arXiv:2301.01629v1 [math.FA] 4 Jan 2023

实数线上几乎收敛及其在有界解析函数中的应用

国定亮一

Abstract. 本文研究实数集 $\mathbb{R}$上的拓扑不变均值与几乎收敛。前者是定义在 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上的一类不变均值，后者则是由它们定义的一种求和方法。实数集 $\mathbb{R}$ 上的几乎收敛最初由 Raimi 于 1957年提出，是 Lorentz 的几乎收敛在有界数列上的推广。我们对几乎收敛的解析刻画结果进行了广泛推广，并探讨其在 Hardy 空间理论中的应用。具体而言，我们建立了定义在右半平面上的有界解析函数在虚轴上的渐近行为与其在无穷远处的渐近行为之间的关系。

1. 引言

我们研究一种称为几乎收敛的求和方法。Lorentz 最初针对非负整数 $\mathbb{Z}_+$ 的加法半群上的有界函数引入了这一概念（见 [9]）。此后，多位作者将这一概念推广到一般的局部紧 amenable 群或半群（见 [1], [2], [13], [14]）。本文专门研究实数$\mathbb{R}$加法群上的几乎收敛。这可以视为 Lorentz 的几乎收敛的连续版本，并且与 Raimi 在 [13]中引入的概念本质等价。在该文中，他给出了实数集 $\mathbb{R}$上的本质有界可测函数几乎收敛的充要条件，该条件与 Lorentz 给出的条件类似。本文的主要目标之一是推广 Raimi 的结果，得到更一般的几乎收敛充要条件，并将他的结果包含为特例。此外，我们还将几乎收敛应用于研究右半平面上有界解析函数的 Hardy 空间。

本文安排如下。第 2 节给出后续各节所需的一些定义和预备结果。第 3 节详细研究拓扑不变均值，并给出几乎收敛的一个充要条件，这是本文的主要结果之一。该条件非常一般，我们可以由此得到许多解析条件，包括 Raimi 得出的已知结果。我们的论证基于这样一个事实：拓扑不变性可由不变性和一种 Fubini 型性质刻画。

关键词和短语：Banach 极限、拓扑不变均值、求和方法、几乎收敛、Hardy 空间、有界解析函数。

第 4 节讨论右半平面上有界解析函数的 Hardy 空间 $H^\infty(\mathbb{C}^+)$。利用第 3 节的结果，我们看到，函数在 $H^\infty(\mathbb{C}^+)$ 中于无穷远处的行为，可以用其边界函数的几乎收敛来表示。我们还讨论 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上的拓扑不变均值与 $H^\infty(\mathbb{C}^+)$ 的极大理想空间之间的关系。

2. Preliminaries

令 $L^1(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 的群代数，$L^\infty(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上本质有界函数的集合，$C_u(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上有界一致连续函数的集合。我们用符号 f、g、$\cdots$ 表示 $L^1(\mathbb{R})$ 的一般元素，用 ϕ、ψ、$\cdots$ 表示 $L^\infty(\mathbb{R})$（以及 $C_u(\mathbb{R})$）的一般元素。对于函数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 和 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$，分别用 $f_s(x) := f(x+s)$ 和 $\phi_s(x) := \phi(x+s)$ 表示它们在 $s \in \mathbb{R}$ 下的平移。令 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$（$\mathcal{M}_0(\mathbb{R})$）为 $L^\infty(\mathbb{R})$（$C_u(\mathbb{R})$）上的均值集合，即对偶空间 $L^\infty(\mathbb{R})^*$($C_u(\mathbb{R})^*$) 中满足以下条件的元素 Φ：

(i) Φ 为正，即当 $\phi \geq 0$ 时，$\Phi(\phi) \geq 0$；(ii) $\varphi(1) = 1$，其中 1 是处处取值为 1 的常函数。

若均值 Φ 在 $L^\infty(\mathbb{R})$（$C_u(\mathbb{R})$）上满足条件 (iii) $\Phi(\phi_s) = \Phi(\phi)$，对每个 $s \in \mathbb{R}$ 均成立，则称其为不变均值。

$L^\infty(\mathbb{R})$（$C_u(\mathbb{R})$）上的不变均值集合记为 $\mathcal{I}(\mathbb{R})$（$\mathcal{I}_0(\mathbb{R})$）。现在我们定义拓扑不变均值，这是本文的主要研究目标。设 $P(\mathbb{R})$ 是 $L^1(\mathbb{R})$ 的子集，由满足 $f \geq 0$ and $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ 的元素组成。若均值 Φ 在 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上满足以下条件（[5]），则称其为拓扑不变均值：

(iv) 对每个 $f \in P(\mathbb{R})$ 和 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$，$\Phi(f*\phi) = \Phi(\phi)$，其中 $f*\phi$ 是由 f 和 ϕ 定义的卷积，定义如下:

$$f*\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x-t)f(t)dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

注意，$f*\phi$ 属于 $C_u(\mathbb{R})$。我们将 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上所有拓扑不变均值的集合记为 $\mathcal{T}(\mathbb{R})$。容易看出 $\mathcal{T}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{I}(\mathbb{R})$；事实上，若 $\Phi \in \mathcal{T}(\mathbb{R})$，则有

$$\Phi(\phi_s) = \Phi(f*\phi_s) = \Phi(f_s*\phi) = \Phi(\phi)$$

因此有 $\Phi \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$。关于不变均值和拓扑不变均值的更详细论述，参见 [3], [12]。现在，我们如下定义 $L^\infty(\mathbb{R})$ 中函数的几乎收敛。

定义 2.1. 设 ϕ 属于 $L^\infty(\mathbb{R})$。若 ϕ 几乎收敛于复数 α，则

$$\Phi(\phi) = \alpha$$

对每个 $\Phi \in \mathcal{T}(\mathbb{R})$ 都成立。在这种情况下，我们记作 $\phi \xrightarrow{ac} \alpha$。

设 $L_R^\infty(\mathbb{R})$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值本质有界函数集。记作$\phi = u + iv$，其中 $u, v \in L_R^\infty(\mathbb{R})$，显然，当且仅当$u \xrightarrow{ac} \alpha$ 且 $v \xrightarrow{ac} \beta$时，$\phi \xrightarrow{ac} \alpha + i\beta$。

在下一节中，我们将给出一个充要条件，判定 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上给定的均值是否拓扑不变。为此，下面这个由哈恩-巴拿赫定理推得的结果将是一个重要工具。

定理 2.1. 设 X 是一个实局部凸空间。设 $\mathcal{C}$ 是 X 的一个紧凸子集，且 S 是 $\mathcal{C}$ 的一个子集。那么，S 的闭凸包 $\overline{co}(S)$ 等于 $\mathcal{C}$，当且仅当

$$\sup_{x\in S}\varphi(x) = \sup_{x\in\mathcal{C}}\varphi(x)$$

对每个 $\varphi \in X^*$，X 的对偶空间。

证明。必要性由 $\varphi \in X^*$ 的线性和连续性显然成立。假设 $\overline{co}(S) \subsetneq \mathcal{C}$。取 $x_0 \in \mathcal{C} \setminus \overline{co}(S)$。那么，根据哈恩-巴拿赫定理，存在一个 $\varphi \in X^*$，使得

$$\sup_{x\in\overline{co}(S)}\varphi(x) < \varphi(x_0).$$

这意味着

$$\sup_{x\in S}\varphi(x) = \sup_{x\in\overline{co}(S)}\varphi(x) < \varphi(x_0) \le \sup_{x\in\mathcal{C}}\varphi(x),$$

证毕。

推论 2.1. 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{M}$ 的弱*紧凸子集，且 S 是$\mathcal{C}$的子集。那么，$\mathcal{C} = \overline{co}(S)$ 当且仅当

$$\sup_{\Phi\in S}\Phi(\phi) = \sup_{\Phi\in\mathcal{C}}\Phi(\phi)$$

对每个 $\phi \in L_R^\infty(\mathbb{R})$ 都成立。

证明。由于必要性显然，下面证明充分性。对于 $\mathcal{C}$ 中的每个元素 Φ，令 Φ_R 为 Φ 在实巴拿赫空间 $L_R^\infty(\mathbb{R})$ 上的限制。设 $\mathcal{C}_R = \{\Phi_R : \Phi \in \mathcal{C}\}$ 且 $S_R = \{\Phi_R : \Phi \in S\}$。于是，根据假设，我们可以对 $\mathcal{C}_R$ 和 S_R 应用定理 2.1，从而得到 $\overline{co}(S_R) = \mathcal{C}_R$。这意味着，对于每个 $\Phi \in \mathcal{C}$，都存在一个网 $\{\Phi_\alpha\}$，属于 $co(S)$，使得

$$\lim_\alpha(\Phi_\alpha)(\phi) = \Phi(\phi)$$

对每个 $\phi \in L_R^\infty(\mathbb{R})$ 都成立。由此等式可得

$$\lim_\alpha \Phi_\alpha(\phi) = \lim_\alpha \Phi_\alpha(u+iv) = \lim_\alpha\{\Phi_\alpha(u) + i\Phi_\alpha(v)\} = \Phi(u) + i\Phi(v) = \Phi(\phi)$$

对每个 $\phi = u + iv \in L^\infty(\mathbb{R})$ 都成立。这意味着 w^*- 极限$_\alpha \Phi_\alpha = \Phi$，并且意味着$\overline{co}(S) = \mathcal{C}$。定理得证。

我们指出一个由推论 2.1 直接得到的事实。设 $\mathfrak{C}$ 为 $\mathcal{M}$ 的紧凸子集的集合， $\mathfrak{P}$ 为 $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ 上满足以下条件的次线性泛函 $\overline{p}$ 的集合： $\phi \geq 0$ 蕴含 $\overline{p}(\phi) \geq 0$ 以及 $\overline{p}(1) = 1$。那么，注意到两个偏序集 $(\mathfrak{C}, \subset)$ 和 $(\mathfrak{P}, \leq)$ 通过下面的对应关系同构：

$$\mathfrak{C} \ni \mathcal{C} \mapsto \overline{p}(\phi) = \sup_{\Phi \in \mathcal{C}} \Phi(\phi) \in \mathfrak{P},$$

$$\mathfrak{P} \ni \overline{p} \mapsto \mathcal{C} = \{\Phi \in \mathcal{M} : \Phi(\phi) \leq \overline{p}(\phi) \ (\forall \phi \in L^\infty_R(\mathbb{R}))\}.$$

下面这个初等引理起着重要作用。

引理 2.1. 设 $\Phi \in \mathcal{M}$。对于任意 $\phi \in L^\infty_R(\mathbb{R})$，有

$$\Phi(\phi) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} \phi(x).$$

证明。令 $\alpha = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} \phi(x)$。于是，根据均值的性质 (i)、(ii) 以及 $\alpha - \phi \geq 0$ 这一事实，可得

$$\Phi(\alpha - \phi) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha = \Phi(\alpha) \geq \Phi(\phi),$$

证明完毕。

3. Topologically invariant means

拓扑不变均值的重要性源于以下性质：

$$\Phi(f * \phi) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\phi_{-t}) f(t) dt, \tag{†}$$

其中 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$、 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 和 $\Phi \in L^\infty(\mathbb{R})^*$，是 $L^\infty(\mathbb{R})$ 的对偶空间。

注意，拓扑不变均值可刻画为满足性质（†）的不变均值。事实上，由于 $L^1(\mathbb{R})$ 由 $P(\mathbb{R})$ 张成，必要性显而易见。反之，若 $\Phi \in \mathcal{M}$ 满足不变性和性质（†），那么对于任意 $f \in P(\mathbb{R})$，有

$$\Phi(f * \phi) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\phi_{-t}) f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\phi) f(t) dt = \Phi(\phi) \int_{\mathbb{R}} f(t) dt = \Phi(\phi),$$

这表明 Φ 是拓扑不变的。

性质（†）通常并不成立，但对于 $C_u(\mathbb{R})$，它总是成立。 *.

引理 3.1. 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$ $\phi \in C_u(\mathbb{R})$ 且 $\Phi \in C_u(\mathbb{R})^*$。那么，我们有

$$\Phi(f * \phi) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\phi_{-t}) f(t) dt.$$

证明。由于映射 $\mathbb{R} \ni s \mapsto \phi_s \in C_u(\mathbb{R})$ 连续，结论可由 Bochner积分理论中的一个众所周知的事实推出（参见 [19]）。

在 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上存在一类特殊的均值，满足性质 (†)。令$h \in P(\mathbb{R})$，并定义 $\Phi_h \in \mathcal{M}$ 如下:

$$\Phi_h(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t)h(-t)dt,$$

其中 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$。因此，该性质 (†) 的成立可由富比尼定理推出。下面，我们将介绍一类扩展的实数集 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上的均值，它们满足性质 (†)，并包含上述例子。

对于每个 $f \in P(\mathbb{R})$，定义实数集 $L_R^\infty(\mathbb{R})$ 上的泛函 $\overline{F}$和 $\underline{F}$:

$$\overline{F}(\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(f * \phi)(x),$$

$$\underline{F}(\phi) = \inf_{x\in\mathbb{R}}(f * \phi)(x),$$

其中 $\phi \in L_R^\infty(\mathbb{R})$。注意，$\overline{F}$是次线性的，并且关系 $\underline{F}(\phi) = -\overline{F}(-\phi)$ 成立 .

令 $\mathcal{F}$ 为实数集 $\mathcal{M}$ 的一个弱*紧凸子集，其中包含满足以下条件的元素 Φ

$$\Phi(\phi) \le \overline{F}(\phi)$$

对每个 $\phi \in L_R^\infty(\mathbb{R})$ 均成立。

定理 3.1. 对于 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上的均值 Φ， $\Phi \in \mathcal{F}$ 当且仅当存在 $C_u(\mathbb{R})$ 上的均值 Φ_0，使得

$$\Phi(\phi) = \Phi_0(f * \phi)$$

对于每个 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$。

证明。根据推论 2.1，只需证明

$$\sup_{\Phi_0\in\mathcal{M}_0} \Phi_0(f * \phi) = \overline{F}(\phi)$$

对于每个 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$。根据引理 2.1，对于任意 $\Phi_0 \in \mathcal{M}_0$，有

$$\Phi_0(f * \phi) \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}}(f * \phi)(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(f * \phi)(x) = \overline{F}(\phi).$$

接下来，我们证明反向不等式。令 $\alpha = \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} f * \phi(x) = \overline{F}(\phi)$。那么，存在一个序列 $\{x_n\}$，属于 $\mathbb{R}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}(f * \phi)(x_n) = \alpha.$$

考虑在 x_n 处的求值映射序列 $\{\hat{x}_n\}$，即 $\hat{x}_n(\phi) := \phi(x_n)$。令 Φ' 为 $C_u(\mathbb{R})^*$ 中序列 $\{\hat{x}_n\}$ 的一个聚点。那么，显然有

$$\Phi'(f * \phi) = \alpha,$$

这意味着

$$\sup_{\Phi_0\in\mathcal{M}_0} \Phi_0(f * \phi) \ge \overline{F}(\phi).$$

我们完成了证明。

定理 3.2. 对于任意 $f \in P(\mathbb{R})$， $\mathcal{F}$ 中的每个元素都满足性质（†）。

证明. 根据定理 3.1，对于任意 $\Phi \in \mathcal{F}$，存在一个 $\Phi_0 \in \mathcal{M}_0$，使得 at

$$\Phi(\phi) = \Phi_0(f * \phi),$$

其中 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$。那么，对于任意的 $g \in L^1(\mathbb{R})$，由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}\Phi(g * \phi) &= \Phi_0(f * g * \phi) = \Phi_0(g * f * \phi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Phi_0((f * \phi)_{-t}))g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \Phi_0(f * \phi_{-t})g(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(\phi_{-t})g(t)dt.\end{aligned}$$

由此得到结论。

定理 3.3. 设 f 属于 $P(\mathbb{R})$。对于任意的 $\Phi \in \mathcal{M}, \Phi \in \mathcal{T}$，当且仅当 Φ 是不变的且 $\Phi \in \mathcal{F}$。

证明。充分性由上述事实和定理 3.2 显然可得。下面证明必要性。设 Φ 是一个拓扑不变平均。那么， Φ 的不变性显然成立。由于 Φ 是一个均值，故有

$$\Phi(\phi) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} \phi(x)$$

其中 $\phi \in L_R^\infty(\mathbb{R})$。由于 Φ 是拓扑不变的， $\Phi(\phi) = \Phi(f * \phi)$成立，因此有

$$\Phi(\phi) = \Phi(f * \phi) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} (f * \phi)(x) = \overline{F}(\phi).$$

因此， Φ 属于 $\mathcal{F}$，证明完毕。

设 f属于 $P(\mathbb{R})$。对于每个 $r > 0$，我们定义 $f_r(x) = r^{-1}f(x/r)$。令 $\overline{F}_u$和 $\underline{F}_u$为定义在 $L_{\mathbb{R}}^\infty(\mathbb{R})$ 上的泛函，定义如下

$$\overline{F}_u(\phi) = \limsup_{r \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} (f_r * \phi)(x) = \limsup_{r \to \infty} \overline{F}_r(\phi),$$

$$\overline{F}_u(\phi) = \liminf_{r \to \infty} \inf_{x \in \mathbb{R}} (f_r * \phi)(x) = \liminf_{r \to \infty} \underline{F}_r(\phi),$$

其中，对于每个 $r > 0$，令 $\overline{F_r}(\phi) = \sup_{x \in \mathbb{R}}(f_r * \phi)(x)$，且 $\underline{F}_r(\phi) = \inf_{x \in \mathbb{R}}(f_r * \phi)(x)$。然后注意到， $\overline{F}_u$是次线性的，并且关系 $\underline{F}_u(\phi) = -\overline{F}_u(-\phi)$成立。

这类泛函中最有趣的例子是 $D(x) = I_{[-1,1]}(x)$，即区间 $[-1, 1]$ 的示性函数，以及 $P(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$。注意，函数 $P_x(y) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{1+(\frac{y}{x})^2} = \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2}(x > 0, y \in \mathbb{R})$ 是泊松核。这些核在 $L_R^\infty(\mathbb{R})$ 上给出如下次线性泛函:

$$\begin{aligned}\overline{D_u}(\phi) &= \limsup_{\theta \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - t)D_\theta(t)dt \\ &= \limsup_{\theta \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{2\theta} \int_{x-\theta}^{x+\theta} \phi(t)dt,\end{aligned}$$

$$\overline{P_u}(\phi) = \limsup_{x\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y-t) P_x(t) dt$$
$$= \limsup_{x\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \frac{x}{x^2+(y-t)^2} dt.$$

这里指出，上述两个公式中的上极限可以替换为极限。以下定理是本节的主要结果。

定理 3.4. 设 $f \in P(\mathbb{R})$ 且 $\Phi \in \mathcal{M}$。那么， Φ 是拓扑不变的，当且仅当

$$\Phi(\phi) \le \overline{F_u}(\phi)$$

对每个 $\phi \in L_R^\infty(\mathbb{R})$ 都成立。

证明。首先证明充分性。假设对任意 $\phi \in L_R^\infty(\mathbb{R})$,

$$\Phi(\phi) \le \overline{F}_u(\phi)$$

成立。根据定义，$\overline{F}_u \le \overline{F}$ 是有效的。于是，由定理 3.2， Φ 满足性质（†）。因此，接下来只需证明 Φ 是不变的。为此，只需证明

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_r(t) - f_r(t+s)| dt = 0$$

对每个 $s \in \mathbb{R}$ 都成立。事实上，若此式成立，则有

$$\begin{aligned}
\Phi(\phi - \phi_s) &\le \overline{F}_u(\phi - \phi_s) \\
&= \limsup_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \{(f_r * \phi)(x) - (f_r * \phi)(x+s)\} \\
&= \limsup_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-t)\{f_r(t) - f_r(t+s)\} dt \\
&\le \limsup_{r\to\infty} \|\phi\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} |f_r(t) - f_r(t+s)| dt = 0.
\end{aligned}$$

同理，有

$$\Phi(\phi - \phi_s) \ge \underline{F}_u(\phi - \phi_s) = -\overline{F}_u(\phi_s - \phi) = 0,$$

这些不等式表明 $\Phi(\phi - \phi_s) = 0$，由此得到所需结果。现在我们证明上述方程。通过变量代换，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f_r(t) - f_r(t+s)| dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \left| f\left(\frac{t}{r}\right) - f\left(\frac{t+s}{r}\right) \right| dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f(t+s/r)| dt.
\end{aligned}$$

对于任意固定的 $s \in \mathbb{R}$，当 r 趋于无穷远处时，最后一个等式趋于 0。由此得到结论。

接下来，我们证明必要性。假设 Φ 是拓扑不变的。于是，按照定理 3.3 证明中的相同论证，我们得到

$$\Phi(\phi) \leq \overline{F}_r(\phi)$$

对于每个 $\phi \in L_R^\infty(\mathbb{R})$ 和 $r > 0$。然后，当 $r \to \infty$ 时取上极限，我们得到不等式

$$\Phi(\phi) \leq \limsup_{r\to\infty} \overline{F}_r(\phi) = \overline{F}_u(\phi).$$

证明完毕。

结合推论 2.1 和定理 3.5，我们立即得到以下结果。

推论 3.1。设 $f \in P(\mathbb{R})$ 和 $\phi \in L_R^\infty(\mathbb{R})$。那么，我们有

$$\overline{F}_u(\phi) = \sup_{\Phi\in\mathcal{T}(G)} \Phi(\phi),$$

and

$$\underline{F}_u(\phi) = \inf_{\Phi\in\mathcal{T}(G)} \Phi(\phi).$$

下面的结果给出了一个解析条件，在此条件下，给定函数几乎收敛。

定理 3.5。设 $f \in P(\mathbb{R})$。对于函数 ϕ 属于 $L^\infty(\mathbb{R})$， ϕ 几乎收敛到一个数 α 当且仅当

$$\lim_{r\to\infty} (f_r * \phi)(x) = \alpha$$

关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致收敛。换言之，

$$\lim_{r\to\infty} \|f_r * \phi - \alpha\|_\infty = 0.$$

证明。我们先证明一个初等事实：对于实值本质有界函数 ϕ，$\lim_{r\to\infty}(f_r * \phi)(x) = \alpha$ 关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致收敛，当且仅当 $\overline{F}_u(\phi) = \underline{F}_u(\phi) = \alpha$，也就是说，

$$\limsup_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} (f_r * \phi)(x) = \liminf_{r\to\infty} \inf_{x\in\mathbb{R}} (f_r * \phi)(x) = \alpha.$$

事实上，如果上述等式成立，那么对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，我们可以选取一个数R，使得

$$\alpha - \varepsilon < \inf_{r\geq R} \inf_{x\in\mathbb{R}} (f_r * \phi)(x) \leq \sup_{r\geq R} \sup_{x\in\mathbb{R}} (f_r * \phi)(x) < \alpha + \varepsilon.$$

因此，如果 $r \geq R$，则对每个 $x \in \mathbb{R}$，都有 $|(f_r * \phi)(x) - \alpha| < \varepsilon$。这表明，当 $r \to \infty$ 时，$(f_r * \phi)(x)$ 一致收敛到 α。

另一方面，假设 $\lim_{r\to\infty}(f_r * \phi)(x) = \alpha$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 中一致成立。那么，对于任意正数 $\varepsilon > 0$，存在一个数 $R > 0$，使得若 $r \geq R$，

$$|(f_r * \phi)(x) - \alpha| < \varepsilon$$

对每个 $x \in \mathbb{R}$ 都成立。也就是说，

$$\alpha - \varepsilon < (f_r * \phi)(x) < \alpha + \varepsilon$$

对每个 $x \in \mathbb{R}$ 都成立。这意味着

$$\alpha - \varepsilon < \inf_{x\in\mathbb{R}}(f_r * \phi)(x) \le \sup_{x\in\mathbb{R}}(f_r * \phi)(x) < \alpha + \varepsilon$$

只要 $r \ge R$ 成立即可。令 $r \to \infty$ 趋于极限，我们得到等式

$$\liminf_{r\to\infty} \inf_{x\in\mathbb{R}}(f_r * \phi)(x) = \limsup_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}}(f_r * \phi)(x) = \alpha.$$

由此得到所需结果。

现在假设 $\phi \in L_R^\infty(\mathbb{R})$ 几乎收敛到 α。因此，根据几乎收敛的定义，我们有

$$\Phi(\phi) = \alpha$$

对每个 $\Phi \in \mathcal{T}$ 都成立。我们证明

$$\limsup_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}}(f_r * \phi)(x) = \liminf_{r\to\infty} \inf_{x\in\mathbb{R}}(f_r * \phi)(x) = \alpha.$$

根据定理 3.4，对任意 $\Phi \in \mathcal{T}$，有

$$\liminf_{r\to\infty} \inf_{x\in\mathbb{R}}(f_r * \phi)(x) \le \Phi(\phi) \le \limsup_{r\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}}(f_r * \phi)(x).$$

现在假设 $\beta :=$ 下极限$_{r\to\infty}$ 下确界$_{x\in\mathbb{R}}(f_r * \phi)(x) <$ 上极限$_{r\to\infty}$ 上确界$_{x\in\mathbb{R}}(f_r * \phi)(x) =: \gamma$成立。那么，对于任意实数 $\rho \in [\beta, \gamma]$，存在一个拓扑不变平均Φ，使得 $\Phi(\phi) = \rho$。事实上，在 $L_R^\infty(\mathbb{R})$ 的子空间 $\mathbb{R}\phi = \{c\phi : c \in \mathbb{R}\}$ 上定义 Φ_0： $\Phi_0(c\phi) = c\rho$。于是，很容易验证

$$\Phi_0(\psi) \le \overline{F}_u(\psi)$$

在 $\mathbb{R}\phi$ 上。根据 Hahn-Banach 延拓定理， Φ_0 可延拓为 $L_R^\infty(\mathbb{R})$ 上的线性泛函 Φ，满足

$$\Phi(\psi) \le \overline{F}_u(\psi)$$

对每个 $\psi \in L_R^\infty(\mathbb{R})$ 都成立。再次根据定理 3.4，这个 Φ 是拓扑不变的。这与假设 $\Phi(\phi) = \alpha$ 对每个 $\Phi \in \mathcal{T}$都成立相矛盾。

反过来，对于函数 $\phi \in L_R^\infty(\mathbb{R})$，假设 $\lim_{r\to\infty} \|f_r * \phi - \phi\|_\infty = 0$，即 $F_u(\phi) = \underline{F}_u(\phi) = \alpha$。那么，根据定理 3.4，我们立即得到，对于 $\mathcal{T}$ 中的每个 Φ，都有 $\Phi(\phi) = \alpha$，这意味着 ϕ 几乎收敛到数 α。

对于一般的复值函数 $\phi = u + iv \in L^\infty(\mathbb{R})$，由实值情形可轻易推出： ϕ 几乎收敛到复数$\alpha = a + bi$，当且仅当 u 和 v 分别几乎收敛到实数 a 和 b。

推论 3.2. 设 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$。那么， ϕ 几乎收敛到一个数 α 当且仅当

$$\lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{2\theta} \int_{x-\theta}^{x+\theta} \phi(t)dt = \alpha$$

在 $x \in \mathbb{R}$ 上一致成立。或者，等价地，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\frac{x}{x^2+(y-t)^2}dt = \alpha$$

在 $y \in \mathbb{R}$ 中一致地。

我们注意到，推论 3.2 的前半部分由 Raimi [13] 得出。[8] 中给出了不同于定理 3.5 的另一种解析条件。

4. An application to the bounded analytic functions on the half plane

本节中，我们考察几乎收敛在右半平面 $\mathbb{C}^+$ 上的有界解析函数类 $H^\infty(\mathbb{C}^+)$ 的一些应用：$= \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$。关于 Hardy 空间，可参阅 [4]。回顾一下，每个 $\phi \in H^\infty(\mathbb{C}^+)$ 几乎处处在 $\mathbb{R}$ 上都有非切向极限 $\lim_{x\to 0^+} \phi(z) = \lim_{x\to 0^+} \phi(x+iy)$，因此我们可以将 $H^\infty(\mathbb{C}^+)$ 中的函数与其边界函数 $\phi(iy) \in L^\infty(\mathbb{R})$ 等同起来。我们用 $H^\infty(\mathbb{R})$ 表示 $H^\infty(\mathbb{C}^+)$ 的边界函数，并且作为巴拿赫代数有等距关系$H^\infty(\mathbb{C}^+) \cong H^\infty(\mathbb{R})$。回顾一下，若给定函数 ϕ 属于 $H^\infty(\mathbb{R})$，$\hat{}$ 则可通过对 ϕ 作泊松积分，将 ϕ 延拓为定义在 $\mathbb{C}^+$ 上的有界解析函数 ϕ：

$$\hat{\phi}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)P_x(y-t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\frac{x}{x^2+(y-t)^2}dt \quad (z = x+iy,\ x > 0,\ y \in \mathbb{R}).$$

利用推论 3.1 和 3.2，我们可以将 $\phi \in H^\infty(\mathbb{C}^+)$ 在虚轴上的行为与其在无穷远处的行为联系起来。

定理 4.1。设 $\phi \in H^\infty(\mathbb{C}^+)$。则有以下等式：

$$\limsup_{x\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}} \frac{1}{2\theta}\int_{y-\theta}^{y+\theta} Re(\phi(it))dt = \limsup_{x\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}} Re(\phi(x+iy)),$$

and

$$\liminf_{x\to\infty}\inf_{y\in\mathbb{R}} \frac{1}{2\theta}\int_{y-\theta}^{y+\theta} Re(\phi(it))dt = \liminf_{x\to\infty}\inf_{y\in\mathbb{R}} Re(\phi(x+iy)),$$

对于 ϕ 的虚部，我们也有相同的关系。

定理 4.2。设 $\phi \in H^\infty(\mathbb{C}^+)$。则边界函数 $\phi(iy)$ 几乎收敛于数值 α，即

$$\lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{2\theta}\int_{y-\theta}^{y+\theta} \phi(it)dt = \alpha$$

在 $y \in \mathbb{R}$ 中一致，当且仅当

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x+iy) = \alpha$$

关于 $y \in \mathbb{R}$ 一致地。

现在我们从巴拿赫代数理论的角度来考察定理 4.1 的解释。设 $\mathfrak{M}$ 为巴拿赫代数 $H^\infty(\mathbb{C}^+)$ 的极大理想空间。注意， $H^\infty(\mathbb{C}^+)$ 的一个极大理想 $\mathfrak{m}$ 等价于由典范映射 $H^\infty(\mathbb{C}^+) \to H^\infty(\mathbb{C}^+)/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$ 诱导的、将 $H^\infty(\mathbb{C}^+)$ 映到 $\mathbb{C}$ 上的复同态 χ 。将点 $z \in \mathbb{C}^+$ 处的求值映射 $\hat{z}: H^\infty(\mathbb{C}^+) \ni \phi \mapsto \phi(z)$ 与点 $z \in \mathbb{C}^+$ 本身等同，我们可以将 $\mathbb{C}^+$ 视为 $\mathfrak{M}$ 的子集。于是，由电晕定理可知， $\mathbb{C}^+$ 在 $\mathfrak{M}$ 中稠密。换言之，对于每个元素 $\chi \in \mathfrak{M}$，都存在一个网 $\{z_\alpha\} \in \mathbb{C}^+$ ，使得 $\chi = \lim_\alpha \hat{z}_\alpha$ 在弱*意义下成立。设 $\mathfrak{M}_\infty$ 是 $\mathfrak{M}$ 的子集，由那些元素 χ 组成；这些元素是网 $\{\hat{z}_\alpha\}$ 的极限，其中 $\lim_\alpha x_\alpha = \infty$，且 $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$。

定理 4.3. 设 χ 属于 $\mathfrak{M}_\infty$。那么，存在一个拓扑不变平均 Φ，使得 $\Phi|_{H^\infty(\mathbb{C}^+)} = \chi$。

证明。设 $\{z_\alpha\}$ 是一个网，满足 $\chi = w^*$- 极限$_\alpha$ $\hat{z}_\alpha$ 属于 $H^\infty(\mathbb{C}^+)$。如有必要，取 $\{\hat{z}_\alpha\}$ 的一个子网，使网 $\{\hat{z}_\alpha\}$ 在弱*意义下收敛到 $L^\infty(\mathbb{R})$中的一个元素 Φ^*。注意

$$\hat{z}_\alpha(\phi) = \phi(z_\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\frac{x_\alpha}{x_\alpha^2 + (y_\alpha - t)^2}dt \quad (z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha),$$

其中 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$。对于任意固定的 $x > 0$ 和 $\phi \in L^\infty_R(\mathbb{R})$，我们有

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\frac{x_\alpha}{x_\alpha^2 + (y_\alpha - t)^2}dt \le \sup_{y\in\mathbb{R}} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\frac{x}{x^2 + (y - t)^2}dt$$

每当 $x_\alpha \ge x$时。因此，对于每个 $\phi \in L^\infty_R(\mathbb{R})$,

$$\Phi(\phi) = \lim_\alpha \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\frac{x_\alpha}{x_\alpha^2 + (y_\alpha - t)^2}dt \le \overline{P}_x(\phi)$$

对任意 $x > 0$均成立。当 $x \to \infty$时取上极限，可得

$$\Phi(\phi) \le \overline{P}_u(\phi),$$

这表明，根据定理 3.4， Φ 属于 $\mathcal{T}$。由 Φ的构造显然可知，$\Phi|_{H^\infty(\mathbb{C}^+)} = \chi$。

推论 4.1. 几乎收敛在 $H^\infty(\mathbb{R})$ 上具有乘法性。也就是说，若 ϕ 和 ψ属于 $H^\infty(\mathbb{R})$，且分别几乎收敛于 α 和 β，那么 $\phi\psi$ 几乎收敛于 $\alpha\beta$。

事实上，在比定理 4.2 更一般的情形下，即一致极限 $\lim_{x\to\infty} \phi(x + iy)$ 不存在时，值 $\{\Phi(\phi)\}_{\Phi\in\mathcal{T}(\mathbb{R})}$与 $\{\phi(z)\}_{z\in\mathbb{C}^+}$ 的聚点之间的关系仍然成立。

推论 4.2。设 $\phi \in H^\infty(\mathbb{C}^+)$。令 α 为 $\phi(z)$ 在 $Re(z)$ 趋于无穷远处时的一个聚点，也就是说，存在一个由 $\mathbb{C}^+$ 构成的序列 $\{z_n\}_{n=1}^\infty = \{x_n + iy_n\}_{n=1}^\infty$ ，使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ，且 $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n + iy_n) = \alpha$。那么，存在一个拓扑不变均值 $\Phi \in \mathcal{T}$，使得 $\Phi(\phi) = \alpha$。这里， $\phi = \phi(iy)$ 是虚轴上的边界函数。

证明由定理 4.3 显而易见。定理 4.1 和推论 4.2 简要说明了拓扑不变均值在研究 Hardy 空间 $H^\infty(\mathbb{C}^+)$ 中的重要性，尤其是在考察有界解析函数在无穷远处的行为时。关于半空间上 Hardy 空间的极大理想空间的更详细结果，可参见例如 [11], [17], [18]。

接下来，我们讨论上述结果与维纳陶伯定理之间的关系。证明见 [15] 。

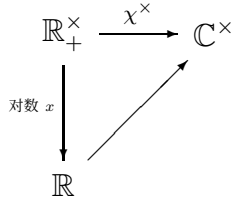
定理 4.4（维纳陶伯定理）。设 G 是一个局部紧阿贝尔群， m 是 G 上的哈尔测度。假设 f 属于 G 上的群代数 $L^1(G)$，且其傅里叶变换 f 在 G 的对偶群 G 上处处不为零。那么，对于 G 上的任一本质有界可测函数 ϕ ，若

$$\lim_{x\to\infty} f*\phi(x)=\int_G f(xt^{-1})\phi(t)dt=\hat{f}(0)\alpha$$

成立，则对于任意 $g\in L^1(G)$，有

$$\lim_{x\to\infty} g*\phi(x)=\int_G g(xt^{-1})\phi(t)dt=\hat{g}(0)\alpha.$$

现在将此定理应用于 $\mathbb{R}$ 的乘法群 $\mathbb{R}^\times$ 的正部 $\mathbb{R}_+^\times=(0,\infty)$。注意， $\mathbb{R}^\times$ 的哈尔测度为 $dt/|t|$。现在我们确定 $\mathbb{R}_+^\times$ 的对偶群，也就是 $\mathbb{R}_+^\times$ 上的特征。注意， $\mathbb{R}_+^\times$ 通过同构 $\mathbb{R}\ni x\mapsto \log x\in\mathbb{R}_+^\times$ 与加法群 $\mathbb{R}$ 同构。通过这一同构， $\mathbb{R}$ 上的每个特征 χ 都通过复合 $\chi\circ\log$ 诱导出一个特征 $\chi^\times$ 。



反过来，$\mathbb{R}_+^\times$ 上的任意特征都可由此得到。因此，$\mathbb{R}_+^\times$ 上的每个特征 $\chi^\times$ 都可写成 $e^{i\xi}$ 对数 $x=x^{i\xi}$ $(\xi\in\mathbb{R})$。

推论 4.3（$\mathbb{R}_+^\times$ 上的维纳陶伯定理）。设 f 属于 $L^1(\mathbb{R}_+^\times)$，且 $\hat{}\ f\hat{}$ 在 $\mathbb{R}_+^\times$ 上不为零。也就是说，

$$\hat{f}(\xi)=\int_0^\infty f(t)t^{i\xi}\frac{dt}{t}\neq 0$$

对每个 $\xi\in\mathbb{R}$ 都成立。对于 $\phi\in L^\infty(\mathbb{R}_+^\times)$，如果

$$\lim_{x\to\gamma} f\overset{M}{*}\phi(x)=\lim_{x\to\gamma}\int_0^\infty \phi(t)f\left(x/t\right)\frac{dt}{t}=\hat{f}(0)\alpha$$

成立，那么对于每个 $g \in L^1(\mathbb{R}_+^\times)$，我们有

$$\lim_{x\to\gamma} g \overset{M}{*} \phi(x) = \lim_{x\to\gamma} \int_0^\infty \phi(t) g\left(x/t\right) \frac{dt}{t} = \hat{g}(0)\alpha.$$

这里，$\gamma = 0^+$ 或 ∞，符号 $\overset{M}{*}$ 表示 $L^1(\mathbb{R}^\times)$ 中的卷积，有时称为梅林卷积。

注意，对于任意 $r > 0$、$f \in P(\mathbb{R})$ 和 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$，卷积 $f_r * \phi(x)$ 可按如下方式变换：

$$\begin{aligned}
f_r * \phi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-t) f_r(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-t) \frac{1}{r} f\left(\frac{t}{r}\right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-t) \frac{|t|}{r} f\left(\frac{t}{r}\right) \frac{dt}{|t|} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-t) \tilde{f}\left(\frac{r}{t}\right) \frac{dt}{|t|} \quad (\tilde{f}(t) := |t|^{-1} f(t^{-1})) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(-t) \tilde{f}\left(\frac{r}{t}\right) \frac{dt}{|t|} \\
&= (\tilde{f} \overset{M}{*} {\phi_x}^*)(r) \quad (\phi^*(t) := \phi(-t)).
\end{aligned}$$

这里注意到，$\tilde{f}$ 属于 $L^1(\mathbb{R}^\times)$。此外，若假设 $f \in P(\mathbb{R})$ 是偶函数，即$f(-x) = f(x)$，则上式可写为

$$\begin{aligned}
f_r * \phi(x) &= \int_0^\infty \{{\phi_x}^*(t) + {\phi_x}^*(-t)\} \tilde{f}\left(\frac{r}{t}\right) \frac{dt}{t} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^\times} {\phi_x}^\sharp(t) \tilde{f}\left(\frac{r}{t}\right) \frac{dt}{t} \quad (\phi^\sharp(t) := \phi^*(t) + \phi^*(-t)) \\
&= (\tilde{f} \overset{M}{*} {\phi_x}^\sharp)(r).
\end{aligned}$$

结合　　推论 4.3 与上述观察，我们得到以下结果。

定理 4.5。设 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ 和 $f \in P(\mathbb{R})$ 为偶函数，满足

$$\int_0^\infty f(t) t^{i\xi} dt$$

对于每个 $\xi \in \mathbb{R}$ 都不为零。那么，如果对任意固定的 $x \in \mathbb{R}$，

$$\lim_{r\to\gamma} f_r * \phi(x) = \alpha$$

成立，则对于每个偶函数 $g \in P(\mathbb{R})$，我们有

$$\lim_{r\to\gamma} g_r * \phi(x) = \alpha,$$

其中 $\gamma = 0^+$ 或 ∞。

证明。设 f 属于 $P(\mathbb{R})$，且满足定理的条件。注意到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \tilde{f}(t)t^{i\xi}\frac{dt}{t} &= \int_0^\infty t^{-1}f(t^{-1})t^{i\xi}\frac{dt}{t}\\ &= \int_0^\infty tf(t)t^{-i\xi}\frac{dt}{t}\\ &= \int_0^\infty f(t)t^{-i\xi}dt\end{aligned}$$

$\hat{}$，并且根据关于 f 的假设，对每个 $\xi \in \mathbb{R}$ 都有 $f(\xi) \neq 0$。因此，应用推论 4.3，对于任意 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$，我们得出：如果

$$\lim_{r\to\infty} f_r * \phi(x) = \lim_{r\to\infty} (\tilde{f} \overset{M}{*} \phi_x^\sharp)(r) = \alpha$$

成立，那么我们有

$$\lim_{r\to\infty} g_r * \phi(x) = \lim_{r\to\infty} (\tilde{g} \overset{M}{*} \phi_x^\sharp)(r) = \alpha.$$

证明完毕。

现在考虑以下情形：$f(x) = D(x) = \frac{1}{2}I_{[-1,1]}(x)$ 以及 $f(x) = P(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$。首先，我们计算以下积分：

$$\int_0^\infty f(t)t^{i\xi}dt.$$

对于函数 $D(x)$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^\infty I_{[-1,1]}(t)t^{i\xi}dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{i\xi}dt\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{t^{i\xi+1}}{i\xi+1}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{i\xi+1},\end{aligned}$$

它并非对每个 $\xi \in \mathbb{R}$ 都为零。对于函数 $P(x)$，通过换元积分，我们得到

$$\int_0^\infty \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}t^{i\xi}dt = \frac{1}{2\pi}\Gamma\left(\frac{1-i(\xi-1)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+i(\xi+1)}{2}\right),$$

其中，Γ 通常表示伽马函数。因此，我们看到该积分并非对每个 $\xi \in \mathbb{R}$ 都为零。由此可从定理 4.4 得到以下结论。

定理 4　　.6. 设 $\phi \in H^\infty(\mathbb{C}^+)$。那么，以下三个条件等价。
(1) 极限$_{\theta\to\infty} \frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta} \phi(it)dt = \alpha$. (2) 极限$_{x\to\infty}\phi$
$(x+iy) = \alpha$ 对某个 $y \in \mathbb{R}$成立. (3) 极限
$_{x\to\infty}\phi(x+iy) = \alpha$ 对每个 $y \in \mathbb{R}$成立.

证明。(1) $\Leftrightarrow$ (3)。对每个 $y \in \mathbb{R}$，注意到

$$D_\theta * \phi(y) = \frac{1}{2\theta}\int_{y-\theta}^{y+\theta} \phi(t)dt \ (\theta > 0), \quad P_x * \phi(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\frac{x}{x^2+(y-t)^2}dt \ (x > 0)$$

由定理 4.5 可知,

$$\lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{2\theta}\int_{y-\theta}^{y+\theta} \phi(t)dt = \alpha$$

当且仅当

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x+iy) = \alpha$$

此外，显然

$$\lim_{\theta\to\infty} D_\theta * \phi(y) = \alpha \Leftrightarrow \lim_{\theta\to\infty} D_\theta * \phi(0) = \alpha.$$

因此我们得到 (1) $\Leftrightarrow$ (3) 和 (2) $\Rightarrow$ (1)。蕴含关系 (3) $\Rightarrow$ (2) 是显然的。证毕。

推论 4.4。Ces`aro 均值的连续版本在 $H^\infty(\mathbb{R})$ 上是乘法性的。也就是说，若函数 ϕ, $\psi \in H^\infty(\mathbb{R})$ 满足以下极限

$$\lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta} \phi(t)dt = \alpha, \quad \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta} \psi(t)dt = \beta,$$

则乘积 $\phi\psi$ 满足以下等式

$$\lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta} \phi(t)\psi(t)dt = \alpha\beta.$$

最后，我们以讨论其与 Fatou 定理的关系作为结尾。注意，如 [6], 中所述，对于每个元素 $f \in P(\mathbb{R})$，函数 $\{f_r\}_{r>0}$ 构成 $L^1(\mathbb{R})$ 的一个近似恒等元。根据勒贝格微分定理，对于任意 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$，我们得到

$$\lim_{\theta\to 0}(D_\theta * \phi)(x) = \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{2\theta}\int_{x-\theta}^{x+\theta} \phi(t)dt = \phi(x)$$

在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处存在。根据定理 4.5，我们立即得到以下结果:

推论 4.5。设 $f \in P(\mathbb{R})$ 是一个偶函数，并考虑近似恒等元 $\{f_r\}_{r>0}$。那么，对于任意 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$，有

$$\lim_{r\to 0^+}(f_r * \phi)(x) = \phi(x)$$

几乎处处于 $\mathbb{R}$。

特别地，我们得到了 Fatou 定理的特殊情形，其中被积函数是 $L^\infty(\mathbb{R})$ 中的函数。关于 Fatou 定理逆定理的更全面论证，参见 [7], [10], [15]。

ˆ 定理 4.7. 设 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$。我们通过泊松积分在 $\mathbb{C}^+$ 上定义调和函数 $\phi(z)$。那么，对于任意 $y \in \mathbb{R}$，径向极限

$$\lim_{x \to 0+} \hat{\phi}(x + iy)$$

存在，当且仅当对称差

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{2\theta} \int_{x-\theta}^{x+\theta} \phi(t)dt$$

存在。

References

[1] C. Chow, 《局部紧群上的拓扑不变均值》, Trans. Amer. Math. Sot. 151 (1970), 443-456.[2] C. Chow, 《群上的弱几乎周期函数与几乎收敛函数》, Trans. Amer. Math. Sot. 206 (1975), 175-200.[3] F. D. Greenleaf, 《拓扑群上的不变均值及其应用》, Van Nostrand, Princeton, N. J. (1969).[4] K. Hoffman, 《解析函数的巴拿赫空间》, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1962).[5] A. Hulanicki, 《局部紧群上的均值与 Følner 条件》, Studia Math. 27 (1966), 87-104.[6] Y. Katznelson, 《调和分析导论》, Wiley, New York (1986).[7] J. Korevaar, 《陶伯理论》, Springer, Berlin, 2004.[8] R. Kunisada, 《$L^\infty(\mathbb{R}_+)$上的不变线性泛函》, J. Math. Anal. Appl. 481 (2020),123452.[9] G. G. Lorentz, 《对发散级数理论的贡献》, Acta Math. 80 (1948), 167-190.[10] L. H. Loomis, 《正调和函数的 Fatou 定理的逆定理》。Trans. Amer. Math. Soc. 53, 239-250.[11] P. Muhly, 《函数代数与流》, Acta Sci. Math. (Szeged) 35 (1975), 55-66.[12] A. T. Paterson, 《可和性》, American Mathematical Society, 1988.[13] R. A. Raimi, 《平均值与 Banach 极限》, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 1029-1036.[14] R. A. Raimi, 《论巴拿赫广义极限》, Duke Math. J. 26 (1959), 17-28.[15] W. Rudin, 《群上的傅里叶分析》, Interscience, New York (1962).[16] W. Rudin, 《正调和函数的陶伯定理》。Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 40, 376-384.[17] J. Tanaka, 《纤维中的流》, Trans. Amer. Math. Soc. 343 (1994), 779–804.[18] J. Tanaka, 《几乎周期函数的延拓与流上的解析性》, Amer. Math. Soc. Transl. 204 (2001), 63-80.[19] K. Yosida, 《泛函分析》, Springer, Berlin (1965).

电子邮箱地址：tk-waseda@ruri.waseda.jp