arXiv:2301.01623v1 [math.CO] 4 Jan 2023

除 ± 1 外仅有两个特征值的符号图

WillemH. Haemers*计量经济学与运筹学系，蒂尔堡大学，荷兰Hatice Topcu†数学系，内夫谢希尔哈哲贝克塔什维利大学，土耳其

摘要

我们完成了对邻接矩阵除至多两个特征值外其余特征值均等于 ± 1 的符号图的确定。具有这一性质的无符号图，以及不连通、二部和完全符号图，已在此前的两篇论文中得到确定。本文研究其余情形。

关键词：符号图，图谱，谱刻画。AMS 学科分类：05C50。

1 引言

有符号图 G^σ 是一个图 $G = (V, E)$，并配有一个函数 $\sigma\colon E \to \{-1, +1\}$，称为符号函数。因此，每条边要么为正，要么为负。图 G 称为 G^σ 的底层图。G^σ 的邻接矩阵 A 由 G 的邻接矩阵得到：将对应于负边的 1 替换为 -1。邻接矩阵为 $-A$ 的有符号图 $G^{-\sigma}$ 称为 G^σ 的负图。A 的谱也称为有符号图 G^σ 的谱。对于顶点集 $X \subset V$，改变 X 与 $V \setminus X$ 之间所有边的符号这一操作称为切换。用矩阵 A 表示时，切换会将 A 中对应于 X 的行和列乘以 -1。如果一个有符号图经过切换后能变成另一个有符号图的同构副本，则称这两个有符号图切换同构。切换同构的有符号图具有相似的邻接矩阵，因此它们是余谱的（也就是说，它们具有相同的谱）。关于有符号图的更多背景知识，请参阅 [2]。

本文确定了所有邻接矩阵中至多有两个特征值不等于 ± 1 的符号图。具有这一性质的无符号图已在 [4] 中确定。这使得人们能够找出该类中所有由其邻接谱确定的（无符号）图。这一结果促使我们进一步确定该类中的符号图。本项目的首批成果发表于 [6]。在该文中，我们研究了不连通、

*haemers@uvt.nl
†haticekamittopcu@gmail.com

二部和完全符号图。这包括只有一个或没有特征值不等于 ± 1 的符号图。本文将确定其余情形。

将无符号图的谱刻画推广到符号图时会遇到一个难题，因为谱在切换下保持不变。因此，我们只能期望符号图在切换意义下由其谱唯一确定。尽管如此，这方面确实已有一些成果。例如，文献 [1] 确定了对于哪些 n，符号路 P_n 的切换类由其谱唯一确定。

我们将 $\mathcal{G}$ 定义为这样一类符号图：其谱中至多有两个特征值不等于 $\mathbf{1}$ 或 -1。那么，$\mathcal{G}$ 在切换、取负以及添加或删除孤立边的操作下保持封闭。显然，任何与 $\mathcal{G}$ 中某个无符号图切换同构的符号图都属于 $\mathcal{G}$，其负图也一样。然而，$\mathcal{G}$ 中还有许多其他符号图。

我们使用特征值交错、均衡划分的谱性质以及其他线性代数技巧，相关内容可参见 [3]。关于符号图的一些背景知识可见 [2]。与通常一样，J 表示全一矩阵，O 表示全零矩阵。全一向量和全零向量分别记为 $\mathbf{1}$ 和 $\mathbf{0}$。必要时，我们将 J、O、$\mathbf{1}$ 或 $\mathbf{0}$ 的大小作为下标标出。m 阶的反序单位矩阵记为 R_m（即，当 $i+j=m+1$ 时，$R_m(i,j)=1$；否则为 $R_m(i,j)=0$）。注意，R_m 的所有特征值都等于 ± 1。

2 主要结果

这里我们描述 $\mathcal{G}$ 中的符号图。不连通的符号图、符号完全图，以及至多只有一个特征值不等于 ± 1 的图，已在 [6] 中给出（见第 3 节）；对于与无符号图或其负图切换同构的图，请参见 [4]。

定理 2.1. 设 G^σ 是一个连通符号图，且有两个特征值不等于 ± 1，并且它不是符号完全图。那么，G^σ 或其负图 $G^{-\sigma}$ 与 $\mathcal{G}$ 中的一个无符号图切换同构，或者与由以下矩阵之一表示的符号图切换同构。

$$A_1 = \begin{bmatrix} J-I_m & J \\ J & -R_{2\ell} \end{bmatrix} \text{ } (m,\ell \geq 2) \text{ with spectrum } \{-1^{\ell+m-2}, 1^{\ell}, \tfrac{1}{2}(m-2 \pm \sqrt{m(m+8\ell)})\}.$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} R_{2m} & J \\ J & -R_{2\ell} \end{bmatrix} \text{ } (m,\ell \geq 2) \text{ with spectrum } \{-1^{m+\ell-1}, 1^{m+\ell-1}, \pm\sqrt{1+4m\ell}\}.$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} J-I_m & \mathbf{1} & \mathbf{1} & O \\ \mathbf{1}^\top & 0 & 1 & -\mathbf{1}^\top \\ \mathbf{1}^\top & 1 & 0 & \mathbf{1}^\top \\ O & -\mathbf{1} & \mathbf{1} & I_\ell - J \end{bmatrix} \text{ } (m,\ell \geq 1) \text{ with spectrum } \{-1^{m}, 1^{\ell}, -\ell-1, m+1\}.$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} J-I_m & J & J & O \\ J & I_\ell - J & O & J \\ J & O & R_2 & O \\ O & J & O & -R_2 \end{bmatrix} \text{ } (m,\ell \geq 1) \text{ with spectrum } \{-1^{m+1}, 1^{\ell+1}, \tfrac{1}{2}(m-\ell \pm \sqrt{m^2+\ell^2+6m\ell+4m+4\ell+4})\}.$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} J-I_m & J & J \\ J & J-I_\ell & O \\ J & O & I_k-J \end{bmatrix}$$ *($k \geq 2$, $(m,\ell) = (3,8)$, $(4,6)$, or $(6,5)$) with spectra* $\{-1^9, 1^k, \frac{1}{2}(9-k \pm \sqrt{k^2+26k+121})\}$, $\{-1^8, 1^k, \frac{1}{2}(8-k \pm \sqrt{k^2+28k+100})\}$, $\{-1^9, 1^k, \frac{1}{2}(9-k \pm \sqrt{k^2+38k+121})\}$.

$$A_6 = \begin{bmatrix} J-I_m & J & J \\ J & I_\ell-J & O \\ J & O & R_{2k} \end{bmatrix}$$ *($m \geq 1$, $(\ell,k) = (3,4)$, or $(4,3)$) with spectra* $\{-1^{m+4}, 1^5, \frac{1}{2}(m-1 \pm \sqrt{m^2+42m+9})\}$, $\{-1^{m+3}, 1^5, \frac{1}{2}(m-2 \pm \sqrt{m^2+40m+16})\}$.

$$A_7 = \begin{bmatrix} R_{2m} & J & J \\ J & J-I_\ell & O \\ J & O & -R_{2k} \end{bmatrix}$$ *($m \geq 1$, $(\ell,k) = (3,3)$, or $(4,2)$) with spectra* $\{-1^{m+4}, 1^{m+3}, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{8m+1}\}$, $\{-1^{m+4}, 1^{m+2}, 1 \pm 2\sqrt{4m+1}\}$.

$$A_8 = \begin{bmatrix} R_2 & J & \mathbf{1} & O \\ J & I_m-J & \mathbf{0} & J \\ \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & 0 & \mathbf{0}^\top \\ O & J & \mathbf{0} & -R_4 \end{bmatrix}$$ *($m \geq 1$) with spectrum* $\{-1^3, 1^{m+2}, \frac{1}{2}(1-m \pm \sqrt{m^2+22m+9})\}$.

$$A_9 = \begin{bmatrix} R_{2m} & J & J & \mathbf{0} \\ J & R_2 & O & \mathbf{1} \\ J & O & -R_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix}$$ *($m \geq 1$) with spectrum* $\{-1^{m+2}, 1^{m+1}, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{32m+9})\}$.

$$A_{10} = \begin{bmatrix} J-I_m & J & O & O \\ J & O & J & J-I_\ell \\ O & J & I_m-J & O \\ O & J-I_\ell & O & O \end{bmatrix}$$ *($(m,\ell) = (3,4)$, or $(4,3)$), with spectra* $\{-1^6, 1^6, \pm 6\}$, $\{-1^6, 1^6, \pm 6\}$.

$$A_{11} = \begin{bmatrix} J-I_m & J & J & O \\ J & I_m-J & O & J \\ J & O & O & J-I_\ell \\ O & J & J-I_\ell & O \end{bmatrix}$$ *($(m,\ell) = (3,4)$, or $(4,3)$) with spectra* $\{-1^6, 1^6, \pm 3\sqrt{5})\}$, $\{-1^6, 1^6, \pm 2\sqrt{13}\}$.

$$A_{12} = \begin{bmatrix} J-I_m & J & J & O \\ J & I_\ell-J & O & J \\ J & O & J-I_k & J \\ O & J & J & I_j-J \end{bmatrix}$$ *($(m,\ell,k,j) = (6,3,3,6)$, $(6,6,3,3)$, $(6,4,3,4)$, or $(4,4,4,4)$), with spectra* $\{-1^8, 1^8, \pm\sqrt{109}\}$, $\{-1^8, 1^8, \pm 10\}$, $\{-1^7, 1^8, \frac{1}{2}(-1 \pm 3\sqrt{41})\}$, $\{-1^7, 1^7, \pm 9\}$.

$$A_{13} = \begin{bmatrix} J-I_m & J & O & \mathbf{0} \\ J & -R_{2\ell} & J & \mathbf{1} \\ O & J & I_4-J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix}$$ *($(m,\ell) = (6,2)$, or $(5,3)$), with spectra* $\{-1^7, 1^6, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{241})\}$, $\{-1^7, 1^7, \pm 6\sqrt{2}\}$.

$$A_{14} = \begin{bmatrix} J-I_m & J & O \\ J & -R_{2\ell} & J \\ O & J & -R_4 \end{bmatrix}$$ *($(m,\ell) = (6,2)$, or $(5,3)$) with spectra* $\{-1^7, 1^5, 1 \pm 2\sqrt{13}\}$, $\{-1^7, 1^6, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{249}\}$.

$$A_{15}=\begin{bmatrix} J-I_m & J & J & O \\ J & I_\ell-J & O & J \\ J & O & R_{2k} & J \\ O & J & J & -R_{2j} \end{bmatrix}$$ *((m, ℓ, k, j) = (3,3,3,3), (4,3,3,2), or (4,4,2,2)) with spectra* $\{-1^8, 1^8, \pm\sqrt{85}\}$, $\{-1^8, 1^7, \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{313})\}$, $\{-1^7, 1^7, \pm\sqrt{73}\}$.

$$A_{16}=\begin{bmatrix} R_2 & J & J & O \\ J & -R_2 & O & J \\ J & O & O & I_3 \\ O & J & I_3 & O \end{bmatrix}$$ *with spectrum* $\{-1^4, 1^4, \pm\sqrt{17}\}$.

$$A_{17}=\begin{bmatrix} R_2 & J & J & \mathbf{1} & O & \mathbf{0} \\ J & -R_2 & O & \mathbf{0} & J & \mathbf{1} \\ J & O & R_2 & \mathbf{0} & J & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & 0 & \mathbf{0}^\top & 0 \\ O & J & J & \mathbf{0} & -R_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & 0 & \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix}$$ *with spectrum* $\{-1^4, 1^4, \pm 2\sqrt{5}\}$.

$$A_{18}=\begin{bmatrix} J-I_m & J & \mathbf{1} & O \\ J & -R_{2\ell} & \mathbf{0} & J \\ \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & 0 & \mathbf{0}^\top \\ O & J & \mathbf{0} & -R_2 \end{bmatrix}$$ *((m, ℓ) = (4,3), or (3,4)) with spectra* $\{-1^6, 1^5, \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{177})\}$, $\{-1^6, 1^6, \pm 3\sqrt{5}\}$.

$$A_{19}=\begin{bmatrix} R_2 & J & J & \mathbf{1} & O \\ J & I_m-J & O & \mathbf{0} & J \\ J & O & R_{2\ell} & \mathbf{0} & J \\ \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & 0 & \mathbf{0}^\top \\ O & J & J & \mathbf{0} & -R_2 \end{bmatrix}$$ *((m, ℓ) = (3,3), or (4,2)) with spectra* $\{-1^6, 1^6, \pm 2\sqrt{10}\}$, $\{-1^5, 1^6, \frac{1}{2}(-1\pm 3\sqrt{17})\}$.

证明。为了说明上述每个矩阵都具有给定的谱，我们采用与 [4] 和 [6] 中相同的方法。对于每个矩阵 A，其给出的分块结构构成一个均衡划分（也就是说，每个块的行和与列和均为常数）。A 的部分谱就是商矩阵 Q 的谱（其中包含各块的行和），很容易验证每个 Q 都恰有两个不同于 ± 1 的特征值。若向 A 的某些块加上或减去全一块 J，其余特征值保持不变。不难验证，可以通过这种方式得到一个所有特征值均等于 ± 1 的矩阵。证明这个列表已完整的内容构成了本文余下的部分。

□

请注意，上述列表并非没有重叠。例如， A_2、 A_3 和 A_4 的相反数也可以通过交换 m 和 ℓ 得到；此外，若干具有对称谱的情形与其相反数切换同构。

另请注意， A_5 with $k=1$ 对应于 [4] 中定理 1(v) 给出的 $\mathcal{G}$ 个无符号图。因此，来自 [4] 的这三个孤立图实际上属于 $\mathcal{G}$ 中一个无限的符号图族。

3 预备知识

我们从 [6] 中的一些结果开始。

引理 3.1。如果符号图 G^σ 的最小特征值至少为 -1，那么其底层图 G 是完全图的不交并。

以下两个结果比 [6] 中的命题 2.3 和定理 2.4 稍微一般一些。不过，证明基本相同。

命题 3.2. 若 G^σ 连通，且除至多一个特征值外，其余特征值都在区间 $[-1,1]$ 内，则 G^σ 或 $G^{-\sigma}$ 与一个无符号完全图切换同构。

定理 3.3. 若 G^σ 不连通，且没有孤立顶点或边，并且 G^σ 的除两个特征值外，其余特征值都在区间 $[-1,1]$ 内，则 G^σ 是两个符号图的不交并，其中每个符号图都与一个无符号完全图或其负图切换同构。

定理 3.4. 若 $G^\sigma \in \mathcal{G}$ 是二部图，则 G^σ 与一个无符号二部图切换同构。

$\mathcal{G}$ 中的二部图见 [5, 4, 6]。

定理 3.5. 假设 K_n^σ 是一个阶为 n 的符号完全图，其邻接矩阵除两个特征值外，其余特征值都在区间 $[-1,1]$内。那么 K_n^σ 切换同构于一个邻接矩阵为

$$\widetilde{J}_{m,\ell} = \begin{bmatrix} J - I_m & J \\ J & -J + I_\ell \end{bmatrix}$$

的符号图，其中 $n = m+\ell$、 m、 $\ell \geq 2$，且谱为$\{-1^{m-1}, 1^{\ell-1}, \frac{1}{2}(m-\ell\pm\sqrt{m^2+\ell^2+6m\ell+4m+4\ell+4})\}$。

4 限制

在下文中，我们假设 G^σ 是 $\mathcal{G}$ 中的一个阶为 n 的符号图，它是连通的，且既非二部图也非完全图。于是，根据命题 3.2， G^σ 有两个不同于 ±1的特征值 r 和 s；我们不妨假设 $s < -1$ 和 $r > 1$，否则 G^σ 或其相反数的最小特征值为 -1，因此根据引理 3.1， G^σ 将是不连通图或完全图。

一个重要工具是特征值交错定理。由此可知，图 G^σ 中的每个诱导符号子图，其第二大特征值至多为 1，第二小特征值至少为-1。这排除了许多子图，包括含有 $n \geq 6$ 的路径 P_n 和含有 $n \geq 5$的 n-圈（对任意符号赋值均成立）。图 1 展示了其他一些禁诱导符号子图。

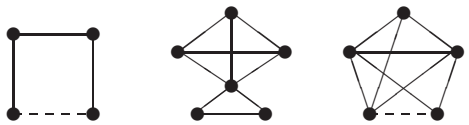

图 1：禁符号图；负边以虚线表示

当然，与图 1 中的图切换同构的符号图及其负图也都是禁用的，但这并未涵盖所有可能的符号赋值。例如，无符号

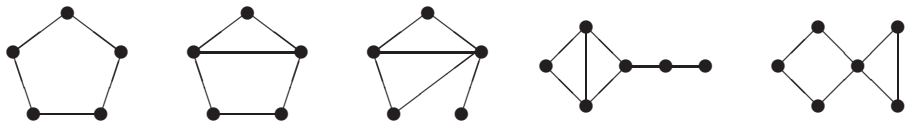

图 2：所有符号赋值下的禁用图

4-圈也可能出现。图 2 列出了底层无符号图的禁用诱导子图。换言之，对于所有符号赋值，这些图都是禁用的。另一个有用的事实是，若 A 是 $\mathcal{G}$中某个符号图的邻接矩阵，则 A^2 的特征值为 1、r^2 和 s^2，因此 $A^2 - I$ 是半正定的，且秩为 2。下面的引理是对 [4] 中引理 2 的推广。证明相同。

引理 4.1. 设 $G^\sigma \in \mathcal{G}$ 的邻接矩阵为 A，则（i）若 G^σ 没有孤立边，则不存在度为 1 的顶点；（ii）若 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 是 A 的两列，且 $\mathbf{x}^\top\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top\mathbf{y}$，则 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 至少有三个坐标位置不同，特别地，A 中任意两列（或两行）都不相等。

证明.（i）假设 G^σ 有一个度为 1 的顶点 v，以及一个与 v 距离为 2 的顶点 w。那么，$A^2 - I$ 中对应于 v 和 w 的子矩阵 2×2 的行列式为负，这与 $A^2 - I$ 是半正定矩阵矛盾。（ii）在这种情况下，$A^2 - I$ 有一个半正定子矩阵

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^\top\mathbf{x} - 1 & \mathbf{x}^\top\mathbf{y} \\ \mathbf{y}^\top\mathbf{x} & \mathbf{y}^\top\mathbf{y} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^\top\mathbf{x} - 1 & \mathbf{x}^\top\mathbf{x} \\ \mathbf{x}^\top\mathbf{x} & \mathbf{y}^\top\mathbf{y} - 1 \end{bmatrix}.$$

因此 $\det(M) \geq 0$，这意味着 $\mathbf{y}^\top\mathbf{y} > \mathbf{x}^\top\mathbf{x} + 2$。 □

5 可能的形式

由于 G^σ 不是二部图，且不包含长度为 5 或更长的奇圈，G^σ 包含一个三角形 e.

引理 5.1. 设 C 是 G^σ 中的一个大小为 $c \geq 3$的极大团。那么，经过顶点排序、切换并取负后，A 中对应于 C 的 $c \times n$ 子矩阵是以下之一:

$$(i)\ \left[\begin{array}{c|c|c} J - I_c & \begin{matrix} J_{c_1\times x} \\ -J_{c_2\times x} \\ O \end{matrix} & O_{c\times z} \end{array}\right] \text{ with } c_1 + c_2 < c,\ c_1, c_2, x > 0,\ z \geq 0,$$

$$(ii)\ \left[\begin{array}{c|cc|c} J - I_c & \begin{matrix} J_{c_1\times x} \\ O \end{matrix} & \begin{matrix} O \\ J_{c_2\times y} \end{matrix} & O_{c\times z} \end{array}\right] \text{ with } c_1 + c_2 = c,\ c_1, c_2, x > 0,\ y, z \geq 0,$$

$$(iii)\ \left[\begin{array}{c|cc|c} \widetilde{J}_{c_1,c_2} & \begin{matrix} J_{c_1\times x} \\ O \end{matrix} & \begin{matrix} O \\ J_{c_2\times y} \end{matrix} & O_{c\times z} \end{array}\right] \text{ with } c_1 + c_2 = c,\ c_1, c_2 \geq 2,\ x > 0,\ y, z \geq 0.$$

证明. 团 C 是一个符号完全图，根据交错定理，其特征值至多有两个不在区间 $[-1,1]$内。由引理 3.1， C 的邻接矩阵经过切换~并取负后，等于 $J-I_c$，或 $J_{c_1,\ c_2}$，其中 $c_1+c_2=c$ 且 c_1，$c_2\geq 2$。因此，由 A 中对应于 C的行构成的矩阵~ ~N具有形式 $[\,J-I_c\mid L\,]$或 $[\,J_{c_1,c_2}\mid L\,]$。由于 $NN^\top-I$是 A^2-I的主子矩阵， $NN^\top-I$的秩至多为 2。在 $N=[\,J-I_c\mid L\,]$的情况下，我们得到

$$NN^\top-I=(c-2)J+LL^\top=MM^\top,$$

其中 $M=[\,(\sqrt{c-2})\ \mathbf{1}\mid L\,]$。这意味着 M，因此 $[\,\mathbf{1}\mid L\,]$的秩至多为 2。令 $\mathbf{k}\neq\mathbf{0}$ 为 L（$L\neq O$的一列，因为 G^σ 是连通的)。那么 k 至少有一个等于 0 的元素（因为 C 是极大的），并且我们可以假设 k 至少有一个正元素（否则我们进行切换）。由 $\mathrm{rank}([\,\mathbf{1}\mid L])\leq 2$可知， L 的每一列都等于 k、0 或 $\mathbf{1}-\mathbf{k}$。如果 k 同时有正元素和负元素，那么 L 具有 (i) 中给出的形式；否则得到情形~ ~(ii)。在情形 $N=[\,J_{c_1,c_2}\mid L\,]$中，我们得到

$$NN^\top-I=\begin{bmatrix}(c-2)J & (c_1-c_2)J_{c_1\times c_2}\\ (c_1-c_2)J_{c_2\times c_1} & (c-2)J\end{bmatrix}+\widetilde{L}\widetilde{L}^\top=MM^\top,$$

其中 $M=[\,(\sqrt{c_1-1})\ 1\ (\sqrt{c_2-1})\,\big|\,\widetilde{\mathbf{1}}\,\big|\,\widetilde{L}\,]$，且 $\widetilde{\mathbf{1}}=[\,\mathbf{1}_{c_1}^\top\mid-\mathbf{1}_{c_2}^\top\,]^\top$。这意味着 M，因此 ~ ~ ~ ~ $[\,\mathbf{1}\mid\mathbf{1}\mid L\,]$的秩至多为 2。因此， L的每一列都是 1、1 和 1 的线性组合，但至少有一个零元素。所以，除切换外，只允许出现情形 (iii) 中给出的列；又因为 G^σ 是连通的，我们可以假设 $x>0$。 □

6 格式（i）

假设 G^σ 包含一个团 C，由引理 5.1 可得格式（i）。我们断言 $c_1=c_2=1$。事实上，若 $c_1\geq 2$或 $c_2\geq 2$，则 G^σ 含有一个与图 1 中最后一个符号图切换同构的导出子图。接下来考虑矩阵 N，它由 A (1 ≤ i ≤ x) 的第 1 行、第 3 行和第 $c+i$ 行组成。于是

$$N=\left[\begin{array}{cccc|c|c}0 & 1 & 1 & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}_x^\top & \mathbf{0}_z^\top\\ 1 & 1 & 0 & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top\\ 1 & -1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{x}^\top & \mathbf{z}^\top\end{array}\right],\ \text{and}$$

$$NN^\top-I=\begin{bmatrix}c-2+x & c-2 & \mathbf{x}^\top\mathbf{1}-1\\ c-2 & c-2 & 0\\ \mathbf{x}^\top\mathbf{1}-1 & 0 & 1+\mathbf{x}^\top\mathbf{x}+\mathbf{z}^\top\mathbf{z}\end{bmatrix}$$

对于 (0, ±1)-向量 x 和 z。注意，x 在 A 的对角线上有一个元素，该元素等于 0。因此 $|\mathbf{x}^\top\mathbf{1}|\leq\mathbf{x}^\top\mathbf{x}\leq x-1$。我们知道 $NN^\top-I$ 是奇异的，所以

$$0=\det(NN^\top-I)=(c-2)(x(1+\mathbf{x}^\top\mathbf{x}+\mathbf{z}^\top\mathbf{z})-(\mathbf{x}^\top\mathbf{1}-1)^2),$$

这意味着 $-\mathbf{x}^\top\mathbf{1}=\mathbf{x}^\top\mathbf{x}=x-1$ 且 $\mathbf{z}^\top\mathbf{z}=0$。最后，$\mathbf{z}=\mathbf{0}$ 意味着 $z=0$ （否则G^σ 不连通），因此我们有：

结论 6.1. 若 G^σ 的邻接矩阵 A 具有格式 (i)，则 $A=A_3$。

7 更多限制

在下文中，我们假设 G^σ 不包含格式为 (*i*) 的极大团，并且 G^σ 的矩阵 A 具有引理 5.1 中所述的格式 (*ii*) 或 (*iii*)。关于极大团 C，我们作如下假设：

假设 7.1。
(*i*) 团 C 的阶最大，为 c；(*ii*) C 在所有阶为 c的团中，出边数量最多。

对于格式 (*ii*) 和 (*iii*)，C 都是两个团 C_1 和 C_2的并，使得其余顶点可以划分为三个集合 X、Y和 Z，其中 X 中的顶点与 C_1 相邻，而与 C_2不相邻；Y中的顶点与 C_2 相邻，而与 C_1不相邻；Z 中的顶点既不与 C_1 相邻，也不与 C_2相邻。注意，集合 X、Y和 Z 可以为空，但 X 和 Y不能同时为空（否则 G^σ 不连通或完全），并且我们可以选取 $X \neq \emptyset$（否则交换 C_1 与 C_2，并交换 X 与 Y；若为格式 (*iii*)，还需进行切换并取负）。回想 $c_i = |C_i|$ $(i = 1, 2)$、$x = |X|$、$y = |Y|$ 和 $z = |Z|$。对于 G^σ 的顶点集的子集 V，记 G^σ_V为 G^σ 由 V诱导的子图。

命题 7.2。
(*i*) G^σ_X 和G^σ_Y 都是团的不交并。(*ii*) G^σ_X 或 G^σ_Y中两个相邻的顶点，在 $A + I$ 或$A - I$中对应相同的行和列。(*iii*) 若 $c_1 \geq 3$ *[*$c_2 \geq 3$*]*，则 G^σ_Y *[*G^σ_X*]* 的所有边符号相同，且与 C_1 *[*C_2*]*的符号相反。(*iv*) G^σ_Y *[*G^σ_X*]* 中的每个团的阶至多为 2；或者有一个团的阶至少为 3，其他所有团的阶均为 1，且所有边的符号都与 C_1 *[*C_2*]*的符号相反。(*v*) X 与 Y之间没有负边。(*vi*) Z 中的顶点不能同时与 X 和 Y相邻。

证明。(*i*) 假设G^σ_X 包含一条诱导路径 P_3，那么 G^σ 中由这条路径以及 C_1 中的一个顶点和 C_2 中的一个顶点所诱导的子图是一个禁用子图（图 2 中的第 3 个）。因此，G^σ_X 不包含 P_3，所以 G^σ_X 是一个团。(*ii*) 设 C_3 是 G^σ_A 中包含这两个相邻顶点的团。则将引理 5.1 应用于极大团 $C_1 \cup C_3$，可得(*ii*)。(*iii*) 取G^σ_X中的一条边 e，并考虑G^σ_X 中由 e、C_2 中的三个顶点以及 C_1中的一个顶点所诱导的子图 H^σ。若 e 的符号与 C_2中各边的符号相同，则 H^σ 与图 1 中第二个禁用子图切换同构。这证明了(*iii*)。(*iv*) 假设 G^σ_Y包含一个阶至少为 3 的团 C_3。那么 $c_1 \geq 3$ 和 C_3 的所有边符号都相同。若 G^σ_Y还包含另一个阶至少为 2 的团，则 G^σ 包含一个与图 1 中第二个禁用符号图切换同构的符号图。这证明了(*iv*)。(*v*) X 与 Y 之间的一条负边会与一条负边构成一个 4-圈，这是禁用的。(*vi*) Z 中的一个顶点若与 X 中的一个顶点和 Y 中的一个顶点相邻，就会形成一个诱导五边形，或一个带一条弦的五边形；对于所有符号赋值，这些都是禁用的。 □

注意，假设 7.1 意味着 G^σ_X [or G^σ_Y] 中的团的阶至多为 c_2 [c_1]；对于 G^σ_X [G^σ_Y] 中的一个阶为 c_2 [c_1] 的团 C_3，C_3 与$Y \cup Z$ [$X \cup Z$]之间至多有 $c_2 y$ [$c_1 x$] 条边。

8 形式（ii），其中 $Y=\emptyset$

假设 G^σ 的形式为 (ii)，且 $Y=\emptyset$。令 N 为由 A的三行组成的矩阵，这三行分别对应于来自 C_1 的一个顶点、来自 C_2 的一个顶点，以及来自 X的顶点 v。那么

$$N=\left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 0 & \mathbf{1}_{c_1-1}^\top & 1 & \mathbf{1}_{c_2-1}^\top & \mathbf{1}_x^\top & \mathbf{0}_z^\top \\ 1 & \mathbf{1}^\top & 0 & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ 1 & \mathbf{1}^\top & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{x}_1^\top & \mathbf{z}_1^\top \end{array}\right]$$

（对于 $(0,\pm1)$ 向量 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{z}_1$），以及

$$M=NN^\top-I=\left[\begin{array}{ccc} c+x-2 & c-2 & c_1+x_1'-1 \\ c-2 & c-2 & c_1 \\ c_1+x_1'-1 & c_1 & c_1+x_1+z_1-1 \end{array}\right],$$

其中 $x_1'=\mathbf{1}^\top\mathbf{x}$、$x_1=\mathbf{x}_1^\top\mathbf{x}_1$和 $z_1=\mathbf{z}_1^\top\mathbf{z}_1$。注意，由 $|x_1'|\le x_1\le x-1$、$x_1+1\le c_2$和 $x_1+1=c_2$ 可知，根据假设 7.1，有 $z_1=0$。使用高斯消元可得 $\det(M)=x(c-2)(c_1+x_1+z_1-1)-(c-2)(x_1'-1)^2-xc_1^2$。为方便起见，我们定义$f(a,b)=ab/(a+b)$。我们有 $\det(M)=0$，从而得到：

$$x_1+z_1+f(c_1,c_2-2)=\frac{(x_1'-1)^2}{x}+1. \tag{1}$$

如果 $c_2=1$，则命题 7.2($i-iii$)意味着 X是一个独立集，并且 X 与 Z之间没有边。于是，A 有 $x+1$ 个相同行，这与引理 4.1(ii)矛盾。因此，$c_2\ge2$和 $f(c_1,c_2-2)\ge0$。由假设 7.1可知，$x_1=x_1'=1$，或 $x_1=-x_1'$。我们将考虑 x_1的不同可能性。

命题 8.1. 假设 $x_1=0$。那么 v 是 G_X^σ 的唯一孤立顶点，并且下列情况之一成立：

(i) $x=1$、$c_2=2$ 和 $A=A_4$ 满足 $m=1$ 和 $\ell\ge1$。(ii) A 是 [4]中的定理 1 的情形 (v) 所给出的无符号矩阵。(iii) $(c_1,c_2,x)\in\{(2,5,5)、(2,6,3)、(3,4,5)、(4,4,3)\}$。

证明. 方程 1 给出 $z_1=1+1/x-f(c_1,c_2-2)$，因此 $z_1\le2$。若 $z_1=2$，则 $x=1$ 且 $c_2=2$，这直接导出矩阵 A_4 满足 $m=1$。若 $z_1=1$，则 $f(c_1,c_2-2)=1/x$，这意味着 $(c_1,c_2,x)=(2,4,1)$ 或 $(1,3,2)$。这两种情况都无法补全为 $\mathcal{G}$中的符号图。若 $z_1=0$，则 $f(c_1,c_2-2)=1+1/x$，这意味着 (c_1,c_2,x) 等于 $(4,2,1)$、$(3,8,1)$、$(6,5,1)$、$(3,5,2)$、$(4,4,3)$、$(2,6,3)$、$(2,5,5)$ 或 $(3,4,5)$。前三个三元组对应 [4]中的定理 1 的情形 (v)。如果 G_X^σ 有第二个孤立顶点，那么 A 中对应的两行相等，这与引理 4.1 矛盾。因此 G_X^σ 只有一个孤立顶点，且三元组 $(3,5,2)$ 不可能出现。

□

命题 8.2。如果 $x_1=x-1\ge2$ 那么 $A=A_5$，且满足 $k\ge3$。

证明。G_X 的底层图 G_X^σ 是完全图，由命题 7.2(iii)可知，所有符号均为负。公式 1 变为：$z_1=2-f(c_1,c_2-2)$。若 $z_1=2$，则 $c_2=2$和$x_1\le1$，这不符合条件。若 $z_1=1$，则 $f(c_1,c_2-2)=1$，因此 $c_1=2$, $c_2=4$和 $x=2$或 3

通过直接验证可知其无解。若 $z_1 = 0$，则 $f(c_1, c_2 - 2) = 2$，由此得到 $(c_1, c_2) = (3, 8)$、$(4, 6)$ 或 $6, 5)$。因此，根据定理 2，我们找到 A_5（实际上，只有满足 $k \leq \ell$ 的那些，因为假设 7.1）。 □

命题 8.3。若 $x_1 = 1$，则以下情形之一成立：
(i) $A = A_5$ 满足 $k = 2$。(ii) $A = -A_6$ 满足 $m = 1$（围绕第一个顶点切换）。(iii) $A = A_7$。(iv) A 是 *[4]* 中定理 1 的情形（ii）所给出的无符号矩阵。

证明。若 $x_1 = -x_1' = 1$，则显然 $x \geq 2$，公式 1 变为 $z_1 = 4/x - f(c_1, c_2 - 2)$。此外也可推出 $c_2 \geq 3$，因为 $c_2 = 2$ 将意味着 $z_1 = 0$（根据假设 7.1）。由 $x \geq 2$ 和f（$c_1, c_2 - 2$）≥ 1 可知 $z_1 \leq 1$，且 $z_1 = 1$ 意味着（c_1, c_2, x）$= (2, 4, 2)$，这是不可能的。因此 $z_1 = 0$，从而得到公式 1 的以下解：（c_1, c_2, x）$= (1, 3, 8), (1, 4, 6), (1, 6, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 4), (2, 6, 3), (3, 8, 2), (4, 3, 5), (4, 4, 3), (4, 6, 2)$，或 $(6, 5, 2)$。根据命题 7.2（iv），若 x 为奇数，则 G_X^σ 有一个孤立顶点；此时对于相同的（c_1, c_2, x），我们需要一个满足$x_1 = 0$的解。命题 8.1 给出两种可能性：$(2, 6, 3)$ 和 $(4, 4, 3)$。在这两种情形下，G_X^σ 都由一条负边和一个孤立顶点组成，不难验证这是不可能的。因此 x 为偶数；在剩下的七个三元组中，前两个对应于满足 $m = 1$ 的$-A_6$，接下来的两个对应于 A_7，最后三个对应于满足 $k = 2$ 的 A_5。若 $x_1 = x_1' = 1$，则很容易得到 $c_2 = 2$ 和 $z_1 = 0$。上述解中没有一个满足 $c_2 = 2$ 和 $x \geq 2$，因此与 X 对应的所有行都有 $x_1 = x_1' = 1$、$c_2 = 2$ 和 $z_1 = 0$，这意味着 G^σ 是 [4] 中定理 1 的情形（ii）。 □

命题 8.4。如果 $2 \leq x_1 \leq x - 2$，那么不存在解。

证明。命题 7.2(iv) 表明，如果存在一个满足 $2 \leq x_1 \leq x - 2$ 的解，那么对于相同的 c_1、c_2 和 x，也存在一个满足 $x_1 = 0$ 的解。由命题 8.1 可知，只有一个候选项：$(c_1, c_2, x) = (3, 4, 5)$ 和 $x_1 = -x_1' = 2$。但这不满足公式 1。 □

最后，我们重新考察命题 8.1(iii)。对于这四种情况中的每一种，都必须存在另一个满足 $x_1 > 0$ 的解，但我们尚未找到。因此，这四个三元组都不可能，所有具有格式 (ii) 且满足 $Y = \emptyset$ 的图的判定就完成了。

结论 8.5。如果 A 具有格式 (ii) 且满足 $Y = \emptyset$，那么 A 是无符号的（情况 (ii)，或 *[4]* 中定理 1 的情况 (v)），或者 A 是以下之一：(i) A_4，满足 $m = 1$、$\ell \geq 1$；(ii) A_5，满足 $2 \leq k \leq \ell$；(iii) $-A_6$，满足 $m = 1$（围绕第一个顶点进行切换）；(iv) A_7。

9 当 $Y = \emptyset$ = ∅ 时的格式 (iii)

假设 G^σ 具有格式 (iii) 和 $Y = \emptyset$。再次令 N 为由 A 的第 1 行、第 $c_1 + 1$ 行和第 $c + 1$ 行组成的矩阵（因此第 $c + 1$ 行对应于 X中的一个顶点）。那么

$$M = NN^\top - I = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + x - 2 & c_1 - c_2 & c_1 + x_1' - 1 \\ c_1 - c_2 & c_1 + c_2 & c_1 \\ c_1 + x_1' - 1 & c_1 & c_1 + x_1 + z_1 - 1 \end{bmatrix},$$

其中 x_1'、 x_1 和 z_1 同前（因此 $|x_1'| \le x_1 \le x-1$）。现在 $\det(M)$ 的表达式有些复杂，因此我们用另一种方式处理 $\det(M) = 0$。我们写作 $M = (c_1-2)J + (c_2-2)K + R$，其中

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ and } R = \begin{bmatrix} x+2 & 0 & x_1'+1 \\ 0 & 2 & 2 \\ x_1'+1 & 2 & x_1+z_1+1 \end{bmatrix}.$$

容易得到，$(c_1-2)J$ 和 $(c_2-2)K$ 是半正定（psd）矩阵。因此，如果 R 是正定（pd）的，那么 M 是正定的，因而是非奇异的。此外，如果 R 是半正定的，那么 M 是半正定的，且 M 的核是 $(c_1-2)J$、$(c_2-2)K$ 和 R 的核的交。因此，如果这个交为 $\{\mathbf{0}\}$，那么 M 也非奇异。R 的对角元素为正，因此其 2×2 主子式也为正。这意味着，当 $\det(R) > 0$ 时，R 为正定；当 $\det(R) = 0$ 时，R 为半正定。利用这一点以及 $\det(R) = 2((x+2)(x_1+z_1-1) - (x_1'+1)^2)$，我们得到以下限制。

命题 9.1. 以下情况之一成立：
（i） $x_1 = x_1'$、 $z_1 = 0$， （ii）
$x_1 = x_1' = 0$、 $z_1 = 1$， （iii）
$x_1 = -x_1' = 1$、 $z_1 = 0$、 $c_2 = 2$。

证明。由命题 7.2（iii，iv）可得 $x_1 = -x_1' = 1$，或 $x_1 = x_1'$。首先假设 $x_1 = x_1'$。利用 $x \ge x_1 + 1$，我们得到 $\det(R) \ge 2(x_1 z_1 + 3z_1 - 4)$。这意味着 $z_1 = 0$，$(x_1, z_1) = (0,1)$，或 $(1,1)$。第一种情况是情形（i），第二种情况是情形（ii）。如果 $x_1 = z_1 = 1$，我们得到

$$R = \begin{bmatrix} x+2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

我们有 $x \ge x_1 + 1 = 2$，因此当 $x > 2$ 时 R 是正定的，当 $x = 2$ 时是半正定的。如果 $x = 2$，R 的核由 $[1,2,-2]^\top$ 张成，而它不属于 J 或 K 的核。因此，只有当 $c_1 = c_2 = 2$ 且 $x = x_1 + 1 = 2$ 时，M 才是奇异的。于是我们有 $c_2 = x_1 + 1$ 和 $z_1 > 0$，这与假设 7.1 矛盾。接下来假设 $x_1 = -x_1' = 1$。那么 $\det(R) = 2(x+2)z_1$，因此 $z_1 = 0$，并且

$$R = \begin{bmatrix} x+2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

同样，R 在 $x > 2$ 时是正定的，在 $x = 2$ 时是半正定的。如果 $x = 2$ 的核由 $[0,1,-1]^\top$ 张成，而 $[0,1,-1]^\top$ 不属于 K 的核。因此 $c_2 = 2$，我们得到情形（iii）。 □

我们断言 $Z = \emptyset$。反之，假设 $u \in Z$，那么 u 不可能与 X 中的两个或更多顶点相邻，因为这意味着 A 有两行相同，这是不可能的。但 u 的度至少为 2，因此 Z 中存在另一个与 u 相邻的顶点 v。然而，这样就会得到图 2 中的一个禁用子图。这说明上述命题的情形 (ii) 不会出现。注意，G_X^σ 至多有一个孤立顶点，否则 A 会有两行相同。此外，如果 $c_2 = 2$，G_X^σ 不能包含正孤立边。事实上，将 C_2 与正边互换，会得到一个具有格式 (ii) 且满足 $y = 0$ 的符号图，而该情况已在上一节中处理。因此，命题 9.1 表明 G_X^σ 只有六种可能的结构，分别为：

(*i*) G_X^σ 是一个阶为 x 、所有边均为正的团；(*ii*) G_X^σ 是一个阶为 $x-1$ 、所有边均为正的团，并扩展出一个孤立顶点；(*iii*) $c_2>2$ 和 G_X^σ 是不交并，由 $x/2$ 条正边组成；(*iv*) $c_2>2$ 和 G_X^σ 是不交并，由 $(x-1)/2$ 条正边和一个孤立顶点组成；(*v*) $c_2=2$ 和 G_X^σ 是不交并，由 $x/2$ 条负边组成；(*vi*) c

点。对于每$c_2=2$和G_X^σ是由$(x-1)/2$条负边及一个孤立顶点构成的不交并
个这类情形，矩阵 A 的 G^σ 都有一个商矩 ces

$$Q_1=\begin{bmatrix} c_1-1 & c_2 & x \\ c_1 & 1-c_2 & 0 \\ c_1 & 0 & x-1 \end{bmatrix},\ Q_2=\begin{bmatrix} c_1-1 & c_2 & x-1 & 1 \\ c_1 & 1-c_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & x-2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ Q_3=\begin{bmatrix} c_1-1 & c_2 & x \\ c_1 & 1-c_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q_4=\begin{bmatrix} c_1-1 & c_2 & x-1 & 1 \\ c_1 & 1-c_2 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ Q_5=\begin{bmatrix} c_1-1 & x+2 \\ c_1 & -1 \end{bmatrix},\ Q_6=\begin{bmatrix} c_1-1 & x+1 & 1 \\ c_1 & -1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

阵，分别如上。每个商矩阵至多有两个不同于 ±1的特征值。对于 Q_5 ，这一点显而易见，我们得到定理 2 的矩阵 A_1 。对于其余五个商矩阵，我们通过计算 $\mathrm{rank}(Q_i+I)$ 和 $\mathrm{rank}(Q_i-I)$，检查了特征值 ±1 。对于 Q_2和Q_4 ，至多有一个等于 ±1的特征值，而 Q_6 没有等于 ±1的特征值。然而，当 $(c_1,x)=(3,8)$、$(4,6)$ 或 $(6,5)$ 时，Q_1 有一个特征值 ±1 ；当 $k>\ell$时，这给出了定理 2 的 A_5 。当 $(c_2,x)=(3,8)$、$(4,6)$ 或 $(6,5)$ 时，商矩阵 Q_3 有特征值 ±1 ，但 x 为偶数，因此只剩下前两种情形，此时我们得到定理 2 的 A_6 （当 $m>1$时）。

结论 9.2. 若 G^σ 的邻接矩阵 A 具有格式 (*iii*)，且满足 $Y=\emptyset$，那么 A 是由 A_1、 A_5 （满足 $k>\ell$）或 A_6 （满足 $m>1$）表示的矩阵之一。

10 X、Y和 Z 非空

取 $v\in Z$。根据命题 7.2(*vi*)，我们不妨假设 v 与顶点 $w\in X$ 相邻，而与 Y不相邻。考虑由 A 的四行组成的矩阵 N ，这些行分别对应于来自 C_1的一个顶点、来自 C_2的一个顶点、 w 和 v。于是

$$N=\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{c_1-1}^\top & 0 & \mathbf{1}_{c_2-1}^\top & \mathbf{1}_x^\top & \mathbf{0}_y^\top & \mathbf{0}_z^\top \\ 1 & \mathbf{1}^\top & 0 & \epsilon\mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top \\ 1 & \mathbf{1}^\top & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{x}_1^\top & \mathbf{y}_1^\top & \mathbf{z}_1^\top \\ 0 & \mathbf{0}^\top & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{x}_3^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{z}_3^\top \end{bmatrix}$$

对于 $(0,\pm1)$ 向量 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_3,\mathbf{y}_1\,\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_3,$ 和 $\epsilon=\pm1$，其中 $\epsilon=1$ 适用于格式 (*ii*)， $\epsilon=-1$ 适用于格式 (*iii*)。注意，我们可以进行切换，使得 $\mathbf{z}_1\geq\mathbf{0}$ ，并且根据命题 7.2(*v*)，$\mathbf{y}_1\geq\mathbf{0}$ 。定义 $M=NN^\top-I$，则

$$M=\begin{bmatrix} c_1+c_2+x-2 & c_1-1+\epsilon(c_2-1) & c_1+x_1'-1 & x_3' \\ c_1-1+\epsilon(c_2-1) & c_1+c_2+y-2 & c_1+y_1 & 0 \\ c_1+x_1'-1 & c_1+y_1 & c_1+x_1+y_1+z_1-1 & x_{1,3}+z_{1,3} \\ x_3' & 0 & x_{1,3}+z_{1,3} & x_3+z_3-1 \end{bmatrix},$$

其中 $x_1 = \mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}1$, $x_1' = \mathbf{x}_1^\top \mathbf{1}$, $x_{1,3} = \mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}3$, $x_3 = \mathbf{x}_3^\top \mathbf{x}_3 \geq 1$, $x_3' = \mathbf{x}_3^\top \mathbf{1} \neq 0$, $y_1 = \mathbf{y}_1^\top \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1^\top \mathbf{1}$,$z_1 = \mathbf{z}_1^\top \mathbf{z}_1 \geq 1$, $z_3 = \mathbf{z}_3^\top \mathbf{z}_3$ 和 $z_{1,3} = \mathbf{z}_1^\top \mathbf{z}_3$。由于 M 是 $A^2 - I$ 的主子矩阵，我们知道 $\mathrm{rank}(M) \leq 2$。定义 $M_{i,j}$ 为通过从 M 中删除第 i 行和第 j 列得到的矩阵。于是，对于 $1 \leq i, j \leq 4$，$M_{i,j}$ 是奇异的。我们分别讨论这两种格式，先从 (iii) 开始。

10.1 格式（iii）

在这种情况下，$\epsilon = -1$、c_1、$c_2 \geq 2$，我们记作 $M_{3,3} = (c_1 - 2)K + (c_2 - 2)L + R$，其中

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} x+2 & 0 & x_3' \\ 0 & y+2 & 0 \\ x_3' & 0 & x_3 + z_3 - 1 \end{bmatrix}.$$

显然，K 和 L 是半正定的，因此如果 R 是正定的，那么$M_{3,3}$非奇异。因此 R 不是正定的，且$0 \geq \det(R) = (y+2)((x+2)(x_3 + z_3 - 1) - (x_3')^2)$。这意味着 $z_3 = 0$、$x_3 = |x_3'| = x$和 $x_3 \leq 2$。我们知道 $x_3 > 0$，如果 $x_3 = 1$，那么 $x_3' \neq 0$ 且$\det(M_{3,3}) = -(y+2)(x_3')^2 \neq 0$。因此 $x_3 = 2$。于是$\det(R) = 0$，且 R 的核由 $[1, 0, -2]^\top$张成，而它不属于 K的核，且 L，因此$M_{3,3}$是奇异的当且仅当 $c_1 = c_2 = 2$。因此 $x = x_3 = c_1 = c_2 = 2$、$z_3 = 0$ 和

$$M_{1,1} = (y_1 + 2)K + \begin{bmatrix} y - y_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 + z_1 - 1 & x_1' \\ 0 & x_1' & 1 \end{bmatrix}.$$

容易验证，该公式中的两项都是半正定的（回想一下 $|x_1| \leq x_1 \leq 1$ 和 $z_1 \geq 1$），并且只有当 $y = y_1$ 和 $z_1 = 1$时，它们之和的核才是非平凡的。若 $x_1 = 0$，则 A 中对应于 X 的两行相等，这与引理 4.1(ii)矛盾；而 $x_1 = 1$ 则可由命题 7.2(iii)排除。因此，我们得出结论：在格式(iii)的情况下，$Z = \emptyset$。（但请注意，若没有假设 7.1，我们会得到 A_{17}。）

10.2 格式 (ii)

在这种情况下，$\epsilon = 1$、$c = c_1 + c_2 \geq 3$ 和 $M_{3,\,3}$ 可以写成：$M_{3,\,3} = (c-2)K + R$，其中 K 与前面相同，且

$$R = \begin{bmatrix} x & 0 & x_3' \\ 0 & y+1 & 0 \\ x_3' & 0 & x_3 + z_3 - 1 \end{bmatrix}.$$

用与上面类似的论证可知，R，因此 $M_{3,\,3}$ 在 $z_3 > 0$时是正定的，在 $|x_3'| < x_3$ 时也是如此，并且在 $x_3 < x - 1$时亦然。因此，$z_3 = 0$、$|x_3'| = x_3$ 和 $x_3 \in \{x, x-1\}$。

假设 $x_3 = x - 1$。然后使用高斯消元，我们很容易得到 $y(c-2)(x-2) - (y + c - 2) = \det(M_{3,\,3}) = 0$。因此 $x - 2 = 1/(c-2) + 1/y$，这意味着 $(c, x, y) = (3, 4, 1)$，或 $(4, 3, 2)$。在这两种情况下，A 都只有少数几种可能性，经过直接验证可知不存在解（但如果没有假设 7.1，我们会找到满足 $m = 1$ 且 A_{17} 的邻接矩阵 A_8）。

接下来假设 $x_3 = x$。那么

$$M_{3,3} = \begin{bmatrix} x + c - 2 & c - 2 & x \\ c - 2 & y + c - 2 & 0 \\ x & 0 & x - 1 \end{bmatrix}.$$

且 $\det(M_{3,\,3}) = y(c-2)(x-1) - x(y+c-2) = 0$，这意味着 $c-3 = (x+y)/(xy-x-y)$。后面的方程只有十个可行解，分别为：$(c,x,y) =$ (4, 4, 4)、(4, 3, 6)、(4, 6, 3)、(5, 3, 3)、(5, 2, 6)、(5, 6, 2)、(6, 2, 4)、(6, 4, 2)、(8, 2, 3)、(8, 3, 2)。注意，如果 Z 有第二个顶点 u，那么它不可能与 X 中的所有顶点相邻（否则 A 会有两行完全相同），因此 u 与 Y 的所有顶点相邻，而与 X中的任何顶点都不相邻。这表明 $z \le 2$。利用这一观察，我们发现对于上述每个三元组，A都只有少数几种可能，并逐一检查这些情况。(5, 2, 6) 和 (4, 3, 6) 这两种情况得到矩阵 A_{10}；(5, 3, 3) 和 (4, 4, 4) 这两种情况则对应于 [4]中的定理 1 的情形 (vi)。其余六种情况均无解。因此我们得出：

结论10.1。若 A 具有格式 (ii) 或 (iii)，且 X、Y和 Z 均非空，则 $A = A_{10}$，或者 A 是定理 1 中的无符号情形 (vi)，见 *[4]*。

11 格式(iii)，其中 X、Y 非空且 Z 为空

在本节中，G^σ 的邻接矩阵为 A，其格式为 (iii)，X、$Y \neq \emptyset$ 和 $Z = \emptyset$。考虑矩阵 N，它由 A 的四行组成，分别对应于来自 C_1的一个顶点、来自 C_2的一个顶点、来自 X 的一个顶点 v，以及来自 Y的一个顶点 w。那么

$$N = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{c_1-1}^\top & 0 & \mathbf{1}_{c_2-1}^\top & \mathbf{1}_x^\top & \mathbf{0}_y^\top \\ 1 & \mathbf{1}^\top & 0 & -\mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & \mathbf{1}^\top & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{x}_1^\top & \mathbf{y}_1^\top \\ 0 & \mathbf{0}^\top & 1 & \mathbf{1}^\top & \mathbf{x}_2^\top & \mathbf{y}_2^\top \end{bmatrix}$$

对于 $(0, \pm 1)$ 向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2$，以及 $(0, 1)$ 向量 $\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2$。定义 $M = NN^\top - I$，则

$$M = \begin{bmatrix} c_1+c_2+x-2 & c_1-c_2 & c_1+x_1'-1 & c_2+x_2 \\ c_1-c_2 & c_1+c_2+y-2 & c_1+y_1 & 1-c_2+y_2' \\ c_1+x_1'-1 & c_1+y_1 & c_1+x_1+y_1-1 & x_{1,2}+y_{1,2} \\ c_2+x_2 & 1-c_2+y_2' & x_{1,2}+y_{1,2} & c_2+x_2+y_2-1 \end{bmatrix},$$

其中 $x_1 = \mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}1$，$x_1' = \mathbf{x}_1^\top \mathbf{1}$，$x_{1,\,2} = \mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}2$，$x_2 = \mathbf{x}_2^\top \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2^\top \mathbf{1}$，$y_1 = \mathbf{y}_1^\top \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1^\top \mathbf{1}$，$y_2 = \mathbf{y}_2^\top \mathbf{y}_2 . y_2' = \mathbf{y}_2^\top \mathbf{1}$，且 $y_{1,\,2} = \mathbf{y}_1^\top \mathbf{y}_{2\circ}$ 与前面一样，我们定义 $M_{i,\,j}$为从 M中删除第 i行和第 j列后得到的矩阵。我们有秩$(M) \le 2$，因此对于 $1 \le i$、$j \le 4$，$\det(M_{i,j}) = 0$。

命题 11.1. 假设对于 X 中的某个顶点有 $y - y_1 \ge 2$，则以下情况之一成立。(i)：$x_1 = x_1' = 1$，$y_1 = 0$, $x = y = 2$，这将得到矩阵 A_4，其中 $m, \ell \ge 2$。(ii)：$x_1 = 0$, $y_1 = 1$, $x = y = 3$ 且 $A = A_{16}$，(iii)：$x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 0$, $x = y = 3$ 且 $A = A_{17}$，(iv)：$x_1 = y_1 = 0$，$x_2 = x - 1$, $y_2 = 1$，这将得到 A_8，其中 $m \ge 2$, A_{18}，或 A_{19}。

证明。设 $M_{4,\,4} = (c_1 - 2)J + (c_2 - 2)L + y_1 K + R$，其中

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ \text{and } R = \begin{bmatrix} x+2 & 0 & x_1'+1 \\ 0 & y-y_1+2 & 2 \\ x_1'+1 & 2 & x_1+1 \end{bmatrix}.$$

显然， J、 K和 L是半正定的，而 R是正定的，除非 $x_1 = 0$，或者 $x_1 = x_1' = x - 1 = 1$和 $y - y_1 = 2$。在后一种情况下， R是半正定的，其核由 $[1, 1, -2]^\top$张成；当且仅当 $y_1 = 0$时， $[1, 1, -2]^\top$才属于 $M_{4,\ 4}$的核。因此 $x = y = 2$，并且我们得到矩阵 A_4，满足 m、 $\ell \geq 2$。
因此我们有 $x_1 = 0$。若 $y_1 \geq 1$，则利用 $R + y_1 K$不是正定矩阵这一点。通过直接计算可得 $\det(R + y_1 K) = (y + 2)(x + 2)(y_1 + 1) - (x + 2)(y_1 + 2)^2 - (y + 2)$。利用$y - y_1 \geq 2$可得 $\det(R + y_1 K) \geq (x + 1)y_1 - 4$，而等号成立意味着 $y - y_1 = 2$。因此$y_1 = 0$，或 $y_1 = 1$, $y = 3$且 $x \leq 3$，或 $y_1 = 2$, $y = 4$且 $x = 1$。若 $(x, x_1, y, y_1) = (3, 0, 3, 1)$，则 $R + y_1 K$是半正定的，且其核由 $[1, 3, -5]^\top$张成，而 $[1, 3, -5]^\top$属于 J和 K的核。因此M_4,4是非奇异的，除非 $c_1 = c_2 = 2$，在这种情况下我们得到 A_{16}。利用引理 4.1(ii)、命题 7.2(ii)以及图 2 中最后一个禁用子图，不难排除其余情况。

剩下的情况是 $x_1 = y_1 = 0$。在M_2,2 中使用高斯消元，我们得到，在此情况下，$\det(M_2,2) = (y_2 - 1)(c_2 + x - 1) + (x - x_2 - 1)(c_2 + x_2)$。注意， $y_1 = 0$意味着$x_2 \leq x - 1$。因此，M_2,2 仅当 (a)： $y_2 = 0$且 $c_2 + x - 1 = (x - x_2 - 1)(c_2 + x_2)$，或 ($b$)： $y_2 = 1$， $x = x_2 + 1$时才是奇异的。在情况 (a) 中，我们得到 $c_2 = 2$， $x = 3$， $x_2 = y_2 = 0$。由于 A中没有两行相同，因此恰有一个顶点 $v \in X$ 满足 $x_1 = y_1 = 0$，并且至多有一个顶点 $w \in Y$ 满足 $x_2 = y_2 = 0$。利用这一观察，我们发现情况 (a) 会导出 A_{17}，否则 (b) 对 Y 的所有顶点都成立。此外，$\det(M_1,2) = (1 - c_1)(c_2 + x - 1)(y_2' + 1)$，意味着 $y_2' = -1$。由命题 7.2(iii)，我们推得 G_X^σ 等于 K_1，或为 $K_1 + K_{x-1}$（所有符号均为正），或由一个孤立顶点和 $(x - 1)/2$ 条孤立带符号边组成。如果 G^σ

$_X = K_1$ then we have an equitable partition of A with quotient matrix

$$Q = \begin{bmatrix} c_1 - 1 & c_2 & 1 & 0 \\ c_1 & 1 - c_2 & 0 & y \\ c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

对 $Q + I$和 $Q - I$进行高斯消元可知，只有当 $c_1 = 2$ 和 $y = 4$时， Q才有两个等于 ± 1 的特征值。这给出 A_8，其中 $m \geq 2$。
若 $G_X^\sigma = K_1 + K_{x-1}$，则我们得到 A 的一个均衡划分，其商矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} c_1 - 1 & c_2 & 1 & x - 1 & 0 \\ c_1 & 1 - c_2 & 0 & 0 & y \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & x - 2 & y \\ 0 & c_2 & 0 & x - 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

对 $Q + I$和 $Q - I$进行高斯消元可知， Q至少有三个不等于 ± 1的特征值。

如果 G_X^σ 有一条负孤立边 e，那么根据定理 7.2（iv, v）， $C_2 = 2$。如果 v 是 e的一个顶点，那么 $c_2 = 2$ $x_1 = -x_1' = 1$、 $y_1 = y$、 $x_2 = x - 1$、 $y_2 = -y_2' = 1$，且 $\det(M_{2,2}) = (x + 1)(c_1 y - y - c_1) - 4(c_1 - 1) = 0$。利用 $x > 1$ 为奇数且 $y \geq 2$ 为偶数这一点，我们发现只有两个解：$(c_1, x, y) = (3, 5, 2)$ 和 $(4, 7, 2)$，并得到 A_{18}。
假设 G_X^σ 有一条正孤立边 e。取 $v \in e$。则 $x_1 = x_1' = 1$, $y_1 = y$, $x_2 = x - 1$,$y_2 = -y_2' = 1$ 以及 $\det(M_{2,2}) = (c_2 + x - 1)(c_1 y - y - c_1) = 0$，这意味着 $c_1 = y = 2$。由于$c_1 \neq 3$ 或 4， G_X^σ 没有负孤立边。这意味着 A 有一个均衡划分

其商矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & c_2 & 1 & x-1 & 0 \\ 2 & 1-c_2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & c_2 & 0 & x-1 & -1 \end{bmatrix}.$$

在 $Q+I$ 和 $Q-I$ 中使用高斯消元可得， Q 有三个特征值等于 ± 1，当且仅当 $(c_2, x) = (3, 7)$ 或 $(4, 5)$。因此我们得到 A_{19}。 □

假设矩阵 A 不属于上述命题中的任何一种情形。那么， X 中的每个顶点都与 Y 中的 y 或 $y-1$ 个顶点相邻。并且，将 C_1 与 C_2 互换、将 X 与 Y 互换，也可推出 Y 中的每个顶点都与 X 中的 x 或 $x-1$ 个顶点相邻。因此， $G^\sigma_{X\cup Y}$ 的邻接矩阵具有如下形式：

$$A_{X\cup Y} = \begin{bmatrix} A_X & B \\ B^\top & A_Y \end{bmatrix} \text{ with } B = \begin{bmatrix} J & J \\ J - I_m & J \end{bmatrix} \text{ and } 0 \le m \le \min\{x, y\}.$$

命题 11.2. 设 B 如上所述，则以下情形之一成立：
(i) $m = x = y$, $B = J - I$，由此得到 A_{11}；(ii) $m = 0$, $B = J$，
由此得到 A_2, A_{12}, A_{13}, A_{14}；或者 A_{15}。

证明。令 X_m 和 Y_m 为与 B 的子矩阵 $J - I_m$ 对应的 X 和 Y 的子集。由命题 7.2(ii) 可知， X_m 和 Y_m 分别由 Γ^σ_X 和 Γ^σ_Y 中的孤立顶点组成。因此，若 $m = x = y$，则 Γ^σ_X 和 Γ^σ_Y 没有边，而 A 具有 A_{12} 的分块结构。 m、 ℓ 和 k 的取值可由商矩阵的谱推出。

若 $0 < m < x$，则由 $X \setminus X_m$ 诱导的 Γ^σ_X 的子图 $\Gamma^\sigma_{X\setminus X_m}$ 不可能含有孤立边或孤立顶点（由引理 4.1(ii) 可知），因此 $\Gamma^\sigma_{X\setminus X_m} = K_{x-m}$ （由命题 7.2(iv) 可知）。类似地，若 $0 < m < y$，则 $\Gamma^\sigma_{Y\setminus Y_m} = K^-_{y-m}$。因此，若 $0 < m < \min\{x, y\}$，则 A 具有一个商矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} c_1 - 1 & c_2 & x-m & m & 0 & 0 \\ c_1 & 1-c_2 & 0 & 0 & m & y-m \\ c_1 & 0 & x-m-1 & 0 & m & y-m \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & m-1 & y-m \\ 0 & c_2 & x-m & m-1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & x-m & m & 0 & m-y+1 \end{bmatrix}.$$

然而， Q 的特征值不全等于 ± 1。验证这一点的一个简便方法是，对删除第 2 行和第 6 列后的 $Q+I$，以及删除第 1 行和第 3 列后的 $Q-I$ 进行高斯消元。由此可知， $Q+I$ 和 $Q-I$ 的秩都至少为 5。若 $m = x < y$ 或 $m = y < x$，也可用类似的论证。于是我们得到一个均衡划分，其商矩阵为 5×5，且特征值等于 ± 1 的至多有两个。因此可以得出结论： $m = 0$ 且 $B = J$。现在，Γ^σ_X 可能有一个孤立顶点，但引理 4.1 仍然说明， Γ^σ_X 不能有两个孤立顶点，也不能同时有一个孤立顶点和一条孤立边。因此，利用命题 7.2（iii），Γ^σ_X 只有少数几种可能，分别为：(a)：$\Gamma^\sigma_X = K_x$ （$x \ge 3$）；(b)：$\Gamma^\sigma_X = K_{x-1} + K_1$ （$x \ge 4$）；(c)：Γ^σ_X 由 $x/2$ 条孤立的带符号边组成。对于 Γ^σ_Y，我们得到相同的列表，只需将 x、 K_x 和 K_{x-1} 分别替换为 y、 K^-_y 和 K^-_{y-1}。

若 $\Gamma_X^\sigma = K_x$ 且 $\Gamma_Y^\sigma = K_y^-$，则 A 有一个关于 A_{11}的均衡划分，且商矩阵 Q仅在给定的情形下有两个特征值等于 ± 1 （考虑假设 7.1）。若$\Gamma_X^\sigma = K_x$ 且 $\Gamma_Y^\sigma = K_{y-1}^- + K_1$ （或 $\Gamma_X^\sigma = K_x + K_1$ 且 $\Gamma_Y^\sigma = K_y^-$），则我们有一个关于 A 的均衡划分，其商矩阵为 5×5 Q。通过高斯消元可知， $Q + I$和 $Q - I$ 的秩都至少为 4，因此 Q （以及 A）至少有三个不等于 ± 1 的特征值。若 $\Gamma_X^\sigma = K_{x-1} + K_1$ 且 $\Gamma_Y^\sigma = K_{y-1}^- + K_1$，则该均衡划分的商矩阵为 6×6 Q，并且 $Q + I$ 和 $Q - I$ 的秩都至少为 5。因此，这种情形下也找不到解。在证明余下部分中，我们可以假设 Γ_X^σ 由 $x/2$条不相交的带符号边组成。我们断言，这些边的符号都相同。事实上，假设 Γ_X^σ有一条负边和一条正边，那么我们考虑矩阵 N，它由 A中的三行组成，分别对应于负边的一个顶点、正边的一个顶点以及来自C_1的一个顶点。于是

$$NN^\top - I = \begin{bmatrix} c_1 + y & c_1 + y & c_1 \\ c_1 + y & c_1 + y & c_1 - 2 \\ c_1 & c_1 - 2 & c_1 + c_2 + x - 2 \end{bmatrix}$$

是非奇异的，这就证明了该断言。

假设 Γ_X^σ 的所有边都带有负号。那么命题 7.2(iv) 蕴含 $c_2 = 2$。如果 $\Gamma_Y^\sigma = K_y^-$，那么 A 有一个由三个部分组成的均衡划分，其商矩阵没有等于 ± 1 的特征值。如果 $\Gamma_Y^\sigma = K_{y-1}^- + K_1$，那么 A 有一个由四个部分组成的均衡划分，且商矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} c_1 - 1 & x + 2 & 0 & 0 \\ c_1 & -1 & y - 1 & 1 \\ 0 & x + 2 & 2 - y & 0 \\ 0 & x + 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

我们很容易得到，只有当 $y = 5$ 时， $Q+I$ 才是奇异的；只有当 $(c_1,\ y) = (5, 4)$ 或 $(6, 2)$ 时， $Q-I$ 才是奇异的。因此我们得到 A_{13}。如果 Γ_Y^σ 由 $y/2$ 条正边组成，那么 $c_1 = 2$ 也成立，并且我们得到A_2。如果 Γ_Y^σ 由 $y/2$ 条负边组成，那么我们找到一个均衡划分，其商矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} c_1 - 1 & x + 2 & 0 \\ c_1 & -1 & y \\ 0 & x + 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

现在 $Q + I$ 是非奇异的，并且只有当 $(c_1,\ x,\ y) = (6, 2, 4)$ 或 $(5, 4, 4)$ 时， $Q - I$ 才是奇异的。因此我们得到 A_{14}。

接下来假设 Γ_X^σ 由正边组成。若 $\Gamma_Y^\sigma = K_y^-$，则 A 存在一个均衡划分，其商矩阵至少有三个不等于 ± 1 的特征值。若 $\Gamma_Y^\sigma = K_{y-1}^- + K_1$，则 A 存在一个含五个部分的均衡划分，其商矩阵为 Q；容易看出， $Q + I$ 和 $Q - I$ 的秩都至少为 4，因此找不到解。若 Γ_Y^σ 有 $y/2$ 条互不相交的正边，则通过切换并取负边后得到 A_{14}。若 Γ_Y^σ 有 $y/2$ 条互不相交的负边，则 A 存在一个均衡划分，其商矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} c_1 - 1 & c_2 & x & 0 \\ c_1 & 1 - c_2 & 0 & y \\ c_1 & 0 & 1 & y \\ 0 & c_2 & x & -1 \end{bmatrix}.$$

利用 x 和 y 均为偶数这一点，我们发现，只有当 $(c_1, c_2, x, y) = (3, 3, 6, 6)$、$(4, 3, 6, 4)$ 或 $(4, 4, 4, 4)$ 时，$Q - I$ 和 $Q + I$ 的秩才都为 3。因此，我们得到 A_{15}。 □

结论 11.3. 若 G^σ 的邻接矩阵为具有格式 (iii) 的 A，其中 $Z = \emptyset$ 且 X，$Y \neq \emptyset$，则 A 等于 A_2、A_4、A_8、A_{12}、A_{13}、A_{14}、A_{15}、A_{16}、A_{17}、A_{18} 或 A_{19}。

12 格式 (ii)，其中 X、Y 非空且 Z 为空

本节中，G^σ 的邻接矩阵为具有格式 (ii) 的 A，X、$Y \neq \emptyset$ 和 $Z = \emptyset$。我们沿用上一节的记号。同样，矩阵 N 由四行 A 组成，分别对应于来自 C_1的一个顶点、来自 C_2的一个顶点、来自 X 的一个顶点 v，以及来自 Y的一个顶点 w。于是

$$M = NN^\top - I = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + x - 2 & c_1 + c_2 - 2 & c_1 + x_1' - 1 & c_2 + x_2 \\ c_1 + c_2 - 2 & c_1 + c_2 + y - 2 & c_1 + y_1 & c_2 - 1 + y_2' \\ c_1 + x_1' - 1 & c_1 + y_1 & c_1 + x_1 + y_1 - 1 & x_{1,2} + y_{1,2} \\ c_2 + x_2 & c_2 - 1 + y_2' & x_{1,2} + y_{1,2} & c_2 + x_2 + y_2 - 1 \end{bmatrix}.$$

首先考虑 c_1、$c_2 \geq 2$的情形。然后我们可以仿照上一节的步骤。

12.1 $c_1 \geq 2$ 和 $c_2 \geq 2$

命题 12.1. 假设对于 X中的某个顶点，$y - y_1 \geq 2$，则 $A = A_9$。

证明。由命题 7.2(iii, iv)可知 $x_1 = -x_1'$，或者 $x_1 = x_1' = 1$。我们考虑$M_{4,\,4}$并写作$M_{4,\,4} = (c_1 - 2)J + (c_2 - 2)L + y_1 K + R$，其中

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ \text{and } R = \begin{bmatrix} x + 2 & 2 & x_1' + 1 \\ 2 & y - y_1 + 2 & 2 \\ x_1' + 1 & 2 & x_1 + 1 \end{bmatrix}.$$

那么 J、K 和 L 都是半正定的。此外，若 $y - y_1 \geq 3$，或者 $y - y_1 = 2$ 且 $x_1 \neq 0$，则 R 是正定的。利用$y - y_1 \geq 2$，我们得到 $x_1 = x_1' = 0$ 和 $y - y_1 = 2$。此时 R 是半正定的，其核由 $[0, 1, -2]^\top$张成。因此，只有当 $c_1 = c_2 = 2$ 且 $y_1 = 0$ 时，$M_{4,\,4}$ 的核才是非平凡的。这意味着$M_{4,\,4}$只有在$(c_1, c_2, y, x_1, y_1) = (2, 2, 2, 0, 0)$时才是奇异的。如果 X 包含另一个满足$x_1 = y_1 = 0$ 的顶点，那么 A 有两行相同；因此，若 $x \geq 2$，则必定存在另一个使 $\det(M_{4,\,4}) = 0$ 且满足 $c_1 = c_2 = y = 2$的解。只有当 $x_1 = x_1' = 1$ 时才存在这样的解，这将导出A_9。 □

如上一节所述，由命题 12.1 可知，若 $A \neq A_9$，则 $G^\sigma_{X \cup Y}$ 的邻接矩阵具有如下形式：

$$A_{X \cup Y} = \begin{bmatrix} A_X & B \\ B^\top & A_Y \end{bmatrix} \text{ with } B = \begin{bmatrix} J & J \\ J - I_m & J \end{bmatrix} \text{ and } 0 \leq m \leq \min\{x, y\},$$

采用相同的论证，但使用（略有不同的）商矩阵，可得以下结果：

命题 12.2. 上述矩阵 B 具有 $m = 0$，且 A 等于 A_8，其中 $m = 1$、A_{12}（由于假设 7.1，仅考虑 $k = \ell$ 的情况）；或者 A 是由 *[4]*中的定理 1 的情形（iii）给出的无符号矩阵。

12.2 $c_1 = 1$ 和 $c_2 \geq 2$

由于 $c_1 = 1$，假设 7.1 得出 Y 是一个独立集，因此 $y_2 = y_2' = y_{1,\ 2} = 0$和 M 变为 s:

$$M = \begin{bmatrix} c_2 + x - 1 & c_2 - 1 & x_1' & c_2 + x_2 \\ c_2 - 1 & c_2 + y - 1 & y_1 + 1 & c_2 - 1 \\ x_1' & y_1 + 1 & x_1 + y_1 + z_1 & x_{1,2} \\ c_2 + x_2 & c_2 - 1 & x_{1,2} & c_2 + x_2 - 1 \end{bmatrix}.$$

设 G_X^σ 中的顶点 v 是孤立顶点。那么 $x_1 = x_1' = x_{1、\ 2} = 0$ 以及 det(M_3,3) $= -((c_2 + x_2)y + (x_2 + 1)(c_2 - 1)) \neq 0$。因此， G_X^σ 没有孤立顶点，由命题 7.2(i, iii, iv)可知，只有三种可能：(i) G_X^σ 是所有边均为负边的完全图；(ii) G_X^σ 是两个或更多负边的不交并；(iii) $c_2 = 2$ 和G_X^σ 是两个或更多带符号边（并非全为负边）的不交并。假设属于情形 (i)，那么 $x_1 = -x_1' = x - 1 > 0$，且由命题 7.2(ii)可知， Y 中的每个顶点都与 X中的所有顶点相邻，或与其中任何顶点都不相邻。若 $w \in Y$ 与 X中的所有顶点相邻，那么 $x_2 = x$，并且有 det(M_3,4) $= (x - 1)(c_2 + y - 1) + (c_2 - 1)(y_1 + 1) > 0$。若 Y中的每个顶点都与 X中的每个顶点不相邻，那么 $y_1 = x_2 = 0$，并且我们得到 det(M_3,4) $= (x - 1)yc_2 > 0$。因此可以得出，情形 (i)不会出现。对于剩下的两种情形， G_X^σ 是若干边的不交并。考虑G_X^σ的一条边 e。由命题 7.2(ii)可知，G_Y^σ 中的每个顶点都与 e的两个顶点均不相邻，或都相邻。因此 x_2 和 $x - x_2$ 均为偶数。接下来考虑情形 (ii)。假设 X 和 Y之间有一条边 $\{v, w\}$，那么 $x_1' =$ x1,$_2 = -x_1 = -1$，并且我们得到 det(M_3,4) $=(x - x_2 - 1)(-(c_2 + y - 1) - (c_2 - 1)(y_1 + 1)) \neq 0$。因此， X和Y之间没有边。所以 $x_2 = y_1 = 0$、 $x_1 = -x_1' = 1$，且 det(M_3, 1) $= -y(c_2 - 1) - (c_2 - 1)$，这意味着 $y = 1$。现在 det(M_1,4) $= 0$ 给出 $x = 4$ 和 $c_2 = 2$，由此可得 A 等于带有 $m = 1$的 A_8。在情形 (iii)中，我们有 $c_2 = 2$，并考虑 M_3,3。显然，det(M_3,3) $\neq 0$, 除非$x = 4$、 $y = 1$ 和 $x_2 = 0$，而这同样会导致带有 $m = 1$的 A_8。因此我们得出，最后一种情形不会产生新的例子。

结论 12.3. 如果 A 具有格式（ii），其中有 $Z = \emptyset$ 和 X， $Y \neq \emptyset$ 那么 A 等于 A_8，其中有 $m = 1$、 A_9，且 A_{12} 带有 $k = \ell$；或者 A 是定理 1（iii）中给出的无符号矩阵，见 *[4]*。

13 总结

结合第 6 节及第 8 至 12 节的结论，我们完成了定理 2 的证明。请注意，该证明并未排除无符号的例子。因此，我们重新发现了 [4] 中的无符号刻画。与无符号情形一样，利用当前的刻画，可以考察 $\mathcal{G}$ 中哪些符号图由其谱唯一确定（差一个切换）。不过，这比无符号情形更复杂，将留待今后研究。

致谢

第一作者在 T¨ubitac. 资助下访问 Nev¸sehir 的 Haci Bekta¸s Veli 大学期间完成了部分研究。

参考文献

[1] S. Akbari、W.H. Haemers、H.R. Maimani 和 L. Parsaei Majd，与路径余谱的符号图，《线性代数及其应用》553 (2018) 104-116。[2] F. Berlardo、S.M. Cioabˇa、J.H. Koolen 和 J. Wang，符号图谱理论中的开放问题，《离散与应用数学艺术》1 (2018)，#P2.10。[3] A.E. Brouwer 和 W.H. Haemers，《图的谱》，Springer，2012。[4] S.M. Cioabˇa、W.H. Haemers、J.R. Vermette 和 W. Wong，除两个特征值外其余特征值均等于 ± 1 的图，《代数与组合杂志》41 (2015) 887-897。[5] E.R. van Dam 和 E. Spence，具有两个奇异值的组合设计-I：均匀乘法设计。《组合理论杂志 A》107 (2004)，127-142。[6] W.H. Haemers 和 H. Topcu，关于至多有两个特征值不等于 ± 1 的符号图，arXiv:2109.02522 (2021)。