arXiv:2301.01632v1 [math.PR] 4 Jan 2023

多尺度布尔渗流的亚临界锐度

Barbara Dembin[1]

[1]D-MATH，苏黎世联邦理工学院，瑞士。

摘要

我们考虑定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的多尺度布尔渗流，其半径分布为 μ ， $[1,+\infty)$, $d \geq 2$。该模型由原始的、半径分布为 μ的布尔渗流模型与可数个缩放后的独立副本叠加而成。第 n个副本是一个半径分布为 $\mu|_{[1,\kappa]}$ 、按 κ^n缩放的布尔渗流。我们证明，在对 μ满足某些正则性假设的条件下，当 κ 足够大时，多尺度模型的亚临界相具有锐度。此外，我们证明，无界连通分支是否存在仅取决于分形部分（而非半径大于 1 的球）。

1 引言

概述 Gilbert 于 [6] 将布尔渗流引入为伯努利渗流的连续版本；伯努利渗流由 Broadbent 和 Hammersley[2] 提出。我们考虑定义在 $\mathbb{R}^d$ 上、强度为 $\lambda > 0$ 的泊松点过程，并以每个点为球心放置一个半径可能随机的球。在布尔渗流中，我们关注占据集的连通性：它定义为 $\mathbb{R}^d$ 的子集，由所有至少被一个球覆盖的点组成。该模型在 λ 发生相变，决定是否存在由球构成的无界连通分支。当 $\lambda < \lambda_c$ 时，所有连通分支均有界；当 $\lambda > \lambda_c$ 时，至少存在一个无界连通分支。

布尔模型 令 $d \geq 2$。用 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的 ℓ_2-范数。对于 $r > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，定义

$$\mathrm{B}_r^x := \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| \leq r\} \quad \text{and} \quad \partial\mathrm{B}_r^x := \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| = r\}$$

半径为 r 、中心位于 x 的闭球及其边界。为简便起见，我们将 B_r 记作 B_r^0。对于 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$的子集 η，我们定义

$$\mathcal{O}(\eta) := \bigcup_{(z,r)\in\eta} \mathrm{B}_r^z.$$

设 μ 是 $\mathbb{R}_+$ 上的一个分布，表示半径的分布。设 η是强度为 $\lambda dz\otimes\mu$ 的泊松点过程，其中 dz 是 $\mathbb{R}^d$上的勒贝格测度。记 $\mathbb{P}_{\lambda,\mu}$ 为 η 的概率律，记 $\mathbb{E}_{\lambda,\mu}$ 为在概率律$\mathbb{P}_{\lambda,\mu}$下的期望。

若存在一条位于 O(η) 中的连续路径，将 x 与 y连接起来，则称 x 与 y 在 $\mathbb{R}^d$ 中通过 η相连。若存在 $x\in A$ 和 $y\in B$，使得 a 与 b 通过η相连，则称集合 A 与 B 相连。我们用 $\{A\longleftrightarrow B\}$ 表示这一事件。

对每个 $\lambda\geq 0$ 和 μ，定义渗流概率

$$\theta_\mu(\lambda):=\lim_{r\to\infty}\mathbb{P}_{\lambda,\mu}\left(0\longleftrightarrow\partial\mathrm{B}_r\right).$$

定义与无限连通分支存在性相关的临界参数:

$$\lambda_c(\mu):=\sup\left\{\lambda\geq 0:\theta_\mu(\lambda)=0\right\}.$$

我们将考虑满足以下条件的测度 μ

$$\int_0^\infty t^d d\mu(t)<\infty. \tag{1.1}$$

Hall 在 [11] 中证明，该条件是避免整个空间都被覆盖的必要条件。在最弱假设 (1.1) 下，Gouéré 在 [8] 中证明了$0<\lambda_c(\mu)<\infty$。我们还定义以下临界参数:

$$\widehat{\lambda}_c(\mu):=\inf\left\{\lambda\geq 0:\inf_{r>0}\mathbb{P}_{\lambda,\mu}(\mathrm{B}_r\longleftrightarrow\partial\mathrm{B}_{2r})>0\right\}.$$

已知 $\lambda\leq\lambda_c(\mu)$，便可以进行重整化论证并推出许多性质（见 [4, 10]）。因此，等式 $\lambda_c(\mu)=\widehat{\lambda}_c(\mu)$ 表明我们能够很好地控制亚临界区间。若该等式成立，则称亚临界锐度成立。在对 μ 满足矩条件的情形（见 [1, 4, 16]）以及几乎所有幂律分布的情形（见 [3]）下，该等式均已得到证明。

多尺度布尔渗流 多尺度布尔渗流模型由不同尺度上的布尔渗流的无限个独立副本叠加而成。设 μ 是定义在 $[1,+\infty)$ 上、满足 (1.1) 的有限分布。设 $\kappa>1$。设 $\lambda>0$。对于集合 $E\subset\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+$，记 E/κ 为集合 $\{x/\kappa,\ x\in E\}$。我们用

$$\eta_\kappa(\lambda):=\eta^{(0)}(\lambda)\cup\bigcup_{i=1}^\infty\frac{1}{\kappa^i}(\eta^{(i)}(\lambda)\cap(\mathbb{R}^d\times[1,\kappa]))$$

其中 $(\eta^{(i)}(\lambda))_{i\geq 1}$ 是强度为 $\lambda\,dz\otimes\mu$ 的独立同分布泊松点过程。注意，O($\eta_\kappa(\lambda)$) 中的每个点几乎必然都被覆盖。然而，这并不一定意味着存在无界连通分支，因为它无法排除存在勒贝格测度为零的阻挡曲面。

我们关注 O($\eta_\kappa(\lambda)$) 的渗流性质。令 μ_κ 为一个分布，使得 $\eta_\kappa(\lambda)$ 是强度为 $\lambda dz\otimes\mu_\kappa$ 的泊松点过程。

分布 μ_κ 的总质量为无穷，但它是 σ-有限的。我们稍后将明确给出其表达式。

我们将在以下假设下进行 on

$$\exists \kappa_0 > 1 \quad \forall \kappa \geq \kappa_0 \qquad \sup_{a \geq \kappa} \sup_{r \geq 1} \frac{a^d \mu([ar, a\kappa])}{\mu([r, \kappa])} \leq 1 \tag{1.2}$$

并采用约定 $0/0 = 0$。这一假设尤其适用于具有紧支撑的分布，或形如 $f(r)$ $r^{-(d+1+\delta)} \mathbb{1}_{r \geq 1} dr$的分布，其中 f 是一个非增函数，满足 $0 < \inf f < \sup$ $f < \infty$ 且 $\delta > 0$。以下定理是本文的主要结果。它表明，分形分布 μ_κ 具有亚临界锐度，并且无界连通分支的存在与大球无关。

定理 1.1. 设 μ 满足假设 (1.2)。设 κ_0 如 (1.2)所述。对于任意 $\kappa \geq \kappa_0$，有

$$\lambda_c(\mu_\kappa) = \widehat{\lambda}_c(\mu_\kappa) = \lambda_c(\mu_\kappa|_{[0,1]}).$$

证明思路 证明依赖于以下关键观察。得益于条件 **(1.2)**，对于 $\kappa \geq \kappa_0$，我们可以证明，强度为 $\lambda dz \otimes \mu_\kappa|_{[0,1]}$ 的泊松模型随机占优于经过 κ^j缩放、强度为 $\lambda dz \otimes \mu_\kappa|_{[0,\kappa^j]}$ 的泊松模型。由于分布 $\mu_\kappa|_{[0,1]}$ 的支集有界，可以利用 Duminil-Copin–Tassion 在 [5] 中针对标准渗流提出、并由 Ziesche [16]推广至布尔渗流背景下的标准 $\varphi_p(S)$ 论证，证明该分布具有亚临界锐度。运用这一论证，我们可以证明，当$\lambda < \lambda_c(\mu_\kappa|_{[0,1]})$时，连接概率呈指数衰减。结合随机支配，我们可以证明，当 $\lambda < \lambda_c(\mu_\kappa|_{[0,1]})$ 时，有

$$\inf_{r>0} \mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa}(\mathrm{B}_r \longleftrightarrow \partial \mathrm{B}_{2r}) = 0$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$和 $\lambda < \lambda_c(\mu_\kappa)$。由此得到 $\lambda_c(\mu_\kappa|_{[0,1]})$ $\leq \lambda_c(\mu_\kappa)$ $\leq \lambda_c(\mu_\kappa)$。这三个临界点重合，是由前述不等式与$\lambda_c(\mu_\kappa|_{[0,1]})$ $\geq \lambda_c($ $\mu_\kappa)$共同推出的。

背景 在此前关于多尺度布尔渗流的研究中，使用了略有不同的定义。对 $\kappa \geq 1$ 定义

$$\widetilde{\eta}_\kappa(\lambda) := \eta^{(0)}(\lambda) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \frac{\eta^{(i)}(\lambda)}{\kappa^i}$$

其中 $(\eta^{(i)}(\lambda))_{i \geq 1}$ 是强度为 $\lambda\, dz \otimes \mu$ 的独立同分布泊松点过程。令$\widetilde{\mu}_\kappa$ 为满足 $\widetilde{\eta}_\kappa$ (λ) 是强度为$\lambda dz \otimes \widetilde{\mu}_\kappa$的泊松点过程的分布。根据此定义，不同缩放副本的半径范围不再互不相交，条件 **(1.1)** 不足以确保多尺度布尔模型呈现非平凡相变。Gouéré 在 [9] 证明， $\lambda_c(\widetilde{\mu}_\kappa) > 0$ 当且仅当

$$\int_{t \geq 1} t^d \log(t) d\mu(t) < \infty. \tag{1.3}$$

若不满足此条件，半径大于 1 的球具有无限质量，并且 $\lambda_c(\widetilde{\mu}_\kappa) = 0$。

备注 1.2。请注意，在我们对多尺度渗流的定义中，不同缩放副本的半径范围彼此不相交。因此可以去除假设 (1.3)。

Menshikov–Popov–Vachkovskaia 最初在 [14] 中研究了分布为 $\mu = \delta_1$ 的布尔多尺度模型。他们证明，当 $\lambda < \lambda_c(\delta_1)$ 且 κ 足够大时，多尺度模型不会发生渗流。

随后，他们在 [15] 中将结果推广到满足以下自相似条件的更一般分布 μ：

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{r\geq 1} \frac{a^d \mu([ar, +\infty))}{\mu([r, +\infty))} = 0$$

并且对于满足 $\lambda > 0$ 的情形，

$$\lim_{r\to\infty} r^d \mathbb{P}_{\lambda,\mu}(\mathrm{B}_r \longleftrightarrow \partial \mathrm{B}_{2r}) = 0. \tag{1.4}$$

请注意，条件 (1.4) 限制相当严格，因为对于具有无限 $2d$ 阶矩的分布 μ，不存在这样的正数 λ。

Gouéré 后来在 [7]，中放宽了条件 (1.4)，并证明在假设 (1.3) 成立的情况下，当 $\lambda < \lambda_c(\mu)$ 且 κ 足够大时，多尺度模型不会发生渗流。

2 证明

2.1 定理 1.1 的证明

本节中，我们证明主定理。我们需要以下两个命题。这个命题是对 [16], 的改编，唯一的区别在于，强度不是有限的，而是局部有限的。

命题 2.1. 设 $\kappa > 1$ 和 $\lambda < \lambda_c(\mu_\kappa|_{[0,1]})$。存在依赖于 κ 和 λ 的 $c_\kappa > 0$，使得

$$\mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa|_{(0,1]}}(\mathrm{B}_1 \longleftrightarrow \partial \mathrm{B}_l) \leq \exp(-c_\kappa l) \tag{2.1}$$

下述命题是证明次临界锐度的关键观察。

命题 2.2. 设 μ 满足假设 (1.2)。设 $\kappa \geq \kappa_0$。对于任意 $j \geq 1$、$l > 1$、$\lambda \geq 0$，我们有

$$\mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa|_{[0,\kappa^j]}}(\mathrm{B}_{\kappa^j} \longleftrightarrow \partial \mathrm{B}_{l\kappa^j}) \leq \mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa|_{(0,1]}}(\mathrm{B}_1 \longleftrightarrow \partial \mathrm{B}_l).$$

在证明这两个命题之前，我们先来证明主定理。

定理 *1.1* 的证明。令 $\lambda < \lambda_c(\mu_\kappa|_{(0,1]})$。令 $j, l \geq 1$。我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa}(\mathrm{B}_{l\kappa^j} \longleftrightarrow \partial \mathrm{B}_{2l\kappa^j}) \leq\ & \mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa|_{(0,\kappa^j]}}(\mathrm{B}_{l\kappa^j} \longleftrightarrow \partial \mathrm{B}_{2l\kappa^j}) \\ & + \mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa}\left(\exists (x,r) \in \eta_\kappa(\lambda) :\ r \geq \kappa^j,\ \mathrm{B}_r^x \cap \mathrm{B}_{2l\kappa^j} \neq \emptyset\right).\end{aligned} \tag{2.2}$$

我们先来估计不等式中的第二项:

$$\mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa}\left(\exists(x,r)\in\eta_\kappa(\lambda):\ r\geq\kappa^j,\ \mathrm{B}_r^x\cap\mathrm{B}_{2l\kappa^j}\neq\emptyset\right)=1-\exp(-\lambda dz\otimes\mu(E))$$

其中 $E:=\{(x,r):\mathbf{k}x\mathbf{k}_2\leq 2l\kappa^j+r,\ r\geq\kappa^j\}$。我们有

$$dz\otimes\mu(E)=\int_{r\geq\kappa^j}\alpha_d(2l\kappa^j+r)^d d\mu(r)\leq\alpha_d(4l)^d\int_{r\geq\kappa^j}r^d d\mu(r)$$

其中 α_d 是 $\mathbb{R}^d$中单位球的体积。由此可得

$$\mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa}\left(\exists(x,r)\in\eta_\kappa(\lambda):\ r\geq\kappa^j,\ \mathrm{B}_r^x\cap\mathrm{B}_{2l\kappa^j}\neq\emptyset\right)\leq\lambda\alpha_d(4l)^d\int_{r\geq\kappa^j}r^d d\mu(r). \tag{2.3}$$

现在来控制第一项。存在一个仅依赖于d 的常数 c_d，使得我们可以用至多 $c_d l^{d-1}$ 个半径为 κ^j 的球覆盖 $\partial\mathrm{B}_{l\kappa^j}$，这些球的中心位于$\partial\mathrm{B}_{l\kappa^j}$。由并集界可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa|_{(0,\kappa^j]}}(\mathrm{B}_{l\kappa^j}\longleftrightarrow\partial\mathrm{B}_{2l\kappa^j})&\leq c_d l^{d-1}\mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa|_{(0,\kappa^j]}}(\mathrm{B}_{\kappa^j}\longleftrightarrow\partial\mathrm{B}_{l\kappa^j})\\&\leq c_d l^{d-1}\exp(-c_\kappa l)\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中，最后一个不等式用到了命题 2.2 和命题 2.1。结合不等式 (2.2)、(2.3) 和 (2.4)，可得

$$\mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa}(\mathrm{B}_{l\kappa^j}\longleftrightarrow\partial\mathrm{B}_{2l\kappa^j})\leq c_d l^{d-1}\exp(-c_\kappa l)+\lambda\alpha_d(4l)^d\int_{r\geq\kappa^j}r^d d\mu(r).$$

设 $\varepsilon>0$。我们先选取足够大的 l，使其仅依赖于 c_κ 和 ε；然后选取足够大的 j，使其依赖于 κ、ε 和 l，从而

$$\mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa}(\mathrm{B}_{l\kappa^j}\longleftrightarrow\partial\mathrm{B}_{2l\kappa^j})\leq\varepsilon$$

其中回忆一下，由于 μ 具有有限的 d 阶矩

$$\lim_{j\to\infty}\int_{r\geq\kappa^j}r^d d\mu(r)=0.$$

由此可得

$$\inf_{r>0}\mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa}(\mathrm{B}_r\longleftrightarrow\partial\mathrm{B}_{2r})=0$$

且 $\lambda\leq\lambda_c(\mu_\kappa)$。因此,

$$\widehat{\lambda}_c(\mu_\kappa)\geq\lambda_c(\mu_\kappa|_{(0,1]})\geq\lambda_c(\mu_\kappa).$$

结果由以下事实得出: $\lambda_c(\mu_\kappa)\leq\lambda_c(\mu_\kappa)$。 □

2.2 命题 2.1 和命题 2.2 的证明

设 $m>0$。令 h_m 为按 m 进行的收缩，即 $h_m(x):=x/m$，其中 $x\in\mathbb{R}$。令

$$\mathcal{T}_m\mu:=m^d h_m*\mu$$

其中，$h_m*\mu$ 是 μ 在 h_m下的推前测度。我们需要以下引理，它刻画了空间收缩后的泊松点过程的分布。

引理 2.3. 设 $m > 0$ 和 $\lambda > 0$。设 ν 是 $\mathbb{R}_+$上的一个分布。设 η 是强度为 $\lambda dz \otimes \nu$ 的泊松点过程。那么， η/m 是强度为 $\lambda dz \otimes \mathcal{T}_m\nu$的泊松点过程。

由此引理，我们可以推得以下直接推论。

推论 2.4. 令 $\kappa \geq 1$。我们有

$$\mu_\kappa = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{T}_{\kappa^j}\mu|_{[1,\kappa]}.$$

引理 *2.3* 的证明。 显然， η/m 仍然是一个泊松点过程，我们只需证明其强度为 $\lambda dz \otimes \mathrm{T}_m\nu$。 令 $E \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$。 我们断言

$$(dz \otimes \nu)(mE) = (dz \otimes \mathcal{T}_m\nu)(E). \tag{2.5}$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned}(dz \otimes \nu)(mE) = \int_{(z,r)\in mE} dzd\nu(r) &= \int_{(mz,mr)\in mE} m^d dzd\nu(r/m) \\ &= \int_{(z,r)\in E} dzd\mathcal{T}_m\nu(r) = (dz \otimes \mathcal{T}_m\nu)(E).\end{aligned}$$

□

得益于推论 2.4，我们现在可以证明命题 2.2。

命题 *2.2* 的证明。 得益于引理 2.3，对于 $l > 1$ 和 $j \geq 0$，我们有

$$\mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa|_{(0,\kappa^j]}}(\mathrm{B}_{\kappa^j} \longleftrightarrow \partial\mathrm{B}_{l\kappa^j}) = \mathbb{P}_{\lambda,\mathcal{T}_{\kappa^j}\mu_\kappa|_{(0,\kappa^j]}}(\mathrm{B}_1 \longleftrightarrow \partial\mathrm{B}_l).$$

为完成证明，我们来证明以下不等式

$$\mathbb{P}_{\lambda,\mathcal{T}_{\kappa^j}\mu_\kappa|_{(0,\kappa^j]}}(\mathrm{B}_1 \longleftrightarrow \partial\mathrm{B}_l) \leq \mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa|_{(0,1]}}(\mathrm{B}_1 \longleftrightarrow \partial\mathrm{B}_l).$$

利用推论 2.4，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\kappa^j}\mu_\kappa|_{(0,\kappa^j]} &= \mathcal{T}_{\kappa^j}\mu|_{[1,\kappa^j]} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{T}_{\kappa^j}\mathcal{T}_{\kappa^k}\mu|_{[1,\kappa]} \\ &= \sum_{k=1}^{j} \mathcal{T}_{\kappa^k}\mathcal{T}_{\kappa^{j-k}}\mu|_{[\kappa^{j-k},\kappa^{j-k+1}]} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathcal{T}_{\kappa^k}\mu|_{[1,\kappa]}\end{aligned}$$

我们来证明，对于任意 $k \geq 1$ $\mathrm{T}_{\kappa^k}\mu|_{[\kappa^k,\kappa^{k+1}]} \preceq \mu|_{[1,\kappa]}$ ，其中我们记 $\mu \succeq \nu$，当 μ 随机占优 ν （对于每个 $r > 0$，我们有 $\mu([r,+\infty))$ $\geq \nu([r,+\infty))$)。令 κ_0 如假设 1.2 中所述。令 $\kappa \geq \kappa_0$。根据假设 (1.2)，对于 $r \in [1,\kappa]$，我们有

$$\mathcal{T}_{\kappa^k}\mu|_{[\kappa^k,\kappa^{k+1}]}([r,\kappa]) = \kappa^{dk}\mu([\kappa^k r, \kappa^{k+1}] \leq \mu([r,\kappa]).$$

由此可得

$$\mathcal{T}_{\kappa^j}\mu_\kappa|_{(0,\kappa^j]} \preceq \sum_{k=1}^{j} \mathcal{T}_{\kappa^k}\mu|_{[1,\kappa]} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathcal{T}_{\kappa^k}\mu|_{[1,\kappa]} = \mu_\kappa|_{(0,1]}.$$

因此，我们有

$$\mathbb{P}_{\lambda,\mathcal{T}_{\kappa^j}\mu_\kappa|_{(0,\kappa^j]}}(\mathrm{B}_1 \longleftrightarrow \partial \mathrm{B}_l) \leq \mathbb{P}_{\lambda,\mu_\kappa|_{(0,1]}}(\mathrm{B}_1 \longleftrightarrow \partial \mathrm{B}_l).$$

由此得证。 □

最后，我们说明如何将 Ziesche [16] 的证明推广到 σ-有限测度的一般情形（命题 2.1）。

命题 *2.1* 的证明概要。 首先注意， $\lambda ds \otimes \mu_\kappa$ 是 s-有限测度，定义在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ 上（因此也是 σ-有限的），也就是说，它可以写成有限测度的可数和。Mecke 方程（见 [13] 中的定理 4.1）和 Margulis-Russo 公式（见 [12]）对于 s-有限的强度测度均成立。用 $\mathrm{B}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 的博雷尔子集。对于满足 $\mathrm{B}_1 \subset S$ 的每个 $S \in \mathrm{B}(\mathbb{R}^d)$，我们定义

$$\varphi_\lambda(S) := \lambda \int_{r\in(0,1]} \int_{z\in\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\mathrm{B}_r^z \cap \partial S \neq \emptyset}\, \mathbb{P}_{\lambda,\mu|_{(0,1]}} \left(\mathrm{B}_1 \overset{\mathcal{O}(\{(w,s)\in\eta : \mathrm{B}_s^w \subset S\})}{\longleftrightarrow} \mathrm{B}_r^z \right) dz\, d\mu_\kappa(r). \tag{2.6}$$

这对应于与 S 的边界相交且在 S 内与 B_1 连通的开球的期望数量。Ziesche 的论证在此情形下仍然成立；特别是，当 $\lambda < \lambda_c(\mu_\kappa|_{[0,1]})$ 时，存在 $S \in \mathrm{B}(\mathbb{R}^d)$，使得 $\mathrm{B}_1 \subset S$ 且 $\varphi_\lambda(S) < 1$。因此，我们得出存在依赖于 κ 和 λ 的 $c_\kappa > 0$，使得不等式 (2.1) 成立。

□

致谢 作者感谢 Vincent Tassion 富有成效的讨论，这些讨论促成了本项目的启动。本项目获得了欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟地平线 2020 研究与创新计划提供的资助（资助协议编号 851565）。

参考文献

[1] Daniel Ahlberg、Vincent Tassion 和 Augusto Teixeira。在 $\mathbb{R}^2$ 中连续渗流相变的锐性。《概率论及相关领域》，172(1-2):525–581，2018年。[2] S. R. Broadbent 和 J. M. Hammersley。渗流过程。I. 晶体与迷宫。《剑桥哲学学会会刊》，53:629–641，1957年。[3] Barbara Dembin 和 Vincent Tassion。泊松布尔渗流的近乎锐性，2022年。[4] Hugo Duminil-Copin、Aran Raoufi 和 Vincent Tassion。 d维泊松–布尔渗流的亚临界相及其空集。《亨利·勒贝格年刊》，3:677–700，2020年。[5] Hugo Duminil-Copin 和 Vincent Tassion。伯努利渗流与伊辛模型相变锐性的新证明。《数学物理通讯》，343(2):725–745，2016年。[6] E. N. Gilbert。随机平面网络。《工业与应用数学学会杂志》，9(4):533–543，1961年。

[7] Jean-Baptiste Gouéré。多尺度布尔模型中的渗流。*ALEA* 拉丁美洲概率与数理统计期刊，11(1):281–297，2014年。[8] Jean-Baptiste Gouéré。连续渗流泊松布尔模型中的亚临界区间。《概率年刊》，36(4):1209 – 1220，2008年。[9] Jean-Baptiste Gouéré。若干连续渗流模型中的亚临界区间。《应用概率年刊》，19(4):1292 – 1318，2009年。[10] Jean-Baptiste Gouéré 和 Marie Théret。连续渗流中若干亚临界性质的等价性。《伯努利》，25(4B):3714 – 3733，2019年。[11]Peter Hall。论连续渗流。《概率年刊》，13(4):1250 – 1266，1985年。[12]Günter Last。泊松过程的扰动分析。《伯努利》，20(2):486 – 513，2014年。[13] Günter Last 和 Mathew Penrose。《泊松过程讲义》。《数理统计学会教材》。剑桥大学出版社，2017年。[14] M. V. Menshikov、S. Yu. Popov 和 M. Vachkovskaia。分形渗流模型中补集的连通性。《概率论及相关领域》，119(2):176–186，2001年。[15] M. V. Menshikov、S. Yu. Popov 和 M. Vachkovskaia。具有无界缺陷的多尺度连续渗流模型。第34卷，第417–435页。2003年。第六届巴西概率学校（乌巴图巴，2002年）。[16] Sebastian Ziesche。 $\mathbb{R}^d$上连续渗流相变的锐性及临界强度下界。亨利·庞加莱研究所年刊：概率与统计，54(2):866 – 878，2018年。