厘清分布式设施选址的失真度

Aris Filos-Ratsikas[1], PanagiotisKanellopoulos[2],
Alexandros A. Voudouris[2] 和 Rongsen Zhang[2]

[1]信息学院，爱丁堡大学，英国[2]计算机科学与电子工程学院，埃塞克斯大学，英国

arXiv:2301.01604v1 [cs.GT] 4 Jan 2023

摘要

我们研究分布式设施选址问题：实数直线上的个体位置被划分到互不相交的选区中，目标是选择一个点以满足特定标准，例如优化目标函数或避免策略行为。在我们的分布式环境中，机制分两步运行：首先，为每个选区选择一个点，作为该选区内代理人所报告位置的代表；然后从这些代表点中选出一个作为最终输出。我们考虑两类机制：不受限制 机制假设代理人直接如实提供自己的位置作为输入；策略无关 机制则针对具有策略行为的代理人，旨在激励他们如实报告自己的位置。对于这两类机制，我们都给出了若干最小化社会目标下最优近似比的紧确界限，其中包括广为人知的社会成本（代理人与所选点之间的总距离）和最大成本（所有代理人与所选点之间的最大距离），以及其他专为分布式环境量身定制的公平性启发目标。

1 引言

社会选择理论探讨了一个基本问题：如何将不同个体的意见或偏好汇总为集体决策。社会决策的质量可以通过多种方式衡量，例如经济学中通常采用的公理性质，或主要源自计算机科学文献的定性指标。其中最著名的指标是失真度 [Procaccia 和 Rosenschein提出的 2006], 它能准确衡量社会选择规则（或一类此类规则）的（非）效率；这类规则通常在某些限制下运行，例如无法充分引出代理人的偏好。

过去十年来，在许多不同的设定中，社会选择规则（或机制）的失真度一直是研究的焦点；关于这一领域的概述，可参见Anshelevich 等人 [2021] 的近期综述。绝大多数既有研究都假设一种基本设定：个体集合中的代理人对一组可能结果（备选项）具有基数（即数值）偏好，研究目标是量化机制在仅获得关于代理人偏好的有限信息（通常是与基数值一致的排序）时所能达到的最佳失真度，并以社会福利为目标，即所有代理人对所选结果的价值总和[Anshelevich 等人，2015年，Boutilier 等人，2015年，Ebadian 等人，2022年，Gkatzelis 等人， 2020]。

然而，在许多情况下，实际情形往往并没有那么简单。例如，在选举中，代理人（此时是投票者）会自然或人为地划分为若干选区，由各选区选出自己的代表，再仅根据这些代表选出一位最终获胜者。更一般地说，决策过程往往是分布式的，也就是说，决策首先在地方层级进行，由互不相交的代理人群体分别作出，然后将这些决策汇总为一个集体结果。这类情形

无法用上述简单设定来描述，并且在衡量社会选择机制的效率时会带来重要的挑战和复杂问题。

为刻画上述问题中提及的更复杂情形，Filos-Ratsikas 等人[2020] 率先研究了分布式社会选择中的失真度。在这种情形下，决策由按以下方式运作的机制作出：机制首先根据一场地方选举，为每个选区选出一个代表性备选方案，该选举由选区内的代理人担任投票者；随后再从这些代表中选出一位作为获胜者。在他们的工作中，Filos-Ratsikas 等人 [2020] 考虑了这样一种环境：代理人对可能结果具有归一化基数估值。在后续工作中，Anshelevich 等人 [2022] 在多年来主导失真度研究文献的、广受欢迎的度量社会选择环境中研究了同一问题。在这种环境下，代理人和备选项都是度量空间中的点，距离刻画不同轴向上的物理距离或意识形态距离。Anshelevich 等人 [2022] 的研究确定了在社会福利以及其他若干适用于分布式环境的目标上具有较低失真界的机制，并通过（几乎）匹配的下界探讨了分布式机制设计的局限性。

值得注意的是，Anshelevich 等人 [2022] 仅考虑了离散的社会选择设定，其中代理人必须从一个有限备选方案集中进行选择。许多现实问题更适合建模为备选项构成连续统的设定（例如，以实数直线表示）。传统上，这种设定称为设施选址 [Procaccia 和 Tennenholtz， 2013] 其集中式变体是社会选择理论中研究最为深入的主题之一；详见Chan 等人 [2021] 最近发表的综述，其中提供了详细概述。连续设定的分布式变体最早由Filos-Ratsikas 和 Voudouris [2021], 研究，他们给出了以社会成本目标（即所有代理人的成本总和）衡量的机制失真度的上界和下界。Filos-Ratsikas 和 Voudouris [2021] 考察了两类机制：（a）仅受其在分布式环境中运行这一条件限制的机制；（b）还受到策略无关条件限制的机制，即不会激励代理人谎报自己的偏好。对于后一类情况，作者找到了失真度最优的机制；而对于前一类情况，他们只证明了失真度落在以下区间内$[2, 3]$ ，因此留下了一个开放问题：失真度为2 的机制是否确实存在。我们的首项贡献是肯定地解决了这一开放问题：我们设计了一种新颖的分布式设施选址机制，其在社会成本目标下的失真度为2 。

除了社会成本目标之外，Anshelevich 等人 [2022] 还确定了离散设定中的另外三个目标，这些目标对于分布式环境尤其具有意义，即任意选区内任一代理人的最大成本、每个选区内代理人成本总和的最大值，以及每个选区内代理人最大成本的总和。采用类似的方法，我们研究了连续设定中的这四个目标，并分别在有策略无关性要求和无策略无关性要求的情况下，为分布式机制的失真度提供上界和下界。我们给出的所有界都是紧的，这意味着我们完全确定了实数线上分布式设施选址的失真度。下面将更详细地介绍我们所关注的分布式设施选址设定以及我们的研究结果。

1.1 设定与结果

我们考虑一种设施选址设定，其中一组代理人 位于实数直线上，并被划分为互不相交的选区。分布式机制 以代理人的位置为输入，并输出直线上的一个点，作为公共设施的选址。该决策按如下方式作出：对于每个选区，机制选择一个能够代表其中代理人位置的位置。随后，它选择其中一个代表各选区的位置作为输出。该机制之所以是分布式的，是因为代表位置的选择

e每个选区的选择仅取决于属于该选区的代理人所报告的位置 t.

我们设计了满足各种关注标准并达到最佳可能失真界的确定性分布式机制。首先，我们旨在设计分布式机制，近似优化由所选位置与代理人位置之间的距离构成的社会目标。继 Anshelevich 等人 [2022], 的工作之后，我们关注以下目标：

- 代理人的总距离（社会成本）。
- 所有代理人中的最大距离（最大成本）。
- 每个选区中代理人最大距离的总和（最大值之和成本）
- 每个选区中代理人总距离的最大值（和的最大值成本）。

为了考虑选区规模可能存在的差异，Anshelevich 等人 [2022] 在其目标中考虑了代理人的平均总距离（在选区内及跨选区），而不是距离之和（即，他们研究了平均值的平均值、最大值的平均值和平均值的最大值目标）。为清晰展示证明中的论证，同时避免使符号过于复杂，本文仅关注包含相同数量代理人的对称分区；在这种情况下，平均值等价于总和。与 Anshelevich 等人 [2022], 的情形类似，我们的证明可以通过在目标中考虑平均总距离，轻松扩展到非对称分区的情形；对于最大成本则完全无需改变。

我们的首要贡献是设计了一种新颖的机制，使社会成本的失真度达到2 ；如上所述，这以肯定的方式解决了Filos-Ratsikas 和 Voudouris [2021] 工作中遗留的问题，与其2的下界相匹配。对于其余目标，我们不仅提供了机制，还给出了下界，证明这些机制实现了可能达到的最佳失真度。精确的界限显示在表1的第一列中。颇为有趣、也许出乎意料的是，我们针对最大值之和目标的机制是最优的，即其失真度达到1。这表明，对于这一特定目标，决策的分布式性质完全不会影响决策质量；这与Anshelevich 等人 [2022] 针对离散设定中相同目标所得的结果形成对比。

接下来，我们考虑策略无关机制，即不会激励代理人谎报其位置的机制。Filos-Ratsikas 和 Voudouris[2021] 研究了这类机制，并确定了其社会成本的失真度。对于其余三个目标，此前尚未研究过策略无关机制，甚至在Anshelevich 等人[2022]的离散设定中也未曾研究。我们通过精心组合用于选择分区代表和最终位置的集中式统计机制，给出了紧确界；具体而言，我们根据所考虑的目标，适当选择两个参数的值 p 和 q，从而定义出这样的机制：选择某个选区中第 q位代理人作为该选区的代表，然后选择第 p位代表作为输出位置。策略无关机制的结果显示在表1的第二列中。

1.2 相关工作

失真度最初由 Procaccia 和 Rosenschein [2006] 定义，用以量化社会选择机制仅能获取关于可能结果的偏好排序，而无法获取偏好的完整基数结构时造成的社会福利损失。人们已针对若干社会选择问题研究了机制的失真度，包括归一化效用主义设置下的单赢家投票、多赢家投票、参与式预算和匹配 [Boutilier 等人，2015年，Caragiannis 等人，2017年，Benad`e 等人，2017年，Ebadian 等人，2022年，Filos-Ratsikas

	不受限制	策略无关
社会成本	2 （第3节）	$3^\star$
最大成本	2 （第4节）	2 （第4节）
最大值之和	1 （第5.1节）	$1+\sqrt{2}$ （第 5.2节）
和的最大值	2 （第6.1节）	$1+\sqrt{2}$ （第6.2节）

表 1：确定性分布式机制的紧确失真界概览。社会成本的界为3 ，而策略无关机制这一类机制中带有 $\star$ 的界由Filos-Ratsikas 和 Voudouris[2021]提出。

等人， 2014], 以及度量设置 [Anshelevich 等人，2015年，Anshelevich 和 Postl，2017年，Caragiannis 等人，2022年，Charikar 和 Ramakrishnan，2022年，Gkatzelis 等人，2020年，Kempe，2020年，Kizilkaya 和 Kempe， 2022]。近年来，失真度的概念得到了更广泛的诠释，被视为有限信息导致聚合目标恶化的一种衡量方式，由此催生了关于通信复杂度 [Mandal 等人， 2019, 2020], 查询复杂度 [Amanatidis 等人，2021年，2022a，b，Ma 等人， 2021], 以及信息与失真之间其他权衡 [Abramowitz 等人， 2019], 的研究；我们在本文中研究的分布式机制的失真度也受到关注 [Filos-Ratsikas 等人，2020年，Anshelevich 等人，2022年，Filos-Ratsikas 和 Voudouris， 2021]。我们请读者参阅 Anshelevich 等人所作的综述 [2021] ，以了解详细介绍。

关于策略无关设施选址的文献也相当丰富。Procaccia 和 Tennenholtz [2013] 最早将策略无关设施选址问题作为其近似机制设计研究议程的一部分进行研究。此后，研究者提出并研究了该问题的若干变体，包括需要选址多个设施的情形 [Lu et al., 2009, 2010, Fotakis and Tzamos, 2016], 可能的位置受到限制的情形 [Feldman et al., 2016, Serafino and Ventre, 2016, Kanellopoulos et al., 2022], 代理人对各设施具有异质偏好的情形 [Anastasiadis and Deligkas, 2018, Feigenbaum and Sethuraman, 2015, Xu et al., 2021], 只能对部分可用设施进行选址的情形 [Deligkas et al., 2022, Elkind et al., 2022], 以及目标是优化不同目标的情形[Filos-Ratsikas et al., 2017, Cai et al., 2016, Zhou et al., 2022]。有关详情，请参阅 Chan 等人撰写的综述 [2021] 。

2 预备知识

我们的问题的一个实例是一个元组 $I=(N, \mathbf{x}\ D)$，其中

- N 是一个 n 代理人集合。
- $\mathbf{x}=(x_i)_{i\in N}$ 是一个向量，包含实数直线上代理人 i 的位置 $x_i\in\mathbb{R}$ 。
- $D=\{d_1,...,d_k\}$ 是一个由 $k\geq 1$ 选区组成的集合。每个选区 $d\in D$ 包含一个代理人集合 $N_d\subseteq N$，满足 $N_d\cap N_{d'}=\varnothing$ 和 $\bigcup_{d\in D}N_d=N$。我们主要关注对称选区的情况，因此对于每个 $d\in D$，都有 $|N_d|:=\lambda:=n/k$ 。

基于代理人报告的位置和选区的构成，使用分布式机制 M 来决定设施的位置。具体而言，给定一个实例 I，分布式机制通过执行以下两个步骤来运行：

- 步骤 1：对于每个选区 $d\in D$，机制仅根据 N_d 中代理人的位置，为该选区选择一个 代表位置 $y_d\in\mathbb{R}$ 。
- 步骤 2：给定各选区的代表位置后，机制输出单一位置 $M(I)\in\{y_d\}_{d\in D}$ 作为获胜者。

如果选择了某个位置 z，那么代理人 i 的位置 x_i 与 z 之间的距离 $\delta(x_i, z) = |x_i - z|$ 就是代理人 i 针对 z 的个体成本 。

2.1 社会目标与策略无关性

我们希望设计出能够根据某个社会目标输出高效位置的机制。令 $z \in \mathbb{R}$ 为任意位置。我们考虑以下四种社会最小化目标:

- 位置 z 的总和 成本（或社会成本）是所有代理人在位置 z 的个体成本之和:

$$\sum_{i \in N} \delta(x_i, z) = \sum_{d \in D} \sum_{i \in N_d} \delta(x_i, z).$$

- 位置 z 的最大值 成本是所有代理人在位置 z 的个体成本中的最大值:

$$\max_{i \in N} \delta(x_i, z) = \max_{d \in D} \max_{i \in N_d} \delta(x_i, z).$$

- 位置 z 的最大值之和 成本，是各选区中个体成本最大值之和:

$$\sum_{d \in D} \max_{i \in N_d} \delta(x_i, z).$$

- 位置 z 的和的最大值 成本，是各选区中个体成本总和的最大值:

$$\max_{d \in D} \sum_{i \in N_d} \delta(x_i, z).$$

为简化记号，只要上下文中的社会目标明确，我们就用 $\text{cost}(z|I)$ 表示在实例 I 中，根据当前目标函数计算的 $z \in \mathbb{R}$ 成本。

另一个目标是设计能够抵御策略操纵的机制，也就是说，代理人不能通过报告虚假位置，单方面让结果对自己有利（即得到个体成本更低的位置）。形式化地说，对于任意一对实例 $I = (N, (\mathbf{x}_{-i}, x_i)\ D)$ 和 $J = (N, (\mathbf{x}_{-i}, x_i')\ D)$，如果它们仅在单个代理人$i$的位置上不同，则机制策略无关，当且仅当 $\delta(x_i, M(I)) \leq \delta(x_i, M(J))$。

2.2 机制的失真度

分布式机制 M 相对于某个社会目标（该目标定义了每个可能位置的成本）的失真度，是指在所有实例中，机制所选位置的成本与任意位置的最低成本之比的最坏情况:

$$\sup_{I=(N,\mathbf{x},D)} \frac{\text{cost}(M(I)|I)}{\min_{z \in \mathbb{R}} \text{cost}(z|I)}$$

根据定义，失真度始终至少为 1。当分子为正而分母为（极其接近）0 时，我们称失真度无界。我们的目标是设计分布式机制，使其相对于上述社会目标的失真度尽可能低。我们将同时考虑假设代理人如实行动的不受限制机制，以及旨在避免策略操纵的策略无关机制。

2.3 有用的观察

在接下来的章节介绍主要技术结果之前，我们先陈述一些有用的性质。我们将通过刻画最坏情况实例，推导出部分机制的失真度界限；为此，我们需要以下不等式

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} < \frac{\alpha}{\beta}, \tag{1}$$

这对任意 $\alpha > \beta \geq 0$ 和 $\gamma > 0$均成立。

Filos-Ratsikas 和 Voudouris [2021] 观察到，对于社会成本（总和目标）而言，任何具有有限失真度的分布式机制都必须是基数一致的。我们通过证明对于本文所考虑的任何社会目标，这一结论同样成立，扩展了这一结果。形式化地说，如果一个机制在所有选区中的代理人都位于 z 时，将该选区的代表位置选为 z，则称该机制是基数一致的。

引理 2.1。 对于任何社会目标$F \in$ {总和、最大值、最大值之和、和的最大值}，任何能够实现有限失真度的分布式机制都必须是基数一致的。

证明。 设 M 是一个不基数一致的分布式机制。因此，必然存在某个位置 z，使得当一个选区中的所有代理人都位于 z时，该机制决定将该选区的代表位置设为某个 $y \neq z$。现在，考虑这样一个实例：所有代理人（无论属于哪个选区）都位于 z。根据该机制的行为， y 是所有选区的代表位置，因此必然成为获胜者。然而，对于任意社会目标 F，$\mathsf{cost}(z) = 0$ 且 $\mathsf{cost}(y) > 0$，因此失真度是无界的。所以，为了实现有限失真度，任何机制都必须是基数一致的。 □

接下来，我们证明一类直观的分布式机制中的每一种都是策略无关的。令$p \in [k]$ 和 $q \in [\lambda]$。p-统计量的q-统计量机制首先选择每个选区中排序后第 q 个代理人的位置作为该选区的代表位置，然后输出排序后第 p 个代表位置作为获胜者。例如，若 $p = \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ 且 $q = \lfloor (\lambda+1)/2 \rfloor$，该机制会选择每个选区中（最靠左的）中位代理人的位置作为其代表位置，然后选择（最靠左的）代表位置的中位数作为获胜者。对于我们所考虑的各种社会目标，所有实现可能的最佳失真度的策略无关机制都属于这一类。下一条引理表明，任何此类机制都是策略无关的，并使我们在接下来的章节中只需关注如何界定失真度。

引理 2.2. 对于任意 $p \in [k]$ 和 $q \in [\lambda]$，p-统计量的q-统计量机制都是策略无关的。

证明。 令 M为 p-统计量的q-统计量机制。考虑任意实例 $I = (N, \mathbf{x}, D)$，并令$w = M(I)$为 M选定的位置。令 i 为属于某个选区 $d \in D$ 的任意代理人，该选区由 y代表。如果 i 的位置是最终获胜者，那么 i 显然没有动机偏离。因此，不失一般性，假设获胜者是某个位置 $w > x_i$。注意，要影响该机制的结果，代理人 i 必须首先能够影响 d的代表。我们区分以下几种情况。

- 如果 $y < x_i$，那么代理人 i 必须报告一个位置 $x'_i < y$，才能改变d的代表；但这样的位置无法影响最终获胜者，因为代表的顺序保持不变（w 仍位于选区 d代表的右侧）。

- 如果 $y > w$，那么代理人 i 就必须报告一个位置 $x'_i > y$，才能将 d 的代表更改为 x'_i。不过，这仍然不会影响最终获胜者，因为代表的顺序保持不变（w 仍会位于选区 d 的代表左侧）。

• 如果 $y \in [x_i, w]$，那么代理人 i 可以通过报告一个位置 $x_i' > w$ 来改变代表的顺序，从而可能影响结果；但这样会导致更高的个体成本，因为新的获胜者 x_i' 会离得更远。

因此，代理人 i 没有动机偏离，从而证明该机制具有策略无关性 of. □

3 社会成本

我们先讨论社会成本（总和）目标。在先前的研究中，Filos-Ratsikas 和 Voudouris [2021]证明了，中位数的中位数 机制（即 $\lfloor \lambda/2 \rfloor$-统计量的$\lfloor k/2 \rfloor$-统计量机制）的失真度至多为 3，这是策略无关机制所能达到的最优结果。对于不受限制的机制类，他们证明了 2这一下界，因此在2 和 3之间留下了一个差距。本文通过证明不受限制的机制存在紧确下界 2 来补全这一结果。为此，我们考虑截断平均值的中位数 机制，其工作方式如下：对于每个选区，机制选取一组 $\lambda/2$ 个代理人，范围从最靠左的第$(\lambda/4+1)$个代理人到最靠左的第$(3\lambda/4)$个代理人[1]，，并将他们的平均位置作为该选区的代表位置。然后，选取代表位置的中位数作为最终位置。详细描述见机制1 。

机制1： 截断平均值的中位数

对于每个选区 $d \in D$ **执行**

$S_d := \{i \in N_d :$ i 至少是从左数第（$\lambda/4+1$）个、至多是从左数第（$3\lambda/4$）个代理人$\}$;

$y_d := \frac{\sum_{i \in S_d} x_i}{|S_d|}$;

返回 $w :=$ 中位数$_{d \in D}\{y_d\}$;

为了界定截断平均值的中位数的失真度，我们将刻画最坏情况实例的结构；在这些实例中，机制的失真度达到最大值且严格大于 1。设 w为机制在输入一个最坏情况实例时选定的位置，并记 o为最优位置；由于目标是社会成本， o 是中位代理人的位置（如果代理人总数为偶数，则是两个中位代理人位置之间的任意一点）。不失一般性，我们假设 $w < o$； $w > o$ 的情形与此对称。

我们首先证明，存在这样的情形：从失真度严格大于 1 的实例出发，将特定代理人移至适当的区间，会得到失真度更差的新实例。在刻画该机制的最坏情况实例时，这种变换将会发挥作用。

引理 3.1。 设 I 和 J 是两个实例，它们仅在单个代理人 i的位置上有所不同； w 是机制选定的位置， o 则是这两个实例的最优位置。以下情形下，机制以 J 为输入时的失真度严格大于以 I 为输入时的失真度：

(a) 在 I中， i位于 $x_i < o$；在 J中， i位于 $x_i' \in (x_i, o]$；

(b) 在 I中， i位于 $x_i > o$；在 J中， i位于 $x_i' \in [o, x_i)$。

证明。 我们要证明

$$\frac{\text{cost}(w|I)}{\text{cost}(o|I)} < \frac{\text{cost}(w|J)}{\text{cost}(o|J)}.$$

[1]为简单起见，我们介绍的机制假设每个选区中的代理人数都是 4 的倍数；推广机制描述并扩展证明是直接的。

对于 (a)，根据三角不等式，有 $\delta(x_i, w) \leq \delta(x_i, x_i') + \delta(x_i', w)$，并且 $\delta(x_i, o) = \delta(x_i, x_i') + \delta(x_i', o)$；回想一下我们的假设 $w < o$。因此，

$$\frac{\text{cost}(w|I)}{\text{cost}(o|I)} = \frac{\sum_{j \neq i} \delta(x_j, w) + \delta(x_i, w)}{\sum_{j \neq i} \delta(x_j, o) + \delta(x_i, o)} \leq \frac{\sum_{j \neq i} \delta(x_j, w) + \delta(x_i, x_i') + \delta(x_i', w)}{\sum_{j \neq i} \delta(x_j, o) + \delta(x_i, x_i') + \delta(x_i', o)}.$$

由于机制在给定 I 作为输入时的失真度严格大于1，且距离非负，因此我们可以将不等式（1 $\alpha = \sum_{j \neq i} \delta\ x_j\ w + \delta\ x_i'\ w\ \ \beta = \sum_{j \neq i} \delta\ x_j\ o +$）应用于(,)（,）、(,)$\delta_{(x_i',)}^{o}$ 以及 $\gamma = \delta(x_i, x_i')$，从而得到

$$\frac{\text{cost}(w|I)}{\text{cost}(o|I)} < \frac{\sum_{j \neq i} \delta(x_j, w) + \delta(x_i', w)}{\sum_{j \neq i} \delta(x_j, o) + \delta(x_i', o)} = \frac{\text{cost}(w|J)}{\text{cost}(o|J)}.$$

对于（b），注意到 $\delta(x_i, w) = \delta(x_i, x_i') + \delta(x_i', w)$，且 $\delta(x_i, o) = \delta(x_i, x_i') + \delta(x_i', o)$。因此，通过适当地应用不等式（1）即可再次得到所需的不等式。 □

We 现在可以展示最坏情况实例的以下有用结构性质：

- 至少有 $k/2$ 个选区由 w （引理3.2）代表；
- o 可以是唯一的其他区代表，并且此类选区中的所有代理人均位于 o（引理3.3）。

引理 3.2。 w左侧没有区代表。

证明。 反设最坏情况实例中存在一个选区 d，其代表为 $y < w$。由于 y 是 d中若干个体位置的平均值，因此存在一个个体集合$S \subseteq S_d$，满足 $x_i \leq w$ 对每个 $i \in S$均成立。我们将每个代理人 $i \in S$ 移至一个新位置 x_i'，使得$x_i < x_i' \leq w$，且 d 中代理人的截断平均值变为 w。显然，在新实例中，机制的结果以及最优位置都保持不变； w 仍然是中位代表，而且总体中位数个体的位置没有改变。根据引理 3.1(a)，并且由于$w < o$，将任意代理人 $i \in S$ 移至 $x_i' \leq w$ 会得到一个失真度严格更大的新实例，这与我们从最坏情况实例出发这一事实矛盾。

□

引理 3.3。 除了 w，另一个可能的区代表只有 o，而这些选区中的所有代理人都位于 o。

证明。 反设最坏情况实例 I中存在一个选区d，其区代表为 $y \notin \{w, o\}$。我们将每个代理人 $i \in N_d$从 x_i移至 $x_i' = o$。因此，选区 d中代理人的截断平均值从 y变为 o。由引理 3.2，且由于 w是中位代表，我们知道至少半数区代表与 w重合。因此，移动选区 d中的代理人不会影响机制的结果。由于中位代理人的位置未发生变化，最优位置也保持不变。根据引理 3.1，移动每个代理人 i （无论 $x_i < o$ 还是 $x_i > o$）后得到的新实例的失真度严格大于实例 I的失真度，这与它是最坏情况实例这一事实矛盾。

□

我们还论证了，只需关注最坏情况实例 I 仅由两个选区组成的情形，这将简化证明的最后部分。

引理 3.4。 存在一个包含两个选区的最坏情况实例，其中一个由 w 代表，另一个由 o 代表。

证明。 考虑任意最坏情况实例，令 D_w 和 D_o 分别表示由 w 和 o 代表的选区集合。我们首先论证 $|D_w| = |D_o|$。注意，由于 w 是所有代表中的一个中位数，因此有 $|D_w| \geq |D_o|$。假设 $|D_w| > |D_o|$；我们将通过创建一个失真度严格更大的新实例导出矛盾，该新实例包含 $|D_w| - |D_o|$ 个额外选区，其中所有代理人都位于 o。显然，在这个新实例中，机制再次输出 w，而最优位置仍为 o。由于新增加选区中的代理人为最优成本贡献了 0，却为 w 的社会成本贡献了严格大于 0 的值，因此失真度严格更大。

现在，由于 $|D_w| = |D_o|$ 且由 o 代表的选区中的所有代理人都位于 o （根据引理 3.3），因此不失一般性，我们可以只考虑仅有两个选区的最坏情况实例：一个选区的代表是 w，另一个选区的代表是 o。 □

既然我们已经证明，只需考虑这样一个最坏情况实例：其中一个选区 d_w 由 w 代表，另一个选区 d_o 中的所有代理人都位于 o，现在我们来讨论 d_w中的代理人位置。设 ℓ 和 r 分别是 d_w 中从左数第 $\lambda/4+1$ 个和第 $3\lambda/4$ 个代理人的位置（即 S_{d_w}中代理人所在位置的最左端和最右端）。显然，$\ell \leq w \leq r$成立。我们将证明 $r \leq o$，并且所有不在 S_{d_w} 中的代理人要么位于 ℓ，要么位于 o。

引理 3.5。在选区 d_w中， $r \leq o$。

证明。 假设相反，最坏情况实例 I 满足 $r > o$ 属于 d_w，因此 $\ell < w$。令 L 为 S_{d_w} 中位于 w 左侧或正好位于 w 的代理人集合，令 R 为 S_{d_w} 中位于 o 右侧的代理人集合。根据 w 的定义，对于任意集合 $Q \subseteq L$，有

$$\begin{aligned} w &= \frac{2}{\lambda}\left(\sum_{i\in L} x_i + \sum_{i\in R} x_i + \sum_{i\in S_{d_w}\setminus(L\cup R)} x_i\right) \\ &= \frac{2}{\lambda}\left(\sum_{i\in L} x_i + \sum_{i\in R}(x_i - o) + \sum_{i\in R} o + \sum_{i\in S_{d_w}\setminus(L\cup R)} x_i\right) \\ &= \frac{2}{\lambda}\left(\sum_{i\in L\setminus Q} x_i + \sum_{i\in Q}\left(x_i + \frac{1}{|Q|}\sum_{j\in R}(x_j - o)\right) + \sum_{i\in R} o + \sum_{i\in S_{d_w}\setminus(L\cup R)} x_i\right). \end{aligned}$$

因此，必定存在一个集合 $L_< \subseteq L$，使得对于每个 $i \in L_<$， $x_i + \frac{1}{|L_<|}\sum_{j\in R}(x_j - o) \leq w < o$；若不存在这样的集合，则上面的最后一个表达式将严格大于 w。通过将 R 中的所有代理人从 x_i 移至 $x'_i = o$，并将 $L_<$ 中的所有代理人从 x_i 移至 $x'_i = x_i + \frac{1}{|L_<|}\sum_{j\in R}(x_j - o)$，我们得到一个新实例 J。显然， w 仍然是 d_w 的代表，而 o 仍然是最优位置。根据引理 3.1，由于所有移动的代理人在 J 中都比在 I 中更靠近 o，因此 J 的失真度必定严格大于 I，这就产生了矛盾。

□

引理 3.6。 在选区 d_w 中， $\lambda/4$ 个最左侧代理人的位置为 ℓ，而 $\lambda/4$ 个最右侧代理人的位置为 o。

证明。 反设结论不成立，并注意到所有这些代理人均不在 S_{d_w} 中，因此不会影响 w。反复应用引理 3.1，将每个代理人 i 从 $x_i < \ell$ 移至 ℓ，并将每个代理人 i 从 $x_i > r$移至 o，最终得到一个失真度严格更大的实例，产生矛盾。 □

我们终于可以证明本节的主要结果了。

定理 3.7。 截断平均值的中位数 的失真度至多为2。

证明。根据引理 3.3、3.4 和 3.6，最坏情况实例 I 中的 2λ 个代理人在直线上的分布如下： $\lambda/4$ 个代理人位于 ℓ， $5\lambda/4$ 个代理人位于 o （d_o 中的 λ 个代理人和 d_w 中的 $\lambda/4$ 个代理人），而 $\lambda/2$ 个代理人位于 $[\ell, r]$。我们将 S_{d_w} 中的 $\lambda/2$ 个代理人划分为两组： $L = \{i \in S_{d_w} : \ x_i \le w\}$ 和 $R = \{i \in S_{d_w} : \ x_i > w\}$。由于 $r \le o$ （根据引理 3.5）且 $w = \sum_{i\in L\cup R} x_i$ （根据定义），最优成本为

$$\begin{aligned}\text{cost}(o|I) &= \frac{\lambda}{4}(o-\ell) + \sum_{i\in L}(o-x_i) + \sum_{i\in R}(o-x_i)\\ &= \frac{\lambda}{4}(o-\ell) + \frac{\lambda}{2}(o-w)\\ &= \frac{\lambda}{4}(w-\ell) + \frac{3\lambda}{4}(o-w). \end{aligned} \tag{2}$$

同理，机制的成本为

$$\text{cost}(w|I) = \frac{\lambda}{4}(w-\ell) + \sum_{i\in L}(w-x_i) + \sum_{i\in R}(x_i-w) + \frac{5\lambda}{4}(o-w). \tag{3}$$

根据 w的定义， $\sum_{i\in L}(w-x_i) = \sum_{i\in R}(x_i-w)$。此外，同样根据定义， $|L| \ge 1$。若 $R = \varnothing$，则必有 $\ell = w = r$，失真度至多为 $5/3$ ，因为方程（2）和（3）分别简化为 $\text{cost}(o|I) = 3(o-w)/4$ 和 $\text{cost}(w|I) = 5(o-w)/4$。因此，在证明的其余部分中，我们假设 $|R| \ge 1$。

由于对于每个代理人 $i \in R$ 都有 $x_i \le o$ ，且 $|L| + |R| = \lambda/2$，我们有

$$\sum_{i\in L}(w-x_i) = \sum_{i\in R}(x_i-w) \le |R|(o-w) \Leftrightarrow o-w \ge \frac{\sum_{i\in L}(w-x_i)}{\lambda/2-|L|}.$$

同理，由于对于每个代理人 $i \in L$都有 $x_i \ge \ell$ ，我们得到

$$\sum_{i\in L}(w-x_i) \le |L|(w-\ell) \Leftrightarrow w-\ell \ge \frac{\sum_{i\in L}(w-x_i)}{|L|}.$$

令 $o-w = \underline{\frac{\sum_{i\in L}(w-x_i)}{\frac{\lambda}{2}-|L|}} + \xi_1$ 和 $w-\ell = \underline{\frac{\sum_{i\in L}(w-x_i)}{|L|}} + \xi_2$，其中 $\xi_1, \ \xi_2 \ge 0$。因此，方程（2）和（3）可以改写为

$$\begin{aligned}\text{cost}(o|I) &= \frac{\lambda}{4}\left(\frac{\sum_{i\in L}(w-x_i)}{|L|} + \xi_2\right) + \frac{3\lambda}{4}\left(\frac{\sum_{i\in L}(w-x_i)}{\frac{\lambda}{2}-|L|} + \xi_1\right)\\ \text{cost}(w|I) &= \frac{\lambda}{4}\left(\frac{\sum_{i\in L}(w-x_i)}{|L|} + \xi_2\right) + \frac{5\lambda}{4}\left(\frac{\sum_{i\in L}(w-x_i)}{\frac{\lambda}{2}-|L|} + \xi_1\right) + 2\sum_{i\in L}(w-x_i).\end{aligned}$$

不难看出，除非失真度至多为 $5/3$ ，使得该结论显然成立，否则当 $\xi_1 = \xi_2 = 0$ 时，该比率达到最大值。由此可得到失真度的以下上界。

$$\begin{aligned}\frac{\text{cost}(w|I)}{\text{cost}(o|I)} &\le \frac{\frac{\lambda}{4|L|} + \frac{5\lambda}{2\lambda-4|L|} + 2}{\frac{\lambda}{4|L|} + \frac{3\lambda}{2\lambda-4|L|}}\\ &\le 2,\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $\frac{\lambda}{4|L|} + \frac{5\lambda}{2\lambda-4|L|} + 2 \le 2\left(\frac{\lambda}{4|L|} + \frac{3\lambda}{2\lambda-4|L|}\right) \Leftrightarrow (\lambda - 4|L|)^2 \ge 0$。

至此，证明完成。 □

4 最大成本

现在我们考虑最大成本目标，并证明对于不受限制的机制和策略无关机制，该目标的紧界均为 2。我们先从下界开始。

定理 4.1。 对于最大成本，任何机制（不受限制或策略无关）的失真度至少为2。

证明。 考虑任意机制以及以下实例： I 该实例包含两个选区。第一个选区中的代理人均位于 -1，而第二个选区中的代理人均位于1。根据一致性（引理 2.1），两个选区的代表必须分别为 -1 和1。因此，获胜者要么是 -1，要么是1。然而，成本$(-1|I) = $ 成本$(1|I) = 2$，而成本$(0|I) = 1$，从而导致失真度为2。 □

对于上界，我们考虑任意机制：该机制将每个选区的代表选为其中任意代理人的位置，然后从这些代表中任选一个作为最终获胜者。具体实现请参见机制2：该实现使用每个选区中最左侧代理人的位置作为区代表，然后将最左侧代表作为最终获胜者。显然，任意等价于某个 p-统计量-q-统计量机制，具体取决于选区内和选区之间的选择；例如，将任意实现为机制2 等价于1-统计量-1-统计量。下面我们将证明该机制的失真度至多为2。

机制 2： 任意（最左侧中的最左侧）

对于每个选区 d **执行**

  y_d :=最小值$_{i\in N_d}\{x_i\}$;

返回 $w :=$ 最小值$_d\{y_d\}$;

定理 4.2。 对于最大成本，任意机制的失真度至多为2。

证明。 给定任意实例 I，令 ℓ 和 r 分别表示最左侧代理人和最右侧代理人的位置。显然，最优位置为 $o = \frac{r-\ell}{2}$，因此成本$(o|I) = \frac{r-\ell}{2}$。另一方面，任意机制必定会返回某个代理人的位置作为获胜者 w，因此成本$(w|I) \leq r - \ell$；结论得证。 □

5 最大值之和

在这里，我们关注最大值之和目标；回顾一下，对于这一目标，我们将每个选区中代理人的成本最大值相加。对于不受限制的机制，我们将证明，令人惊讶的是，可以实现失真度为 1；而对于策略无关机制，我们将证明一个紧确界 $1+\sqrt{2}$。

5.1 不受限制的机制

我们将证明，中点的中位数机制能够使最大值之和目标达到最优。该机制将每个选区的代表设为该选区内代理人位置所界定区间的中点，然后选择中位数代表作为最终获胜者（如果存在两个中位数，则打破平局时优先选择最左侧的中位数）。详细说明请见机制3 。

为了证明中点的中位数对于最大值之和的失真度满足所需的界，我们再次展示最坏情况实例的一些有用性质。不失一般性，我们假设

机制3： 中点的中位数

对于每个选区 d **执行**

$y_d := \frac{1}{2} \cdot \left(\text{最大值}_{i \in N_d} x_i + \text{最小值}_{i \in N_d} x_i \right)$;

返回 $w := \text{中位数}_{d \in D}\{y_d\}$;

该机制应用于输入实例 I，其中选定的获胜者 w 位于最优位置 o 的左侧，即 $w < o$。

引理 5.1. 左侧 w 或右侧 o均不存在中点。

证明。 根据对称性，只需证明引理的第一部分。反设，最坏情况实例 I 中存在一个选区 d，其代表（中点）为 $y < w$。因此， d 中的最左侧代理人 ℓ 位于 $x_\ell < w$，满足 $\max_{i \in N_d} \delta(x_i, w) = \delta(x_\ell, w)$ 且 $\max_{i \in N_d} \delta(x_i, o) = \delta(x_\ell, o)$。通过将每个代理人 $i \in N_d$ 移动到 $x'_i = w$，我们得到一个新实例 J。因此，在 J中， d 的中点变为 w。显然，在新实例中，该机制的结果保持不变。我们可以将该机制在 I 上的失真度写为：

$$\begin{aligned}
\frac{\text{cost}(w|I)}{\text{cost}(o|I)} &= \frac{\sum_{d' \neq d} \max_{i \in N_{d'}} \delta(x_i, w) + \delta(x_\ell, w)}{\sum_{d' \neq d} \max_{i \in N_{d'}} \delta(x_i, o) + \delta(x_\ell, o)} \\
&= \frac{\sum_{d' \neq d} \max_{i \in N_{d'}} \delta(x_i, w) + \delta(x_\ell, w)}{\sum_{d' \neq d} \max_{i \in N_{d'}} \delta(x_i, o) + \delta(x_\ell, w) + \delta(w, o)} \\
&< \frac{\sum_{d' \neq d} \max_{i \in N_{d'}} \delta(x_i, w)}{\sum_{d' \neq d} \max_{i \in N_{d'}} \delta(x_i, o) + \delta(w, o)} \\
&= \frac{\text{cost}(w|J)}{\text{cost}(o|J)},
\end{aligned}$$

其中不等式由不等式（1）得出。中的最优位置$o' \neq o$可能是不同的位置(o')。由于成本 $\leq$ 成本(o)，因此我们有

$$\frac{\text{cost}(w|I)}{\text{cost}(o|I)} < \frac{\text{cost}(w|J)}{\text{cost}(o|J)} \leq \frac{\text{cost}(w|J)}{\text{cost}(o'|J)}.$$

这与原始实例 I 是最坏情况实例这一事实相矛盾。 □

引理 5.2。 在由 w表示的每个选区中，所有代理人都位于 w。

证明。该证明与引理 5.1 的证明类似。反设，在最坏情况实例 I 中，存在一个由 w 代表的选区 d，其中至少有一个代理人 i 位于某个 $x_i \neq w$。那么，由于 w 是 d 中代理人位置的中点，最左侧代理人 ℓ 必须位于 $x_\ell < w$，因此最大值$_{i \in N_d} \delta(x_i, w) = \delta(x_\ell, w)$，且最大值$_{i \in N_d} \delta(x_i, o) = \delta(x_\ell, o)$。我们通过将每个代理人 $i \in N_d$ 从 x_i 移动到 $x'_i = w$，得到一个新实例 J。显然，在 J 中，机制的结果保持不变。我们可以将机制对于 I 的失真度写为：

$$\begin{aligned}
\frac{\text{cost}(w|I)}{\text{cost}(o|I)} &= \frac{\sum_{d' \neq d} \max_{i \in N_{d'}} \delta(x_i, w) + \delta(x_\ell, w)}{\sum_{d' \neq d} \max_{i \in N_{d'}} \delta(x_i, o) + \delta(x_\ell, o)} \\
&= \frac{\sum_{d' \neq d} \max_{i \in N_{d'}} \delta(x_i, w) + \delta(x_\ell, w)}{\sum_{d' \neq d} \max_{i \in N_{d'}} \delta(x_i, o) + \delta(x_\ell, w) + \delta(w, o)} \\
&< \frac{\sum_{d' \neq d} \max_{i \in N_{d'}} \delta(x_i, w)}{\sum_{d' \neq d} \max_{i \in N_{d'}} \delta(x_i, o) + \delta(w, o)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\text{cost}(w|J)}{\text{cost}(o|J)},$$

其中，不等式由不等式（1）得出。中的最优位置可能是另一个位置$o' \neq o$。由于成本$(o') \leq$ 成本(o)，我们有

$$\frac{\text{cost}(w|I)}{\text{cost}(o|I)} < \frac{\text{cost}(w|J)}{\text{cost}(o|J)} \leq \frac{\text{cost}(w|J)}{\text{cost}(o'|J)}.$$

这与原始实例 I 是一个最坏情况实例这一事实相矛盾。 □

We 现在我们可以证明，中点的中位数能够优化最大值之和目标。

定理 5.3. 对于最大值之和，中点的中位数 的失真度为1。

证明。 我们将证明 $\text{cost}(w|I) \leq \text{cost}(o|I)$；为简化记号，在本证明余下部分中，我们省略 cost 中的 I。令 D_w 为由 w代表的选区集合，并将其余选区记为 $\overline{D_w}$。根据引理 5.1 以及 w 是中位中点这一事实，我们有 $|D_w| \geq |\overline{D_w}|$。此外，根据引理 5.2，我们知道， D_w 中的所有选区的代理人都位于 w。因此，

$$\begin{aligned}\text{cost}(w) &= \sum_{d \in D_w} \max_{i \in N_d} \delta(x_i, w) + \sum_{d \notin D_w} \max_{i \in N_d} \delta(x_i, w) \\ &= \sum_{d \notin D_w} \max_{i \in N_d} \delta(x_i, w).\end{aligned}$$

我们可以将 o 的成本写成如下形式：

$$\begin{aligned}\text{cost}(o) &= \sum_{d \in D_w} \max_{i \in N_d} \delta(x_i, o) + \sum_{d \notin D_w} \max_{i \in N_d} \delta(x_i, o) \\ &= |D_w|\delta(w, o) + \sum_{d \notin D_w} \max_{i \in N_d} \delta(x_i, o).\end{aligned}$$

现在，设 $d \notin D_w$ 是一个中点为 y的选区，且满足 $y \in (w, o]$，这是由引理 5.1 得出的。令 ℓ_d 和 r_d 分别为选区 d中最左侧和最右侧的代理人。我们声称， d对 cost(o) 的贡献为距离 $\delta(\ell_d, o)$，而 d对 cost(w) 的贡献为距离 $\delta(r_d, w)$。首先注意，由于 $y \in (w, o]$，因此不可能出现 $\ell_d, r_d < w$或 $\ell_d, r_d > o$；换言之，必有 $w \leq r_d$ 和 $\ell_d \leq o$。若 $\ell_d \leq r_d < o$，则关于 cost(o) 的断言立即成立。因此，假设 $r_d > o$，从而 $\ell_d < o$。由于 $y \in (w, o]$，不等式 $\frac{\ell_d + r_d}{2} \leq o$ 意味着 $r_d - o \leq o - \ell_d$，从而 $\delta(\ell_d, o)$ 是 d对 cost(o) 的贡献。同理，若 $w \leq \ell_d \leq r_d$，则关于 cost(w) 的断言立即成立。因此，我们可以假设$\ell_d < w$，从而 $r_d > w$。不等式 $\frac{\ell_d + r_d}{2} > w$ 意味着 $w - \ell_d < r_d - w$，从而 $\delta(r_d, w)$ 是 d 对 cost(w) 的贡献。由此可得

$$\text{cost}(w) = \sum_{d \notin D_w} \delta(r_d, w).$$

此外，对于每个 $d \notin D_w$,

$$\begin{aligned}\delta(\ell_d, o) &= o - \ell_d \\ &= o - r_d + r_d - w + w - \ell_d \\ &= \delta(r_d, w) + (o + w) - (\ell_d + r_d) \\ &\geq \delta(r_d, w) + (o + w) - 2o\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta(r_d, w) - (o - w) \\
&= \delta(r_d, w) - \delta(w, o),
\end{aligned}
$$

其中，该不等式成立是因为 $\frac{\ell_d + r_d}{2} \leq o$。因此，

$$
\begin{aligned}
\text{cost}(o) &= |D_w|\delta(w, o) + \sum_{d \notin D_w} \delta(\ell_d, o) \\
&\geq |D_w|\delta(w, o) + \sum_{d \notin D_w} \Big(\delta(r_d, w) - \delta(w, o) \Big) \\
&= (|D_w| - |\overline{D_w}|)\delta(w, o) + \sum_{d \notin D_w} \delta(r_d, w) \\
&\geq \sum_{d \notin D_w} \delta(r_d, w) \\
&= \text{cost}(w),
\end{aligned}
$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $|D_w| \geq |\overline{D_w}|$。 □

5.2 策略无关机制

对于策略无关机制，我们将证明一个紧确界 $1 + \sqrt{2}$。首先，我们证明所有策略无关机制的失真度下界。

定理 5.4。 对于最大值之和，任何策略无关机制的失真度都至少为 $1 + \sqrt{2} - \varepsilon$，对任意 $\varepsilon > 0$均成立。

证明。 反设存在一种策略无关机制，对任意 $\varepsilon > 0$，其失真度都严格小于 $1 + \sqrt{2} - \varepsilon$。不失一般性，我们假设当两个选区的代表不同时，选择最左侧的代表作为最终获胜者。我们将通过展示策略无关机制在特定实例中的一些行为性质来证明这一结论。

性质（P1）： 我们声称，存在一个有两名代理人的选区，使得该机制选择某个代理人的位置作为区代表。考虑一个选区 d，其中一名代理人的位置为x，另一名代理人的位置为 $y > x$。如果该机制选择 x 或 y作为代表，那么结论成立。否则，假设所选代表为某个 $z \notin \{x, y\}$。根据策略无关性，当任一代理人被移至 z时， z 也必须是该选区 d' 的代表；否则，在仅由 d' 构成的单选区实例中，被移动的代理人就有动机谎报自己位于 d，从而将结果改变为 z。

性质（P2）： 根据性质（P1），存在一个选区，其中有两名代理人，且机制选择其中一名代理人的位置作为区代表；不失一般性，假设两名代理人分别位于 0 和 1。我们声称，该选区的区代表必须位于 1，否则失真度至少为 3。事实上，假设区代表位于 0，并考虑以下包含两个选区的实例 I_1：

- 第一个选区中，一名代理人位于 0，另一名代理人位于 1。根据上述讨论，区代表位于 0。

- 在第二个选区，有两位代理人位于 $1/2$。根据一致性，代表是 $1/2$(否则，根据引理，失真度将无界2.1）。

机制 4： $\left(1-1/\sqrt{2}\right)k$-最右侧中的最左侧

对于每个选区 $d \in D$ **执行**
  $y_d :=$ 最右侧代理人；
返回 $w := \left(1-1/\sqrt{2}\right)k$个最左侧代表；

由于只有两个选区和两位不同的代表，总体获胜者是 0。但是，$\text{cost}(0|I_1) = (1-0) + (1/2-0) = 3/2$ 和 $\text{cost}(1/2|I_1) = (1-1/2) + (1/2-1/2) = 1/2$，导致失真度为 3。

性质（P3）： 设 $\alpha < \beta$ 为两个（较大的）整数，使得 $\beta/\alpha = 1+\sqrt{2}-\delta$，其中某个任意小的 $\delta > 0$。我们声称，在具有 $\alpha+\beta$ 个选区的实例中，若 $1/2$ 是α 个选区的代表，且 1 是 β 个选区的代表，则总体获胜者必须是 1，否则失真度将为 $\beta/\alpha = 1+\sqrt{2}-\delta$。事实上，假设在这种情况下获胜者是 $1/2$，并考虑以下具有 $\alpha+\beta$ 个选区的实例 I_2：

- 在 α 个选区中，$1/2$处有两个代理人 .
- 在 β 个选区中，有两名代理人位于1。

根据一致性（引理2.1），代表分别为 $1/2$ 和1，而根据假设，总体获胜者为 $1/2$。那么，成本 $(1/2|I_2) = \beta/2$，且成本$(1|I_2) = \alpha/2$。因此，失真度至少为$\beta/\alpha = 1+\sqrt{2}-\delta$。

Rea导出矛盾：现在，我们考虑以下实例 I_3，其中有 $\alpha+\beta$ 个选区 s:

- 在 α 个选区中，有两名代理人位于 $1/2$。根据一致性，这些选区的代表均为 $1/2$。
- 在 β 个选区中，一名代理人位于0，另一名代理人位于1。根据性质（P2），这些选区的代表均为1。

由于 $1/2$ 是 α 个选区的代表，而1是 β 个选区的代表，根据性质（P3），总体获胜者为1。我们有，成本$(1|I_3) = \frac{\alpha}{2}+\beta$，且成本$(1/2|I_3) = \frac{\beta}{2}$。也就是说，失真度至少为 $2+\frac{\alpha}{\beta} > 2+\frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$；这就产生了矛盾。 □

为了得到紧上界，我们考虑 $\left(1-1/\sqrt{2}\right)k$-最右侧代理人的最左侧 机制：该机制将每个选区的代表选为其中最右侧代理人的位置，然后选择 $\left(1-1/\sqrt{2}\right)k$个最左侧代表中的第 个作为最终获胜者。[2] 有关详细描述，请参见机制4 。显然，该机制是策略无关的，因为它实现了 p-统计量-的q-统计量，其中 $p = \left(1-1/\sqrt{2}\right)k$ 且 $q = \lambda$。因此，只需证明其失真度至多为 $1+\sqrt{2}$。

定理 5.5。对于最大值之和，$\left(1-1/\sqrt{2}\right)k$-最右侧代理人的最左侧的失真度至多为$1+\sqrt{2}$。

证明。 考虑任意实例 I。令 w 为机制选定的位置， o 为最优位置。对于每个选区 d，令 i_d 为距离 w 最远的代理人， i_d^* 为距离 o最远的代理人。因此，$\text{cost}(w|I) = \sum_{d\in D}\delta(i_d, w)$，且对于任意代理人 $j \in N_d$，$\text{cost}(o|I) = \sum_{d\in D}\delta(i_d^*, o) \geq \sum_{d\in D}\delta(j, o)$。根据 w 和 o的相对位置，我们考虑以下两种情况。

[2]准确地说，该机制选择最左侧第$\lceil\left(1-1/\sqrt{2}\right)k\rceil$个代表作为获胜者。为简化符号和讨论，我们省略上取整符号。

情形 1： $o < w$。
令 $S = \{d \in D : \ y_d \geq w\}$ 表示位于 w 右侧的区代表集合。根据w的定义，我们有 $|S| \geq \frac{k}{\sqrt{2}}$。
由于对于每个 $d \in S$ 和 $y_d \in N_d$，都有 $o < w \leq y_d$，因此我们有

$$\text{cost}(o|I) \geq \sum_{d \in S} \delta(y_d, o) \geq |S| \cdot \delta(w, o) \geq \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot \delta(w, o) \Leftrightarrow k \cdot \delta(w, o) \leq \sqrt{2} \cdot \text{cost}(o|I).$$

根据三角不等式，且由于 $i_d \in N_d$，我们有

$$\begin{aligned}\text{cost}(w|I) = \sum_{d \in D} \delta(i_d, w) &\leq \sum_{d \in D} \delta(i_d, o) + \sum_{d \in D} \delta(w, o) \\ &\leq \text{cost}(o|I) + k \cdot \delta(w, o) \\ &\leq (1 + \sqrt{2}) \cdot \text{cost}(o|I).\end{aligned}$$

情形 2： $w < o$。
我们将选区划分为集合 L 和集合 R。集合 L 包含 $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) k$ 个选区，从最左侧代表所在的选区开始，到第 $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) k$ 个最左侧代表所在的选区为止（即 w）；集合 R 则包含其余选区。
根据定义，我们有 $|R|/|L| = 1 + \sqrt{2}$。对于每个选区 d，令 ℓ_d 和 r_d 分别为 d 中最左侧和最右侧的代理人。我们有以下观察：

- 对于每个 $d \in L$，由于 y_d 是 d 中最右侧的代理人，且 $y_d \leq w < o$，必有 $i_d = i_d^* = \ell_d$。根据 ℓ_d、w 和 o 的位置，我们有 $\delta(\ell_d, o) = \delta(\ell_d, w) + \delta(w, o)$。
- 对每个 $d \in R$，根据三角不等式，有 $\delta(i_d, w) \leq \delta(i_d, o) + \delta(w, o)$。由于根据 i_d^* 的定义，$\delta(i_d, o) \leq \delta(i_d^*, o)$，因此进一步有 $\delta(i_d, w) \leq \delta(i_d^*, o) + \delta(w, o)$。

因此，

$$\begin{aligned}\text{cost}(w|I) = \sum_{d \in D} \delta(i_d, w) &= \sum_{d \in L} \delta(\ell_d, w) + \sum_{d \in R} \delta(i_d, w) \\ &\leq \sum_{d \in L} \Big(\delta(\ell_d, w) + \delta(w, o)\Big) - |L|\delta(w, o) + \sum_{d \in R} \Big(\delta(i_d^*, o) + \delta(w, o)\Big) \\ &= \text{cost}(o|I) + (|R| - |L|)\delta(w, o).\end{aligned}$$

由于对每个 $d \in L$ 和 $y_d \in N_d$，$y_d \leq w < o$，我们有

$$\text{cost}(o|I) \geq \sum_{d \in L} \delta(y_d, o) \geq |L| \cdot \delta(w, o) \Leftrightarrow \delta(w, o) \leq \frac{1}{|L|} \cdot \text{cost}(o|I).$$

因此，我们得到

$$\text{cost}(w|I) \leq \text{cost}(o|I) + \frac{|R| - |L|}{|L|} \cdot \text{cost}(o|I) = \frac{|R|}{|L|} \cdot \text{cost}(o|I) = (1 + \sqrt{2}) \cdot \text{cost}(o|I),$$

正如所需。 □

6 和的最大值

现在我们转而关注最后一个目标——和的最大值，即各选区中个体成本总和的最大值。我们证明，不受限制的机制的紧确界为 2，而策略无关机制的紧确界为 $1 + \sqrt{2}$。

6.1 不受限制的机制

最大成本目标的下界 2 即使在每个选区只有一名代理人的情况下也成立，因此对和的最大值也成立。对于上界，我们考虑 任意平均值 机制：该机制将每个选区的代表选为该选区内代理人位置的平均值，然后任意选择一名代表（例如最靠左的一名）作为最终获胜者。详细说明见机制 5 。

机制 5： 任意平均值

对每个选区 $d \in D$ **执行**

  $y_d := \frac{\sum_{i \in N_d} x_i}{\lambda}$;

返回 $w :=$ 最小值$_{d \in D}\, y_d$;

定理 6.1。 对于和的最大值，任意平均值的失真度至多为2。

证明。 考虑任意实例 I。设 w 为该机制选择的位置， o 为最优位置；不失一般性，假设 $w < o$。记 d^* 为决定 w成本的选区，即 $d^* \in \arg\max_{d \in D} \sum_{i \in N_d} \delta(x_i, w)$。此外，记 d_w 为由 w代表的选区，即$w = \frac{1}{\lambda} \sum_{i \in N_{d_w}} x_i \Leftrightarrow \sum_{i \in N_{d_w}} (w - x_i) = 0$。根据三角不等式，我们有

$$\text{cost}(w|I) = \sum_{i \in N_{d^*}} \delta(x_i, w) \leq \sum_{i \in N_{d^*}} \delta(x_i, o) + \sum_{i \in N_{d^*}} \delta(w, o) \leq \text{cost}(o|I) + \lambda \delta(w, o).$$

根据 d_w 的定义，且由于其包含 λ 个代理人，我们有

$$\lambda \delta(w, o) = \lambda(o - w) = \lambda(o - w) + \sum_{i \in N_{d_w}} (w - x_i) = \sum_{i \in N_{d_w}} (o - x_i) \leq \sum_{i \in N_{d_w}} \delta(x_i, o) \leq \text{cost}(o|I),$$

其中，不等式成立是因为当 $x_i \leq o$时， $\delta(x_i, o) = o - x_i$ ；当$x_i \geq o$时， $\delta(x_i, o) = x_i - o \geq o - x_i$。因此，我们得到 $\text{cost}(w|I) \leq 2 \cdot \text{cost}(o|I)$，证毕。 □

6.2 策略无关机制

我们现在转而关注策略无关机制，并首先证明其下界为 $1 + \sqrt{2}$.

定理 6.2. 对于和的最大值，任何策略无关机制的失真度至少为 $1 + \sqrt{2} - \varepsilon$，对任意 $\varepsilon > 0$均成立。

证明。 假设与此矛盾，存在一种策略无关机制，使其失真度严格小于$1 + \sqrt{2} - \varepsilon$，对任意 $\varepsilon > 0$均成立。

性质（P1）： 考虑一个选区，其中有 $(1 + \sqrt{2})x$ 个代理人位于 0， x 个代理人位于 1，其中 x 是任意大的整数。[3] 我们声称，机制必须选择 0 作为该选区的代表，否则失真度至少为 $1 + \sqrt{2}$。确实，假设代表是某个 $y \neq 0$。将一名位于 1 的代理人移至 y，即可得到一个新的选区，而其代表仍必须是 y；否则，在仅包含这个新选区的实例中，位于 y 的代理人就会有动机将自己的位置谎报为 1，从而使代表（以及最终获胜者）变为 y。由归纳法可得， y 必须是该选区的代表，该选区中有 $(1+\sqrt{2})x$ 个代理人位于 0， x 个代理人位于 y。在仅包含后一选区的实例 I 中，获胜者是 y，其成本为$(y|I) = (1 + \sqrt{2})x \cdot |y|$，而成本$(0|I) = x \cdot |y|$，因此失真度至少为 $1 + \sqrt{2}$。

[3]具体来说，由于代理人的数量必须是整数，因此我们需要在 0 处有 $\lceil (1 + \sqrt{2})x \rceil$ 个代理人。为简化记号，我们省略上取整符号，但应当清楚，这不会影响我们的论证。

性质（P2）： 考虑一个选区，其中有 x 个代理人位于 1，$(1+\sqrt{2})x$ 个代理人位于 2。我们声称，机制必须选择 2 作为该选区的代表，否则失真度至少为 $1+\sqrt{2}$。这可由与性质（P1）类似的论证得出。

导出矛盾： 考虑以下包含两个选区的实例 J：

- 第一个选区中，0 处有 $(1+\sqrt{2})x$ 名代理人，1 处有 x 名代理人。
- 第二个选区中，1 处有 x 名代理人，2 处有 $(1+\sqrt{2})x$ 名代理人。

根据性质 (P1) 和 (P2)，两个选区的代表必须分别为 0 和 2，因此这两个位置之一会被选为最终获胜者。然而，$\mathsf{cost}(0|J) = \mathsf{cost}(2|J) = 2(1+\sqrt{2})x + x$，而 $\mathsf{cost}(1|J) = (1+\sqrt{2})x$，由此得到失真度 $2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$。 □

为得到紧上界，我们考虑 最右侧-$\left(1-1/\sqrt{2}\right)\lambda$-最左侧 机制，该机制将每个选区的代表选为其中第 $\left(1-1/\sqrt{2}\right)\lambda$ 个最左侧代理人的位置，然后选择最右侧代表作为最终获胜者。详细描述见机制 6。该机制是 p-统计量-q-统计量的实现，其中 $p = k$且 $q = \left(1-1/\sqrt{2}\right)\lambda$，因此它是策略无关的。所以，只需证明其失真度至多为 $1+\sqrt{2}$。

机制 6： 最右侧代表的$\left(1-1/\sqrt{2}\right)\lambda$最左侧代理人

对于每个选区 $d \in D$ **执行**
  y_d：第 $= \left(1-1/\sqrt{2}\right)\lambda$ 个最左侧代理人；
返回 w：$=$ 最右侧代表；

定理 6.3。 对于和的最大值，最右侧代表的$\left(1-1/\sqrt{2}\right)\lambda$最左侧代理人 的失真度至多为$1+\sqrt{2}$。

证明。设 w 为该机制选定的位置，o 为最优位置。记 d^* 为使 w的总和最大化的选区，记 d_w 为由 w代表的选区。此外，对于任意选区 d，我们用 $\mathsf{cost}_d(x) = \sum_{i\in N_d}\delta(i,x)$ 表示 d 中的代理人到位置 x的总距离，并令 o_d 为使该距离最小的位置（也就是说，o_d 是 d的中位代理人）。显然，根据定义，我们有 $\mathsf{cost}(w) = \mathsf{cost}_{d^*}(w)$，且对于每个选区 d，$\mathsf{cost}_d(o) \le \mathsf{cost}(o)$。我们考虑以下两种情况：

情形 1： $o < w$。
根据 d^* 的定义和三角不等式，我们有

$$\mathsf{cost}(w) = \sum_{i\in N_{d^*}}\delta(i,w) \le \sum_{i\in N_{d^*}}\delta(i,o) + \sum_{i\in N_{d^*}}\delta(o,w) \le \mathsf{cost}(o) + \lambda\delta(o,w).$$

令 $S = \{i \in N_{d_w}:\ x_i \ge w\}$ 为在d_w中位于 w 右侧（或恰好位于 w 处）的代理人个体集合。根据 w的定义，$|S| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda$。由于 $o < w$，我们有

$$\mathsf{cost}_{d_w}(o) \ge |S|\cdot\delta(w,o) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\cdot\delta(w,o) \Leftrightarrow \lambda\delta(w,o) \le \sqrt{2}\cdot\mathsf{cost}_{d_w}(o) \le \sqrt{2}\cdot\mathsf{cost}(o).$$

综合以上结果，我们得到界限 $1+\sqrt{2}$。

情况 2： $w < o$。
我们考虑以下两种子情况：

- $o_{d^*} \le w < o$。根据[4] 选区 d^*中代理人的社会成本单调性，我们有 $\text{cost}_{d^*}(o_{d^*}) \le \text{cost}_{d^*}(w) \le \text{cost}_{d^*}(o)$，因此 $\text{cost}(w) \le \text{cost}(o)$。
- $w < o_{d^*}$。由于 w 是最右侧代表，因此必定有 $y_{d^*} \le w < o_{d^*}$。所以，同样根据选区 d^* 内社会成本的单调性，我们有 $\text{cost}_{d^*}(o_{d^*}) \le \text{cost}_{d^*}(w) \le \text{cost}_{d^*}(y_{d^*})$。现在我们将论证 $\text{cost}_{d^*}(y_{d^*}) \le (1+\sqrt{2})\text{cost}_{d^*}(o_{d^*})$。令 L为包含从最左侧到第 $(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\lambda$ 个最左侧代理人的 d^* 个代理人（即 y_{d^*}）的集合，而集合 R 包含其余代理人。根据定义，我们有 $|R|/|L| = 1+\sqrt{2}$。现在观察到
  - For every agent $i \in L$, $i \le y_{d^*}$, and thus $\delta(i, o_{d^*}) = \delta(i, y_{d^*}) + \delta(y_{d^*}, o_{d^*})$.
  - For every agent $i \in R$, $i \ge y_{d^*}$, and thus $\delta(i, y_{d^*}) \le \delta(i, o_{d^*}) + \delta(y_{d^*}, o_{d^*})$.

  因此，

$$\begin{aligned}
\text{cost}_{d^*}(y_{d^*}) &= \sum_{i \in N_{d^*}} \delta(i, y_{d^*}) = \sum_{i \in L} \delta(i, y_{d^*}) + \sum_{i \in R} \delta(i, y_{d^*}) \\
&\le \sum_{i \in L} \delta(i, y_{d^*}) + \sum_{i \in R} \Big(\delta(i, o_{d^*}) + \delta(y_{d^*}, o_{d^*}) \Big) \\
&= \sum_{i \in L} \Big(\delta(i, y_{d^*}) + \delta(y_{d^*}, o_{d^*}) \Big) + \sum_{i \in R} \delta(i, o_{d^*}) + (|R| - |L|)\delta(y_{d^*}, o_{d^*}) \\
&= \text{cost}_{d^*}(o_{d^*}) + (|R| - |L|)\delta(y_{d^*}, o_{d^*}).
\end{aligned}$$

  由于 $y_{d^*} < o_{d^*}$，我们还有 $\text{cost}_{d^*}(o) \ge |L|\delta(y_{d^*}, o_{d^*})$，因此

$$\text{cost}_{d^*}(y_{d^*}) \le \text{cost}_{d^*}(o_{d^*}) + \frac{|R| - |L|}{|L|}\text{cost}_{d^*}(o_{d^*}) = \frac{|R|}{|L|}\text{cost}_{d^*}(o_{d^*}) = (1+\sqrt{2})\text{cost}_{d^*}(o_{d^*}).$$

  由此，我们最终得到 $\text{cost}_{d^*}(w) \le (1+\sqrt{2})\text{cost}_{d^*}(o_{d^*}) \le (1+\sqrt{2})\text{cost}_{d^*}(o)$，因此 $\text{cost}(w) \le (1+\sqrt{2})\text{cost}(o)$。 □

7 开放问题

本文针对分布式单设施选址问题，研究了不受限制且策略无关的机制在由总和与最大值组合而成的社会目标下的失真度。未来有几个值得探索的方向，例如将我们的工作扩展到更一般的度量空间，或定义更多有意义的目标，并研究有关效率和策略无关性的类似问题。除了本文研究的单设施选址问题之外，还可以考虑设施数量更多的情形，以及代理人对这些设施具有异质偏好的情形。

参考文献

Ben Abramowitz、Elliot Anshelevich 和 Wennan Zhu。了解选民热情可大幅降低度量社会选择的失真度。载于第*15*届网络与互联网经济学会议（*WINE*）论文集，第3–16页，2019年。

[4] 众所周知，社会成本目标关于位置是单调的。具体而言，对于任意个体集合 S，若 $y_1 \in \arg\min_x \sum_{i \in S} \delta(i, x)$，则对于任意 $y_1 \le y_2 \le y_3$ 或 $y_3 \le y_2 \le y_1$，$\sum_{i \in S} \delta(i, y_1) \le \sum_{i \in S} \delta(i, y_2) \le \sum_{i \in S} \delta(i, y_3)$。

Georgios Amanatidis、Georgios Birmpas、Aris Filos-Ratsikas 和 Alexandros A. Voudouris。窥探序数帷幕之后：通过基数查询改善失真度。*Artificial Intelligence*，296：103488，2021年。Georgios Amanatidis、Georgios Birmpas、Aris Filos-Ratsikas 和 Alexandros A. Voudouris。少量查询，大有裨益：匹配中的信息与失真度权衡。人工智能研究杂志，74，2022a。Georgios Amanatidis、Georgios Birmpas、Aris Filos-Ratsikas 和 Alexandros A. Voudouris。别掷骰子，再问一次：匹配问题及其他问题的双查询失真度。载于第*36*届神经信息处理系统大会（*NeurIPS*）论文集，2022b。Eleftherios Anastasiadis 和 Argyrios Deligkas。异质设施选址博弈。载于第*17*届自主智能体与多智能体系统国际会议（*AAMAS*）论文集，第623–631页，2018年。Elliot Anshelevich 和 John Postl。度量偏好下的随机社会选择函数。人工智能研究杂志，58：797–827，2017年。Elliot Anshelevich、Onkar Bhardwaj 和 John Postl。度量偏好下最优社会选择的近似。载于第*29*届*AAAI*人工智能大会（*AAAI*）论文集，第777–783页，2015年。Elliot Anshelevich、Aris Filos-Ratsikas、Nisarg Shah 和 Alexandros A. Voudouris。社会选择问题中的失真度：前15年及未来发展。载于第*30*届国际人工智能联合会议（*IJCAI*）论文集，第4294–4301页，2021年。Elliot Anshelevich、Aris Filos-Ratsikas 和 Alexandros A. Voudouris。分布式度量社会选择的失真度。*Artificial Intelligence*，308：103713，2022年。Gerdus Benad`e、Swaprava Nath、Ariel D. Procaccia 和 Nisarg Shah。参与式预算编制中的偏好引出。载于第*31*届*AAAI*人工智能大会（*AAAI*）论文集，第376–382页，2017年。Craig Boutilier、Ioannis Caragiannis、Simi Haber、Tyler Lu、Ariel D. Procaccia 和 Or Sheffet。最优社会选择函数：功利主义视角。*Artificial Intelligence*，227：190–213，2015年。Qingpeng Cai、Aris Filos-Ratsikas 和 Pingzhong Tang。极小化最大嫉妒的设施选址。载于第*25*届国际人工智能联合会议（*IJCAI*）论文集，第137–143页，2016年。Ioannis Caragiannis、Swaprava Nath、Ariel D. Procaccia 和 Nisarg Shah。通过隐式功利主义投票进行子集选择。人工智能研究杂志，58：123–152，2017年。Ioannis Caragiannis、Nisarg Shah 和 Alexandros A. Voudouris。多赢家投票的度量失真度。载于第*36*届*AAAI*人工智能大会（*AAAI*）论文集，第4900–4907页，2022年。Hau Chan、Aris Filos-Ratsikas、Bo Li、Minming Li 和 Chenhao Wang。设施选址问题的机制设计：综述。载于第*30*届国际人工智能联合会议（*IJCAI*）论文集，第1–17页，2021年。Moses Charikar 和 Prasanna Ramakrishnan。随机社会选择的度量失真界。载于*2022*年*ACM-SIAM*离散算法研讨会（*SODA*）论文集，第2986–3004页，2022年。

Argyrios Deligkas、Aris Filos-Ratsikas 和 Alexandros A. Voudouris。资源有限条件下的异质设施选址。载于第*36*届*AAAI*人工智能大会论文集（*AAAI*），第4966–4974页，2022年。Soroush Ebadian、Anson Kahng、Dominik Peters 和 Nisarg Shah。投票中的最优失真与比例公平性。载于第*23*届*ACM*经济学与计算大会论文集（*EC*），第563–600页，2022年。Edith Elkind、Minming Li 和 Houyu Zhou。基于批准偏好的设施选址：策略无关性与公平性。载于第*21*届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集（*AAMAS*），第391–399页，2022年。Itai Feigenbaum 和 Jay Sethuraman。一维混合型与有害型设施选址模型的策略无关机制。载于*AAAI*研讨会，2015年。Michal Feldman、Amos Fiat 和 Iddan Golomb。论投票与设施选址。载于*2016*年*ACM*经济学与计算大会论文集（*EC*），第269–286页，2016年。Aris Filos-Ratsikas 和 Alexandros A. Voudouris。分布式设施选址的近似机制设计。载于第*14*届算法博弈论国际研讨会论文集（*SAGT*），第49–63页，2021年。Aris Filos-Ratsikas、Søren Kristoffer Stiil Frederiksen 和 Jie Zhang。单边匹配中的社会福利：随机优先及其他方法。载于第*7*届算法博弈论研讨会论文集（*SAGT*），第1–12页，2014年。Aris Filos-Ratsikas、Minming Li、Jie Zhang 和 Qiang Zhang。双峰偏好下的设施选址。自主智能体与多智能体系统，31(6):1209–1235，2017年。Aris Filos-Ratsikas、Evi Micha 和 Alexandros A. Voudouris。分布式投票的失真。*Artificial Intelligence*，286:103343，2020年。Dimitris Fotakis 和 Christos Tzamos。凹成本函数下的策略无关设施选址。*Algorithmica*，76(1):143–167，2016年。Vasilis Gkatzelis、Daniel Halpern 和 Nisarg Shah。解决最优度量失真猜想。载于第*61*届*IEEE*计算机科学基础年会论文集（*FOCS*），第1427–1438页，2020年。Panagiotis Kanellopoulos、Alexandros A. Voudouris 和 Rongsen Zhang。离散情形下的真实异质双设施选址。载于第*31*届人工智能国际联合会议论文集（*IJCAI*），第342–348页，2022年。David Kempe。度量投票中的通信、失真与随机性。载于第*34*届*AAAI*人工智能大会论文集（*AAAI*），第2087–2094页，2020年。Fatih Erdem Kizilkaya 和 David Kempe。多数否决：实现最优度量失真的简单投票规则。载于第*31*届人工智能国际联合会议论文集（*IJCAI*），第349–355页，2022年。Pinyan Lu、Yajun Wang 和 Yuan Zhou。设施博弈的更紧界。载于第*5*届互联网与网络经济国际研讨会论文集（*WINE*），第137–148页，2009年。

Pinyan Lu、Xiaorui Sun、Yajun Wang 和 Zeyuan Allen Zhu。双设施博弈的渐近最优策略无关机制。载于第*11*届*ACM*电子商务会议论文集（*EC*），第315–324页，2010年。Thomas Ma、Vijay Menon 和 Kate Larson。利用简单阈值查询提升单边匹配中的福利。载于第*30*届人工智能国际联合会议论文集（*IJCAI*），第321–327页，2021年。Debmalya Mandal、Ariel D. Procaccia、Nisarg Shah 和 David P. Woodruff。无论采取何种手段，都要实现高效且节俭的投票。载于第*32*届神经信息处理系统年会论文集（*NeurIPS*），第7178–7189页，2019年。Debmalya Mandal、Nisarg Shah 和 David P. Woodruff。投票中最优的通信—失真权衡。载于第*21*届*ACM*经济学与计算大会论文集（*EC*），第795–813页，2020年。Ariel D. Procaccia 和 Jeffrey S. Rosenschein。投票中基数偏好的失真。载于国际合作信息代理研讨会（*CIA*），第317–331页，2006年。Ariel D. Procaccia 和 Moshe Tennenholtz。无需金钱的近似机制设计。*ACM*经济学与计算汇刊，1(4):18:1–18:26，2013年。Paolo Serafino 和 Carmine Ventre。无需金钱的异质设施选址。理论计算机科学，636:27–46，2016年。Xinping Xu、Bo Li、Minming Li 和 Lingjie Duan。具有最小距离要求的双设施选址博弈。人工智能研究杂志，70:719–756，2021年。Houyu Zhou、Minming Li 和 Hau Chan。群体公平设施选址问题的策略无关机制。载于第*31*届人工智能国际联合会议论文集（*IJCAI*），第613–619页，2022年。