arXiv:2301.01611v1 [math.DG] 4 Jan 2023

关于拉格朗日的论文《论地理地图的构造》影响的一些札记

Athanase Papadopoulos*

摘要

本文札记探讨了拉格朗日关于地理地图构造的论文所产生的影响。我们提及该论文中提出的一些思想和问题与后来几位数学家的著作中出现的其他概念之间的联系，其中尤其包括切比雪夫（19世纪）和达布（19至20世纪）——这两位数学家对地理学特别感兴趣。本文的最终版本收录于《十八世纪数学地理学：欧拉、拉格朗日与朗伯》（R. Caddeo 和 A. Papadopoulos 编），施普林格，2022年。

1 引言

本章将介绍拉格朗日于其论文*Sur la construction des cartes géo-graphiques*（《地理地图的构造》）[10] 中提出的一些思想和问题，对后世一些作者作品的影响，包括达布（§2）、切比雪夫（§3）等人（§3 和 §4）。最后一节（§5）简要探讨拉格朗日的思想在实际构造地理地图中的应用。

2 达布作品中的拉格朗日论文

拉格朗日受朗伯和欧拉的著作启发，在其论文关于地理地图的构造中探讨了以下问题：

*高等数学研究所（斯特拉斯堡大学和法国国家科学研究中心）笛卡尔街7号，邮编67084，斯特拉斯堡 Cedex，法国 电子邮箱：athanase.papadopoulos@math.unistra.fr

求出所有将球面（更一般地说，将旋转曲面）映射到欧几里得平面、并将子午线和纬线映射为圆的保角投影。

达布在其《曲面一般理论与微积分的几何应用》 [5], 中多次提及拉格朗日的这一问题，尤其是在第一部分第二卷第四章中，该章探讨曲面之间的保角映射。在这一章中，达布先在前几章研究了等温坐标的一般方法，随后将这些方法应用于解决地理地图的构造所提出的问题。他在旋转椭球体的情形下考察了拉格朗日的问题（并称拉格朗日是第一位探讨这一问题的数学家）。回顾一下，在这种情形下，子午线是一个椭圆（或半椭圆），绕一条轴旋转后形成旋转椭球体；而纬线则是椭圆上一点绕该轴旋转所形成的轨道。由此得到的曲面上，子午线是测地线，而纬线不是。（这对于欧几里得空间中的一般旋转曲面也成立。）达布指出，如果两个族（子午线和纬线）中的一个族被表示为圆，那么另一个族也同样如此。因此，拉格朗日的条件（两个族都表示为圆）是多余的。他详细讨论了运用几何变换求解这一问题的各种方法，见 [5, 第236页-241]。在同一章中，达布回顾了高斯的一种方法：将地球上一个假定为旋转椭球体形状的区域保角表示到球面上，使相似比沿子午线保持不变。将这种方法应用于法国地图后，达布发现，在整幅地图的范围内，相似比的变化仅为其实际值的1/400。000 数量级。

达布对拉格朗日在其论文中提出的主要问题给出了现代表述和详细的现代证明；我们在本节开头回顾过这个问题。按照达布的表述，解法包括以下步骤：

1. 以北极为中心，将球面立体投影到赤道平面上。由此得到第一幅地图，记作 A。

2. 通过由下列方程定义的映射变换地图 A

$$\rho^c = \rho', \quad c\omega = \omega'$$

其中（ρ，ω）和（ρ'，ω'）是极坐标，且极点取为球面的中心（达布称之为朗伯

变换）。常数 c 是拉格朗日所称的投影指数。这给出了第二个地图，称为 B。

3. 作任意反演，其极点位于赤道平面内。由此即可得到所需的地图。

现在让我提及拉格朗日在同一篇论文中遇到的另一个问题，达布曾给出过它的解答。这是一个平面几何问题，题目如下：

给定三个点 R, R', R''，在固定底边 AB 上作出三个三角形，使给定的点为其顶点，并满足：

1. 顶点 $BRA, BR'A, BR''A$ 处的角度差已知；*2.* 包含这些角的边长比，即 $\frac{RB}{RA}, \frac{R'B}{R'A}, \frac{R''B}{R''A}$，已知。

拉格朗日说，这个问题在他看来很难用几何方法求解；他没有尝试代数解法，因为他觉得这没有用，除非能将问题化归为一个简单的作图问题。随后，他概述了如何运用自己在论文第一部分中发展出的解析方法来解决这个问题。

拉格朗日逝世约 130 年后，达布发表了一篇题为关于拉格朗日提出的一个问题 （《关于拉格朗日提出的一个问题》） [6]的文章。他将问题转化为寻找一个平面反演，使其将一个三角形变换为另一个三角形，并运用当时已有的新几何方法给出了该问题的解答。达布写道，几何方法的进步使人们如今能够轻松而优雅地解决拉格朗日提出的问题，而这个问题可归结为：

给定平面上的一个三角形 ABC ，求一个反演，使其将这个三角形变换为与另一个给定三角形全等的三角形 $A_0B_0C_0$。

接着，达布给出了这个问题简洁、完整的几何解答。（达布的同一解答见其《曲面一般理论与微积分的几何应用》第一部第四章第 133 节，第 241—243 页。）

3 切比雪夫定理及其发展

在其论文 [10], 的第 2 节末尾，拉格朗日给出了球面与平面之间（某个子集上的）保角映射在一点处的无穷小伸缩公式

。记号如下： s,t 是地球表面上一点的曲线坐标（将地球表面视为半径为 1 的球面）， x,y 是该点在平面上的像的直角坐标。微分 ds 表示球面上两个无穷接近的点所经过的两条子午线弧长之差，qdt 表示这两条子午线之间所截取的纬线弧长。于是，$(s+ds,t+dt)$ 和 $(x+dx,y+dy)$ 分别是球面上一点的曲线坐标（该点与 (s,t) 无穷接近）及其经地图映射后所得像的曲线坐标。由此，拉格朗日写出了球面上给定点处的无穷小伸缩 公式：

$$m=\sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{ds^2+q^2dt^2}}.$$

P. L. Chebyshev 将这个公式作为研究如何构造畸变最小的地理地图的出发点。更确切地说，采用上述记号，Chebyshev 在两篇论文中探讨了如何确定球面上某一区域内，使无穷小伸缩 m 偏离其在该区域上的积分最小的地图；这两篇论文的标题与拉格朗日的论文标题相同。他在论文中使用了拉格朗日确立的其他公式，并得出了一个新结果：在球面的子集到平面的所有保角表示中，畸变最小的表示是在该区域边界上畸变为常数的表示，参见论文 [3] 和 [4]。Chebyshev 还将这项研究与拉普拉斯方程联系起来。

既然上一节谈到了达布关于地理学的研究，这里不妨提一下：1911年，达布发表了一篇论文，其标题与拉格朗日和 Chebyshev 的论文标题相同（《地理地图的构造》），并在文中证明了切比雪夫定理，参见 [7]。事实上，达布在论文中将一个更一般的结果归于 Chebyshev，该结果适用于任意旋转曲面。

我们还要提及切比雪夫的学生 D. A. Gravé 的研究。拉格朗日曾在论文 [10], 中探讨这样一个问题：找出所有将子午线和纬线映射为圆或直线的保角映射；而 Gravé 研究的则是如何刻画将子午线和纬线映射为圆或直线的保面积映射。他在一篇论文中完整解决了这一问题，该论文的标题同样是关于地理地图的构造，见 [8]。此外，1894 年，Gravé 提交了一份证明概要，论证切比雪夫的

定理（切比雪夫本人只勾勒了证明思路），提交地点是法国科学进步协会在卡昂举行的年会上。[1] 1896年，Gravé 用俄语发表了切比雪夫定理的完整证明；1911年，他又用法语发表了一篇题为论一个广义的切比雪夫定理的论文，其中详细证明了一个稍具一般性的结果：该结果不仅适用于球面，也适用于曲率不变号的任意曲面（见 [9]）。

最后我们指出，约在切比雪夫提出切比雪夫定理一个世纪后，John Milnor 基于他的思想给出了该定理的现代证明 [14], ；他还指出了进一步的发展，特别强调了所映射的球面区域为测地凸的情形。Milnor 在论文中写道："这一结果问世已有一百多年，但据我所知，实际制图者从未使用过它。"

4 拉格朗日的论文在现代文献中的地位

我们从回顾施瓦茨导数的概念开始本节。它是与实变量的光滑函数或复变量的全纯函数相关联的函数，用来衡量这类函数偏离莫比乌斯变换的程度。更精确地说，施瓦茨导数可定义为射影空间 $\mathbb{RP}^1$ 上的微分同胚群到以二次微分（全纯二次微分形式）为系数的空间上的一个 1-余循环，

[1]在协会1895年的出版物中，有一篇 Gravé 撰写的短文，题为关于切比雪夫的一个问题（On a question of Chebyshev）。关于将切比雪夫的名字从西里尔字母转写为拉丁字母的多种可能方式，Gravé 使用了 $Tchebichef$，即切比雪夫本人用法语签署（大量）论文时所用的形式。事实上，这是切比雪夫唯一希望采用的名字转写形式。M. d'Ocagne 在数学科学通报上发表了一篇短文，题为"关于 Tchebichef 姓名的拼写" [15], ，文中写道："由于当代数学出版物中可以见到 Tchebichef 姓名的多种拼写形式，请允许我重申以下事实——我此前已经指出过这一点。在他最后一次旅居巴黎期间，即1893年5月，这位杰出的俄罗斯几何学家委托我为他那台引人入胜的算术机撰写一份完整说明（此前甚至从未有过俄语说明），并由他本人极其仔细地审阅。在此期间，他亲自指定了自己姓名的法语拼写形式'Tchebichef'，并表示希望在所有使用我们字母书写的著作中一律采用这一形式。正是因为他嘱托我确保实现他在这一点上的愿望，而这一愿望与通行用法有所出入，我才写下上述文字。"显然，切比雪夫的愿望并未实现。

其核为 PSL(2，$\mathbb{R}$)；施瓦茨导数是唯一这样的余循环，参见 [17]。最清晰的几何定义或许是 Thurston 在 [18], 中给出的定义，在该定义中，施瓦茨导数就成为一个二次微分。他在论文中的目标是研究从单位圆盘到复平面单连通域的保角映射空间上的一种拓扑；这种拓扑由施瓦茨导数的一致收敛拓扑诱导而来。在论文引言中，Thurston 将施瓦茨导数的概念与微分几何中的曲率概念作了类比。

V. Ovsienko 和 S. Tabachnikov 在 [16, 17] 中指出，施瓦茨导数早已由拉格朗日在其关于地理地图构造的论文中引入。[17] 中也提到，引入施瓦茨导数的 Hermann Schwarz 曾表示，这一概念至少隐含地出现在拉格朗日的论文中。根据 Ovsienko 向本章作者所作的解释，这一概念出现在拉格朗日的论文第 §10 节中，该节从定义 φ 和 Φ开始。事实上，拉格朗日使用商 φ''/φ 和 Φ''/Φ，并对它们进行比较；在这一过程中，出现了两个函数 f 和 F。通过将 φ''/φ 用 f 表示、将 Φ''/Φ 用 F 表示，稍作计算便可发现，它们分别恰好等于 $1/2S(f)$ 和 $1/2S(F)$，其中 S表示施瓦茨导数。结果是，拉格朗日用施瓦茨导数相等来表达将圆映为圆这一性质。

拉格朗日的论文与现代研究的另一层联系，涉及度量几何的视角。将球面映射到平面、并使圆映为直线的问题，是拉格朗日在其地理学论文中探讨的一般问题的一个特例。V. S. Matveev 等人曾将其视为以下一般问题的早期表述：寻找能将测地线映为测地线的曲面间映射，以及测地等价度量理论；参见论文 [13, 2], ，以及 Beltrami 的较早论文 [1] ，其中 Beltrami 表示，他的研究受到构造地理地图这一问题的启发。

5 拉格朗日的工作与实用制图学

目前尚不清楚拉格朗日的研究在实用制图学中得到了多大程度的应用，但有迹象表明，人们曾为此做过一些尝试。在1782年2月14日写给拉格朗日的一封信中，Laplace

写道 [12, 第十四卷，第 111] 页：“[.....] 你关于地理地图的构造的两篇论文令我同样欣喜。尤其是，我很欣赏你从问题的一般解中巧妙地提取出子午线[s] 和纬线均表示为圆的情形。此外，你的分析还有一项优点：它对绘制专门地图的实践很有用。我已请一位刚刚宣布将编制一部大型地图集的朋友采用这种方法。”

20世纪初，俄罗斯帝国海军上校、俄罗斯帝国地理学会物理学部秘书 Jules de Schokalsky 受托出版一部世界地理地图集，其中包括一系列比例尺为 1: 1,640,000 的欧洲俄罗斯地图。我们从 N. de Zinger 的文章拉格朗日投影在欧洲俄罗斯地图上的应用（拉格朗日投影在欧洲俄罗斯地图上的应用） [19], 中得知，地图采用了所谓的“拉格朗日投影”，并选取了一些便于使用的常数。尽管作者指的是拉格朗日论文的哪一部分并不明确，但至少可以看出，拉格朗日的著作曾用于地理学。文章详细介绍了常数的选取。

6 结语

最后，让我们回顾一下：拉格朗日不仅是一位数学家，也是一位天文学家[2]，而且他深知天文观测与球面三角学是大地测量学的基础。请看他在论文关于球面三角形若干问题的解法，并对这些三角形作全面分析（《关于球面三角形若干问题的解法，并对这些三角形作全面分析》）第9节中 [11], 提到其三角公式的地理应用时写道：“[.....] 我们刚才给出的公式，对于测量由大圆弧围成的球面面积也很有用。因此，当我们知道若干位于边界上的点的纬度和经度差时，就可以用它来极为方便地确定一个国家的面积；因为用大圆弧连接这些点，就会得到一个球面多边形，而我们只需将它分解为若干个由纬线以及这些纬线之间截取的赤道弧构成的

[2]例如，拉格朗日在两体问题方面的研究（应用于地月、日地以及其他成对天体），其中他引入了如今以拉格朗日点之名为人所知的平衡点，是对天体力学的一项重大贡献。

四边形，就能轻易求出其面积。”

参考文献

[1] E. Beltrami，《问题的解答：将曲面上的点映射到平面上，使测地线表示为直线》，《数学年刊》1（1865），第7期，185–204页。[2] A. V. Bolsinov 和 V. S. Matveev：《测地等价伪黎曼度量的局部标准形式》，《几何与物理学杂志》44（2003），489–506页。[3] P. L. Chebyshev，关于地理地图的构造。《圣彼得堡帝国科学院物理数学部通报》，第VIV卷，1856年，第257–261页。转载于 P. L. Tchebycheff，《著作集》，第1卷，第233–236页，圣彼得堡，1899年。[4] P. L. Chebyshev，关于地理地图的构造。1856年2月8日在圣彼得堡帝国大学隆重会议上的演讲，A. Gravé 译，转载于 P. L. Tchebycheff，《著作集》，第1卷，第239–247页，圣彼得堡，1899年。[5] G. Darboux，《曲面一般理论讲义及微积分的几何应用》，Gauthier-Villars，巴黎，共4卷，第1版，1889年。[6] G. Darboux，关于拉格朗日提出的一个问题，《数学科学通报》35（1911），第28–30页。[7] G. Darboux，关于地理地图的构造，《数学科学通报》35（1911），23–28页。[8] D. A. Gravé，关于地理地图的构造，《纯粹与应用数学杂志》第5辑第2卷（1896），317–362页。[9] D. A. Gravé，广义切比雪夫定理的证明，《纯粹与应用数学杂志》40（1911），第4期，第247–251页。[10] J.-L. Lagrange，关于地理地图的构造，《柏林皇家科学院暨美文学院新论文集》，1779年，161–210页。英文译文见本卷第15章。

[11] J.-L. Lagrange，《球面三角形相关若干问题的解答及其完整分析》，《综合理工学院学报》2（1800），第270–297页。[12]J.-L. Lagrange，《著作集》，J.-A. Serret 和 G. Darboux 编，巴黎，Gauthier-Villars，1867–1892年。[13]S. Matveev，与 *Berwald* 度量具有相同测地线的黎曼度量，《德布勒森数学出版物》74/3-4（2009），405–416页。[14]J. Milnor，制图学中的一个问题，《美国数学月刊》第76卷第10期（1969年12月），1101–1112页。[15] M. d'Ocagne，关于 Tchebichef 姓名的拼写，《数学科学通报》55（1931），第98页。[16] V. Ovsienko，施瓦茨导数与辛斯图姆理论，《图卢兹大学理学院数学学报》（1993），第2卷第1期，第73–96页。[17] V. Ovsienko 和 S. Tabachnikov，什么是……施瓦茨导数?《美国数学学会通报》56（2009）第1期，第34–36页。[18]W. P. Thurston，拉链与单叶函数。比伯巴赫猜想（印第安纳州西拉斐特，1985），第185–197页，数学调查专著第21卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1986年。[19] N. de Zinger，拉格朗日投影在欧洲俄罗斯地图上的应用，《巴黎科学院院报》，1906年，第211–213页。