复形，因此只要某个输入是恒等态射，元素 α 的取值就为零。现在，A 中每个非恒等态射要么是“逆时针”的（例如态射 (01)、$(01*12)$、(20) 等），要么是“顺时针”的（例如 (10)、$(12*20*01)$ 等）。

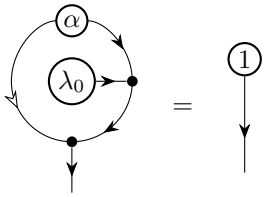
设 $P\colon i \to j$ 是这些态射之一，也就是说，它是从某个顶点 i 到顶点 j的一条路径。我们定义



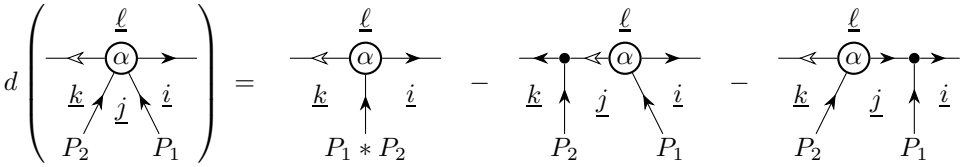
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\delta_{jk} e_k \otimes P - \delta_{ik} P \otimes e_k\right), \text{ if } P \text{ counter-clockwise} \\ -\frac{1}{2}\left(\delta_{jk} e_k \otimes P - \delta_{ik} P \otimes e_k\right), \text{ if } P \text{ clockwise} \end{cases}$$

其中 $\delta_{\dots}$ 是顶点对集合上的通常狄拉克函数。

命题 7. 上述规定唯一地延拓为一个闭元素 $\alpha \in C^1_{(2)}(A)$，它在 $\mathbb{Z}/2$ 作用下是对称的，并且满足方程



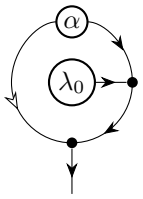
证明。要使元素 α 成为闭元，它需要满足如下相容性方程：



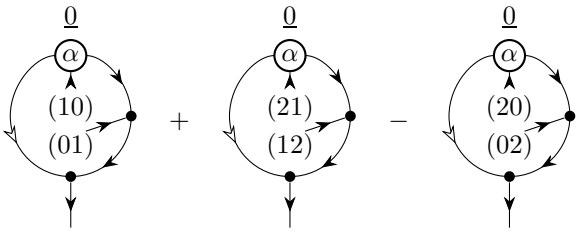
以及一个类似的方程，其中一个输入位于上方，另一个输入位于下方。

由于 A 集中在零次，因此 α 中任何含有两个或更多输入的元素都为零，所以这些方程的左侧始终为零；我们必须验证右侧也为零，这一点可以通过显式计算得出。

现在还需要验证该元素是霍赫希尔德链$\lambda_0 = 01[10] + 12[20] - 02[20]$的逆元。我们来计算由该图给出的霍赫希尔德余链

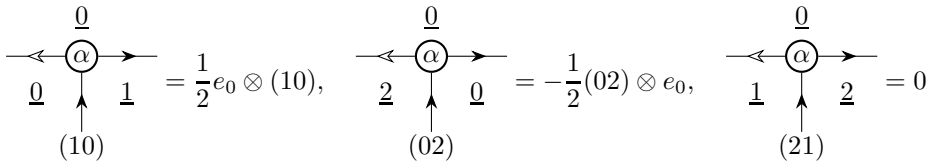


由于 A 是一个微分分次范畴，所有高阶结构映射 $\mu_A^{\geq 3}$ 均为零，因此只有当来自 λ_0 的 $A[1]$-箭头落在 α中时，才会出现非平凡项。我们计算该上链在零输入上的取值；例如，当我们用对象 0 标记图周围的区域时，有



其取值为 $\frac{1}{2}e_0 *(10)\ *(01)\ + 0 + \frac{1}{2}(02)\ *(20)\ * e_0 = e_0$，外部区域标记为 1 或 2 的图表也同理。此外，该图在任何长度为 ≥ 1 的输入上取值均为零；因此它恰好是 $C^0(A)$ 中的单位上链。□

我们注意到，可以利用闭性条件，根据一组更小的数据推导出上面元素 α 的猜测：只需指定 α 给出某种“局部”配对，即设定



对于上面的 1、2，也可类似处理；也就是说，当上方单形与下方单形不相交时赋值为零，而当二者相交时，则赋予一对带有适当符号的局部路径。从这个意义上说，我们对元素 α 的表达式是“局部化”在乘积空间 $S^1 \times S^1$ 中对角线的一个邻域内的。

ΩS^1 上链的这种光滑卡拉比-丘结构在文献中广为人知；从另一角度对这一结构作出近期的明确描述，可参见近期的研究成果 [BCS21；BCS22]。在我们的微分分次范畴 A 与微分分次代数 $k[x^{\pm 1}]$ 之间的等价关系下，上述元素 λ_0 映射到与 $x^{-1}[x]$ 上同调等价的霍赫希尔德链，对应于 [BCS21 第 3] 节描述中的非交换形式 $x^{-1}d_{dR}x$ 。

3. Noncommutative Legendre transform

我们回顾 [KS06; KTV21] 中的结果：用非交换几何的语言， A_∞-代数 (A, μ) 可以看作一个非交换带基点微分分次流形 X_A ，其上带有一个可积向量场 Q_μ；于是，预 Calabi–Yau 结构（维数为 d ）所处的空间 $C^*_{[d]}(A)$，就是 X_A 上的移位多向量场空间，其中项链括号扮演 Schouten-Nijenhuis 括号的角色。

因此，预循环结构 m 满足（二次）Maurer–Cartan 方程 $[m, m] = 0$。我们将这类解的空间记为 $\mathcal{M}_{\mathrm{pre-CY}}$ ；在给定点 m 处，该空间的切复形为

$$T_m \mathcal{M}_{\mathrm{pre-CY}} = (C^*_{[d]}(A), [m, -]_{\mathrm{nec}}),$$

也就是说，多向量场的微分由与 m 的项链括号给出。

如引言中所述，我们最终将构造一个映射，它将由某个负循环链 $\lambda \in CC^-_*(A)$ 表示的光滑 Calabi–Yau 结构映射到 $\mathcal{M}_{\mathrm{pre-CY}}$ 中的一个点；在此过程中，我们还将构造另一个反向映射，并在第 4.2 节论证，在某种同伦意义下，该映射是“一对一”的。

本节将说明为何应将这种关系视为勒让德变换的非交换类比，随后我们将运用 [KTV21] 中发展的带状箭图形式体系来构造这一变换。不过首先，让我们先简要回顾一下通常的勒让德变换理论。

3.1. 交换与奇勒让德变换。

3.1.1. 向量丛上的勒让德变换。回顾一下，经典勒让德变换也可以在向量丛上（沿纤维）定义。设 M 是一个流形， $E \to M$ 是一个 N 维向量丛，且有一个纤维方向凸的实值光滑函数$L : E \to \mathbb{R}$。为简单起见，我们假设 L 有一个正定二次函数作为下界

。我们分两步来描述勒让德变换：首先取纤维导数

$$FL : E \to E^\vee,$$

在对偶坐标中定义为

$$FL(x_1, \ldots, x_N, v_1, \ldots, v_N) = (x_1, \ldots, x_N, \partial L/\partial v_1, \ldots, \partial L/\partial v_N)$$

根据我们对 L 的假设，这给出了一个微分同胚。

然后，我们构造与 L 相关的能量函数，定义为

$$e_L = \sum_i v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} - L$$

随后，我们可以定义勒让德变换 H： $E^\vee \to \mathbb{R}$，其定义为

$$H = \mathcal{L}(L) := e_L \circ (FL)^{-1}$$

利用 E 与 $E^\vee$ 之间的配对，也可以将其在每个纤维上表示为经典勒让德变换

$$H_x(p) = \text{crit.value}_v(vp - L_x(v)).$$

这个函数具有如下性质： FH 是 FL 的逆微分同胚，并且 $\mathcal{L}(H) = L$。此外，我们有以下事实。

命题 8. 对应于 H 的纤维导数的拉回，等于勒让德变换在 L 处的变分导数的相反数，即:

$$(FH)^* = -\frac{\delta \mathcal{L}(f)}{\delta f}|_{f=L}.$$

证明。注意，$(FH)^*$ 是函数 $\mathcal{O}(E) \to \mathcal{O}(E^\vee)$ 上的一个环同构。我们对 $L \to L + \delta L$ 作变分，并通过将关系 $\mathcal{E}_{H+\delta H} = (L + \delta L) \circ F(H + \delta H)$ 展开至一阶，计算变分 $H \to H + \delta H$。□

3.1.2. 奇勒让德变换。现在我们讨论经典勒让德变换的一种类似形式，不过它作用于奇切丛与奇余切丛之间。早期文献 [Ale+97] 中曾对这一奇勒让德变换作过描述；其思想也成为文献 [Pan+13] 中讨论的动机之一，该文将移位辛结构与非退化移位泊松结构联系起来。

我们用 ΠTM表示 M的奇余切丛，其对偶 ΠT^*M则表示其奇切丛。确切地说，我们将考虑这些丛上的（形式）函数空间之间的映射，即多向量场空间

$$\mathcal{O}(\Pi T^*M) = \wedge^* TM = \mathcal{O}(M)[\alpha_i]$$

其中反交换变量 α_i 表示向量场 $\partial/\partial x^i$，以及微分形式空间

$$\mathcal{O}(\Pi TM) = \wedge^* \Omega^1 \mathcal{O}(M)[\beta_i]$$

其中反交换变量 β^i 表示一形式 dx^i。我们约定， α_i 的次数为 $+1$，而 β_i 的次数为 -1。

我们将在坐标中将一个 p-向量场写作

$$P = \frac{1}{p!} P^{i_1, \ldots, i_p} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_p}$$

其中对重复指标采用求和约定。我们也可以通过反对称嵌入，将其视为 TM 的张量代数中的一个元素：

$$P = \frac{1}{p!} P^{j_1,\dots,j_p} \delta^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_p} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p}$$

利用给出排列符号的克罗内克符号。这使我们能够计算导数：导数 $\partial/\partial\alpha_i$ 的作用为

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_{i_n}} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} = p(-1)^n \alpha_{i_1} \dots \hat{\alpha}_{i_n} \alpha_{i_p}$$

其中帽号表示省略。

设 $\gamma \in \mathcal{O}(\Pi T^* M)$ 是一个不含一次项的多向量场，我们将其用坐标表示为

$$\gamma(x) = \frac{\gamma_2^{ij}(x)}{2!} \alpha_i \alpha_j + \frac{\gamma_3^{ijk}(x)}{3!} \alpha_i \alpha_j \alpha_k + \dots$$

其中，$\gamma_p(x)$ 是依赖于 x 的某个 p 阶张量。假设二次项 γ_2 由一个正定矩阵给出。

就奇空间上的函数而言，$\Pi T^* M$、γ 应视为一个在“轨迹 $\alpha = 0$”处具有纤维临界点的凸函数。于是，奇纤维导数应将该轨迹的一个邻域映射到“轨迹 $\beta = 0$”的一个邻域，而奇勒让德变换应产生变量 β_i 中的形式级数，也就是一个微分形式。

让我们计算奇勒让德变换 $F\gamma$：首先写出

$$\beta^i = \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i} = \gamma_2^{ij} \alpha_j + \frac{\gamma_3^{ijk}}{2!} \alpha_j \alpha_k + \dots$$

然后反解此方程，将每个 α_i 表示为变量 β 的函数，即函数 $f_i(\gamma, \beta)$，它依赖于所有 p 对应的矩阵 γ_p。当且仅当矩阵 γ_2 可逆时，这才可行：记其逆矩阵为 $\{M_{ij}\}$，我们便可以通过迭代过程计算 f_i。展开到二阶，可得

$$\alpha_i = f_i(\gamma, \beta) = M_{ij} \beta^j + M_{ij} M_{ka} M_{lb} \frac{\gamma_3^{jkl}}{2!} \beta^a \beta^b + \dots$$

换言之，函数 f_i 是函数上的诱导逆映射 $((F\gamma^*)^{-1})$ 的数据。

现在我们计算与 γ 相关的能量函数，得到

$$e_\gamma = \alpha_i \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i} - \gamma = \frac{\gamma_2^{ij}}{2!} \alpha_i \alpha_j + 2 \times \frac{\gamma_3^{ijk}}{3!} \alpha_i \alpha_j \alpha_k + \dots + (p-1) \times \frac{\gamma_p^{ij\dots}}{p!} \alpha_i \alpha_j \dots + \dots$$

也就是说，我们只需将每个次数为 p 的项乘以 $p-1$。然后，将上面的表达式中的 $\alpha_i \mapsto f_i(\gamma, \beta)$ 代入，即可计算奇勒让德变换 $\lambda = \mathcal{L}(\gamma)$。

命题 9。多向量场 γ 满足 $[\gamma, \gamma] = 0$，其中 $[,]$ 是 Schouten-Nijenhuis 括号，当且仅当 $d\lambda = 0$。

证明。我们计算

$$\begin{aligned} d\lambda = \beta^i \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} &= \beta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(f_j(\gamma, \beta) \beta_i - \gamma(\alpha_j \mapsto f^j(\gamma, \beta)) \right) \\ &= \beta^i \frac{\partial f_j}{\partial x^i} \beta^j - \beta^i \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} - \beta^i \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i} \frac{\partial f_i}{\partial x} = -\beta^i \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \end{aligned}$$

沿着轨迹 $\alpha = f(\gamma, \beta)$，其值等于

$$-\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = -[\gamma, \gamma]$$

证明该命题。 □

执行相反的操作，我们看到奇勒让德变换在满足毛雷尔-卡当型方程 $[\gamma, \gamma] = 0$ 的闭形式与多向量场之间给出了一个双射。

现在让我们考虑一种稍微更一般的情形，其中 γ 可能有一个较小但非零的一阶项，即:

$$\gamma = \gamma_1^i \alpha_i + \frac{\gamma_2^{ij}(x)}{2!}\alpha_i\alpha_j + \frac{\gamma_3^{ijk}(x)}{3!}\alpha_i\alpha_j\alpha_k + \dots$$

在这种情况下，轨迹 $\alpha = 0$ 并非临界轨迹，因此我们不应期待奇勒让德变换将其映到 $\beta = 0$ 的一个邻域。相反，它将被映到 ΠTX 的“点”附近，其纤维坐标由 $\partial\gamma/\partial\alpha_i|_{\alpha_i=0} = \gamma_1^i$ 给出。

更确切地说：给定一个以 β_i表示的形式 λ，我们将坐标平移至 $\tilde{\beta}^i = \beta^i - \gamma_1^i$; 平移后的形式将满足命题 9，其中微分为 $\tilde{d}$，变量为 $\tilde{\beta}^i$。我们用原始变量来计算这一结果，并按 γ_1展开至线性阶。

$$\begin{aligned}
\tilde{d}\tilde{\lambda} &= \tilde{\beta}^i\frac{\partial \tilde{\lambda}_0}{\partial x^i} + \tilde{\beta}^i\frac{\partial \tilde{\lambda}_j^1}{\partial x^i}\tilde{\beta}^j + \dots \\
&= \beta^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\lambda^0 + \lambda_j^1\beta^j + \dots\right) - \gamma_i^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\lambda^0 + \lambda_j^1\beta^j + \dots\right) \\
&- \beta^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\lambda_j^1\gamma_i^j + \dots\right) + O((\gamma_1)^2) \\
&= (d - Lie_{\gamma_1})\lambda + O((\gamma_1)^2)
\end{aligned}$$

因此，我们得到以下结果:

推论 10. 若多向量场 γ 满足方程 $[\gamma, \gamma] = 0$，则其奇勒让德变换 λ 满足 $(d - Lie_{\gamma_1})\lambda = 0$，至于 γ_1中的高阶修正项则除外。

请注意，将上述结果与[KS06] 中的非交换类比进行比较，便会引出我们在引言中提到的对应关系（公式（1））。

3.1.3. 逆勒让德变换。在继续讨论非交换情形之前，我们先来讨论奇勒让德变换的最后一个问题。为简单起见，我们回到 $\gamma_1 = 0$ 的情形。已知 γ 的二次矩阵 γ_2^{ij}，以及勒让德变换 $\lambda = \mathcal{L}(\gamma)$（关于所有 γ）的表达式，如何在不显式写出逆勒让德变换的情况下计算 γ_3、γ_4、.....?

这个问题看起来或许有些愚蠢，因为在这种情况下，我们可以直接写出逆勒让德变换。但在非交换情形下，我们无法得到显式的逆变换；相反，我们将使用隐函数定理的一个版本。也就是说，根据定义，我们知道这一对 (γ, λ) 满足方程

$$e_\gamma = (F\gamma)(\lambda)$$

通过计算 γ 的“能量函数”和纤维导数的表达式，我们得到：

$$\frac{\gamma_2^{ij}}{2!}\alpha_i\alpha_j + 2\frac{\gamma_3^{ijk}}{3!}\alpha_i\alpha_j\alpha_k + \ldots = \lambda^2_{i_1 i_2}\left(\gamma_2^{i_1 j_1}\alpha_{j_1} + \frac{\gamma_3^{i_1 j_1 k_1}}{2!}\alpha_{j_1}\alpha_{k_1} + \ldots\right)\times \left(\gamma_2^{i_2 j_2}\alpha_{j_2} + \frac{\gamma_3^{i_2 j_2 k_2}}{2!}\alpha_{j_2}\alpha_{k_2} + \ldots\right) + \lambda^3_{i_1 i_2 i_3}(\ldots)\ldots$$

当矩阵 γ_2 非退化时， α 中的二次项恰好给出矩阵方程 $\lambda_2 =(\gamma_2)^{-1}$，正如预期的那样。三阶时，方程为：[2]

$$\frac{\lambda^2_{ab}}{2!}(\gamma_2^{ai}\gamma_3^{bjk} + \gamma_3^{aij}\gamma_2^{bk}) + \lambda^3_{abc}\gamma_2^{ai}\gamma_2^{bj}\gamma_2^{ck} = 2\gamma_3^{ijk} \tag{2}$$

利用 λ_2 的解以及 γ_3的反对称性，可得所需的解 $\gamma_3^{ijk} = \lambda^3_{abc}\gamma_2^{ai}\gamma_2^{bj}\gamma_2^{ck}$。

3.1.4. 非交换版本路线图。上文解释了奇勒让德变换将多向量场

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots$$

这些多向量场是 Maurer–Cartan 方程 $[\gamma,\gamma] = 0$ 的解；它们对应于在 $d - Lie_{\gamma_1}$下闭合的微分形式。

在这一非交换勒让德变换所关联的两侧之一，我们有一个 A_∞-代数（A,μ）；换言之，一个带有可积向量场 Q_μ 的非交换带基点微分分次流形 X_A；空间 $C^*_{[d]}(A)$ 中的维数为 d 的预 Calabi–Yau 结构，被解释为 X_A 上的移位多向量场空间，其中项链括号起着 Schouten-Nijenhuis 括号的作用。

另一方面，我们有 X_A 上的非交换微分形式空间；它就是负循环同调复形 $CC^-_*(A)$，其微分为 $b_\mu + uB$。关于这一关系在我们语境中的讨论，参见例如 [KTV21，第 3.3] 节。

于是，非交换勒让德变换将这两侧联系起来。下面先概述接下来的内容。我们从一个预循环结构 m 出发，它是 Maurer–Cartan 方程 $[m,m] = 0$ 的一个解。接下来，我们将完全沿用奇勒让德变换部分所述的平行方式。首先，我们定义非交换纤维导数，它是复形之间的一个映射

$$Fm : (CC^-_*(A), b_\mu + uB) \to (C^*_{[d]}(A), [m,-]_{\mathrm{nec}})$$

与（超）交换情形类似，我们证明，若 $m_{(2)}$ 非退化，则上述映射是拟同构；随后我们将对应于 m 的“能量函数”记作 e_m，并将 m 的勒让德变换定义为 $(Fm)^{-1}(e_m)$，它在负循环复形中定义了一个非退化元素。

为了计算逆勒让德变换，即从一个非退化的循环同调类得到一个预循环结构，我们采用第 3.1.3 节中的同一“隐函数定理”策略来构造一个映射

$$\Phi : (CC^-_d(A))_{\mathrm{nondeg}} \to C^*_{[d]}(A)$$

它落在该方程的解空间 $\mathcal{M}_{\mathrm{pre-CY}}$ 中，也就是预 Calabi–Yau 结构。

[2]请注意，为了得到正确的数值因子，最好先将外代数反对称地嵌入张量代数。

与通常的勒让德变换一样，映射 Φ 也是「一一对应」的，但其意义更加精妙；请注意，其中一方具有自然的「线性」等价概念（$b_\mu + uB$-上同调），而另一方则没有。我们稍后将在第 4.2 节说明正确的等价概念是什么。

3.2. 管状箭图。我们对映射 Pm 和 Φ 的构造，是借助一种特定类型的带状箭图来描述的，下面我们将对此加以说明。关于带状箭图的一般定义，以及计算其在霍赫希尔德链上作用的形式体系，请参见 [KTV21] 。

定义 3. 对任意整数 $\ell \geq 1$，具有 ℓ 条出边的管状箭图空间 $\mathcal{T}_{(\ell)}$，是由对应于具有两个边界分支的零亏格曲面的带状箭图张成的向量空间：一个边界分支带有一个闭合输入（$V_\times$ 中的源），另一个边界分支带有 ℓ 个开放输出（$V_{\mathrm{open-out}}$ 中的汇）。

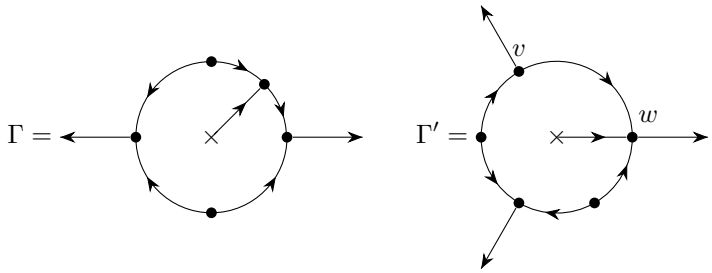
对于每个整数 d，带状图上的 d-定向可以通过对其所有边和顶点进行全序来指定，排列根据 d 的奇偶性赋予权重 $\pm$。我们将固定如下形式的全序：若 $\times$-源记为 s（其关联边为 e），开放输出从右侧开始按顺时针方向标记为 o_1、.....、o_ℓ，则我们总是将此定向写成以下形式

$$\pm(o_1\ o_2\ \ldots\ o_\ell\ \ldots\ e\ s)$$

$\vec{}$还要记住，每个带状箭图 Γ 都有一个同调次数，它依赖于 d，由以下公式给出

$$\deg_d(\Gamma) = \sum_{v \neq s, o_1, \ldots, o_n} ((2-d)out(v) + d + in(v) - 4)$$

例子。以下分别是在 $\mathcal{T}_{(2)}$ 和 $\mathcal{T}_{(3)}$ 中出现的一些带状箭图示例：



当 $d = 0$ 时，零次箭图只有输入 $\times$、输出，以及两类顶点：一类有两个输入和一个输出，另一类没有输入且有一个输出。此外，某个箭图的次数等于从任意零次箭图收缩多少条边得到它；例如，对于上面的例子，$\deg_0(\Gamma) = 0$，且 $\deg_0(\Gamma') = 2$，因为有两个顶点的次数为一（标记为 v 和 w）。对于任意 d，这些次数会平移为 $\deg_d(\Gamma) = -2d$ 和 $\deg_d(\Gamma') = -3d + 2$。

因此，取一个整数 d，我们可以定义 d 定向管状箭图的空间 $\mathcal{T}^d_{(\ell)}$。作为向量空间，它等于 $\mathcal{T}_{(\ell)}$，但其分次取决于 d。

接下来，我们考虑将一个霍赫希尔德链插入 $\times$ 顶点，并在 ℓ 出射腿之间插入任意数量的入射 $A[1]$ 箭头。现在，给定任意

元素 $m = m_{(1)} + m_{(2)} + \cdots \in C^*_{[d]}(A)$，对这个定向带状箭图求值后，我们得到 ℓ 个出射 A 因子。此求值给出了一个分次向量空间之间的线性态射

$$E : \mathcal{T}^d_{(\ell)} \otimes CC^-_*(A) \longrightarrow C^*_{(\ell)}(A)$$

对于一般的 m， E 没有理由与任何微分交换。现在我们来分析空间 $\mathcal{T}^d_{(\ell)}$ 上的一些自然微分。

3.3. 管状箭图上的微分。

3.3.1. 链边界微分。首先，我们有微分 ∂，它由对顶点进行分离并求和来定义。这是链上的边界算子，其同调次数为 -1，与通常情形相同。带状箭图的求值与此微分相容，也就是说，

$$E : (\mathcal{T}^d_{(\ell)}, \partial) \otimes (C_*(A), b) \longrightarrow (C^*_{(\ell)}(A), [\mu, -]_{\mathrm{nec}})$$

这是上链复形之间的映射（我们将所有对象都视为带有上同调分次），因此它诱导出一个上同调上的映射。

命题 11。当 $d = 0$ 时，复形 $(\mathcal{T}^d_{(\ell)}, \partial)$ 计算圆的同调：

$$H_*(\mathcal{T}^{d=0}_{(\ell)}, \partial) = H_*(S^1)$$

也就是说， $\Bbbk$ 位于零次和一次同调次数。其他 d 取值时也同样成立，但有一个平移：

$$H_{*+\ell d}(\mathcal{T}^d_{(\ell)}, \partial) = H_*(S^1)$$

证明。第一条陈述是 [KTV21，定理 60] 的特例。 $\mathcal{T}_{(\ell)}$ 中出现的带状箭图给出了空间的胞腔分解

$$\text{“}\mathcal{M}_{0,2}\text{”} \times S^1 \times (\mathbb{R}_{>0})^{2\ell-1} = S^1 \times (\mathbb{R}_{>0})^{2\ell-1}$$

这里的“$\mathcal{M}_{0,2}$”仅表示一个点，因为带有两个穿孔的零亏格曲线没有模空间。正如该定理证明中所解释的，$(\mathcal{T}^{d=0}, \partial)$ 是一个胞腔复形上的链复形，该胞腔复形与上面的胞腔分解对偶。

具有 d 次数零的带状箭图对应于最高维胞腔。为确认上述对应正确，我们注意到，对于这样的箭图，可以独立选取 ℓ 个正数作为出射腿的长度，并选取 $\ell - 1$ 个正数作为非 s、o_1、.....、o_ℓ 顶点之间距离的长度；最后一个长度由其余长度确定。此外，还要加上一个圆所对应的一族方向，沿这些方向，从 $\times$顶点伸出的边 s 可以落在任意位置。

后一个陈述是对 $d = 0$ 情形的一种变体；从概念上讲，对于不同的 d，结果会被该模空间上的线丛 $\mathcal{L}$ 的幂扭曲，而此线丛在相差 ℓ 的意义下是平凡的。□

3.3.2. 旋转微分。现在我们引入另一种微分，它对应于绕 S^1 因子的旋转。为此，我们先考虑以下向量空间的分解

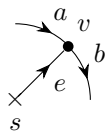
$$\mathcal{T}_{(\ell)} = (\mathcal{T}_{(\ell)})^{\mathrm{edge}} \oplus (\mathcal{T}_{(\ell)})^{\mathrm{vertex}}$$

我们根据边 e （与 $\times$-顶点相连的边）末端的对象进行分解。子空间 $(\mathcal{T}_{(\ell)})^{\mathrm{edge}}$ 由 e 终止于一个具有两条入边和一条出边的三价顶点的带状箭图张成，而子空间 $(\mathcal{T}_{(\ell)})^{\mathrm{vertex}}$ 则由其他带状箭图张成。

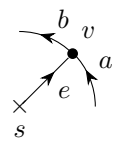
这些名称源于这样的看法：去掉源顶点后，每个管状带状图都是一个圆，外侧附着着树。我们在圆的内部添加源 $\times$；这个箭头可以落在某条边上，从而得到一个属于 $(\mathcal{T}_{(\ell)})^{\text{edge}}$ 的管状箭图；也可以落在一个已有顶点上，从而得到一个属于 $(\mathcal{T}_{(\ell)})^{\text{vertex}}$ 的管状箭图。

现在，我们通过以下规定定义一个同调次数为 $+1$ 的映射 $R:(\mathcal{T}^d_{(\ell)})^{\text{edge}}\to(\mathcal{T}^d_{(\ell)})^{\text{vertex}}$。设 $\vec{\Gamma}$ 是 $(\mathcal{T}_{(\ell)})^{\text{edge}}$ 中的某个管状箭图；其边 e 落在以下两种形式之一的顶点 v 上：

Type (1)



Type (2)



我们通过对 Γ 作某种排序，选取一个 d-定向，其形式为

$$(b\ v\ \ldots\ o_1\ o_2\ \ldots\ o_\ell\ \ldots\ a\ \ldots\ e\ s)$$

也就是说，将字母 bv 放在开头。

现在，我们通过将边 $\vec{\Gamma}_{v'}$ 与其顶点的带状箭图接到圆 v' 上除 v 以外的所有其他顶点来得到。结果中不再有顶点 v，而它原先所在位置的边现在记作 a。

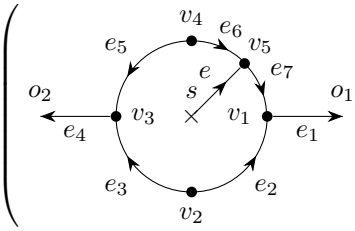
定义 4. 旋转微分 R 定义在子空间 $(\mathcal{T}^d_{(\ell)})^{\text{edge}}$ 上，定义如下：

$$R(\vec{\Gamma},(b\ v\ \ldots\ o_1\ o_2\ \ldots\ o_\ell\ \ldots\ a\ \ldots\ e\ s))=\sum_{v\neq v'\text{ in circle}}\left(\vec{\Gamma}_{v'},(-1)^{\ell+\#}(o_1\ o_2\ \ldots\ o_\ell\ \ldots\ a\ \ldots\ e\ s)\right)$$

其中，符号指数中的 $\#=0$，若顶点 v 属于上文的类型 (1)；若属于类型 (2)，则为 $\#=1$。我们将其从子空间 $(\mathcal{T}^d_{(\ell)})^{\text{edge}}$ 延拓为映射 $R:\mathcal{T}^d_{(\ell)}\to\mathcal{T}^d_{(\ell)}$，其同调次数为 $+1$；在该子空间之外取零。

换言之，在直和分解下，R 由一个严格三角矩阵 $\begin{pmatrix}0&0\\R&0\end{pmatrix}$ 给出；显然 $R^2=0$。我们检查上述定向的指定与排序变更相容，并且确实定义了一个从定向带状箭图出发的映射。

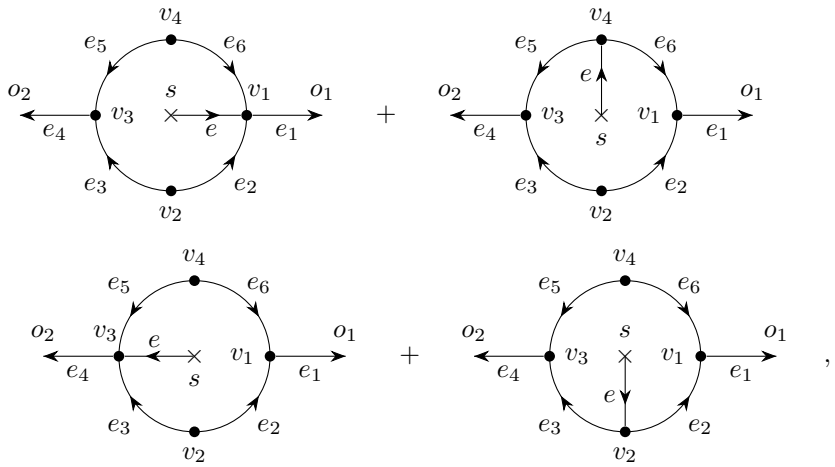
例。我们来计算定向为 $(\Gamma,\mathcal{O})$ 的管状箭图的微分，其定义为



$$\left(\ ,\ (o_1\ o_2\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5\ e_6\ e_7\ e\ s)\ \right)$$

为了计算 $R(\Gamma,\mathcal{O})$ 中的符号，我们先将 $e_7\ v_5$ 这一对移到字符串开头，由排列得到符号 $(-1)^{6\times(d-1)+6\times d}=+1$（回想一下，交换两条边会产生 $(-1)^{d-1}$，交换两个顶点则会产生 $(-1)^d$）。对于

$R(\Gamma,\mathcal{O})$ 中各项的定向，我们只需考虑这个符号并删去$e_7\ v_5$这一对，得到：

$R(\Gamma,\mathcal{O}) =$ 

,

全都带有定向 $+(o_1\ o_2\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5\ e_6\ e_7\ e\ s)$。

直接运用 ∂ 和 R 的符号约定进行计算可知，它们彼此分次交换，即

$$\partial R + R\partial = 0$$

因此，$(\mathfrak{T}^d_{(\ell)},\partial,R)$ 具有混合复形的结构，或者等价地说，是一个带有圆的链级作用的复形。

3.4. 循环性与负循环同调。下面描述带微分的管状箭图 ∂ 和 R 如何与霍赫希尔德链上的霍赫希尔德微分和 Connes 微分相互作用。我们将某个定向管状箭图（$\Gamma,\mathcal{O}$）简写为 Γ，只有在确有必要时才说明其定向。

3.4.1. 管状箭图的循环复形。设 u 是一个同调次数为 -2的变量。

定义**5.** 对于固定的 ℓ,d，管状箭图的循环复形是如下 $\Bbbk[u]$-模

$$\mathcal{C}\mathfrak{T}^d_{(\ell)} := \mathfrak{T}^d_{(\ell)} \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[u,u^{-1}]/k[u]$$

并配备微分 $\partial - uR$。

也就是说，$\mathcal{C}\mathfrak{T}^d{}_{(\ell)}$ 中同调次数为 n 的元素由如下表达式给出

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}^0 + \vec{\Gamma}^1 u^{-1} + \vec{\Gamma}^2 u^{-1}$$

其中 $\vec{\Gamma}^i$ 是 $\mathfrak{T}^d_{(\ell)}$ 中一个同调次数为 $n-2i$的元素。

命题 **12.** 除了平移之外，复形 $\mathcal{C}\mathfrak{T}^d{}_{(\ell)}$ 计算该点的同调。也就是说，

$$H_{\ell d}(\mathcal{C}\mathfrak{T}^d_{(\ell)},\partial - uR) = \Bbbk$$

以及 $H_i(\mathcal{C}\mathfrak{T}^d_{(\ell)},\partial) = 0$ 对于 $i \neq \ell d$。

证明。我们来证明 $d=0$ 的情形；与命题 11 中一样，一般情形可通过扭结一个除整体平移外平凡的线丛，由该情形推出。当 $d=0$, $\mathcal{CT}^d_{(\ell)}$ 是非负分次混合复形时，低次项中的 Connes 长正合列分裂为

$$0\to H_2(\mathcal{CT}^d_{(\ell)},\partial-uR)\to H_0(\mathcal{CT}^d_{(\ell)},\partial-uR)\to H_1(\mathcal{T}^{d=0}_{(\ell)},\partial)\to H_1(\mathcal{CT}^d_{(\ell)},\partial-uR)\to 0$$

and

$$0\to H_0(\mathcal{T}^{d=0}_{(\ell)},\partial)\to H_0(\mathcal{CT}^d_{(\ell)},\partial-uR)\to 0$$

因此 $H_0(\mathcal{CT}^d_{(\ell)},\partial-uR)=\Bbbk$，而且由于 $H_1(\mathcal{T}^d_{(\ell)},\partial)=\Bbbk$，只需计算

$$H_1(\mathcal{CT}^d_{(\ell)},\partial-uR)=0$$

这是因为 $H_1(\mathcal{T}^d_{(\ell)},\partial)$ 中的非平凡同调类可以由 R 像中的一条链表示。□

3.4.2. 对负循环同调的作用。回顾一下，(A,μ) 的负循环同调可以通过以下复形计算：

$$CC^-_*(A)=(C_*(A)[[u]],b+uB)$$

其中 b 是同调次数为 -1 的 Hochschild 微分（取决于 μ），而 B 是同调次数为 $+1$ 的 Connes 微分（不依赖于 μ）。

现在假设我们给定了一个预循环结构 m。我们将求值映射 E 扩展为一个 $\Bbbk[u]$-模的映射

$$E|_{u^{-1}=0}:\mathcal{CT}^d_{(\ell)}\otimes CC^-_*(A)\to C^*_{(\ell)}(A)$$

方法是在 u中取零次部分，也就是将所有求值 $\vec{\Gamma}^i(\lambda_i)$相加。为方便记号，我们也将此映射记为 E。

命题 13。映射 $E|_{u^{-1}=0}$ 与微分相容，并在上同调/同调中诱导出一个映射

$$H_*(\mathcal{CT}^d_{(\ell)},\partial-uR)\otimes HC^-_*(A)\to H^*_{(\ell)}(A).$$

证明。只需证明，对于任意 $\vec{\Gamma}\in\mathcal{T}^d_{(\ell)}$ 和 $\lambda\in C_*(A)$，都有

$$[\mu,E(\vec{\Gamma},\lambda)]_{\mathrm{nec}}=E((\partial-uR)\vec{\Gamma},\lambda)+(-1)^{\deg(\vec{\Gamma})}E(\vec{\Gamma},(b+uB)\lambda).$$

但我们已经知道

$$[\mu,E(\vec{\Gamma},\lambda)]_{\mathrm{nec}}=E(\partial\vec{\Gamma},\lambda)+(-1)^{\deg(\vec{\Gamma})}E(\vec{\Gamma},b\lambda),$$

因此只需证明 $E(R\vec{\Gamma},\lambda)=(-1)^{\deg(\vec{\Gamma})}E(\vec{\Gamma},B\lambda)$。这由 A 的单位满足以下性质这一事实得出

$$\mu^2(1_A,a)=(-1)^{\bar{a}+1}\mu^2(a,1_A)=a$$

对于所有 a，因此将 B 的结果输入到 $(\mathcal{T}^d_{(\ell)})^{\mathrm{edge}}$ 中的带状箭图，效果与将该箭头重新分配到环的其他顶点相同。我们检查微分中的符号是否给出了正确的关系。□

3.4.3. 旋转不变管状箭图。对于任意 d，我们在高阶霍赫希尔德上链 $C^*_{(\ell)}(A)$ 上有 $\mathbb{Z}_\ell$ 的维数 d 作用，定义见 [KTV21, 第 3.1] 节：在此定义中，顶点的角度 $2\pi/\ell$ 旋转时会伴随 Koszul 符号以及一个额外的符号 $(d-1)(\ell-1)$。在适当移位后，该作用下的不变量定义了我们所称的维数 d 高阶循环余链：

$$C^*_{(\ell,d)}(A) := (C^*_{(\ell)}(A))^{(\mathbb{Z}_\ell,d)}[(d-2)(\ell-1)]$$

现在，我们以类似的方式定义另一侧上的这一作用：

定义 6。 $\mathbb{Z}/\ell$ 在复形 $\mathcal{T}^d_{(\ell)}$ 上的维数 d-作用，定义为将箭图旋转角度 $+2\pi/\ell$，同时按定向循环置换输出顶点，并将

$$(o_1\ o_2\ \dots\ o_\ell\ \dots\ e\ s) \mapsto (o_\ell\ o_1\ o_2\ \dots\ o_{\ell-1}\ \dots\ e\ s).$$

这一作用以 $k[u]$-线性方式延拓到 $\mathcal{CT}^d_{(\ell)}$，我们记

$$\mathcal{CT}_{(\ell,d)} := (\mathcal{CT}^d_{(\ell)})^{(\mathbb{Z}/\ell,d)}[(d-2)(\ell-1)]$$

为其移位不变量。我们还将 $\ell \geq 2$ 的所有这些复形放在一起，构成一个复形

$$\mathcal{CT}_{[d]} := \prod_{\ell\geq 2} \mathcal{CT}_{(\ell,d)}$$

注意到，由于顶点以权重（$d-1$）进入定向，该排列在定向中的符号为（-1）$^{(d-1)(\ell-1)}$，其中已计入维数 d 作用带来的额外符号。我们还计算得到，该作用与微分 ∂ 和 R交换，因此映射 $E|_{u^{-1}=0}$ 限制为 $\mathcal{CT}_{(\ell,d)}$，并给出一个分次向量空间之间的映射

$$\mathcal{CT}_{[d]} \otimes CC^-_*(A) \to C^*_{[d]}(A).$$

回顾一下，给定 A上的预循环结构 m ，项链括号 $[m,-]_{\mathrm{nec}}$在 $C^*_{[d]}(A)$上定义了一个微分；根据定义，此微分是以下各项之和

$$[m,-]_{\mathrm{nec}} = d_\mu + [m_{(2)},-]_{\mathrm{nec}} + [m_{(3)},-]_{\mathrm{nec}} + \dots$$

其中 d_μ 只是（通常的）霍赫希尔德上链上的微分。每一项 $[m_{(k)},-]_{\mathrm{nec}}$将 $C^*_{(\ell,d)}(A)$ 映射到 $\to C^*_{(\ell+k-1,d)}(A)[1]$。

我们在管状箭图一侧仿照这个微分，定义微分

$$\partial_k : \mathcal{CT}_{(\ell,d)} \to \mathcal{CT}_{(\ell+k-1,d)}$$

通过取管状箭图与一个具有 k 条出射腿的顶点的项链括号。检查所有符号和次数后，我们得出：

命题 14。映射 $E|_{u^{-1}=0}$ 与 $\mathcal{CT}_{[d]}$上的微分（$\partial - uR + \partial_2 + \partial_3 + \dots$）相容，并在上同调/同调中给出一个映射

$$H_*(\mathcal{CT}_{[d]}, \partial - uR + \partial_2 + \partial_3 + \dots) \otimes HC^-_*(A) \to C^*_{[d]}(A).$$

3.5. 勒让德变换的定义。

3.5.1. 纤维导数。根据上面的命题，给定 $\mathcal{CT}_{[d]}$ 中任意一个闭类、任意一个负循环同调类，以及一个预循环结构 m，我们可以构造出 n 属于 $C^*_{[d]}(A)$ 的另一个元素，使其满足方程 $[m,n]_{\mathrm{nec}}=0$。

这将起到通常勒让德变换中纤维导数的作用。回顾命题8，纤维导数可以理解为勒让德变换的变分导数；因此在非交换情形中，它落在切复形（$C^*_{[d]}(A)$ $[m,-]_{\mathrm{nec}}$）中是自然的，该复形计算了 $\mathcal{M}_{\mathrm{pre-CY}}$ 在点 m处的切空间。

命题15。在$\mathcal{CT}^d_{(2)}$中，任意一个上同调次数为 $2d$ 的 ∂-闭元素，若在（$\mathbb{Z}_2$， d）作用下不变，则可延拓为 $\mathcal{CT}_{[d]}$中一个上同调次数为 $d+2$ 的（$\partial-uR+\partial_2+\partial_3+\ldots$）-闭元素。

证明。我们对出射腿的数量 ℓ 进行归纳法证明。设我们有一个延拓

$$\Gamma_{(2)}+\Gamma_{(3)}+\cdots+\Gamma_{(\ell)}$$

其中 $\Gamma_{(\ell)}\in\mathcal{CT}_{(\ell,d)}$。展开定义并考虑次数平移后，这意味着我们有

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{(2)}=\Gamma^0_{(2)}\\
&\Gamma_{(3)}=\Gamma^0_{(3)}+\Gamma^1_{(3)}u^{-1}\\
&\quad\cdots\\
&\Gamma_{(\ell)}=\Gamma^0_{(\ell)}+\Gamma^1_{(\ell)}u^{-1}+\cdots+\Gamma^{\ell-2}_{(\ell)}u^{-\ell+2}
\end{aligned}$$

其中 $\Gamma^i_{(k)}$ 在 $\mathcal{T}^d_{(k)}$中具有同调次数 $-dk+2k-4+2i$；由于次数原因，上面的项是唯一可能非零的项。

假设我们有

$$(\partial-uR+\partial_2+\ldots)(\Gamma_{(2)}+\Gamma_{(3)}+\cdots+\Gamma_{(\ell)})=0$$

模去含有 ℓ条出射腿的项。接下来要解的方程恰好含有 $\ell+1$条出射腿，即求

$$\Gamma_{(\ell+1)}=\Gamma^0_{(\ell+1)}+\Gamma^1_{(\ell+1)}u^{-1}+\cdots+\Gamma^{\ell-1}_{(\ell+1)}u^{-\ell+1}$$

求解

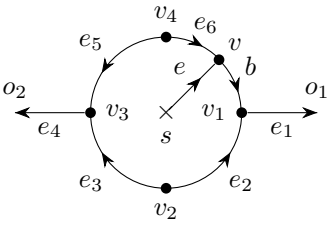
$$(\partial-uR)\Gamma_{(\ell+1)}=\partial_2\Gamma_{(\ell)}+\cdots+\partial_\ell\Gamma_{(2)}$$

由 $(\partial-uR)^2$, 这一事实并利用归纳假设可知，将 $(\partial-uR)$ 作用于右端得到零。但由于该方程处于同调次数 $-d(\ell+1)+2\ell-2>-d(\ell+1)$，根据命题 12，它必定存在关于 $\Gamma_{(\ell+1)}$ 的解；在 $(\mathbb{Z}_{\ell+1},d)$ 作用下进行对称化，即得所需的 $\Gamma_{(\ell+1)}$。□

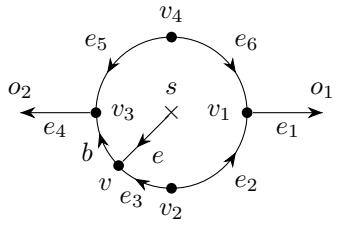
因此，我们只需指定 ∂-闭元素 $\Gamma^0_{(2)}$ （属于 $\mathcal{T}^d_{(2)}$ ），使其在 d 为奇数时是 $\mathbb{Z}/2$-不变的，在 d 为偶数时是反不变的。

定义 7。我们定义 $\mathcal{T}^d_{(2)}$ 中以下同调次数为 $-2d$ 的元素。

$$\Gamma_{(2)} = \frac{1}{2}\left(\right.$$



$+$



$\left. \right)$

两个带定向的箭图（$o_1\ o_2\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v\ e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5\ e_6\ b\ e\ s$）。

注意，$\Gamma_{(2)}$ 的上同调次数为 $+2d$，因此 $\partial\Gamma_{(2)} = 0$。为了确认它定义了 $\mathcal{CT}_{[d]}$ 中的一个元素（其上同调次数为 $+2d-(d-2)\ (2-1)\ = d+2$），我们必须检查 $\mathbb{Z}/2$ 的生成元作用于它时所带的符号 $(-1)^{(d-1)(2-1)} = (-1)^{d-1}$；为此，我们计算由180度旋转诱导的序列（$v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v\ e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5\ e_6\ b\ e\ s$）的排列符号；注意，标签 o_1 和 o_2，因为我们仍希望从右侧开始读取这些箭图的输出。

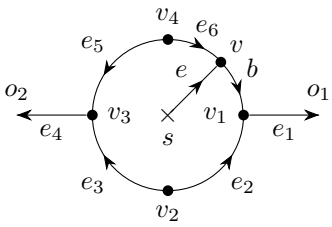
定义8。我们将 $\Gamma = \Gamma_{(2)} + \Gamma_{(3)} + \ldots$ 定义为 $\mathcal{CT}_{[d]}$ 中上同调次数为 $d+2$ 的元素，它由 $\Gamma_{(2)}$的某个固定延拓给出。

注意，Γ 仅在相差某个 $(\partial - uR + \partial_2 + \partial_3 + \ldots)$-恰当项的意义下定义。

引理16。对于任意 $\ell > 2$，$\Gamma^{\ell-2}\ {}_{(\ell)}$ 在 $H_{-\ell d}(\mathcal{T}^d_\ell, \partial)$ 中的同调类非零。

证明。注意，由于次数的原因，项 $\Gamma^{\ell-2}\ {}_{(\ell)}$ 是 $\Gamma_{(\ell)}$中出现的最低同调次数项。对于 $\ell = 2$ 而言，它是唯一的；结论由此得出，因为我们可以使用 ∂-微分将边 e 沿圆移动，从而得到 $\Gamma_{(2)}$ 的如下表达式，该表达式在相差一个 ∂-恰当项的意义下成立：

$$\left(\right.$$



$, (o_1\ o_2\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v\ e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5\ e_6\ b\ e\ s)$

$\left. \right)$

换言之，$\Gamma_{(2)}$ 是模空间中 $\pm$ 一个点的同调类。

对于任意 $\ell \geq 3$，将方程 $(\partial - uR + \partial_2 + \ldots)\Gamma$ 展开后，我们发现 $\Gamma^{\ell-2}\ {}_{(\ell)}$ 由求解以下方程定义

$$\partial\Gamma^{\ell-3}_{(\ell)} - R\Gamma^{\ell-2}_{(\ell)} = -\partial_2\Gamma^{\ell-3}_{(\ell-1)}$$

因此，要证明该陈述，只需证明同调类

$$[\partial_2\Gamma^{\ell-3}_{(\ell-1)}] \in H_{-\ell d+1}(\mathcal{T}^d_{(\ell)}, \partial)$$

非零。证明这一点最简单的方法是明确写出一个取值于 $\mathbb{Z}/2$ 的上闭链，其定义在 $\mathcal{T}^d_{(\ell)}$ 上，并且与 $\partial_2\Gamma^{\ell-3}\ {}_{(\ell-1)}$ 配对时取值为 1。

这个上闭链的正确（上同调）次数为 $\alpha\ -\ell d+1$；我们还需要说明它如何作用于任何具有相同（同调）次数的管状箭图；这类箭图是

次数恰好比最小次数高一的箭图，也就是说，恰好有一条收缩边。

对于任意管状箭图 X，取圆上最靠近第一个输出o_1的顶点。如果此顶点与源顶点 s直接相连，则设 $\alpha(X) = 1$；否则，设 $\alpha(X) = 0$。通过考虑从同调次数最低的箭图中可以收缩的所有可能边类型，我们计算得出 α 是一个上闭链。在 $\partial_2\Gamma^{\ell-3}{}_{(\ell-1)}$ 上求 α 的值，结果为一（那里恰好有一个管状箭图，其源与第一个输出“对齐”）。[3] □

定义 9. 预循环结构 m 处的纤维导数是如下映射

$$Fm = E(\Gamma, -)|_{u^{-1}=0} : CC_*^-(A) \to C^*_{[d]}(A)[d+2]$$

由 Γ 在微分 $\partial - uR + \sum_i \partial_i$ 下的闭性可知，纤维导数是复形之间的映射。为简单起见，从现在起我们将求值 $E(\Gamma, \lambda)|_{u^{-1}=0}$记作$\Gamma(\lambda)$。

命题 17. 如果 $m_{(2)}$ 是非退化的，也就是说，在 $C^*_{(2)}(A) \cong \mathrm{Hom}_{A-A}(A_\Delta, A^!)$ 下映射为双模的拟同构，那么 Fm 是拟同构。

这个命题应被视为隐函数定理的非交换版本；元素 $m_{(2)}$ 类似于雅可比矩阵。

证明. 与上文定理的证明一样，出于次数方面的原因，Γ 中带有 ℓ 条出射腿的项具有如下形式

$$\Gamma_{(\ell)} = \Gamma^0_{(\ell)} + \Gamma^1_{(\ell)}u^{-1} + \cdots + \Gamma^{\ell-2}_{(\ell)}u^{-\ell+2}$$

因此，对于某个负循环类 $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \ldots$，我们有

$$\Gamma_{(\ell)}(\lambda) = \sum_{i=0}^{i=\ell-2} \Gamma^i_{(\ell)}(\lambda_i)$$

也就是说，随着 ℓ 增大，$Fm(\lambda)$ 的每个新项只依赖于一个新项 $\lambda_{\ell-2}$。因此只需证明该映射

$$\Gamma^{\ell-2}_{(\ell)}(-) : (C_*(A), b_\mu) \to (C^*_{(\ell)}(A), [\mu, -]_{\mathrm{nec}})$$

但回顾第 2.1 节，当 A 光滑且 $m_{(2)}$ 非退化时（也就是说，给出拟同构 $A^! \simeq A_\Delta$），我们有以下拟同构

$$(C_*(A), b_\mu) \simeq \mathrm{Hom}_{A-A}(A^!, A_\Delta) \simeq \mathrm{Hom}_{A-A}(A_\Delta, A_\Delta)$$

$$(C^*_{(\ell)}(A), [\mu, -]_{\mathrm{nec}}) \simeq \mathrm{Hom}_{A-A}((A^!)^{\otimes_A(k-1)}, A_\Delta) \simeq \mathrm{Hom}_{A-A}(A_\Delta, A_\Delta)$$

也就是说，除了拟同构之外，所有这些不变量都只是 Hochschild 上同调。我们看到，所有次数为 $-\ell d$ 的管状箭图都给出上同调等价的映射（$C_*(A)$ b_μ）$\to$（$C^*_{(\ell)}(A)$ $[\mu, -]_{\mathrm{nec}}$）：它们都涉及在序列中应用来自 $m_{(2)}$ ℓ 次的拟同构，这与上述拟同构的复合所给出的操作相同。因此，映射 $\Gamma^{\ell-2}{}_{(\ell)}(-)$ 与这一复合（相差一个标量倍数）上同调等价。□

[3]事实上，如果愿意，我们也可以改用一个取值于 $\mathbb{Z}$ 的上闭链，并且只要谨慎处理定向，就能证明它不仅满足 $[\Gamma^{\ell-2}{}_{(\ell)}] \neq 0$，而且还是 $H_{-\ell d}(\mathfrak{T}^d_{(\ell)}, \partial) = \mathbb{Z}$ 的一个生成元。

3.5.2. 能量函数与勒让德变换。在讨论多向量场与微分形式之间的奇勒让德变换时，我们计算得出，将拉格朗日函数 L 变为其能量函数 $e_L = v_i \partial L/\partial v_i - L$ 的正确类比，是将多向量场 $\gamma = \gamma_2 + \gamma_3 + \dots$ 变为多向量场

$$e_\gamma = \gamma_2 + 2\gamma_3 + 3\gamma_4 + \dots$$

我们在非交换情形下作出相同的定义：

定义 10. 与元素 $m = \mu + \sum_{\ell \geq 2} m_{(\ell)} \in C^*_{[d]}(A)$ 相关联的能量函数是元素

$$e_m = \sum_{\ell \geq 2} (\ell - 1) m_{(\ell)} \in C^*_{[d]}(A).$$

我们计算得出 $[m, e_m]_{\mathrm{nec}} = 0$，也就是说，这个元素 e_m 在 $C^*_{[d]}(A)$ 上的微分作用下是闭元素。

接下来我们定义勒让德变换：

定义11. 非交换勒让德变换是如下映射

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \left(\mathcal{M}_{d-\mathrm{preCY}}(A)\right)_{\mathrm{nondeg}} &\to HC_d^-(A) \\ m &\mapsto [(Fm)^{-1}(e_m)] \end{aligned}$$

其中，$\left(\mathcal{M}_{d-\mathrm{preCY}}(A)\right)_{\mathrm{nondeg}} \subset C^d_{[d]}(A)$ 是满足 $m_{(2)}$ 非退化的 d 维预 Calabi–Yau 结构$m = \mu + m_{(2)} + m_{(3)} + \dots \in C^2_{[d]}(A)$ 的集合。

请注意，映射 $\mathcal{L}$ 不是线性的；严格来说，作为集合之间的映射，它取决于我们所选的拟逆 $(Fm)^{-1}$。然而，在某种意义上，就像凸函数上的普通勒让德变换一样，它是“一一对应”的；下一节我们将解释其含义。

4. The nondegenerate locus

现在我们着重讨论 A 光滑的情形，并继续研究 A 上预循环结构空间的非退化轨迹 $\left(\mathcal{M}_{d-\mathrm{preCY}}(A)\right)^{\mathrm{nondeg}}$。

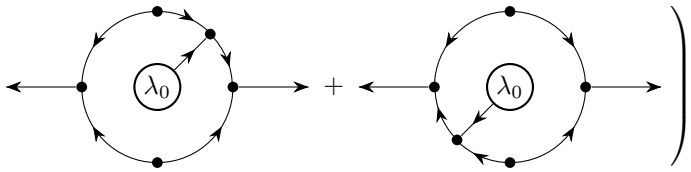
本节的主要结果是，我们上文定义的非交换勒让德变换 $\mathcal{L}$可逆，并给出了非退化预循环结构与光滑 CY 结构之间的等价。然而，这种等价并非严格意义上的等价；其正确形式是单纯集合之间的弱同伦等价，详见第 4.2 节。假设 A 的霍赫希尔德上同调集中于非负次数，则可以更简洁地通过 Maurer–Cartan 方程解的群胚来表述这种等价，我们将在第4.2.4节中加以说明。

4.1. 反演非交换勒让德变换。现在我们刻画非交换勒让德变换的像 $\mathcal{L}$。

命题 18. $\mathcal{L}$ 的像中的每个 $CC_d^-(A)$ 都是 A上的光滑 Calabi–Yau 结构。

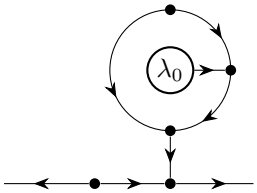
证明. 设 $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 u^1 + \cdots = \mathcal{L}(m)$ 是非退化前CY结构 m 经勒让德变换得到的像。 $\lambda_0 \in C_d(A)$ 与$m_{(2)} \in C^d_{(2)}(A)$ 之间的关系由下式给出

$$m_{(2)} = \frac{1}{2}\left(\quad + \quad \right)$$



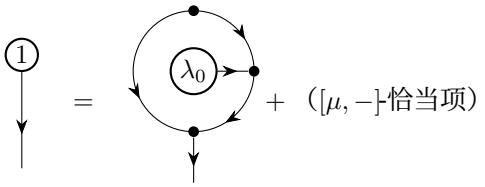
相差一个 $[\mu, -]_{\mathrm{nec}}$-恰当项，其中按照惯例，我们通过将 $m_{(1)} = \mu$ 和$m_{(2)}$ 代入 $\bullet$ 顶点来求值，并相应地忽略某个符号。利用∂-微分，我们得到

$$m_{(2)} = \quad + \ (\,[\mu, -]_{\mathrm{nec}}\text{-恰当项}\,)$$



现在我们在等式两边使用典范余评价映射 $\mathsf{coev} : \Bbbk \to A_\Delta \otimes_{A\text{-}A} A^1$ ，得到 $C^*(A, A^!)$ 中的一个等式。由于 $m_{(2)}$ 是非退化的，这意味着 $C^*(A)$ 中的等式:

$$1 \quad = \quad + \ (\,[\mu, -]\text{-恰当项}\,)$$



这正是 λ_0 上非退化条件的链级描述。

□

换言之，光滑 A_∞-范畴上的非退化 pre-CY 结构会赋予该范畴一个光滑 CY 结构。我们希望反演这个映射。回想第 3.1.2 节中，我们描述了这一逆过程的（奇）交换版本，并说明了如何通过隐式描述逆奇勒让德变换所满足的方程来计算它。

现在，我们使用相同的管状箭图来描述这一过程的非交换类比

$$\Gamma_{(\ell)} = \Gamma^0_{(\ell)} + \Gamma^1_{(\ell)} + \cdots + \Gamma^{\ell-2}_{(\ell)}$$

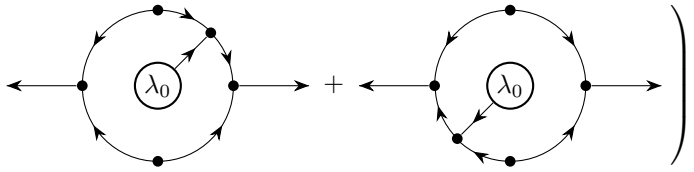
我们在定义8中定义了。假设我们有一个维数为 d 的光滑 Calabi–Yau 结构，由一个元素给出

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \cdots \in CC^-_*(A)$$

与上文命题 18 的证明一样，根据我们对非退化性的链级描述，我们知道可以找到 $\alpha \in C^d_{(2)}(A)\beta_{(2)} \in C^{d-1}_{2}{}_{()}(A)$，使得

(3)

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\quad + \quad \right) + [\mu, \beta_{(2)}]_{\mathrm{nec}}$$



其中顶点 被赋予 α

由此，我们将构造一个预循环结构 m，它具有 $m_{(1)} = \mu$ 和 $m_{(2)} = \alpha$；对于 $\ell > 3$，每个高阶项 $m_{(\ell)}$ 都可以根据前面的项迭代计算。为说明这一点，我们先讨论$m_{(3)}$的情形。根据定义，这个元素必须满足

$$[\mu, m_{(3)}]_{\mathrm{nec}} = m_{(2)} \circ m_{(2)}$$

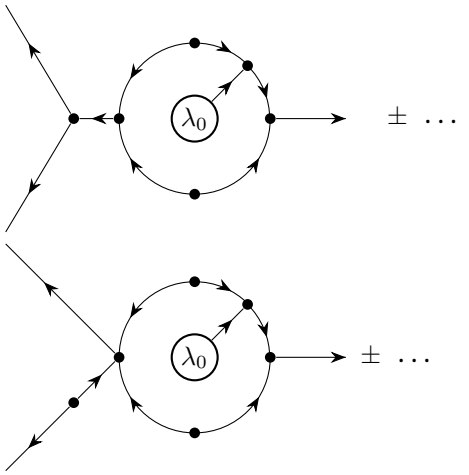
这是一个关于 $C^{2d-1}(A)$ 的方程。我们将两边乘以二，以便用括号表示所有内容

$$2[\mu, m_{(3)}]_{\mathrm{nec}} = [m_{(2)}, m_{(2)}]_{\mathrm{nec}}$$

然后利用公式 (3) 替换第二个 $m_{(2)} = \alpha$ 因子，得到

$$2[\mu, m_{(3)}]_{\mathrm{nec}} = \pm\frac{1}{2} \quad \pm \ \cdots$$

$$\pm\frac{1}{2} \quad \pm \ \cdots$$



换言之，$m_{(3)}$ 满足方程

$$[\mu, m_3]_{\mathrm{nec}} = \frac{1}{2}\left([m_{(2)}, [\mu, \beta]_{\mathrm{nec}}]_{\mathrm{nec}} + (\partial_2 \Gamma_{(2)})(\lambda)\right)$$

其中，与命题14中一样， ∂_2 是上的微分，它通过对一个带有二价顶点的管状箭图取项链括号来定义，并使出射腿的数量增加一条。

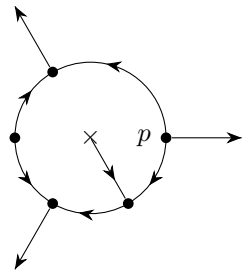
利用分次 Jacobi 恒等式、$m_{(2)}$ 满足的方程以及定义 $\Gamma_{(3)}$ 的方程，我们得到 $m_{(3)}$ 满足

$$[\mu, m_{(3)}]_{\mathrm{nec}} = \frac{1}{2}\left([\mu, [m_{(2)}, \beta]_{\mathrm{nec}}]_{\mathrm{nec}} + [\mu, \Gamma^0_{(3)}(\lambda_0) + \Gamma^1_{(3)}(\lambda_1)]_{\mathrm{nec}}\right) \tag{4}$$

这个方程有些误导；它看起来像是我们可以写成

$$m_{(3)} = \frac{1}{2}\left([m_{(2)}, \beta]_{\mathrm{nec}} + \Gamma^0_{(3)}(\lambda_0) + \Gamma^1_{(3)}(\lambda_1)\right)$$

并直接从 $m_{(1)}=\mu$、$m_{(2)}=\alpha$ 和 λ计算出 $m_{(3)}$，但事实并非如此。通过计算次数，我们发现 $\Gamma^0_{(3)}$ 在 $C^*_{(\ell)}(A)$中的同调次数是 $-\ell d+2$；因此，在该次数的管状箭图中，可能有些图包含一个带有 3 条出箭头的顶点，例如下面箭图中的顶点 p：



因此，为了计算右端，我们需要预先知道 $m_{(3)}$ 的值。尽管如此，我们证明方程（4）可以在上同调意义下求解；每个高阶项 $m_{(\ell)}$ 也同样如此。更确切地说，我们有：

命题 19. 对于每个 $\ell\geq 2$，Maurer–Cartan 方程的分量

$$2[\mu,m_{(\ell)}]_{\mathrm{nec}}=\sum_{i=2}^{\ell-1}[m_{(i)},m_{(\ell-i+1)}]_{\mathrm{nec}}$$

有一个解，给定为

$$m_{(\ell)}=\frac{1}{\ell-1}\Big([\mu,\beta_{(\ell)}]_{\mathrm{nec}}+\cdots+[m_{(\ell-1)},\beta_{(2)}]_{\mathrm{nec}}+\Gamma^0_{(\ell)}(\lambda_0)+\cdots+\Gamma^{\ell-2}_{(\ell)}(\lambda_1)\Big)$$

对于某个元素

$$\beta_{(2)}+\beta_{(3)}+\cdots+\beta_{(\ell-1)}\in C^1_{[d]}(A)$$

其中 $\beta_{(i)}\in C^1_{(i,d)}(A)$ 取决于所有先前的 $\beta_{(j)}$ 和具有 $j<i$的 $m_{(j)}$。

这个命题最终源于一个关于特定次数的管状箭图的组合事实，下面我们将对此作出解释。注意，$\Gamma^0_{(\ell)}$ 是唯一一个“有问题”的项；所有其他 $\Gamma^i_{(\ell)}$ 的顶点都至多有 $\ell-1$ 条出射腿，因此根据归纳法，我们知道如何计算它们。

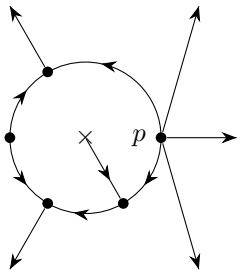
回想一下，$\Gamma^0_{(\ell)}$ 所在的空间 $\mathcal{CT}_{(\ell,d)}$ 定义为 $\mathfrak{T}^d_{(\ell)}$ 中同调次数为 $-d\ell+2\ell-4$ 的循环分次对称元素。我们将 $\mathfrak{T}^{d,\ <\ell\ (\ell)}$ 定义为 $\mathfrak{T}^d_{(\ell)}$ 的子复形，它由不含任何具有 ℓ 条出射腿的顶点的管状箭图张成。现在来看商复形 $\mathfrak{T}^d_{(\ell)}/\mathfrak{T}^{d,\ <\ell\ (\ell)}$。

在同调次数 $-d\ell+2\ell-4$，次数为 $\mathfrak{T}^d_{(\ell)}/\mathfrak{T}^{d,\ <\ell\ (\ell)}$ 的每个元素都可以表示为管状箭图的线性组合，其中有一个顶点具有 ℓ条出射腿；所有其他非输出顶点都是“泛型”的，也就是说，它们要么有两个输入和一个输出，要么是有两个输出的源点。

引理 20. $\mathfrak{T}^d_{(\ell)}/\mathfrak{T}^{d,\ <\ell\ (\ell)}$ 中的任意两个元素都同调等价，至多相差一个符号。换句话说，给定任意两个如上所述的管状箭图 Γ,Γ'，存在管状箭图 Γ'' 的某个线性组合，使得

$$\partial\Gamma''=\Gamma\pm\Gamma'+(term\ in\ \mathfrak{T}^{d,<\ell}_{(\ell)}).$$

证明. 令 Q 为任意一个如上所述的管状箭图，即恰有一个顶点 p带有 ℓ 条出射腿，而所有其他顶点均为“泛型”，例如管状箭图



对于 $\ell = 5$，其中 v是唯一的非一般顶点，其同调次数为 $d \times 5 - d - 2 \times 5 + 4 = 4d - 6$。

我们任取一条边 e： $v_1 \to v_2$ （不连接到输出）属于 Q，并将其收缩为顶点 w，从而得到另一个管状箭图 P。计算微分可得

$$\partial P = \pm Q \pm Q' \pm (\text{term in } \mathfrak{T}^{d,<\ell}_{(\ell)})$$

其中 Q' 由 P 沿另一个方向展开 w 得到。我们通过分别检查三种可能性得出这一结论： $v_1 = p$、 $v_2 = p$ 或 e 不与p关联。例如

但是，我们可以通过一系列边收缩和展开，从 $\mathfrak{T}^d_{(\ell)}/\mathfrak{T}^{d,\ <\ell\ (\ell)}$ 中的任意一个管状箭图 Q 到达其他任意一个。因此，我们可以找到一列Ps，从 Γ 到 Γ'，其和 Γ'' 满足所需的方程。□

证明。（命题 19 的证明）我们用归纳法证明这一点。 $\ell = 2$ 的情形正是非退化性的链级描述；因此，根据假设， λ_0是非退化的。对于任意固定的 ℓ，我们将 Maurer–Cartan 方程的分量写为

$$2[\mu, m_{(\ell)}]_{\text{nec}} = \sum_{i=2}^{\ell-1} [m_{(i)}, m_{(\ell-i+1)}]_{\text{nec}}$$

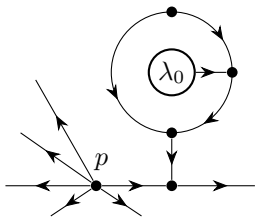
并利用$m_{(j)}$ 和 $j < \ell$ 的情形所得的结果，可得$m_{(\ell)}$ 满足方程

$$\begin{aligned}(\ell-1)[\mu, m_{(\ell)}] = [\mu, [m_{(2)}, \beta_{(\ell-1)}]_{\text{nec}} + \cdots + [m_{(\ell-1)}, \beta_{(2)}]_{\text{nec}}] \\ + [\mu, \Gamma^0_{(\ell)}(\lambda_0) + \cdots + \Gamma^{\ell-2}_{(\ell)}(\lambda_1)]\end{aligned}$$

但根据引理 20，我们可以改写为

$$\Gamma^0_{(\ell)} = \Theta + \partial\Gamma' + \widetilde{\Gamma}^0_{(\ell)},$$

其中 $\widetilde{\Gamma}^0_{(\ell)} \in \mathfrak{T}^{d,\ <\ell\ (\ell)}$，且 Θ 是如下形式的特定“问题箭图”

$\Theta =$ 

它有一个顶点 p，并带有 ℓ 个出箭头（例如，在上图中，$\ell=6$）。现在我们将方程重新排列为

$$[\mu,(\ell-1)m_{(\ell)}-\Theta(\lambda_0)]=[\mu,[m_{(2)},\beta_{(\ell-1)}]_{\mathrm{nec}}+\cdots+[m_{(\ell-1)},\beta_{(2)}]_{\mathrm{nec}}]\\+[\mu,\widetilde{\Gamma}^0_{(\ell)}(\lambda_0)+\cdots+\Gamma^{\ell-2}_{(\ell)}(\lambda_1)]$$

此时右边不含有 ℓ 个或更多出射腿的顶点，因此我们可以用已知的 $m_{(j)}$ 来计算它。

至于左边，根据非退化条件，我们知道 Θ 右侧的“气泡”求值后得到的上链与单位上链 $1\in C^0(A)$ 上同调等价。因此，如果在上面的等式中用 $m_{(\ell)}$ 替换 $\Theta(\lambda_0)$ 并解出 $m_{(\ell)}$，就能找到一个元素来解

$$(\ell-1)m_{(\ell)}=[m_{(2)},\beta_{(\ell-1)}]_{\mathrm{nec}}+\cdots+[m_{(\ell-1)},\beta_{(2)}]_{\mathrm{nec}}+\Gamma^0_{(\ell)}(\lambda_0)+\cdots+\Gamma^{\ell-2}_{(\ell)}(\lambda_1),$$

在模去 $[\mu,-]_{\mathrm{nec}}$-正合项的意义下，因此我们只需取 $\beta_{(\ell)}$ 为这些正合项的一个原函数。□

重新表述命题 19 的陈述，选取一个适当的元素 $\beta=\sum_{i\geq 2}\beta_{(i)}\in C^1_{[d]}(A)$，我们得到一个映射到预循环结构的映射

定义 12。映射 $\Phi:(CC_d^-(A))_{\mathrm{nondeg}}\to(\mathcal{M}_{d-\mathrm{preCY}}(A))_{\mathrm{nondeg}}\subset C^2_{[d]}(A)$ 的定义是将 $\lambda\mapsto m=\mu+m_{(2)}+\ldots$ 送至.....，其中 $m_{(i)}$ 是使用管状箭图 $\Gamma_{(i)}$ 和一个适当选取的元素 β 定义的。

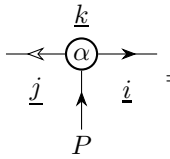
根据定义，像 m 满足方程 $m\circ m=0$ 和 $e_m=\Gamma(m,\lambda)+[m,\beta]_{\mathrm{nec}}$，其中“能量函数”为 $e_m=\sum_{\ell\geq 2}(\ell-1)m_{(\ell)}$。换言之，$\Phi$ 将维数为 d 的光滑 CY 结构映射为具有非退化$m_{(2)}$的维数为 d 的预循环结构。

4.1.1. 示例：圆，续。为了说明命题 19 的实际应用，我们回到第 2.2.4 节讨论的简单示例，即与圆对应的微分分次范畴 A（更准确地说，是与圆作为 2-单形边界的实现相对应的范畴）。

回想一下，表示光滑 CY 结构的负循环链由 $C_*(A)[[u]]$ 中的以下元素给出：

$$\lambda=01[10]+12[21]-02[20]+(-01[10|01|10]-12[21|12|21]+02[20|02|20])u+\ldots$$

与 u^0 分量 λ_0 互逆的元素 $\alpha\in C^*_{(2)}(A)$ 由以下公式给出



$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\delta_{jk}e_k\otimes P-\delta_{ik}P\otimes e_k\right),\ \text{if } P \text{ counter-clockwise}\\ -\frac{1}{2}\left(\delta_{jk}e_k\otimes P-\delta_{ik}P\otimes e_k\right),\ \text{if } P \text{ clockwise}\end{cases}$$

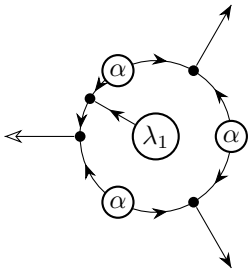
连同其 $\mathbb{Z}/2$-旋转，这就确定了 α 的所有非平凡值。

根据本节的前述结果，元素 α 是预循环结构的第一分量$m_{(2)}$。每个更高分量 $m_{(k)}$ 的上同调次数为 $dk-d-2k+4=3-k$，因为 $d=1$。由于 A 集中在零次，我们有 $C^{3-k}{}_{(k)}(A)=0$ 对于 $k\geq 4$，因此项 $m_{(\geq 4)}$ 均为零。此外，$m_{(3)}$ 中唯一可能非平凡的分量，是含零个输入的项 $m^0{}_{,0,0}{}_{(3)}$。

根据命题 19，我们可以找到管状箭图 $\Gamma^0_{(3)}, \Gamma^1_{(3)}$的线性组合，它们各有三个输出，使得方程 $[\mu, m_{(3)}] = [m_{(2)}, m_{(2)}]$的一个解为

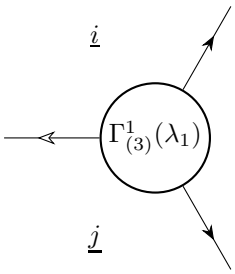
$$m_{(3)} = \frac{1}{2}(\Gamma^0_{(3)}(\lambda_0) + \Gamma^1_{(3)}(\lambda_1))$$

我们从第二项开始。我们知道， $\Gamma^1_{(3)}$ 中的项在具有三个出射腿的管状箭图中具有最高的（上同调）次数；所有这些项都彼此上同调等价，我们可以任选一个代表元；因此，$\Gamma^1_{(3)}(\lambda_1)$由下图给出



其中输入为 $\lambda_1 = 01[10|01|10] + 12[21|12|21] - 02[20|02|20]$。由于 α 仅在输入恰有一个箭头时才非零，因此计算该图时得到的非零项，只会出现在向每个 α各发送一个箭头的情况下。

我们分别针对圆周周围三个区域标记为对象 0、1、2 的每种情况计算该图；可以看到，如果三个标记相同，就会得到相消的贡献；只有恰有两个标记相同的情况才会产生非零项：



$$\underline{i} = \begin{cases} -\frac{1}{8}(ij) \otimes e_i \otimes ji, \text{ if } (ij) \text{ counter-clockwise} \\ \frac{1}{8}(ij) \otimes e_i \otimes ji, \text{ if } (ij) \text{ clockwise} \end{cases}$$

第一项 $\Gamma^0_{(3)}(\lambda_0)$ 更难计算，因为管状箭图 $\Gamma^0_{(3)}$ 的组合表达式较为复杂。不过，在这种情况下，我们无需写出整个组合就能进行计算。回顾第3.3.2节，我们有一个分解

$$\mathcal{T}_{(\ell)} = (\mathcal{T}_{(\ell)})^{\text{edge}} \oplus (\mathcal{T}_{(\ell)})^{\text{vertex}}$$

位于中心箭头落在圆的边或顶点上的管之间。对于维数 d 的任意选择（它为该空间赋予分次，并确定微分的符号），微分 ∂ 保持 $(\mathcal{T}_{(\ell)})^{\text{edge}}$，并在 $(\mathcal{T}_{(\ell)})^{\text{vertex}}$上分解为$\partial = \partial^{\text{edge}} + \partial^{\text{vertex}}$，其中 ∂^v 保持该空间。

在我们的情形中，$d=1$ 以及 $(\mathcal{T}^1_{(3)})$ 的同调次数属于 $-3,-2,-1,0,1,2$，因此该分解变为：

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}^1_{(3)})_{-3} &= (\mathcal{T}^1_{(3)})^{\mathrm{edge}}_{-3}\\ (\mathcal{T}^1_{(3)})_{-2} &= (\mathcal{T}^1_{(3)})^{\mathrm{edge}}_{-2}\otimes(\mathcal{T}^1_{(3)})^{\mathrm{vertex}}_{-2}\\ &\cdots\\ (\mathcal{T}^1_{(3)})_{2} &= (\mathcal{T}^1_{(3)})^{\mathrm{vertex}}_{2}\end{aligned}$$

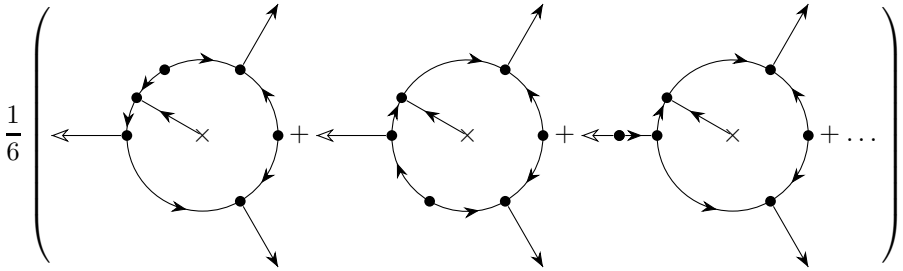
元素 $\Gamma^0_{(2)}\in(\mathcal{T}^1_{(3)})_{-1}$ 在上述直和下分解为 $(\Gamma^0_{(2)})^{\mathrm{edge}}+(\Gamma^0_{(2)})^{\mathrm{vertex}}$。我们注意到，将上述 α 的选择代入 $(\mathcal{T}^1_{(3)})^{\mathrm{edge}}_{-1}$ 中任意图的二价顶点，结果均为零。因此，我们所需的值由 $(\Gamma^0_{(2)})^{\mathrm{vertex}}$ 决定。

方程 $\Gamma_{(2)}$ 满足的条件是 $\partial\Gamma^0_{(2)}=-R(\Gamma^1_{(2)})$；结合与短正合列 $(\mathcal{T}^1_{(3)})^{\mathrm{edge}}\to(\mathcal{T}^1_{(3)})\to(\mathcal{T}^1_{(3)})^{\mathrm{vertex}}$ 相关联的上同调长正合列，这些事实表明，我们可以任选一个方程的解 X：

$$\partial^{\mathrm{vertex}}(X)=R(\Gamma^1_{(2)})$$

而项 $\Gamma^0_{(3)}(\lambda_0)$ 将等于 $X(\lambda_0)$。

现在我们给出这样一个解，由 $X=R(Y)$ 表示，其中 Y 是以下线性组合：[4]



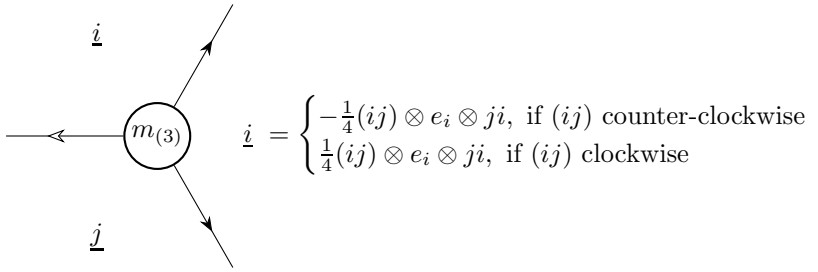
其中省略号表示对这些图的另外两种循环置换求和。将给定的 α 值以及三个区域上的标签 i、i、$j\neq i$ 代入 $X(\lambda_0)$ 进行计算，可得 18 个非零项，且这些项都相等；计入 $1/6$ 因子后，得到

$$\begin{cases}-\frac{3}{8}(ij)\otimes e_i\otimes ji, & \text{if } (ij) \text{ counter-clockwise}\\ \frac{3}{8}(ij)\otimes e_i\otimes ji, & \text{if } (ij) \text{ clockwise}\end{cases}$$

其他所有情况均为零。

[4]在 Y 的表达式中，我们省略了定向，但必须对它们作一致的选择

因此，我们得到所要计算的元素 $m_{(3)} = \frac{1}{2}(\Gamma^0_{(3)}(\lambda_0) + \Gamma^1_{(3)}(\lambda_1)$ 可以表示为



可以验证，此元素满足 $[\mu, m_{(3)}] + \alpha \circ \alpha = 0$ 和 $[\alpha, m_{(3)}] = 0$。换言之，我们对这个微分分次范畴上的预循环结构有了完全显式的描述：

推论21. 取上述的 $m_2 = \alpha$ 和 $m_{(3)}$，以及 $m_{(\geq 4)} = 0$，即可在 A上定义一个维数为1的预循环结构。

4.2. 单纯形提升。显然，我们构造的映射 Φ 应当是定义11中的非交换勒让德变换 $\mathcal{L}$ 某种意义上的逆映射。但这并非严格成立；首先， $\mathcal{L}$ 和 Φ 的定义都涉及作出选择。此外，这些映射联系起来的两边看起来并不相同：负循环同调中非退化元素的轨迹是线性空间中的一个锥形轨迹，而 Maurer-Cartan解的集合则是一个二次方程的解集。

然而，考察我们构造这些映射时所采用的迭代方式，可以看到，在每一步中，我们都必须求解一个方程，将负循环链 λ 的一个新分量$\lambda_{(k-2)}$ 与预循环结构 m 的一个新分量 $m_{(k)}$ 线性地联系起来。此外，这一关系来自这些选择空间之间的一个拟同构；空间 $(\mathcal{M}_{d-\mathrm{preCY}}(A))^{\mathrm{nondeg}}$ 应当具有一个由线性空间构成的迭代纤维化结构，其中每一步的纤维都通过拟同构与 $CC^*_-(A)$ 的一个分次分量相关联

事实证明，利用 Hin96; Get09], 等人发展起来的 Maurer-Cartan方程解的单纯集合理论，可以将这一点精确表述出来。我们将证明，上一节构造的映射 Φ 可以提升为单纯集合之间的一个弱等价。

4.2.1. 单纯Maurer-Cartan集合。设 $(\mathfrak{g}^*, \delta)$ 是定义在 $\Bbbk$ 上的幂零微分分次李代数。可以考察其 Maurer–Cartan 方程的朴素解集

$$MC(\mathfrak{g}^*) = \{y \in \mathfrak{g}^1 \mid \delta y + [y, y]/2 = 0\}$$

原则上它只有集合的结构。按照[Get09], 中的论述，我们回顾如何将其提升为单纯集合。对于任意 $n \geq 0$，记

$$\Omega^*(\Delta^n) = \Bbbk[t_0, \ldots, t_n]/\langle t_0 + \cdots + t_n - 1, dt_0 + \ldots dt_n\rangle$$

n-单形上的多项式微分形式构成的分次交换微分分次代数。这里， t_i 的次数为零，dt_i 的次数为一；微分为 $d(t_i)dt_i$ 和 $d(dt_i) = 0$。

以下命题/定义归功于 Hinich [Hin96]。

命题 22. 存在一个单纯集合 $MC_*(\mathfrak{g}^*)$，其 n-单纯形由下式给出

$$MC_n(\mathfrak{g}^*) = MC(\mathfrak{g}^* \otimes \Omega^*(\Delta^n)),$$

也就是说，由单形上 $\mathfrak{g}$-形式的微分分次李代数上的 Maurer–Cartan 方程 $(\delta + d)$ $y + [y, y]/2 = 0$ 的解集给出。

备注。在这一主题的文献中，“Maurer–Cartan”这一名称被用于指代该方程的两种不同表述；为避免混淆，我们来明确说明它们之间的关系。对于任意微分分次李代数 $(\mathfrak{g}^*, d)$，都可以考察方程$dx + [x, x]/2 = 0$；对于任意分次李代数 $\mathfrak{h}^*$，也可以考察方程$[y, y] = 0$，正如我们在本文前面所做的那样。

这两者通常都称为 Maurer–Cartan 方程；它们之间的关系是：若 $\mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{h}^*$ 作为分次李代数，且存在元素 $\mu \in \mathfrak{h}^1$ 使得 $[\mu, \mu] = 0$，并且对所有 $x \in \mathfrak{g}^*$ 都有$dx = [\mu, x]$，那么当我们寻找形如 $y = \mu + x$ 的解时，这两个方程等价。在我们的情形中，我们有

$$\mathfrak{g}^* = \prod_{\ell \geq 2} C^*_{(\ell,d)}(A), \qquad \mathfrak{h}^* = C^*_{[d]}(A) = \prod_{\ell \geq 1} C^*_{(\ell,d)}(A)$$

其中 μ 由我们固定的 A_∞结构给出；解 x 于是是所有满足 $\ell \geq 2$ 的$m_{(\ell)}$ 之和，而 y 则是完整的预循环结构 m，其中也包括$m_{(1)} = \mu$。

零单形的集合恰好就是我们的朴素集合 $MC(\mathfrak{g}^*)$。我们希望将此应用于微分分次李代数 $\mathfrak{g}^* = \prod_{\ell \geq 2} C^*_{(\ell,d)}(A)$。这并不完全可行，因为这个代数不是幂零的。尽管如此，注意我们可以在任意有限的 ℓ 处对其截断，从而得到一个幂零代数；而我们所需的 Maurer-Cartan解是这些截断代数上的解的逆极限。

让我们更精确地说明。假设我们有一个分次李代数 $\mathfrak{a}^*$，并赋予它一个降滤过

$$\mathfrak{a}^* = F^0\mathfrak{a}^* \supset F^1\mathfrak{a}^* \supset F^2\mathfrak{a}^* \supset \dots$$

满足如下性质：对于 $x \in F^i\mathfrak{a}^*$、$y \in F^j\mathfrak{a}^*$，有 $[x, y] \in F^{i+j}\mathfrak{a}^*$。于是我们考虑关于滤过 F 的完备化

$$\mathfrak{g}^* = \varprojlim_{i \geq 1} F^1\mathfrak{a}^*/F^i\mathfrak{a}^*, \qquad \mathfrak{h}^* := \widehat{\mathfrak{a}^*} = \varprojlim_{i \geq 0} \mathfrak{a}^*/F^i\mathfrak{a}^*$$

注意，每个截断部分 $F^1\mathfrak{a}^*/F^i\mathfrak{a}^*$ 都是一个幂零分次李代数，并且我们有一个自然的单射 $\mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{h}^*$。

如果我们有一个元素 $\mu \in \mathfrak{h}^1$，使得 $[\mu, \mu] = 0$和 $[\mu, -]$保持滤过，则这就在每个 $F^1\mathfrak{a}^*/F^i\mathfrak{a}^*$上定义了一个微分，并且每个映射 $F^1\mathfrak{a}^*/F^{i+1}\mathfrak{a}^* \to F^1\mathfrak{a}^*/F^i\mathfrak{a}^*$都是幂零微分分次代数的满射。由 [Hin96], 可知，这诱导出一个 Kan 纤维化

$$MC_*(F^1\mathfrak{a}^*/F^{i+1}\mathfrak{a}^*) \to MC_*(F^1\mathfrak{a}^*/F^i\mathfrak{a}^*)$$

连接两个 Maurer–Cartan 单纯集合。

定义 13. 微分分次李代数 $\mathfrak{g}^*$ 的 Maurer–Cartan 单纯集合是单纯集合的极限

$$MC_*(\mathfrak{g}^*) := \varprojlim_{i \geq 0} MC_*(F^1\mathfrak{a}^*/F^{i+1}\mathfrak{a}^*).$$

我们感兴趣的情形是

$$\mathfrak{a}^* = \bigoplus_{\ell \geq 1} C^*_{(\ell,d)}(A)[1]$$

带有降滤过

$$F^i\mathfrak{a}^* = \bigoplus_{\ell \geq i+1} C^*_{(\ell,d)}(A)[1].$$

于是，分次李代数 $\mathfrak{h}^*$ 恰好就是 $C^*_{[d]}(A)[1],$，即预 Calabi–Yau 结构的维数为 d 时所处的微分分次李代数。元素 μ 上的条件恰好是关于 A的 A_∞-结构的条件；令 $\mathfrak{g}^*$ 为预 Calabi–Yau 结构其余部分所处的微分分次李代数，并令其微分为 $[\mu, -]$，我们便得到零单形集合 $MC_0(\mathfrak{g}^*)$ 与上一节中朴素的 d-预 Calabi–Yau 结构集合 $\mathcal{M}_{d-\mathrm{preCY}}(A)$ 之间的一个对应。

4.2.2. 德利涅群胚。现在我们回顾 Maurer–Cartan 方程的解上的另一类结构，即“德利涅群胚”。让我们在分次李代数的图景中对其进行描述。若 $\mathfrak{n}^*$ 是一个幂零分次李代数，则其零次部分存在一个指数作用

$$e^{\mathrm{ad}(-)} : \mathfrak{n}^0 \times \mathfrak{n}^* \to \mathfrak{n}^*$$

由

$$e^{\mathrm{ad}(x)}(y) = y + [x,y] + \frac{1}{2!}[x,[x,y]] + \frac{1}{3!}[x,[x,[x,y]]] + \dots$$

这个指数作用可扩展为（完备化的）泛包络代数 $\hat{U}(\mathfrak{n}^0)$ 的类群元的作用。

现在注意到， $e^{\mathrm{ad}(x)}$ 保持（分次）Maurer–Cartan 方程的解集不变

$$MC(\mathfrak{n}^*) = \{y \in \mathfrak{n}^1 \mid [y,y] = 0\}$$

因为伴随作用保持该方程不变；因此我们可以将 $MC(\mathfrak{n}^*)//\mathfrak{n}^0$ 视为一个群胚。

同样，我们必须稍加谨慎，因为我们想将这一形式体系应用于并非幂零的分次李代数 $C^*_{[d]}(A)[1],$。再次考虑微分分次代数的情形

$$\mathfrak{g}^* = \lim_{\overleftarrow{i \geq 1}} F^1\mathfrak{a}^*/F^i\mathfrak{a}^*$$

其微分 $[\mu, -]$ 位于分次代数之中

$$\mathfrak{h}^* = \lim_{\overleftarrow{i \geq 1}} \mathfrak{a}^*/F^i\mathfrak{a}^*$$

因此我们看到， $\mathfrak{g}^0$ 的指数作用在每个截断部分 $F\mathfrak{a}^*/F^i\mathfrak{a}^*$ 上都有良好定义，因而可以提升为对分次李代数$\mathfrak{h}^*$的作用，并保持 Maurer–Cartan 方程不变。因此我们也有一个群胚$MC(\mathfrak{h}^*)//\mathfrak{g}^0$。

我们采用这种记号（同时包含 $\mathfrak{h}^*$ 和 $\mathfrak{g}^*$），以提醒我们，$\mathfrak{g}^*$ 的作用还涉及元素 $\mu \in \mathfrak{h}^*$，从而产生高阶项 $[x,\mu], \frac{1}{2}[x,[x,\mu]]$ 等，但不会改变 μ 本身。因此，我们可以在 $\mathfrak{h}^*$ 上寻找形如 $\mu + x$ 的 Maurer-Cartan 方程解，其中 $x \in F^2\mathfrak{h}^*$；这是一个子群胚$MC(\mathfrak{h}^*, \mu)//\mathfrak{g}^0$。

将这个群胚与我们先前定义的单纯集合进行比较可知，在所讨论的代数支撑于非负次数上的情况下，有如下事实 [Get09]:

命题 23。若 $\mathfrak{g}^*$ 在负次数上消失，则存在一个自然的集合双射

$$\pi_0(MC_*(\mathfrak{g}^*)) \cong \pi_0(MC(\mathfrak{h}^*, \mu)//\mathfrak{g}^0)$$

它在 Maurer–Cartan 单纯集合的连通分支与德利涅群胚的轨道集合之间建立了对应。

4.2.3. 单纯形等价。让我们回到 Maurer–Cartan 单纯集合，并聚焦于光滑 A 的相关情形 $\mathfrak{g}^* = \prod_{\ell \geq 2} C^*_{(\ell,d)}(A)$。现在我们证明本节的主要结果，将映射 $\Phi\colon CC_d^-(A) \to (\mathcal{M}_{d-\mathrm{preCY}}(A))^{\mathrm{nondeg}}$提升为弱单纯等价。

这个提升的目标显然是 Maurer–Cartan 单纯集合中与上述微分分次李代数相对应的非退化轨迹:

$$\mathcal{M}^{\Delta}_{d-\mathrm{preCY}}(A) := MC_*(\prod_{\ell \geq 2} C^*_{(\ell,d)}(A))$$

源由在 Dold–Kan 对应下，用负循环链复形对应的单纯集合替换它而得。回顾一下 Kan 函子

$$K_* : \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathrm{Ab}) \to \mathrm{sAb}$$

它给出了集中在非负次数上的阿贝尔群链复形与单纯阿贝尔群之间的等价。我们还可以进一步遗忘阿贝尔群结构，从而得到一个单纯集合。

函子 K_* 将链复形（V， δ）映射为 n-单形

$$K_n(V) = Z^0(C^*(\Delta^n) \otimes V, d + \delta)$$

其中（C^*（Δ^n） d）是 n-单形上的归一化单纯上链复形。这个复形的一种表示方式是使用线性微分形式

$$\omega_{i_0,\ldots,i_k} = k! \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j t_{i_j} dt_{i_0} \ldots \widehat{dt_{i_j}} \ldots dt_{i_k}$$

对任意 $1 \leq k \leq n$。

现在考虑链复形 $\tau_{\geq 0}$（CC^-_{*+d}（A）），即 $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathrm{Ab})$ 中的对象：将负循环复形向下平移 d，并截断使其集中在非负次数。

该复形中的一个零次循环由一个次数为 d 的负循环链表示

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \ldots$$

在 $b + uB$ 下封闭，其中 $\lambda_i \in C_{d+2i}(A)$。令我们固定一个非退化的“第一分量” $\lambda_0 = \nu$ 及其逆$\alpha \in C^d_{(2)}(A)$，它们分别表示 $\mathrm{Hom}_{A-A}(A^!, A[d])$ 和 $\mathrm{Hom}_{A-A}(A[d], A^!)$ 中双模的逆态射。

现在，我们要求两侧的“第一分量”分别为 $\lambda_0 = nu$ 和 $m_{(2)} = \alpha$ 处的常值单形，从而考虑两侧的单纯子集。下面来更

准确地描述这一点。在源端 $K_*(\tau_{\geq 0}(CC^-_{*+d}(A)))$，我们将每个 n-单形 σ 分解为关于 u 的各次幂以及形式基 $\{\omega_{i_0,\dots,i_k}\}$ 的和

$$\sigma(\underline{t}) = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda_{p,k,\{i_0,\dots,i_k\}} u^p \otimes \omega_{i_0,\dots,i_k}$$

对于任意这样的 n-单形，我们可以要求它的 $p=0$ 分量（也就是它在 $u=0$ 处的“值”）沿单纯形坐标 t_i 保持常数，并且等于ν。也就是说，我们要求 $\lambda_{0,\ k,\ \{i_0,\dots,i_k\}} = 0$ 对所有 $k>0$ 和 $\lambda_{0,\ 0,\ \{\}} = \nu$均成立。此条件定义了 $K_*(\tau_{\geq 0}(CC^-_{*+d}(A)))$的一个单纯形子集，我们将其记为$K_*(\tau_{\geq 0}(CC^-_{*+d}(A)))^{\lambda_0=\nu}$。

另一方面，我们也可以做同样的事，将“第一分量”$m_{(2)}$ 固定为常数，并令其等于我们选定的拟逆 α。 $\mathcal{M}^{\Delta}_{d-\mathrm{preCY}}(A)$的每个 n-单形都是微分分次李代数 $\prod_{\ell\geq 2} C^*_{(\ell,d)}(A)) \otimes \Omega^*(\Delta^n)$ 上 Maurer–Cartan 方程的一个解。这里，$\Omega^*(\Delta^n)$ 由单纯形坐标 t_0、 ..... 、t_n上的多项式微分形式张成；我们取该解的 $\ell=2$ 部分，并要求其为零次且作为微分形式保持常数，等于 α。这同样定义了一个单纯形子集，记为 $\mathcal{M}^{\Delta}_{d-\mathrm{preCY}}(A)^{m_{(2)}=\alpha}$。

现在我们可以陈述本节的主要结果了。回顾一下，在定义 12 中我们定义的集合映射 Φ，取一个非退化负循环链$\lambda = \lambda_0 + \dots$，其首项 $\lambda_0 = \nu$具有一个拟逆 α，并给出一个满足 $m_{(2)} = \alpha$的预 Calabi–Yau 结构 $m = \mu + m_{(2)} + \dots$。

定理 24。映射 Φ 提升为单纯集合之间的弱等价

$$\Phi^{\Delta} : K_*(\tau_{\geq 0}(CC^-_{*+d}(A)))_{\lambda_0=\nu} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{M}^{\Delta}_{d-\mathrm{preCY}}(A)_{m_{(2)}=\alpha}$$

取连通分支，并将每对互逆同调类 $[\lambda]$ 和 $[\alpha]$所得到的双射合在一起，我们得到集合之间的双射

$$HC^-_d(A)_{\mathrm{nondeg}} \simeq \pi_0(\mathcal{M}^{\Delta}_{d-\mathrm{preCY}}(A)_{\mathrm{nondeg}})$$

它建立了（同调类意义下的）光滑 CY 结构与非退化预 Calabi–Yau 结构空间的连通分支之间的对应关系，二者的维数均为 d。

证明。注意，左侧是单形上的归一化余链，而右侧是微分形式；利用上述代表元 $\omega_{i_0,\dots,i_k}$，我们将前者嵌入后者。

给定该嵌入后，为了构造单纯形提升 Φ^{Δ}，我们只需将带状箭图的求值映射线性延拓到 $\Omega^*(\Delta^n)$ 上，并使用定义 Φ 时采用的相同公式。例如，给定 $m_{(2)}$，在命题 19 的证明中，我们证明了可以找到如下形式的 $m_{(3)}$ 的解

$$m_{(3)} = \tilde{\Gamma}^0_{(3)}(\lambda_0) + \Gamma^1_{(3)}(\lambda_1) + [\mu, \beta_{(3)}] + [m_{(2)}, \beta_{(2)}]$$

其中， $\tilde{\Gamma}^0$ 和 $\Gamma^1_{(3)}$ 中的带状箭图都只有具有 1 个或 2 个出箭头的顶点。

给定左侧一个 n-单形，其由线性形式 $\lambda(\underline{t})$ 给出，我们可以用它代替 λ，得到形式 $m_{(3)}(\underline{t})$；按照我们证明命题 19 时所用的相同论证，并将其线性扩展到微分形式上，这个形式将满足方程

$$[\mu + d, m_{(3)}(\underline{t})] = [m_{(2)}, m_{(2)}]$$

它是截断部分$\left(C^*_{[d]}(A)[1]/\prod_{i>\ell} C^*_{(\ell,d)}(A)\right)\otimes\Omega^*(\Delta^n)$ 上 Maurer–Cartan 方程的新分量。我们对 $\ell=3$、4、..... 继续迭代；每一步都会得到一些多项式微分形式 $m_{(\ell)}(\underline{t})$，它们解出该方程的一个新分量，其中 $m_{(2)}$ 固定为常数，取值为 α。

由求值与所有相关微分的相容性可知，在每个新步骤中，这都定义了一个单纯集合之间的映射。回想一下，根据 Φ 的定义，在步骤 ℓ，此映射仅依赖于 λ，精确到含有 u 指数为 $\ell-2$ 的项。

这些映射与截断所诱导的映射相互交织，因此我们得到一个单纯集合塔之间的映射

$$\begin{array}{ccc}
\cdots\longrightarrow K_*(\tau_{\geq 0}(CC^-_{*+d}(A)_{u^2=0}))_{\lambda_0=\nu} & \longrightarrow & K_*(\tau_{\geq 0}(CC^-_{*+d}(A)_{u=0}))|_{\lambda_0=\nu} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\cdots\longrightarrow MC_*\left(\frac{\prod_{\ell\geq 2} C^*_{(\ell,d)}(A)[1]}{\prod_{\ell\geq 4} C^*_{(\ell,d)}(A)[1]}\right)_{m_{(2)}=\alpha} & \longrightarrow & MC_*\left(\frac{\prod_{\ell\geq 2} C^*_{(\ell,d)}(A)[1]}{\prod_{\ell\geq 3} C^*_{(\ell,d)}(A)[1]}\right)_{m_{(2)}=\alpha}
\end{array}$$

而所需的映射 Φ^Δ 是由这些塔的极限之间诱导的映射。

现在我们证明，如此定义的映射 Φ^Δ 是单纯集合之间的弱等价。每个水平映射都是 Kan 纤维化，因此只需证明每个垂直映射都是弱等价。我们用归纳法来证明；最后一列实际上只是点的恒等映射（视为全退化的 n-单形）；这是因为我们手动固定了 λ_0 和 $m_{(2)}$ 分量，使其恰好等于 ν 和 α。

对于归纳步骤，我们聚焦于一个单独的方块

$$\begin{array}{ccc}
K_*(\tau_{\geq 0}(CC^-_{*+d}(A)_{u^i=0}))_{\lambda_0=\nu} & \longrightarrow & K_*(\tau_{\geq 0}(CC^-_{*+d}(A)_{u^{i-1}=0}))|_{\lambda_0=\nu} \\
\downarrow & & \downarrow \\
MC_*\left(\frac{\prod_{\ell\geq 2} C^*_{(\ell,d)}(A)[1]}{\prod_{\ell\geq i+2} C^*_{(\ell,d)}(A)[1]}\right)_{m_{(2)}=\alpha} & \longrightarrow & MC_*\left(\frac{\prod_{\ell\geq 2} C^*_{(\ell,d)}(A)[1]}{\prod_{\ell\geq i+1} C^*_{(\ell,d)}(A)[1]}\right)_{m_{(2)}=\alpha}
\end{array}$$

如果右列是弱等价，根据 [Lur09a]，只需证明左侧竖直映射对水平映射在各点（即 0-单形）上的每对纤维都诱导出弱等价。

通俗地说，我们有一个关于 $C^*_{[d]}(A)[1]$ 的 Maurer-Cartan 方程的“实际”解，精确到 $m_{(i)}$ 项，对应于一个截断的负循环链 $\lambda=\lambda_0+\lambda_1 u+\cdots+\lambda_{i-2}u^{i-2}$。接着，我们考察映射 Φ^Δ，它作用于一个微分形式

$$\lambda=\lambda_0+\lambda_1 u+\cdots+\lambda_{i-2}u^{i-2}+\lambda_{i-1}(\underline{t})u^{i-1}$$

其中 $\lambda_{i-1}(\underline{t})$ 关于 n-单形上的 t_i 坐标是线性的。该形式只通过对 $\Gamma_{(i+1)}$ 中最后一个带状箭图求值而产生依赖，也就是这一项

$$\Gamma^{i-1}_{(i+1)}(\lambda_{i-1}(\underline{t}))$$

因此，我们只需证明运算 $\Gamma^{i-1}{}_{(i+1)}(-)$ 作为一个映射

$$C_*(A)\otimes C^*(\Delta^n)\to C^*_{(i+1)}(A)\otimes\Omega^*(\Delta^n)$$

在闭形式与满足 Maurer–Cartan 方程的 $i+1$ 分量的形式之间定义了一个弱等价。这可由命题 17 的证明以及归一化单纯余链到微分形式的包含是一个同伦收缩这一事实得出（德拉姆定理的单纯版本）。□

4.2.4. 特例：群胚。定理 24 对任意光滑的 A_∞ 代数/范畴A均成立，不需要对次数作任何假设。现在回忆一下，如果一个微分分次李代数 $\mathfrak{g}$ 在负次数上为零，那么其Maurer-Cartan解集合的描述可以比完整的单纯集合更简单且等价，即德利涅群胚$MC(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}^0$。

以下结果可视为定理 24 在 A 负次数霍赫希尔德上同调为零时的一个细微推广。

定理25。假设对所有 $i<0$，$HH^i(A)=0$。那么存在一个双射

$$HC_*^-(A)_{\mathrm{nondeg}} \simeq \pi_0(MC(\mathfrak{g})_{\mathrm{nondeg}}/\mathfrak{g}^0)$$

其中 $\mathfrak{g}=\prod_{\ell\geq 2} C^*_{(\ell,d)}(A)$，非退化负循环同调类与非退化预 Calabi–Yau 结构群胚中的轨道之间存在双射。

这几乎是定理 24 和命题 23 的直接推论；之所以不能直接得出，只是因为我们并未假设 $\mathfrak{g}$ 在负次数的链级上消失。尽管如此，我们仍可以通过迭代计算明确证明这一事实，下面简要说明。

证明。首先注意，尽管微分分次李代数 $\mathfrak{g}$ 不是幂零的，$\mathfrak{g}$ 的作用仍然是良定义的；每个元素 $x\in\mathfrak{g}$ 都是由至少有两个出箭头的顶点组成的和，因此 $[x,-]$ 会增加出箭头的数量。所以，在每个截断层级 $\prod_{i>2} C^*_{i,\ d}(A)[1]/\prod_{i>\ell} C^*_{i,\ d}(A)$ 上，定义 $\exp(x)y$ 的和都是有限的，而且该作用可提升到极限。

回忆一下，我们有映射

$$\Phi : CC_d^-(A)_{\mathrm{nondeg}} \longleftrightarrow (\mathcal{M}_{d-\mathrm{preCY}}(A))_{\mathrm{nondeg}} : \mathcal{L}$$

其中一个方向比较容易：取 $\lambda\in CC_d^-(A)_{\mathrm{nondeg}}$，并令 $m=\Phi(\lambda)$；根据定义，这满足

$$e_m=\Gamma(m,\lambda)+[m,p]$$

其中 e_m 是与 m相关的“能量函数”，Γ 是我们先前定义的管状箭图之和，且 $p\in\prod_{i>2} C^1_{i,\ d}(A)$。现在定义 $\lambda'=\mathcal{L}(m)$，根据定义可得

$$e_m=\Gamma(m,\lambda')+[m,q]$$

对于某个其他元素 $q\in\prod_{i>2} C^1_{i,\ d}(A)$。因此 $\Gamma(m,\lambda'-\lambda)=[m,q-p]$，并且由于 $\Gamma(m,-)$ 是上同调中的拟同构，我们有 $[\lambda']=[\lambda]$

剩下的方向较难，必须在 ℓ 中迭代完成。现在我们从一个预循环结构 m 开始，取 $\lambda=\mathcal{L}(m)$ 和 $n=\Phi(\lambda)$；沿用符号p,q，它们满足以下方程

$$e_m=\Gamma(m,\lambda)+[m,p],\quad e_n=\Gamma(n,\lambda)+[n,q]$$

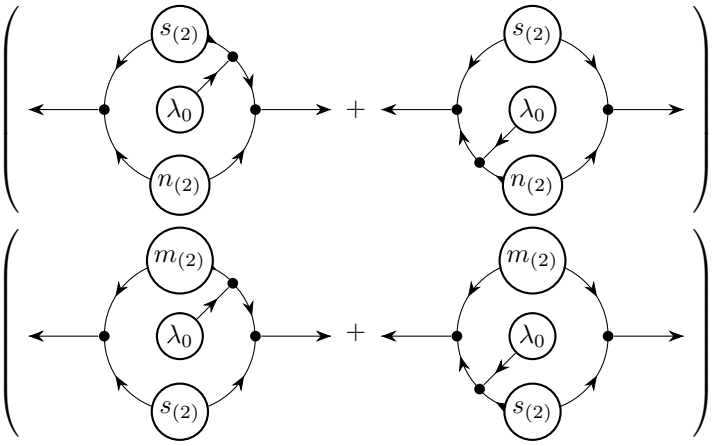
我们必须证明存在

$$x=x_{(2)}+x_{(3)}+\cdots\in\prod_{\ell>2} C^1_{\ell,d}(A)$$

使得 $n = m + [x, m] + \frac{1}{2}[x, [x, m]] + \ldots$。在 $\ell = 2$ 层面，这只不过是 $n_{(2)} = m_{(2)} + [x_{(2)}, \mu]$。

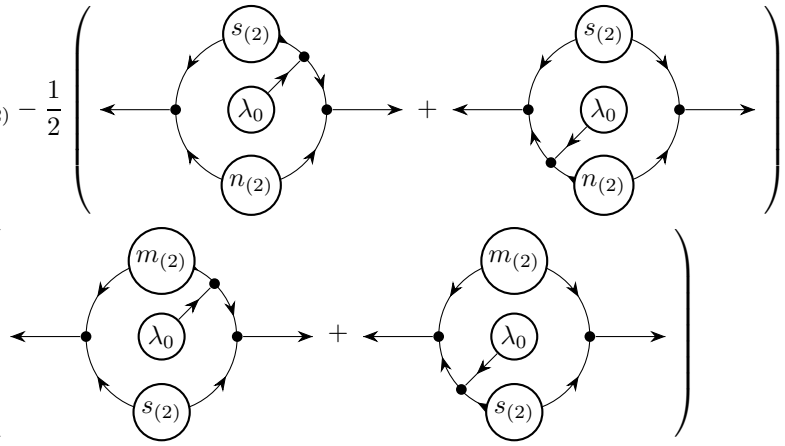
那么我们写作 $s_{(2)} = m_{(2)} - n_{(2)}$。将 $n_{(2)}$、$m_{(2)}$ 满足的方程相减，得到

$$
\begin{aligned}
-s_{(2)} &= \Gamma(n, \lambda) - \Gamma(m, \lambda) + [\mu, q_{(2)} - p_{(2)}] \\
&= -\frac{1}{2}\left(\right. \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\right. \\
&\quad + [\mu, q_{(2)} - p_{(2)}]
\end{aligned}
$$



但是，由于 $\Gamma_{(2)}$、λ_0 在相关微分下封闭，且 $m_{(2)}$ 和 $n_{(2)}$ 都是 λ_0 的逆的代表元，上述括号中的每一项都与 $s_{(2)}$ 上同调等价。换言之，存在 $r_{(2)} \in C^{d-1}{}_{(2)}(A)$，使得

$$
\begin{aligned}
[\mu, r_{(2)}] &= 2s_{(2)} - \frac{1}{2}\left(\right. \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\right.
\end{aligned}
$$

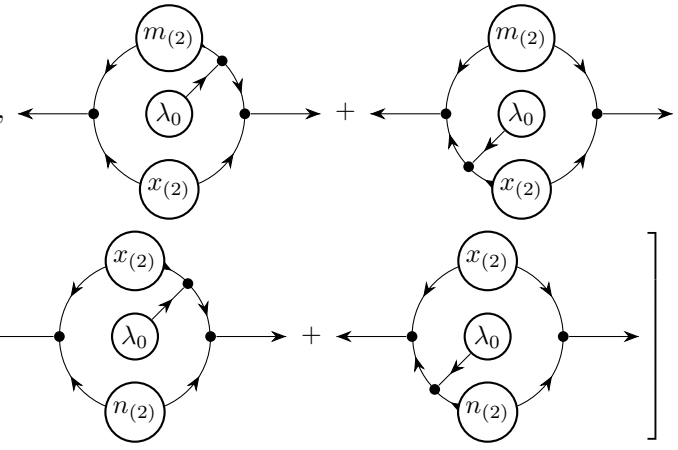


利用这一事实，我们得到 $s_{(2)} = [\mu, r_{(2)} + q_{(2)} + p_{(2)}]$，因此存在一个解 $s_{(2)} = [x_{(2)}, \mu]$。

为了求解下一阶的方程 $\ell = 3$，我们还必须证明 $x_{(2)}$ 的这个解可以具有某种特定形式。将 $s_{(2)}$ 代入

方程，并再次利用 $\Gamma_{(2)}$、 λ_0 的闭性，我们得到

$$[\mu, x_{(2)}] = \frac{1}{2}\Big[\mu,$$



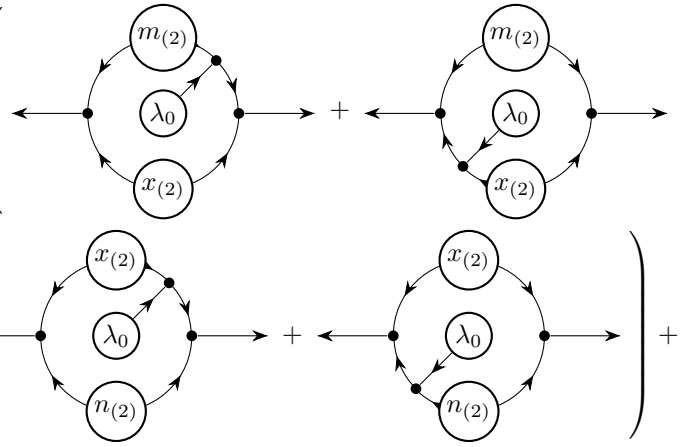
$$+ [\mu, q_{(2)} - p_{(2)}]$$

注意， $[\mu, x_{(2)}]$ 是 $C^*_{(2)}(A)$中的一个 $d-1$ 次闭元素。现在，由于元素$m_{(2)}$ 是非退化的，我们有一个双模的拟同构$A \cong A^!{}[d]$ ，因此我们有一个复形的拟同构

$$C^*_{(2)}(A) \simeq \mathrm{Hom}_{A\text{-}A}(A, A^!) \simeq \mathrm{Hom}_{A\text{-}A}(A, A[-d]) \simeq C^{*-d}(A)$$

因此，由于我们假设 $HH^{-1}(A) = 0$ ，我们可以找到$x_{(2)}$ 来解方程

$$x_{(2)} = \frac{1}{2}\Big($$



$$+ q_{(2)} - p_{(2)}$$

模去 $[\mu, -]$正合项。对于下一步 $\ell = 3$，我们写作 $n_{(3)} = m_{(3)} + [x_{(2)}, m_{(2)}] + \frac{1}{2}[x_{(2)}, [x_{(2)}, \mu]] - s_{(3)}$，并写出相应的方程，将上述$x_{(2)}$的解代入其中，在 $s_{(3)} = [\mu, x_{(3)}]$中求解$x_{(3)}$ 。如此对每个ℓ依次进行，就得到一个解 $x = x_{(2)} + x_{(3)} + \ldots$，即将 m 变换为n的“规范变换”。□

References

[Abb13] Hossein Abbaspour. 关于 Hochschild 复形的代数结构。2013。arXiv: 1302.6534。

[Abo11] Mohammed Abouzaid。《一个余切纤维生成福克亚范畴》。载于：《数学进展》228.2（2011），第 894–939 页。[Ada56] J Frank Adams。《关于余条构造》。载于：《美国国家科学院院刊》42.7（1956），第 409–412 页。[Ale+97] Mikhail Alexandrov、Albert Schwarz、Oleg Zaboronsky 和马克西姆·孔采维奇。《主方程的几何与拓扑量子场论》。载于：《现代物理学国际期刊 A》12.07（1997），第 1405–1429 页。[BCS21] Tristan Bozec、Damien Calaque 和 Sarah Scherotzke。乘法预射影代数的卡拉比–丘结构。2021。arXiv: 2102.12336。[BCS22] Tristan Bozec、Damien Calaque 和 Sarah Scherotzke。（拟）双辛代数上的卡拉比–丘结构。2022。arXiv: 2203.14382。[BD18] Christopher Brav 和 Tobias Dyckerhoff。相对卡拉比–丘结构 II：对象模空间中的移位拉格朗日子。2018。arXiv: 1812.11913。[BD19] Christopher Brav 和 Tobias Dyckerhoff。《相对卡拉比–丘结构》。载于：《数学汇刊》155.2（2019），第 372–412 页。[BF86] Dan Burghelea 和 Zbigniew Fiedorowicz。《循环同调与空间的代数 K 理论——II》。载于：Topology 25.3（1986），第 303–317 页。[CG] Ralph Cohen 和 Sheel Ganatra。卡拉比–丘范畴、余切丛的 Floer 理论与底空间的弦拓扑。URL：http:// math.stanford.edu/ralph/papers.html。[Cos05] Kevin Costello。与拓扑共形场论相关的格罗莫夫–维滕势。2005。arXiv: math/0509264。[Cos07] Kevin Costello。《拓扑共形场论与卡拉比–丘范畴》。载于：《数学进展》210.1（2007），第 165–214 页。[Des22] Yash Deshmukh。Deligne–Mumford 紧化的同伦论描述。2022。arXiv: 2211.05168。[DS11a] Daniel Dugger 和 David I Spivak。《拟范畴中的映射空间》。载于：《代数与几何拓扑》11.1（2011），第 263–325 页。[DS11b] Daniel Dugger 和 David I Spivak。《拟范畴的刚性化》。载于：《代数与几何拓扑》11.1（2011），第 225–261 页。[FHT95] Yves F´elix、Steve Halperin 和 Jean-Claude Thomas。《拓扑学中的微分分次代数》。载于：《代数拓扑手册》。Elsevier，1995，第 829–865 页。[Gan13] Sheel Ganatra。缠绕福克亚范畴的辛上同调与对偶性。2013。arXiv: 1304.7312。[Gan19] Sheel Ganatra。循环同调、 S^1-等变 Floer 上同调与卡拉比–丘结构。2019。arXiv: 1912.13510。[Get09] Ezra Getzler。《幂零代数的李理论》。载于：Annals of Mathematics（2009），第 271–301 页。[Gin06] Victor Ginzburg。卡拉比–丘代数。2006。arXiv: math/0612139。

[Goo85] Thomas G Goodwillie。《循环同调、导子与自由环路空间》。载于：Topology 24.2（1985），第 187–215 页。[Hin96] Vladimir Hinich。Deligne 群胚的下降。1996。arXiv：alg-geom/9606010
[HT10] Kathryn Hess 和 Andrew Tonks。《环群与余条构造》。载于：美国数学会会刊 138.5（2010），第 1861–1876 页。[Kon09] Maxim Kontsevich。同调代数的辛几何。2009。URL：https://www.ihes.fr/~maxim/TEXTS/Symplectic_AT2009.pdf。[KS06] Maxim Kontsevich 和 Yan Soibelman。《A∞代数、A∞范畴与非交换几何札记 I》。2006。arXiv：math/0606241。[KS19] Daniel Kaplan 和 Travis Schedler。乘法预射影代数是 2-卡拉比–丘。2019。arXiv：1905.12025。[KTV21] Maxim Kontsevich、亚历克斯·武田和扬尼斯·弗拉索普洛斯。预卡拉比–丘代数与拓扑量子场论。2021。arXiv：2112.14667。[Lur09a] Jacob Lurie。《高阶拓扑斯理论》。普林斯顿大学出版社，2009。[Lur09b] Jacob Lurie。《拓扑场论的分类》。载于：Current Developments in Mathematics 2008（2009），第 129–280 页。[Pan+13] Tony Pantev、Bertrand To¨en、Michel Vaqui´e 和 Gabriele Vezzosi。《移位辛结构》。载于：高等科学研究所数学出版物 117（2013），第 271–328 页。[Pri20] JP Pridham。非交换导出预栈上的移位双辛结构与双泊松结构。2020。arXiv：2008.11698。[Riv19] Manuel Rivera。重探 Adams 余条构造。2019。arXiv：1910.08455。[RS19] Manuel Rivera 和 Samson Saneblidze。《路径纤维化的组合模型》。载于：同伦及相关结构杂志 14.2（2019），第 393–410 页。[RZ18] Manuel Rivera 和 Mahmoud Zeinalian。《立方刚性化、余条构造与基点环路空间》。载于：《代数与几何拓扑》18.7（2018），第 3789–3820 页。[She20] Nick Sheridan。《非交换霍奇理论中的公式》。载于：同伦及相关结构杂志 15.1（2020），第 249–299 页。[ST16] Vivek Shende 和 Alex Takeda。拓扑福柯范畴上的卡拉比–丘结构。2016。arXiv：1605.02721。[Yeu18] Wai-kit Yeung。预卡拉比–丘结构与表示的模空间。2018。arXiv：1802.05398。