arXiv:2301.01639v1 [math.PR] 4 Jan 2023

关于 Lamperti 变换与离散随机场的刻画

Marko Voutilainen*、Lauri Viitasaari†、Pauliina Ilmonen‡

2023年1月5日

摘要

本文通过涉及平稳增量场和自相似场的差分方程，对离散时间平稳场进行刻画。这揭示了平稳场、平稳增量场之间的联系，并通过 Lamperti 变换建立了它们与自相似场之间的联系。我们的工作自然推广了近期证明的、涵盖平稳过程情形的结果。

AMS 2010数学主题分类：60G60, 60G10, 60G18

关键词：随机场、平稳场、自相似场、Lamperti 变换、分数阶奥恩斯坦-乌伦贝克场

1 引言

平稳过程 $X=(X_t)_{t\in T}$ 在许多不同领域有着广泛的应用，也是当前的研究热点。类似地，自相似过程和平稳增量过程在科学的各个学科中也有许多应用。关于自相似过程的详细介绍，请参阅专著 [4]及其中的参考文献。

这三类过程彼此密切相关。事实上，Lamperti 早在 [8] 就指出，平稳过程与自相似过程之间存在一一对应关系。后来，这种联系被用于 [13]，以建立平稳过程与

*芬兰图尔库大学图尔库经济学院会计与金融系，FI-20014

†瑞典乌普萨拉大学数学系，邮政信箱 480，751 06 乌普萨拉

‡阿尔托大学数学与系统分析系，邮政信箱 11100，FI-00076 阿尔托，芬兰

连续时间中的平稳增量过程（即$T = \mathbb{R}$）之间的关系，并通过朗之万方程加以描述

$$dX_t = -\theta X_t dt + dG_t, \tag{1}$$

其中，$\theta > 0$是一个参数，X是平稳的，而G具有平稳增量（以及某些其他性质）。最值得注意的是，代入$G = W$——布朗运动——即可得到著名的奥恩斯坦-乌伦贝克过程。后来，[15], 将联系式 (1) 推广到离散时间过程X，即$T = \mathbb{Z}$，并证明了其离散版本

$$\Delta X_t = -\theta X_{t-1} + \Delta G_t \tag{2}$$

，同时研究了未知参数θ的估计。后来，[16] 和 [14], 给出了向量值版本，涵盖连续时间和离散时间两种情形，并涉及未知参数矩阵的估计。

与平稳过程类似，平稳场是随机对象的一个重要子类。在这种情况下，$X = (X_t)_{t\in T}$，其中$T = \mathbb{R}^N$对应连续时间，$T = \mathbb{Z}^N$对应离散时间（自然地，T可以是更一般的参数空间）。此外，在许多应用中，增量的自相似性和平稳性都是人们所期望的性质。然而，尽管在随机场的背景下，平稳性的概念基本保持不变，但当t是多维时，自相似性和增量平稳性的概念则变得更加复杂。对于场的自相似性概念，通常会引入分量自相似性，并考虑H-自相似性，其中H是一个N维向量，其分量为自相似指数，参见例如[11, 5]。在 [5] 中，作者证明了场的 Lamperti 定理的一个版本（连续时间情形），建立了平稳场与自相似场之间的联系。关于场的其他自相似性概念，参见例如 [3] 和 [1]。

由于增量的定义并不直观，场的平稳增量概念更加复杂。一种方法是考虑矩形增量，即在N维矩形上取增量。关于高斯自相似场和高斯矩形增量场的研究，同样是在连续时间情形下进行的，例如见[10] 和 [9]。

本文将 [15] 中给出的刻画 (2) 推广到离散时间场，建立平稳场、自相似场和平稳增量场之间的联系。更具体地说，我们给出如下类型的刻画（见定理 2.20）

$$X_t = \langle \hat{\Theta}, \hat{X}_t^- \rangle + \Delta_t G.$$

ˆ ˆ 这里， Θ 是参数向量，X_t^- 是由不同坐标方向上的前值组成的“前值”向量。我们的增量概念 $\Delta_t G$ 对应于 $[10]$, 的平稳矩形增量概念，参见注记 2.9。因此，与 $[13, 15]$ 中的过程情形完全相同，我们得到了平稳场、平稳矩形增量场和自相似场之间的对应关系。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍并证明我们的主要结果。我们在第 2.1 节介绍符号和主要定义，并在第 2.2 节陈述主要结果及其证明。第 2.3 节简要说明如何利用我们的刻画来构造离散时间分数阶 Ornstein-Uhlenbeck 场，从而推广 $[13]$ 的（广义）Ornstein-Uhlenbeck 过程的概念。最后，我们在第 3 节总结全文并讨论未来研究方向，尤其是如何拓展至连续时间参数空间和统计推断。

2 平稳、自相似和平稳增量场之间的联系

2.1 预备知识与符号

首先介绍一些定义和符号。

定义 2.1（平稳性）。若随机场 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}^N}$ 满足

$$(X_{t+s})_{t\in\mathbb{Z}^N} \overset{law}{=} (X_t)_{t\in\mathbb{Z}^N}$$

对每个 $s \in \mathbb{Z}^N$，在有限维分布意义下均成立。

定义 2.2（自相似性）。设 $Y = (Y_{e^t})_{t\in\mathbb{Z}^N} = (Y_{e^{t_1},\ldots,e^{t_N}})_{t\in\mathbb{Z}^N}$ 是一个随机场。此外，设 $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N) \in (0, \infty)^N$ 是一个正多重指标。如果

$$(Y_{e^{t+s}})_{t\in\mathbb{Z}^N} \overset{law}{=} (e^{\langle s,\Theta\rangle} Y_{e^t})_{t\in\mathbb{Z}^N}$$

对每个 $s \in \mathbb{Z}^N$ 都成立，其中 $\langle s, \Theta\rangle$ 是向量的标准内积，那么 Y 是一个 Θ-自相似随机场。

注记 2.3。定义 2.2 中引入指数项，是为了考虑场的离散特性。定义 2.2 与连续时间中的经典定义类似。关于单参数连续情形的定义，参见 *[8]*；关于单参数离散情形的定义，参见 *[13]*。

以下定义给出了我们所讨论情形中的 Lamperti 变换概念。

定义 2.4（Lamperti）。设 $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N) \in (0, \infty)^N$。离散随机场的 Lamperti 变换 $\mathcal{L}_\Theta$ 及其逆变换 $\mathcal{L}_\Theta^{-1}$ 定义如下：

$$(\mathcal{L}_\Theta X)_{e^t} = e^{\langle t, \Theta \rangle} X_t, \quad t \in \mathbb{Z}^N,$$
$$(\mathcal{L}_\Theta^{-1} Y)_t = e^{-\langle t, \Theta \rangle} Y_{e^t}, \quad t \in \mathbb{Z}^N.$$

注记 2.5。定义 2.2 和 2.4 中的公式与连续情形下的标准形式略有不同。对于随机场，分量自相似性的定义以及相应的 Lamperti 变换，连同自相似场与平稳场之间的一一对应关系，已在 *[5]* 中给出。相比之下，我们的定义是通过对标准形式进行变量替换得到的，从而确保应用变换时仍处于离散参数集内。

定义 2.6（增量）。场 $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^N}$ 在点 $t = (t_1, \ldots, t_N) \in \mathbb{Z}^N$ 处的方形增量 $\Delta_t X$ 定义如下：

$$\Delta_t X = \sum_{(i_1, \ldots, i_N) \in \{0,1\}^N} (-1)^{\sum_{l=1}^N i_l} X_{t_1 - i_1, \ldots, t_N - i_N}. \tag{3}$$

例 2.7。在特殊情形 $N = 2$ 下，我们有

$$\Delta_t X = X_{t_1, t_2} + X_{t_1 - 1, t_2 - 1} - X_{t_1 - 1, t_2} - X_{t_1, t_2 - 1}.$$

定义 2.8（平稳增量场）。若场 $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}^N}$ 的增量场 $(\Delta_t X)_{t \in \mathbb{Z}^N}$ 是平稳的，则称其具有平稳增量。也就是说

$$(\Delta_{t+s} X)_{t \in \mathbb{Z}^N} \overset{law}{=} (\Delta_t X)_{t \in \mathbb{Z}^N}$$

对于每个 $s \in \mathbb{Z}^N$，在有限维分布的意义下成立。

注记 2.9. *[10]* 中的作者提出了连续时间下严格平稳矩形增量的类似概念，其假设是任意矩形增量上的增量均具有平稳性。相比之下，在我们的定义中，我们考虑单位矩形上的平稳增量。然而，由于我们的指标空间 $t \in \mathbb{Z}^N$ 具有离散性质，可以证明，我们的定义等价于假设任意（离散）矩形增量上的增量均具有平稳性。

在多参数情形下，我们还需要一个并不那么容易定义的前值概念。

定义 2.10（前值）。场 $X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}^N}$ 在点 $t=(t_1,\dots,t_N)\in\mathbb{Z}^N$ 处的前值为

$$X_t^- = X_t - \Delta_t X = \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_N)\in\{0,1\}^N \\ (i_1,\dots,i_N)\neq \mathbf{0}}} (-1)^{1+\sum_{l=1}^N i_l} X_{t_1-i_1,\dots,t_N-i_N}.$$

注记 2.11。请注意，在前值的定义中，我们考虑了式 (3) 中至少有一个坐标方向上的指标较小的项。事实上，在二维情形下，我们有

$$\Delta_t X = X_{t_1,t_2} + X_{t_1-1,t_2-1} - X_{t_1-1,t_2} - X_{t_1,t_2-1}$$

而前值为

$$X_t^- = X_{t_1-1,t_2} + X_{t_1,t_2-1} - X_{t_1-1,t_2-1}.$$

定义 2.12（内积 $\langle \hat{\Theta}, \hat{X}_t^- \rangle$）。设 $\Theta=(\theta_1,\dots,\theta_N)\in(0,\infty)^N$ 和 $X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}^N}$ 为场。我们定义长度为 2^N-1 的向量 $\hat{\Theta}$ 和 $\hat{X}_t^-$，其元素分别具有以下形式

$$(-1)^{1+\sum_{l=1}^N i_l} e^{-\langle i,\Theta\rangle} \quad and \quad X_{t_1-i_1,\dots,t_N-i_N},$$

分别为，其中 $i=(i_1,\dots,i_N)\in\{0,1\}^N, i\neq \mathbf{0}$. 那么这两个向量的内积为

$$\langle \hat{\Theta}, \hat{X}_t^- \rangle = \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_N)\in\{0,1\}^N \\ i\neq \mathbf{0}}} (-1)^{1+\sum_{l=1}^N i_l} e^{-\langle i,\Theta\rangle} X_{t_1-i_1,\dots,t_N-i_N}.$$

例 2.13. 在二维情形下，我们得到，对于 $\Theta=(\theta_1,\theta_2)\in(0,\infty)^2$ 和 $X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}^2}$，向量 $\hat{\Theta}$ 和 $\hat{X}_t^-$ 可表示为

$$\hat{\Theta} = (e^{-\theta_1}, e^{-\theta_2}, -e^{-\theta_1-\theta_2}) \quad and \quad \hat{X}_t^- = \begin{pmatrix} X_{t_1-1,t_2} \\ X_{t_1,t_2-1} \\ X_{t_1-1,t_2-1} \end{pmatrix}$$

并且我们有

$$\langle \hat{\Theta}, \hat{X}_t^- \rangle = e^{-\theta_1} X_{t_1-1,t_2} + e^{-\theta_2} X_{t_1,t_2-1} - e^{-\theta_1-\theta_2} X_{t_1-1,t_2-1}. \tag{4}$$

$\hat{}\,\hat{}$ 注记 2.14。向量 Θ 和 X_t^- 的元素除排列顺序外是唯一的。

定义 2.15（类 $\mathcal{G}_\Theta$）。设 $\Theta=(\theta_1,\dots,\theta_N)\in(0,\infty)^N$。设 $G=(G_t)_{t\in\mathbb{Z}^N}$ 是一个平稳增量场，对于所有满足 $\sum_{i=1}^N t_i\in\{0,-1,\dots,-N+1\}$ 的 t，均有 $G_t=0$。如果

$$\lim_{M_1\to\infty}\cdots\lim_{M_N\to\infty}\sum_{j_1=-M_1}^{t_1}\cdots\sum_{j_N=-M_N}^{t_N}e^{\sum_{l=1}^N j_l\theta_l}\Delta_{(j_1,\dots,j_N)}G \tag{5}$$

依概率收敛，从而对每个 $t=(t_1,\dots,t_N)\in\mathbb{Z}^N$ 定义一个几乎必然有限的随机变量，于是 $G\in\mathcal{G}_\Theta$。

注记 2.16. 事实证明，(5) 中极限的次序无关紧要，按任意次序排列都会收敛到同一个极限随机变量，而该变量恰为平稳场 X_t，参见定理 2.28 的证明。

注记 2.17. 条件 $G_t=0$ 对所有满足 $\sum_{i=1}^N t_i\in\{0,-1,\dots,-N+1\}$ 的 t 成立，颇为特殊；它实质上意味着 G 必须沿某些 $N-1$ 维平面的离散点消失。然而，刻画并不预先要求这一条件，但事实证明该条件成立，而且要得到表示的唯一性也需要这一条件，参见定理 2.20 和注记 2.29。

注 2.18。注意，如果 $G\in L^1$（或 $\Delta G\in L^1$），那么对于每个 Θ，都有 $G\in\mathcal{G}_\Theta$。事实上，这可以从以下内容看出

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big|\sum_{j_1=-\infty}^{t_1}\cdots\sum_{j_N=-\infty}^{t_N}e^{\sum_{l=1}^N j_l\theta_l}\Delta_{(j_1,\dots,j_N)}G\Big|\\
&\le\sum_{j_1=-\infty}^{t_1}\cdots\sum_{j_N=-\infty}^{t_N}e^{\sum_{l=1}^N j_l\theta_l}\mathbb{E}\big|\Delta_{(j_1,\dots,j_N)}G\big|\\
&=\sum_{j_1=-\infty}^{t_1}\cdots\sum_{j_N=-\infty}^{t_N}e^{\sum_{l=1}^N j_l\theta_l}\mathbb{E}\big|\Delta_{(1,\dots,1)}G\big|\\
&\le\sum_{j_1=-\infty}^{t_1}\cdots\sum_{j_N=-\infty}^{t_N}e^{\sum_{l=1}^N j_l\theta_l}\sum_{(i_1,\dots,i_N)\in\{0,1\}^N}\mathbb{E}\big|G_{1-i_1,\dots,1-i_N}\big|.
\end{aligned}$$

例 2.19. 在二维情形下，我们有 $G\in\mathcal{G}_\Theta$ 对于 $\Theta=(\theta_1,\theta_2)\in(0,\infty)^2$，前提是 G 具有平稳增量，$G_{t,\,-t}=G_{t,\,-t-1}=0$ 且

$$\lim_{M_1\to\infty}\lim_{M_2\to\infty}\sum_{j_1=-M_1}^{t_1}\sum_{j_2=-M_2}^{t_2}e^{j_1\theta_1}e^{j_2\theta_2}\Delta_{(j_1,j_2)}G$$

作为几乎必然有限的随机变量存在。也就是说， G 具有平稳增量，并且将 $G_{t_1,\ t_2}$ 在线 $t_1 = -t_2$ 和 $t_1 = -t_2 - 1$上设为零。此类场的存在是我们主要结果的推论。

2.2 平稳场的 AR(1) 类型刻画

我们的主要结果如下，这是对 [15] 中给出的一维情形的自然推广。

定理 2.20. 设 $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N) \in (0, \infty)^N$。场 $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}^N}$ 平稳，当且仅当满足以下条件。

(i)

$$\lim_{m \to -\infty} e^{m\theta_j} X_{t_1, \dots, t_{j-1}, m, t_{j+1}, \dots, t_N} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

for every $j \in \{1, \dots, N\}$ *and* $t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_N \in \mathbb{Z}$.

(ii) 存在 $G = (G_t)_{t \in \mathbb{Z}^N} \in \mathcal{G}_\Theta$ ，使得

$$X_t = \langle \hat{\Theta}, \hat{X}_t^- \rangle + \Delta_t G \quad \textit{for every } t \in \mathbb{Z}^N, \tag{6}$$

^^其中 $\langle \Theta, X_t^- \rangle$ 由定义 2.12 给出。

此外，对于给定的 Θ，式 (6) 中的平稳增量场 $G \in \mathcal{G}_\Theta$ 是唯一的。

由此可直接得到二维情形下的如下版本。

推论 2.21. 设 $\Theta = (\theta_1, \theta_2) \in (0, \infty)^2$。场 $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ 是平稳的，当且仅当满足以下条件。

(i)

$$\lim_{m \to -\infty} e^{m\theta_2} X_{t_1, m} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \textit{and} \quad \lim_{m \to -\infty} e^{m\theta_1} X_{m, t_2} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

对每个 t_1 和 t_2。

(ii) 存在 $G = (G_t)_{t \in \mathbb{Z}^2} \in \mathcal{G}_\Theta$ ，使得

$$X_t = \langle \hat{\Theta}, \hat{X}_t^- \rangle + \Delta_t G \quad \textit{for every } t \in \mathbb{Z}^2, \tag{7}$$

^^其中 $\langle \Theta, X_t^- \rangle$ 由式 (4) 给出。

（7）中的平稳增量场 $G \in \mathcal{G}_\Theta$ 是唯一的。

定理 2.20 的证明分为一系列引理和辅助定理。我们先给出以下结果，它是 Lamperti 定理的一个版本。

定理 2.22. 若 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}^N}$ 是平稳的，则 $(\mathcal{L}_\Theta X)_{e^t}$ 是 Θ-自相似的。反之，若 $Y = (Y_{e^t})_{t\in\mathbb{Z}^N}$ 是 Θ-自相似的，则 $(\mathcal{L}_\Theta^{-1} Y)_t$ 是平稳的。

证明。首先，假设 X 是平稳的。令 $Y_{e^t} = (\mathcal{L}_\Theta X)_{e^t}$，并设 $n \in \mathbb{N}$。现在

$$\begin{aligned}(Y_{e^{t_1+s}}, \dots, Y_{e^{t_n+s}}) &= (e^{\langle t_1+s,\Theta\rangle} X_{t_1+s}, \dots e^{\langle t_n+s,\Theta\rangle} X_{t_n+s}) \\ &\overset{\text{law}}{=} (e^{\langle s,\Theta\rangle} e^{\langle t_1,\Theta\rangle} X_{t_1}, \dots, e^{\langle s,\Theta\rangle} e^{\langle t_n,\Theta\rangle} X_{t_n}) \\ &= (e^{\langle s,\Theta\rangle} Y_{e^{t_1}}, \dots, e^{\langle s,\Theta\rangle} Y_{e^{t_n}}),\end{aligned}$$

这就证明了该结论的第一部分。接下来，假设 Y 是 Θ-自相似的。令 $X_t = (\mathcal{L}_\Theta^{-1} Y)_t$，并设 $n \in \mathbb{N}$。现在

$$\begin{aligned}(X_{t_1+s}, \dots, X_{t_n+s}) &= (e^{-\langle t_1+s,\Theta\rangle} Y_{e^{t_1+s}}, \dots, e^{-\langle t_n+s,\Theta\rangle} Y_{e^{t_n+s}}) \\ &\overset{\text{law}}{=} (e^{-\langle t_1,\Theta\rangle} Y_{e^{t_1}}, \dots, e^{-\langle t_n,\Theta\rangle} Y_{e^{t_n}}) \\ &= (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}),\end{aligned}$$

证明完毕。 □

下面的引理给出了我们的一项关键观察。

引理 2.23. 设 $(Y_{e^t})_{t\in\mathbb{Z}^N}$ 是 Θ-自相似的。令

$$\Delta_t Y = \sum_{(i_1,\dots,i_N)\in\{0,1\}^N} (-1)^{\sum_{l=1}^N i_l} Y_{e^{t_1-i_1},\dots,e^{t_N-i_N}}.$$

对于 $\sum_{l=1}^N t_l \geq 1$，我们定义

$$G_t = \sum_{k_1=1-t_2-\cdots-t_N}^{t_1} \sum_{k_2=1-k_1-t_3-\cdots-t_N}^{t_2} \cdots \sum_{k_N=1-k_1-\cdots-k_{N-1}}^{t_N} e^{-\langle k,\Theta\rangle} \Delta_k Y,$$

并且，对于 $\sum_{l=1}^N t_l \leq 0$，我们定义

$$G_t = (-1)^N \sum_{k_1=t_1+1}^{-t_2-\cdots-t_N-N+1} \sum_{k_2=t_2+1}^{-k_1-t_3-\cdots-t_N-N+2} \cdots \sum_{k_N=t_N+1}^{-k_1-\cdots-k_{N-1}} e^{-\langle k,\Theta\rangle} \Delta_k Y.$$

此处 $\langle k, \Theta\rangle$ 为标准内积，形如 $\sum_{s_2}^{s_1}$ with$s_1 < s_2$ 的求和被解释为空和。现在

(i) 对所有满足 $\sum_{l=1}^{N} t_l \in \{0, -1, \ldots, -N+1\}$ 的 t，$G_t = 0$；(ii) 对每个 $t \in \mathbb{Z}^N$，$\Delta_t G = e^{-\langle t,\ \Theta\rangle} \Delta_t Y$；(iii) $G =(G_t)_{t\in\mathbb{Z}^N}$ 是一个平稳增量场。

注 2.24. 可以发现，按上述方式定义的 G 满足 $G \in \mathcal{G}_\Theta$，另见下文引理 2.31。

例 2.25. 在二维情形下，对于 Θ-自相似 $(Y_{e^t})_{t\in\mathbb{Z}^2}$，记

$$\Delta_t Y = Y_{e^{t_1},e^{t_2}} - Y_{e^{t_1-1},e^{t_2}} - Y_{e^{t_1},e^{t_2-1}} + Y_{e^{t_1-1},e^{t_2-1}}.$$

定义为如下形式的场 $G = (G_t)_{t\in\mathbb{Z}^2}$

$$G_{t_1,t_2} = \begin{cases} \sum_{k_1=1-t_2}^{t_1} \sum_{k_2=1-k_1}^{t_2} e^{-\langle (k_1,k_2),\Theta\rangle} \Delta_k Y, & t_1 + t_2 \geq 1 \\ \sum_{k_1=t_1+1}^{-t_2-1} \sum_{k_2=t_2+1}^{-k_1} e^{-\langle (k_1,k_2),\Theta\rangle} \Delta_k Y, & t_1 + t_2 \leq 0, \end{cases}$$

属于类 $\mathcal{G}_\Theta$。此处，形如 $\sum_{s+1}^{s}$ 的求和视为空和。

引理 2.23 的证明基于以下几个附加引理，我们先给出它们的证明。第一个引理提供了一个关于二项式系数求和的辅助结果。尽管这个结果相当初等，我们仍为方便读者给出证明。

引理 2.26. 我们有以下恒等式：

$$\sum_{m=0}^{\frac{M-1}{2}} \binom{M}{2m} = 2^{M-1}, \quad \sum_{m=0}^{\frac{M-1}{2}} \binom{M}{2m+1} = 2^{M-1}, \qquad \textit{when } M \geq 1 \textit{ is odd.}$$

$$\sum_{m=0}^{\frac{M}{2}} \binom{M}{2m} = 2^{M-1}, \quad \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} \binom{M}{2m+1} = 2^{M-1}, \qquad \textit{when } M \geq 2 \textit{ is even.}$$

证明。在奇数情形下

$$\sum_{m=0}^{\frac{M-1}{2}} \binom{M}{2m} = \binom{M}{0} + \ldots + \binom{M}{M-1} \quad \text{and} \quad \sum_{m=0}^{\frac{M-1}{2}} \binom{M}{2m+1} = \binom{M}{1} + \ldots + \binom{M}{M}.$$

这些求和相等，因为 $\binom{M}{k} = \binom{M}{M-k}$。此外，

$$\sum_{m=0}^{\frac{M-1}{2}} \binom{M}{2m} + \sum_{m=0}^{\frac{M-1}{2}} \binom{M}{2m+1} = 2^M$$

至此完成第一种情形的证明。对于偶数情形，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1}\binom{M}{2m+1} &= \binom{M}{1}+\ldots+\binom{M}{M-1}\\ &= \binom{M-1}{0}+\binom{M-1}{1}+\cdots+\binom{M-1}{M-2}+\binom{M-1}{M-1}=2^{M-1}.\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{m=0}^{\frac{M}{2}}\binom{M}{2m}+\sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1}\binom{M}{2m+1}=2^M$$

即完成了证明。 □

下面的引理阐明了引理 2.23 中的场 G 是如何由自相似场 Y 构造而成的。

引理 2.27。（i）设 $\sum_{l=1}^{N} t_l \geq 1$。那么，项 $e^{-\langle j,\Theta\rangle}\Delta_j Y$ 属于引理 2.23 中定义 G_t 的求和，当且仅当

$$j_l \leq t_l \quad \textit{for every } l \textit{ and } \quad \sum_{l=1}^{N} j_l \geq 1.$$

（ii）设 $\sum_{l=1}^{N} t_l \leq -N$。那么，项 $e^{-\langle j,\Theta\rangle}\Delta_j Y$ 属于引理 2.23 中定义G_t 的求和，当且仅当

$$j_l \geq t_l + 1 \quad \textit{for every } l \textit{ and } \quad \sum_{l=1}^{N} j_l \leq 0.$$

证明。条目（i）：由定义 G_t 的求和中的上界可知，对于所有 l，都有 $j_l \leq t_l$。由最内层求和的下界可得 $j_N \geq 1 - j_1 - \cdots - j_{N-1}$。也就是说，$\sum_{l=1}^{N} j_l \geq 1$. 我们还注意到，定义 G_t 的求和中的其他下界给出了条件

$$j_{N-h} \geq 1 - \sum_{l=1}^{N-h-1} j_l - \sum_{l=N-h+1}^{N} t_l \quad \text{for every } h \in \{0,\ldots,N-1\}.$$

这些条件均得到满足，因为

$$\sum_{l=1}^{N-h} j_l + \sum_{N-h+1}^{N} t_l \geq \sum_{l=1}^{N} j_l \geq 1.$$

至此，第一个条目的证明完成。

条目（ii）：根据定义 G_t 的求和中的下界，显然对于所有 l，我们有 $j_l \geq t_l + 1$。根据最内层求和的上界，还可得 $j_N \leq -j_1 - \cdots - j_{N-1}$。也就是说，$\sum_{l=1}^{N} j_l \leq 0$.。我们还注意到，定义 G_t 的求和中的其他上界给出了以下条件

$$j_{N-h} \leq -\sum_{l=1}^{N-h-1} j_l - \sum_{l=N-h+1}^{N} t_l - N + (N-h) \quad \text{for every } h \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

这些条件均满足，因为

$$\sum_{l=1}^{N-h} j_l + \sum_{N-h+1}^{N} t_l \leq \sum_{l=1}^{N-h} j_l + \sum_{N-h+1}^{N} (j_l - 1) = \sum_{l=1}^{N} j_l - h \leq -h.$$

至此，第二个条目的证明完成，整个证明也随之完成。

□

引理 2.23 的证明。条目（i）：令 $\sum_{l=1}^{N} t_l \in \{0, -1, \ldots, -N+1\}$。那么

$$\sum_{l=2}^{N} t_l \in \{-t_1, -1 - t_1, \ldots, -N + 1 - t_1\}$$

并且，对于 G_t 定义中第一次求和的上界，有

$$-\sum_{l=2}^{N} t_l - N + 1 \in \{t_1 - N + 1, t_1 - N + 2, \ldots, t_1\}.$$

因此，G_t 是一个空和。

条目（ii）：回顾一下，对于所有满足 $\sum_{i=1}^{N} t_i \in \{0, -1, \ldots, -N+1\}$ 的 t，都有 $G_t = 0$

.

我们讨论 $\sum$ 的情形 为先看 $_{l=1} t_l \geq 1$。令 M 满足 $\sum$ $_{l=1}^{N} t_l - M = 1$. Then

$$\Delta_t G = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_N)\in\{0,1\}^N \\ \sum_{l=1}^{N} i_l \leq M}} (-1)^{\sum_{l=1}^{N} i_l} G_{t_1 - i_1, \ldots, t_N - i_N}. \tag{8}$$

根据引理 2.27，$\Delta_t G$ 由满足 $j_l \leq t_l$ 的项 $e^{-\langle j,\ \Theta\rangle}\Delta_j Y$ 组成，其中对每个 l 和 $\sum_{l=1}^{N} j_l \geq 1$ 都成立。令 m 为满足 $j_l = t_l$ 的指标 l 的数量。
假设 $m < N$。根据引理 2.27，$e^{-\langle j,\ \Theta\rangle}\Delta_j Y$属于以下求和的加项

(8) 中满足 $j_l \le t_l - i_l$ 对每个 l 都成立的项。也就是说，指标 i_l 中的 m 个为零，其余 $N-m$ 个指标可以为零或一。此外，

$$1 \le \sum_{l=1}^{N} j_l \le \sum_{l=1}^{N} t_l - (N-m)$$

从而

$$N - m \le \sum_{l=1}^{N} t_l - 1 = M. \tag{9}$$

现在，若 $N-m$ 为奇数，则由引理 2.26 和 (9)，(8) 中带正号的项数为，
$^{\Theta\rangle}\Delta_j Y$

$$\binom{N-m}{0} + \ldots + \binom{N-m}{\min\{N-m, M\} - 1} = \binom{N-m}{0} + \ldots + \binom{N-m}{N-m-1} = 2^{N-m-1}.$$

因此，(8) 中的项 $e^{-\langle j,\Theta\rangle}\Delta_j Y$ 相互抵消。
类似地，若 $N-m$ 为偶数，则带正号的项 $e^{-j\Theta}\Delta_j Y$ 的数量为

$$\binom{N-m}{0} + \cdots + \binom{N-m}{\min\{N-m, M\}} = \binom{N-m}{0} + \cdots + \binom{N-m}{N-m}.$$

同样，由引理 2.26，项 $e^{-\langle j,\Theta\rangle}\Delta_j Y$ 在 (8) 中相互抵消。
若 $m = N$，则我们有 $e^{-\langle j,\Theta\rangle}\Delta_j Y = e^{-\langle t,\Theta\rangle}\Delta_t Y$ 仅属于 (8) 中满足 $i = 0$ 的求和项。
因此我们证明了

$$\Delta_t G = e^{-\langle t,\Theta\rangle}\Delta_t Y \quad \text{for every } t \text{ such that } \sum_{l=1}^{N} t_l \ge 1.$$

这就证明了 $\sum_{l=1}^{N} t_l \ge 1$ 情形下的结论。

接下来，假设 $\sum_{l=1}^{N} t_l \le 0$，并令 M 满足 $\sum_{l=1}^{N} t_l - M = -N$。那么

$$\Delta_t G = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_N)\in\{0,1\}^N \\ \sum_{l=1}^{N} i_l \ge M}} (-1)^{\sum_{l=1}^{N} i_l} G_{t_1 - i_1, \ldots, t_N - i_N}. \tag{10}$$

根据引理 2.27，$\Delta_t G$ 由满足条件 $j_l \ge t_l$（对每个 l 和 $\sum_{l=1}^{N} j_l \le 0$）的项 $e^{-\langle j,}$
$^{\Theta\rangle}\Delta_j Y$ 构成。和之前一样，设 m 为满足 $j_l = t_l$ 的指标 l 的数量。若 $m < N$，则根据引理 2.27，$e^{-\langle j,\Theta\rangle}\Delta_j Y$ 属于（10）中对每个 l 均满足 $j_l \ge t_l - i_l + 1$ 的加项。
也就是说，指标 i_l 中有 m 个等于 1，其余 $N-m$ 个指标可以为 0 或 1。此外，

$$0 \ge \sum_{l=1}^{N} j_l \ge \sum_{l=1}^{N} t_l + (N-m) = M - m$$

从而得到 $m \geq M$ 和 $N-m \leq N-M$。若 $N-m$ 为奇数，则根据引理 2.26，（10）中符号为（-1）$^{N+m}$ 的项 $e^{-\langle j,\Theta\rangle}\Delta_j Y$ 的数量等于

$$\binom{N-m}{0} + \cdots + \binom{N-m}{N-m-1} = 2^{N-m-1}.$$

因此，在式 (10) 中各项相互抵消。同样，当 $N-m$ 为偶数时，各项也会相互抵消。最后，对于 $m=N$ 这种情况，我们注意到 $e^{-\langle j,\ \Theta\rangle}\Delta_j Y = e^{-\langle t,\ \Theta\rangle}\Delta_t Y$只出现在式 (10) 中满足 $i=1$ 的求和项中。对应的符号为 $(-1)^N(-1)^N = 1$。

总之，我们已经证明

$$\Delta_t G = e^{-\langle t,\Theta\rangle}\Delta_t Y \quad \text{for every } t \text{ such that } \sum_{l=1}^{N} t_l \leq 0.$$

这就完成了条目 (ii) 的证明。

条目 (iii)：对于 $s=(s_1,\ldots,s_N) \in \mathbb{Z}^N$，

$$\begin{aligned}
\Delta_{t+s} G &= e^{-\langle t+s,\Theta\rangle}\Delta_{t+s} Y \\
&= e^{-\langle t,\Theta\rangle} e^{-\langle s,\Theta\rangle} \sum_{(i_1,\ldots,i_N)\in\{0,1\}^N} (-1)^{\sum_{l=1}^N i_l} Y_{e^{t_1+s_1-i_1},\ldots,e^{t_N+s_N-i_N}} \\
&\overset{\text{law}}{=} e^{-\langle t,\Theta\rangle} \sum_{(i_1,\ldots,i_N)\in\{0,1\}^N} (-1)^{\sum_{l=1}^N i_l} Y_{e^{t_1-i_1},\ldots,e^{t_N-i_N}} \\
&= e^{-\langle t,\Theta\rangle}\Delta_t Y = \Delta_t G.
\end{aligned}$$

以类似方式处理多维分布，即完成了条目 (iii) 的证明。

□

现在我们可以证明三个结果：定理 2.28、定理 2.30 和引理 2.32；它们给出了本文的主要结果——定理 2.20。

定理 2.28。设 $\Theta=(\theta_1,\ldots,\theta_N) \in (0,\infty)^N$，且 $X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}^N}$ 是一个随机场。若对于某个 $G=(G_t)_{t\in\mathbb{Z}^N} \in \mathcal{G}_\Theta$，有

$$X_t = \langle \hat{\Theta}, \hat{X}_t^- \rangle + \Delta_t G \quad \textit{for every } t \in \mathbb{Z}^N, \tag{11}$$

and

$$\lim_{m\to-\infty} e^{m\theta_j} X_{t_1,\ldots,t_{j-1},m,t_{j+1},\ldots,t_N} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

对于每个 $j\in\{1,\ldots,N\}$ 和 $t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_N \in \mathbb{Z}$，则 $X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}^N}$是平稳的。

证明。记 $Z_t = \Delta_t G$ 和 $i = (i_1, \ldots, i_N)$。由 (11) 和定义 2.12，得到

$$X_t = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_N)\in\{0,1\}^N \\ i\neq \mathbf{0}}} (-1)^{1+\sum_{l=1}^N i_l} e^{-\langle i,\Theta\rangle} X_{t_1-i_1,\ldots,t_N-i_N} + Z_t,$$

由此可得

$$\begin{aligned} & X_t - \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_{N-1})\in\{0,1\}^{N-1} \\ i\neq \mathbf{0}}} (-1)^{1+\sum_{l=1}^{N-1} i_l} e^{-\langle (i_1,\ldots,i_{N-1},0),\Theta\rangle} X_{t_1-i_1,\ldots,t_{N-1}-i_{N-1},t_N} \\ &= \sum_{(i_1,\ldots,i_{N-1})\in\{0,1\}^{N-1}} (-1)^{\sum_{l=1}^{N-1} i_l} e^{-\langle (i_1,\ldots,i_{N-1},0),\Theta\rangle} X_{t_1-i_1,\ldots,t_{N-1}-i_{N-1},t_N} \\ &= \sum_{(i_1,\ldots,i_{N-1})\in\{0,1\}^{N-1}} (-1)^{\sum_{l=1}^{N-1} i_l} e^{-\langle (i_1,\ldots,i_{N-1},1),\Theta\rangle} X_{t_1-i_1,\ldots,t_{N-1}-i_{N-1},t_N-1} + Z_t. \end{aligned} \tag{12}$$

Set

$$Y_{t_1,\ldots,t_{N-1}}(t_N) = \sum_{(i_1,\ldots,i_{N-1})\in\{0,1\}^{N-1}} (-1)^{\sum_{l=1}^{N-1} i_l} e^{-\langle (i_1,\ldots,i_{N-1},0),\Theta\rangle} X_{t_1-i_1,\ldots,t_{N-1}-i_{N-1},t_N}.$$

然后，通过迭代递推方程 (12)，我们得到

$$\begin{aligned} Y_{t_1,\ldots,t_{N-1}}(t_N) =& e^{-\theta_N} Y_{t_1,\ldots,t_{N-1}}(t_N-1) + Z_t \\ =& e^{-(n+1)\theta_N} Y_{t_1,\ldots,t_{N-1}}(t_N-n-1) + \sum_{j_N=0}^{n} e^{-j_N\theta_N} Z_{t_1,\ldots,t_{N-1},t_N-j_N} \\ =& e^{-(n+1)\theta_N} Y_{t_1,\ldots,t_{N-1}}(t_N-n-1) + e^{-t_N\theta_N} \sum_{j_N=t_N-n}^{t_N} e^{j_N\theta_N} Z_{t_1,\ldots,t_{N-1},j_N}, \end{aligned}$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。上文

$$\begin{aligned} e^{-(n+1)\theta_N} Y_{t_1,\ldots,t_{N-1}}(t_N-n-1) &= e^{-t_N\theta_N} e^{(t_N-n-1)\theta_N} Y_{t_1,\ldots,t_{N-1}}(t_N-n-1) \\ &= e^{-t_N\theta_N} e^{m\theta_N} Y_{t_1,\ldots,t_{N-1}}(m) \end{aligned}$$

通过变量替换 $m = t_N - n - 1$。此外

$$\begin{aligned} & e^{m\theta_N} Y_{t_1,\ldots,t_{N-1}}(m) \\ =& e^{m\theta_N} \sum_{(i_1,\ldots,i_{N-1})\in\{0,1\}^{N-1}} (-1)^{\sum_{l=1}^{N-1} i_l} e^{-\langle (i_1,\ldots,i_{N-1},0),\Theta\rangle} X_{t_1-i_1,\ldots,t_{N-1}-i_{N-1},m}, \end{aligned}$$

根据假设，当 $m \to -\infty$时，它依概率收敛于零。因此

$$\begin{aligned}
&Y_{t_1,\ldots,t_{N-1}}(t_N) \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_{N-1})\in\{0,1\}^{N-1}} (-1)^{\sum_{l=1}^{N-1} i_l} e^{-\langle (i_1,\ldots,i_{N-1},0),\Theta\rangle} X_{t_1-i_1,\ldots,t_{N-1}-i_{N-1},t_N} \\
&= e^{-t_N\theta_N} \sum_{j_N=-\infty}^{t_N} e^{j_N\theta_N} Z_{t_1,\ldots,t_{N-1},j_N} =: Q_t^{(N)}.
\end{aligned}$$

在下列求和中，令 $(i_1,\ldots,i_{N-k-1}) \in \{0,1\}^{N-k-1}$ 和 $(i_1,\ldots,i_{N-k-2}) \in \{0,1\}^{N-k-2}$。我们通过归纳法进行证明，并假设对于某个 $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{(i_1,\ldots,i_{N-k-1})} (-1)^{\sum_{l=1}^{N-k-1} i_l} e^{-\langle (i_1,\ldots,i_{N-k-1},0,\ldots,0),\Theta\rangle} X_{t_1-i_1,\ldots,t_{N-k-1}-i_{N-k-1},t_{N-k},\ldots,t_N} \\
=&e^{-\sum_{l=0}^{k} t_{N-l}\theta_{N-l}} \sum_{j_{N-k}=-\infty}^{t_{N-k}} \cdots \sum_{j_N=-\infty}^{t_N} e^{\sum_{l=0}^{k} j_{N-l}\theta_{N-l}} Z_{t_1,\ldots,t_{N-k-1},j_{N-k},\ldots,j_N} =: Q_t^{(N-k)}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Now

$$\begin{aligned}
&\sum_{(i_1,\ldots,i_{N-k-2})} \Big((-1)^{\sum_{l=1}^{N-k-2} i_l} e^{-\langle (i_1,\ldots,i_{N-k-2},0,\ldots,0),\Theta\rangle} \\
&\cdot X_{t_1-i_1,\ldots,t_{N-k-2}-i_{N-k-2},t_{N-k-1},\ldots,t_N}\Big) \\
=& -\sum_{(i_1,\ldots,i_{N-k-2})} \Big((-1)^{1+\sum_{l=1}^{N-k-2} i_l} e^{-\langle (i_1,\ldots,i_{N-k-2},1,0,\ldots,0),\Theta\rangle} \\
&\cdot X_{t_1-i_1,\ldots,t_{N-k-2}-i_{N-k-2},t_{N-k-1}-1,\ldots,t_N}\Big) + Q_t^{(N-k)} \\
=& \sum_{(i_1,\ldots,i_{N-k-2})} \Big((-1)^{\sum_{l=1}^{N-k-2} i_l} e^{-\langle (i_1,\ldots,i_{N-k-2},1,0,\ldots,0),\Theta\rangle} \\
&\cdot X_{t_1-i_1,\ldots,t_{N-k-2}-i_{N-k-2},t_{N-k-1}-1,\ldots,t_N}\Big) + Q_t^{(N-k)}.
\end{aligned} \tag{14}$$

令 $t^* = (t_1,\ldots,t_{N-k-2},t_{N-k},\ldots,t_N)$，并定义

$$\begin{aligned}
&Y_{t^*}(t_{N-k-1}) \\
=& \sum_{(i_1,\ldots,i_{N-k-2})} (-1)^{\sum_{l=1}^{N-k-2} i_l} e^{-\langle (i_1,\ldots,i_{N-k-2},0,\ldots,0),\Theta\rangle} X_{t_1-i_1,\ldots,t_{N-k-2}-i_{N-k-2},t_{N-k-1},\ldots,t_N}.
\end{aligned}$$

由公式 (14) 可得

$$\begin{aligned}
Y_{t^*}(t_{N-k-1}) =& e^{-\theta_{N-k-1}} Y_{t^*}(t_{N-k-1}-1) + Q_t^{(N-k)} \\
=& e^{-(n+1)\theta_{N-k-1}} Y_{t^*}(t_{N-k-1}-n-1) \\
&+ \sum_{j_{N-k-1}=0}^{n} e^{-j_{N-k-1}\theta_{N-k-1}} Q^{(N-k)}_{t_1,\dots,t_{N-k-2},t_{N-k-1}-j_{N-k-1},t_{N-k},\dots,t_N} \\
=& e^{-(n+1)\theta_{N-k-1}} Y_{t^*}(t_{N-k-1}-n-1) \\
&+ e^{-t_{N-k-1}\theta_{N-k-1}} \sum_{j_{N-k-1}=t_{N-k-1}-n}^{t_{N-k-1}} e^{j_{N-k-1}\theta_{N-k-1}} Q^{(N-k)}_{t_1,\dots,t_{N-k-2},j_{N-k-1},t_{N-k},\dots,t_N}
\end{aligned}$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。由上

$$\begin{aligned}
e^{-(n+1)\theta_{N-k-1}} Y_{t^*}(t_{N-k-1}-n-1) =& e^{-t_{N-k-1}\theta_{N-k-1}} e^{(t_{N-k-1}-n-1)\theta_{N-k-1}} Y_{t^*}(t_{N-k-1}-n-1) \\
=& e^{-t_{N-k-1}\theta_{N-k-1}} e^{m\theta_{N-k-1}} Y_{t^*}(m)
\end{aligned}$$

通过变量替换 $m = t_{N-k-1} - n - 1$。与之前一样，当 $m \to \infty$ 时，该表达式依概率收敛于零。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
& Y_{t^*}(t_{N-k-1}) \\
=& \sum_{(i_1,\dots,i_{N-k-2})} \Big((-1)^{\sum_{l=1}^{N-k-2} i_l} e^{-\langle (i_1,\dots,i_{N-k-2},0,\dots,0),\Theta\rangle} \\
& \cdot X_{t_1-i_1,\dots,t_{N-k-2}-i_{N-k-2},t_{N-k-1},\dots,t_N} \Big) \\
=& e^{-t_{N-k-1}\theta_{N-k-1}} \sum_{j_{N-k-1}=-\infty}^{t_{N-k-1}} e^{j_{N-k-1}\theta_{N-k-1}} Q^{(N-k)}_{t_1,\dots,t_{N-k-2},j_{N-k-1},t_{N-k},\dots,t_N} \\
=& e^{-t_{N-k-1}\theta_{N-k-1}} \Big(\sum_{j_{N-k-1}=-\infty}^{t_{N-k-1}} e^{j_{N-k-1}\theta_{N-k-1}} e^{-\sum_{l=0}^{k} t_{N-l}\theta_{N-l}} \\
& \cdot \sum_{j_{N-k}=-\infty}^{t_{N-k}} \cdots \sum_{j_N=-\infty}^{t_N} e^{\sum_{l=0}^{k} j_{N-l}\theta_{N-l}} Z_{t_1,\dots,t_{N-k-2},j_{N-k-1},\dots,j_N} \Big) \\
=& e^{-\sum_{l=0}^{k+1} t_{N-l}\theta_{N-l}} \sum_{j_{N-k-1}=-\infty}^{t_{N-k-1}} \cdots \sum_{j_N=-\infty}^{t_N} e^{\sum_{l=0}^{k+1} j_{N-l}\theta_{N-l}} Z_{t_1,\dots,t_{N-k-2},j_{N-k-1},\dots,j_N},
\end{aligned}$$

这证明了归纳步骤。因此，在（13）中取 $k = N-2$ 得到

$$\begin{aligned}
& \sum_{i_1\in\{0,1\}} (-1)^{i_1} e^{-\langle (i_1,0,\dots,0),\Theta\rangle} X_{t_1-i_1,t_2,\dots,t_N} = X_t - e^{-\theta_1} X_{t_1-1,t_2,\dots,t_N} \\
&= e^{-\sum_{l=0}^{N-2} t_{N-l}\theta_{N-l}} \sum_{j_2=-\infty}^{t_2} \cdots \sum_{j_N=-\infty}^{t_N} e^{\sum_{l=0}^{N-2} j_{N-l}\theta_{N-l}} Z_{t_1,j_2,\dots,j_N} =: Q_t^{(2)}
\end{aligned}$$

并得到一个递推方程

$$X_t = e^{-\theta_1} X_{t_1-1,t_1,\ldots,t_N} + Q_t^{(2)}.$$

再次重复前面的步骤，我们得到

$$\begin{aligned}
X_t =& e^{-t_1\theta_1} \sum_{j_1=-\infty}^{t_1} e^{j_1\theta_1} Q^{(2)}_{j_1,t_2,\ldots,t_N} \\
=& e^{-t_1\theta_1} \sum_{j_1=-\infty}^{t_1} e^{j_1\theta_1} e^{-\sum_{l=0}^{N-2} t_{N-l}\theta_{N-l}} \sum_{j_2=-\infty}^{t_2} \cdots \sum_{j_N=-\infty}^{t_N} e^{\sum_{l=0}^{N-2} j_{N-l}\theta_{N-l}} Z_{j_1,j_2,\ldots,j_N} \\
=& e^{-\sum_{l=1}^{N} t_l\theta_l} \sum_{j_1=-\infty}^{t_1} \cdots \sum_{j_N=-\infty}^{t_N} e^{\sum_{l=1}^{N} j_l\theta_l} Z_{j_1,j_2,\ldots,j_N} \\
=& e^{-\sum_{l=1}^{N} t_l\theta_l} \sum_{j_1=-\infty}^{t_1} \cdots \sum_{j_N=-\infty}^{t_N} e^{\sum_{l=1}^{N} j_l\theta_l} \Delta_{j_1,j_2,\ldots,j_N} G,
\end{aligned}$$

由于 $G \in \mathcal{G}_\Theta$，这定义了一个几乎必然有限的随机变量。因此，接下来只需证明 X 是平稳的。为此，我们证明 X 的一维分布是平稳的。证明可直接推广至多维分布。设 $s = (s_1, \ldots, s_N) \in \mathbb{Z}^N$。注意到

$$X_t = \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_N=0}^{\infty} e^{-\sum_{l=1}^{N} j_l\theta_l} \Delta_{t_1-j_1,\ldots,t_N-j_N} G.$$

由于 G 是平稳增量场，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_1=0}^{M_1} \cdots \sum_{j_N=0}^{M_N} e^{-\sum_{l=1}^{N} j_l\theta_l} \Delta_{t_1+s_1-j_1,\ldots,t_N+s_N-j_N} G \\
\overset{\text{law}}{=}& \sum_{j_1=0}^{M_1} \cdots \sum_{j_N=0}^{M_N} e^{-\sum_{l=1}^{N} j_l\theta_l} \Delta_{t_1-j_1,\ldots,t_N-j_N} G
\end{aligned}$$

对任意 $M_1, \ldots, M_N \in \mathbb{N}$ 均成立。此外，由于 $G \in \mathcal{G}_\Theta$，两边的迭代极限均存在，因此极限在分布上相等。于是

$$\begin{aligned}
X_{t+s} =& \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_N=0}^{\infty} e^{-\sum_{l=1}^{N} j_l\theta_l} \Delta_{t_1+s_1-j_1,\ldots,t_N+s_N-j_N} G \\
\overset{\text{law}}{=}& \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_N=0}^{\infty} e^{-\sum_{l=1}^{N} j_l\theta_l} \Delta_{t_1-j_1,\ldots,t_N-j_N} G = X_t
\end{aligned}$$

因此，证明完毕。 □

注记 2.29。证明定理 2.28 时并未用到类 $\mathcal{G}_\Theta$ 的性质 $G_t = 0$，该性质对所有满足 $\sum_{i=1}^N t_i \in \{0, -1, \dots, -N+1\}$ 的 t 都成立。不过，为了确保特征方程（11）的解唯一，我们需要提出这一额外假设，参见引理 2.32。

定理 2.30. 设 $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N) \in (0, \infty)^N$。假设场 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}^N}$ 是平稳的。那么存在 $G = (G_t)_{t\in\mathbb{Z}^N} \in \mathcal{G}_\Theta$ 使得

$$X_t = \langle \hat{\Theta}, \hat{X}_t^- \rangle + \Delta_t G \quad for\ every\ t \in \mathbb{Z}^N.$$

证明。应用 Lamperti 变换可得

$$\Delta_t X = X_t - X_t^- = e^{-\langle t,\Theta\rangle} Y_{e^t} - X_t^- = e^{-\langle t,\Theta\rangle}(Y_{e^t} - \Delta_t Y) - X_t^- + e^{-\langle t,\Theta\rangle}\Delta_t Y.$$

因此

$$X_t = e^{-\langle t,\Theta\rangle}(Y_{e^t} - \Delta_t Y) + e^{-\langle t,\Theta\rangle}\Delta_t Y,$$

其中

$$Y_{e^t} - \Delta_t Y = \sum_{(i_1,\dots,i_N)\in\{0,1\}^N, i\neq \mathbf{0}} (-1)^{1+\sum_{l=1}^N i_l} Y_{e^{t_1-i_1},\dots,e^{t_N-i_N}}.$$

此外

$$\begin{aligned} e^{-\langle t,\Theta\rangle}(Y_{e^t} - \Delta_t Y) &= \sum_{(i_1,\dots,i_N)\in\{0,1\}^N, i\neq \mathbf{0}} (-1)^{1+\sum_{l=1}^N i_l} e^{-\langle t-i,\Theta\rangle} e^{-\langle i,\Theta\rangle} Y_{e^{t_1-i_1},\dots,e^{t_N-i_N}} \\ &= \sum_{(i_1,\dots,i_N)\in\{0,1\}^N, i\neq \mathbf{0}} (-1)^{1+\sum_{l=1}^N i_l} e^{-\langle i,\Theta\rangle} X_{t_1-i_1,\dots,t_N-i_N} = \langle \hat{\Theta}, \hat{X}_t^- \rangle, \end{aligned}$$

其中最后一个等式由 Lamperti 变换得到。设 G 为引理 2.23 中定义的 $\hat{}$ $\hat{}$ 场。则 $X_t = \langle \Theta, X_t^- \rangle + \Delta_t G$。此外，定理 2.28 的证明以及性质

$$\lim_{m\to-\infty} e^{m\theta_i} X_{t_1,\dots,t_{i-1},m,t_{i+1},\dots,t_N} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

对于每个 $i \in \{1, \dots, N\}$ 和 $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_N \in \mathbb{Z}$，都给出了表示

$$X_t = e^{-\sum_{l=1}^N t_l\theta_l} \sum_{j_1=-\infty}^{t_1} \cdots \sum_{j_N=-\infty}^{t_N} e^{\sum_{l=1}^N j_l\theta_l} \Delta_{(j_1,j_2,\dots,j_N)} G. \tag{15}$$

因此，$G \in \mathcal{G}_\Theta$。 □

作为一项推论，我们得到以下结果。

引理 2.31. 设 G 如引理 2.23 中所定义，则 $G \in \mathcal{G}_\Theta$。

证明。由引理 2.23，只需证明极限 (5) 存在。现在，由于 Y 是 Θ-自相似的，存在一个平稳的 X 使得 $Y = \mathcal{L}_\Theta X$。仿照定理 2.30 的证明，我们得到表示 (15)，其中 G 的定义与引理 2.23 中相同。因此，由定理 2.30 的证明可得 $G \in \mathcal{G}_\Theta$。 □

引理 2.32. 设 $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N) \in (0, \infty)^N$ 固定，则定理 2.28 和定理 2.30 中的平稳增量场 $G \in \mathcal{G}_\Theta$ 是唯一的。

证明。假设 $G, G' \in \mathcal{G}_\Theta$ 满足定理 2.28 和定理 2.30 的递推方程 (11)。于是，对所有 $t \in \mathbb{Z}^N$，都有 $\Delta_t G = \Delta_t G'$。剩下只需证明这意味着对所有 t，都有 $G_t = G'_t$，为此我们采用归纳法。

由于对所有满足 $\sum_{l=1}^N t_l \in \{0, -1, \ldots, -N+1\}$ 的 t，都有 $G_t = G'_t = 0$，我们可以作出归纳假设：存在 $s \in \mathbb{Z}$，使得对所有满足 $\sum_{l=1}^N t_l \in \{s, s-1, \ldots, s-N+1\}$ 的 t，都有 $G_t = G'_t$。为完成证明，剩下只需证明在条件 $\sum_{l=1}^N t_l = s+1$ 和 $\sum_{l=1}^N t_l = s-N$ 下，$G_t = G'_t$。设 $\sum_{l=1}^N t_l = s+1$。现在我们有

$$\begin{aligned}\Delta_t G &= \sum_{(i_1,\ldots,i_N)\in\{0,1\}^N} (-1)^{\sum_{l=1}^N i_l} G_{t_1-i_1,\ldots,t_N-i_N} \\ &= G_t + \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_N)\in\{0,1\}^N \\ i\neq \mathbf{0}}} (-1)^{\sum_{l=1}^N i_l} G_{t_1-i_1,\ldots,t_N-i_N},\end{aligned}$$

其中，对于 G 的指标，有

$$\sum_{l=1}^N (t_l - i_l) \in \{s, s-1, \ldots, s-N+1\}.$$

因此，根据归纳假设，$G_t = G'_t$ 对所有满足 $\sum_{l=1}^N t_l = s+1$ 的 t 都成立。接下来我们证明，对所有满足 $\sum_{l=1}^N t_l = s-N$ 的 t，$G_t = G'_t$ 都成立。令 $\sum_{l=1}^N t_l = s-N$。现在

$$\begin{aligned}&(-1)^N G_{t_1,\ldots,t_N} + \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_N)\in\{0,1\}^N \\ i\neq \mathbf{1}}} (-1)^{\sum_{l=1}^N i_l} G_{t_1+1-i_1,\ldots,t_N+1-i_N} \\ &= (-1)^N G'_{t_1,\ldots,t_N} + \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_N)\in\{0,1\}^N \\ i\neq \mathbf{1}}} (-1)^{\sum_{l=1}^N i_l} G'_{t_1+1-i_1,\ldots,t_N+1-i_N},\end{aligned}$$

其中

$$\sum_{l=1}^{N}(t_l+1-i_l)\in\{s,s-1,\ldots,s-N+1\}.$$

因此，根据归纳假设，对于所有满足 $\sum_{l=1}^{N}t_l=s-N$ 的 t，都有 $G_t=G'_t$。证明至此完成。 □

结合定理 2.28、定理 2.30 和引理 2.32，即可得到主定理定理 2.20 的证明。

2.3 Z^N 上的分数阶奥恩斯坦-乌伦贝克场

我们通过构造 $\mathbb{Z}^2$ 上的平稳分数阶奥恩斯坦-乌伦贝克场来说明我们的方法。为此，设 $G_{t_1,\ t_2}$ 是 (t_1,t_2) 上的离散分数阶高斯场 $\in\mathbb{N}^2$。通过嵌入到空间 $\mathbb{N}^2$，可以由连续时间类比构造离散分数阶高斯场。˜也就是说，设 X 是具有平稳矩形增量的自相似高斯场，且满足 $\mathbb{E}\tilde{X}^2(1,1)=1$。此类场的存在性已在 [10] 中研究。现在，我们可以通过考察 $\tilde{X}$ 在点 $(t_1,t_2)\in\mathbb{N}^2$ 处的取值，将 $\tilde{X}$ 嵌入 $\mathbb{N}^2$。根据 $\mathcal{G}_\Theta$ 的定义 2.15，可以通过设定 $G_{t,\ -t}=G_{t,\ -t-1}=0$ 并要求 G 按定义 2.8 的意义具有平稳增量，将 G 扩展到 $\mathbb{Z}^2$。由于 G 是高斯的，根据注 2.18 可知，对于任意 Θ，我们的场 $G=(G_t)_{t\in\mathbb{Z}^2}$ 都属于 $\mathcal{G}_\Theta$。由此可通过表示式 (6) 定义一类离散时间平稳第一类分数阶奥恩斯坦-乌伦贝克场。另一方面，利用 X 的自相似性˜，我们可以通过 Lamperti 变换定义一个平稳场，并根据定理 2.22，得到与另一种噪声 $G\in\mathcal{G}_\Theta$ 相对应的第二类平稳分数阶奥恩斯坦-乌伦贝克场。显然，这种方法可用于定义任意维数 $N\geq 2$ 下的分数阶奥恩斯坦-乌伦贝克场。

3 结论

本文通过具有平稳矩形增量的场，给出了离散平稳场的一种刻画。我们的刻画类似于 [15] 中给出的一参数情形。作为例子，我们将 [2] 和 [7]，中引入的分数阶奥恩斯坦-乌伦贝克过程的概念推广到了多参数情形。

我们这项研究自然有两个后续方向。首先，将刻画推广到连续参数空间 $t\in\mathbb{R}^N$会很有意思。不过在这种情况下，增量 Δ_tG 将被

微分取代，而当 $t \in \mathbb{R}^N$时，微分 $d_t G$ 的概念更为微妙。这是即将发表的一篇文章所探讨的主题。其次，参数估计在统计学中至关重要；在我们的设定中，这对应于参数 Θ的估计。分数阶奥恩斯坦-乌伦贝克过程领域对此已有大量研究，例如参见 [6, 12]及其中的参考文献。在多元时间序列这一更一般的背景下， [16]研究了参数估计。我们相信， [16] 中提出的思想和方法在我们的研究背景下也会有所助益。

参考文献

[1] Hermine Bierm´e、Mark M Meerschaert 和 Hans-Peter Scheffler。算子缩放稳定随机场。随机过程及其应用，117(3):312–332，2007。[2] P. Cheridito、H. Kawaguchi 和 M. M. Maejima。分数阶奥恩斯坦-乌伦贝克过程。《电子概率学报》，8(3):1–14，2003。[3] Marianne Clausel。满足同时算子缩放关系的高斯场。载于《分形及相关领域的最新进展》，第327–341页。Springer，2010。[4] Paul Embrechts。自相似过程。载于《普林斯顿应用数学丛书》。普林斯顿大学出版社，2002。[5] Marc G Genton、Olivier Perrin 和 Murad S Taqqu。随机场的自相似性与 Lamperti 变换。随机模型，23(3):397–411，2007。[6] Y. Hu 和 D. Nualart。分数阶奥恩斯坦-乌伦贝克过程的参数估计。《统计与概率通讯》，80(11–12):1030–1038，2010。[7] T. Kaarakka 和 P. Salminen。分数阶奥恩斯坦-乌伦贝克过程。《随机分析通讯》，5(1):121–133，2011。[8] J.W. Lamperti。半稳定过程。《美国数学会汇刊》，104:62–78，1962。[9] Vitalii Makogin 和 Yuliya Mishura。具有平稳矩形增量但并非分数布朗片的高斯自相似场示例。《随机分析与应用》，33(3):413–428，2015。

[10] Vitalii Makogin 和 Yuliya Mishura。矩形增量具有不同平稳性质的高斯多重自相似随机场。随机模型，35(4):391–428，2019。[11] Gennady Samorodnitsky、Murad S Taqqu 和 RW Linde。稳定非高斯随机过程：具有无限方差的随机模型。伦敦数学会通报，28(134):554–555，1996。[12] T. Sottinen 和 L. Viitasaari。含平稳增量高斯噪声的朗之万方程的参数估计。统计推断与随机过程，21(3):569–601，2018。[13] Lauri Viitasaari。通过朗之万方程和自相似过程表示平稳过程及平稳增量过程。《统计与概率快报》，115:45–53，2016。[14] Marko Voutilainen。多元离散时间与连续时间平稳过程的建模与估计。应用数学与统计学前沿，6，2020。[15] Marko Voutilainen、Lauri Viitasaari 和 Pauliina Ilmonen。关于严格平稳过程的模型拟合与估计。《现代随机：理论与应用》，4(4):381–406，2017。[16] Marko Voutilainen、Lauri Viitasaari、Pauliina Ilmonen、Soledad Torres 和 Ciprian Tudor。向量值广义奥恩斯坦–乌伦贝克过程：性质与参数估计。斯堪的纳维亚统计学杂志，49(3):992–1022，2022。