arXiv:2301.01646v1 [math.NT] 4 Jan 2023

乘法丢番图逼近中的马勒转移定理的类似定理

Oleg N. German

摘要

辛钦转移定理和戴森转移定理可以非常容易地由马勒转移定理推出。在乘法情形下，会出现一个障碍，使得无法直接从马勒定理推出乘法转移定理。为此需要一些额外的考量，例如按维数进行归纳。本文提出了一个马勒定理的类似定理，可由此直接推出乘法转移定理。

1 引言

考虑一个矩阵

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n1} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix}, \qquad \theta_{ij} \in \mathbb{R}, \quad m+n \geqslant 3,$$

以及一个线性方程组

$$\Theta\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

其变量为 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$、$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$。丢番图逼近理论中的一个主要问题是，当 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 分别独立地取遍 $\mathbb{Z}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$ 和 $\mathbb{Z}^n$ 时，向量 $\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}$ 能有多小。衡量向量“大小”的经典方法有几种。可以选取一种范数，例如上确界范数；也可以对其进行调整，将其变为所谓的加权范数；还可以考虑向量各坐标绝对值的乘积。在上述每种情形中，都存在转移定理——它们描述了 Θ 的逼近性质与 $\Theta^{\intercal}$的逼近性质之间的关系。这些定理通常用丢番图指数来表述；丢番图指数可能是刻画逼近性质最简单的量。

给定正整数 k 和 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{R}^k$，我们记

$$|\mathbf{z}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |z_i|, \qquad \Pi(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} |z_i|^{1/k}, \qquad \Pi'(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} \max\left(1, |z_i|\right)^{1/k}.$$

定义 1. 满足如下不等式组的实数 γ 的上确界，其中存在任意大的 t

$$|\mathbf{x}| \leqslant t, \qquad |\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leqslant t^{-\gamma} \tag{1}$$

存在一个满足 $\in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$ 且 $\mathbf{x}$ 非零的解 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$，称为Θ 的丢番图指数，记为 $\omega(\Theta)$。

定义 2. 对于实数 γ，若存在任意大的 t 使得不等式组

$$\Pi'(\mathbf{x}) \leqslant t, \qquad \Pi(\Theta\mathbf{x}-\mathbf{y}) \leqslant t^{-\gamma} \tag{2}$$

存在一个解 $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$，其中 $\mathbf{x}$ 非零，称为 Θ 的乘法丢番图指数，记作 $\omega_\times(\Theta)$。

对于每个 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$，我们有

$$\Pi(\mathbf{z}) \leqslant |\mathbf{z}|,$$

对于每个 $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^k$，我们有

$$|\mathbf{z}|^{1/k} \leqslant \Pi'(\mathbf{z}) \leqslant |\mathbf{z}|.$$

因此

$$m/n \leqslant \omega(\Theta) \leqslant \omega_\times(\Theta) \leqslant \begin{cases} m\omega(\Theta) & \text{for } n=1 \\ +\infty & \text{for } n \geqslant 2 \end{cases}, \tag{3}$$

其中，第一个不等式是闵可夫斯基凸体定理的推论。

不等式（3）可称为平凡不等式。上述转移定理给出了以下非平凡关系：

$$\omega(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{n\omega(\Theta)+n-1}{(m-1)\omega(\Theta)+m} \tag{4}$$

and

$$\omega_\times(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{n\omega_\times(\Theta)+n-1}{(m-1)\omega_\times(\Theta)+m}. \tag{5}$$

不等式（4）属于 Dyson [1], 不等式（5）由作者在 [2]中证明。可以注意到，这两个不等式看起来完全相同，但它们的证明有本质区别。Dyson 不等式几乎可直接由马勒转移定理推出（参见 [3], [4], 以及 [5], [6]），而乘法型指数的不等式则与马勒定理一同需要通过 n归纳法证明。粗略地说，这是因为泛函 $\Pi(\cdot)$ 和 $\Pi'(\cdot)$ 并不相同。

本文旨在寻找马勒转移定理的一个类似定理，使其能够像经典马勒定理推出（5）那样直接推出（4）。

本文其余部分安排如下。第 2 节陈述马勒定理，并说明如何由此推出 Dyson 不等式。第 3 节陈述并证明本文的主要结果。第 4 节则由我们的结果推出（5）。

2 马勒定理与 Dyson 不等式

Set

$$d = m+n.$$

马勒在其原始论文 [7], 中，以整数系数双线性形式表述了他著名的定理（另见 [3] 和 [6]））。在 [6] 中，马勒定理是通过伪复合平行多面体和对偶格来诠释的。我们认为，这种诠释更适用于实际应用。伪复合平行多面体这一概念由施密特在其著作中提出 [4], ，它是对马勒在其论文中所称的平行六面体的第 $(d-1)$ 复合体 [8], [9] 的一种简化。

定义 3. 设 $\eta_1, \dots, \eta_d$ 为正实数。考虑平行六面体

$$\mathcal{P} = \Big\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, |z_i| \leqslant \eta_i,\ i = 1, \dots, d \Big\}. \tag{6}$$

该平行六面体

$$\mathcal{P}^* = \Big\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, |z_i| \leqslant \frac{1}{\eta_i} \prod_{j=1}^{d} \eta_j,\ i = 1, \dots, d \Big\}$$

称为 $\mathcal{P}$的伪复合体。

提醒一下，给定 $\mathbb{R}^d$中的一个满秩格 Λ ，其对偶格 Λ^* 定义为

$$\Lambda^* = \big\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \,\big|\, \langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle \in \mathbb{Z} \text{ for each } \mathbf{z}' \in \Lambda \big\},$$

其中 $\langle \cdot 、 \cdot \rangle$ 表示内积。

下述版本的马勒转移定理见[6]。

定理 1. 设 $\mathbb{R}^d$ 中的满秩格 Λ 的行列式等于 1。设 $\mathcal{P}$ 是一个以原点为中心、面平行于坐标平面的平行六面体。那么

$$\mathcal{P}^* \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \implies c\mathcal{P} \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}$$

其中 $c = \big(\sqrt{d}\big)^{1/(d-1)}$。

定理 1实际上是对原始马勒定理的加强。马勒提出定理时使用的是 $d-1$ ，而不是 c。不过我们注意到，从丢番图指数的角度来看，任何常数（只依赖于 d ）都可以。

我们来说明如何从定理 1推出（4）。回想一下， $d = m + n$。

考虑这些格

$$\Lambda = \Lambda(\Theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \\ -\Theta & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d, \qquad \Lambda^* = \Lambda^*(\Theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \Theta^\intercal \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^d. \tag{7}$$

显然， Λ^* 是 Λ的对偶格。此外，对于每组正数 t、 γ、 s、 δ，定义平行六面体

$$\mathcal{P}(t, \gamma) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \begin{array}{ll} |z_j| \leqslant t, & j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leqslant t^{-\gamma}, & i = 1, \dots, n \end{array} \right\}, \tag{8}$$

$$\mathcal{Q}(s, \delta) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \begin{array}{ll} |z_j| \leqslant s^{-\delta}, & j = 1, \dots, m \\ |z_{m+i}| \leqslant s, & i = 1, \dots, n \end{array} \right\}. \tag{9}$$

Then

$$\begin{aligned} \omega(\Theta) &= \sup \left\{ \gamma \geqslant \frac{m}{n} \,\middle|\, \forall\, t_0 \in \mathbb{R}\ \ \exists\, t > t_0 :\ \mathcal{P}(t, \gamma) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\} \right\}, \\ \omega(\Theta^\intercal) &= \sup \left\{ \delta \geqslant \frac{n}{m} \,\middle|\, \forall\, s_0 \in \mathbb{R}\ \ \exists\, s > s_0 :\ \mathcal{Q}(s, \delta) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

如果 t, γ, s, δ 满足以下关系

$$t = s^{((n-1)\delta + n)/(d-1)}, \qquad \gamma = \frac{m\delta + m - 1}{(n-1)\delta + n}, \tag{11}$$

那么 $\mathcal{Q}(s,\delta)$ 是 $\mathcal{P}(t,\gamma)$ 的伪复合体，也就是说 $\mathcal{Q}(s,\delta) = \mathcal{P}(t,\gamma)^*$。由定理 1可得

$$\mathcal{Q}(s,\delta) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \implies c\mathcal{P}(t,\gamma) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}.$$

因此，鉴于（10），

$$\omega(\Theta^\intercal) \geqslant \delta \implies \omega(\Theta) \geqslant \gamma = \frac{m\delta + m - 1}{(n-1)\delta + n}.$$

因此，

$$\omega(\Theta) \geqslant \frac{\omega(m\Theta^\intercal) + m - 1}{(n-1)\omega(\Theta^\intercal) + n}.$$

将三元组（Θ，m，n）替换为（$\Theta^\intercal$，n，m），得到（4）。

3 马勒定理的类似定理

对于每个元组（$\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}$）$= (\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\mu_1,\ldots,\mu_n) \in \mathbb{R}_+^d$，我们定义平行六面体 $\mathcal{P}$（$\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}$）如下：

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) = \left\{ \mathbf{z} = (z_1,\ldots,z_d) \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \begin{array}{ll} |z_j| \leqslant \lambda_j, & j = 1,\ldots,m \\ |z_{m+i}| \leqslant \mu_i, & i = 1,\ldots,n \end{array} \right\}. \tag{12}$$

我们还设

$$\begin{aligned} \lambda_j^* &= \lambda_j^{-1} \prod_{k=1}^m \lambda_k \prod_{k=1}^n \mu_k, \qquad j = 1,\ldots,m, \\ \mu_i^* &= \mu_i^{-1} \prod_{k=1}^m \lambda_k \prod_{k=1}^n \mu_k, \qquad i = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{13}$$

那么，显然，$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})^* = \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$。最后，我们按如下方式定义元组 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$。将 $\boldsymbol{\lambda}$ 中的元素按升序排列：$\lambda_{j_1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{j_m}$。若 $\lambda_{j_1} \geqslant 1$，则令 $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$。若 $\lambda_{j_1} < 1$，则令 p 为满足 $\lambda_{j_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{j_p} < 1$ 的最大指标，并定义 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ 为

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{j_i} &= 1, && i = 1,\ldots,p, \\ \hat{\lambda}_{j_i} &= \lambda_{j_i}\left(\lambda_{j_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{j_k}\right)^{1/(m-p)}, && i = p+1,\ldots,m. \end{aligned} \tag{14}$$

以下定理是论文的主要结果。

定理 2. 令 Λ 和 Λ^* 由 (7)定义。任取元组 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \mathbb{R}_+^m$ 和 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\ldots,\mu_n) \in \mathbb{R}_+^n$。设

$$\Pi(\boldsymbol{\lambda}) \geqslant 1. \tag{15}$$

设 $\boldsymbol{\lambda}^*$，$\boldsymbol{\mu}^*$ 由 (13)定义，并设 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ 由 (14)定义。那么

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant m} \hat{\lambda}_j \geqslant 1, \qquad \Pi'(\hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \Pi(\hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \Pi(\boldsymbol{\lambda}), \tag{16}$$

and

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\mu}^*) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \implies c_1\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}},\boldsymbol{\mu}) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\} \tag{17}$$

其中有 $c_1 = \left(\sqrt{n+1}\right)^{1/n}$。

证明。不失一般性，我们可以假设

$$\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m.$$

ˆ若 $\lambda_1 \geqslant 1$，则 $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$，（16）显然成立，而（17）由定理 1 得出，因为 $c \leqslant c_1$。假设 $\lambda_1 < 1$。那么 p 定义正确，且 $p < m$，因为（15）成立。因此（16）立即得出。

考虑截断元组

$$\boldsymbol{\lambda}_\downarrow = (\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_m), \qquad \boldsymbol{\lambda}^*_\downarrow = (\lambda^*_{p+1}, \ldots, \lambda^*_m), \qquad \hat{\boldsymbol{\lambda}}_\downarrow = (\hat{\lambda}_{p+1}, \ldots, \hat{\lambda}_m).$$

Then

$$\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_\downarrow, \boldsymbol{\mu})^* = \left\{ (z_{p+1}, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}^{d-p} \;\middle|\; \begin{array}{ll} |z_j| \leqslant \varkappa \lambda^*_j, & j = p+1, \ldots, m \\ |z_{m+i}| \leqslant \mu^*_i, & i = 1, \ldots, n \end{array} \right\},$$

其中 $\varkappa = \big(\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_p\big)^{-1/(m-p)}$。由于 $\varkappa > 1$，我们有

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}^*_\downarrow, \boldsymbol{\mu}^*) \subset \mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_\downarrow, \boldsymbol{\mu})^*. \tag{18}$$

我们还考虑矩阵

$$\Theta_\downarrow = \begin{pmatrix} \theta_{1\,p+1} & \cdots & \theta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n\,p+1} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix}$$

由 Θ 删除前 p 列得到，以及格

$$\Lambda_\downarrow = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-p} & \\ -\Theta_\downarrow & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^{d-p}, \qquad \Lambda^*_\downarrow = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m-p} & \Theta^\intercal_\downarrow \\ & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbb{Z}^{d-p}.$$

我们作出以下两个关键观察：首先，集合

$$\Big\{ (0, \ldots, 0, z_{p+1}, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}^d \;\Big|\; (z_{p+1}, \ldots, z_d) \in \Lambda_\downarrow \Big\}$$

是 Λ 的子格；其次，集合

$$\Big\{ (0, \ldots, 0, z_{p+1}, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}^d \;\Big|\; (z_{p+1}, \ldots, z_d) \in \Lambda^*_\downarrow \Big\}$$

是向 $(z_{p+1}, \ldots, z_d)$ 坐标平面的正交投影。因此

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} &\implies \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}^*_\downarrow, \boldsymbol{\mu}^*) \cap \Lambda^*_\downarrow \neq \{\mathbf{0}\}, \\ \mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_\downarrow, \boldsymbol{\mu}) \cap \Lambda_\downarrow \neq \{\mathbf{0}\} &\implies \mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\mu}) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}. \end{aligned} \tag{19}$$

最后，由定理 1 可得

$$\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_\downarrow, \boldsymbol{\mu})^* \cap \Lambda^*_\downarrow \neq \{\mathbf{0}\} \implies c_2 \mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_\downarrow, \boldsymbol{\mu}) \cap \Lambda_\downarrow \neq \{\mathbf{0}\} \tag{20}$$

其中 $c_2 = \big(\sqrt{d-p}\big)^{1/(d-p-1)}$。综合（18）、（19）、（20），并考虑到 $c_2 \leqslant c_1$，我们得到如下推论链：

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} &\implies \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}^*_\downarrow, \boldsymbol{\mu}^*) \cap \Lambda^*_\downarrow \neq \{\mathbf{0}\} \implies \\ &\implies \mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_\downarrow, \boldsymbol{\mu})^* \cap \Lambda^*_\downarrow \neq \{\mathbf{0}\} \implies c_2 \mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_\downarrow, \boldsymbol{\mu}) \cap \Lambda_\downarrow \neq \{\mathbf{0}\} \implies \\ &\implies c_2 \mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\mu}) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\} \implies c_1 \mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\mu}) \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}, \end{aligned}$$

这就证明了（17）。 □

4 乘法型转移不等式的证明

下面说明如何由定理 2 推导出（5）。对每个正的 t、 γ、 s、 δ，定义以下两个平行六面体族：

$$\mathcal{F}(t,\gamma)=\Big\{\,\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})\;\Big|\;\Pi(\boldsymbol{\lambda})=t,\ \Pi(\boldsymbol{\mu})=t^{-\gamma},\ \min_{1\leqslant j\leqslant m}\lambda_j\geqslant 1\Big\},$$
$$\mathcal{G}(s,\delta)=\Big\{\,\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})\;\Big|\;\Pi(\boldsymbol{\lambda})=s^{-\delta},\ \Pi(\boldsymbol{\mu})=s,\ \min_{1\leqslant i\leqslant n}\mu_i\geqslant 1\Big\}.$$

每个满足条件的平行六面体 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$

$$\Pi'(\boldsymbol{\lambda})\leqslant t,\qquad \Pi(\boldsymbol{\mu})\leqslant t^{-\gamma} \tag{21}$$

包含于一个来自 $\mathcal{F}(t,\gamma$的平行六面体中。反过来，每个平行六面体 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$来自$\mathcal{F}(t,\gamma)$且满足（21）。类似地，每个满足条件的平行六面体 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$

$$\Pi(\boldsymbol{\lambda})\leqslant s^{-\delta},\qquad \Pi'(\boldsymbol{\mu})\leqslant s \tag{22}$$

包含于一个来自 $\mathcal{G}(s,\delta$的平行六面体中。反过来，每个平行六面体 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$来自 $\mathcal{G}(s,\delta)$且满足（22）。因此，对于乘法型指数，（10）的类似定理如下：

$$\begin{aligned}\omega_{\times}(\Theta)&=\sup\Big\{\gamma\geqslant\frac{m}{n}\;\Big|\;\forall\,t_0\in\mathbb{R}\ \ \exists\,t>t_0:\ \ \exists\mathcal{P}\in\mathcal{F}(t,\gamma):\ \ \mathcal{P}\cap\Lambda\neq\{\mathbf{0}\}\Big\},\\ \omega_{\times}(\Theta^{\intercal})&=\sup\Big\{\delta\geqslant\frac{n}{m}\;\Big|\;\forall\,s_0\in\mathbb{R}\ \ \exists\,s>s_0:\ \ \exists\mathcal{P}\in\mathcal{G}(s,\delta):\ \ \mathcal{P}\cap\Lambda^{*}\neq\{\mathbf{0}\}\Big\}.\end{aligned} \tag{23}$$

再次假设 t、 γ、 s、 δ 满足关系式（11）。考虑任意一个平行六面体$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$，满足 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}^{*},\boldsymbol{\mu}^{*})\in\mathcal{G}(s,\delta)$。那么

$$\Pi(\boldsymbol{\lambda})=t,\qquad \Pi(\boldsymbol{\mu})=t^{-\gamma}.$$

我们无法保证 $\boldsymbol{\lambda}$ 没有严格小于 1 的分量，因此一般来说 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})\in\mathcal{F}(t,\gamma)$并不成立。不过，如果 $t\geqslant 1$，那么根据定理2，确实有 $\hat{}\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})\in\mathcal{F}(t,\gamma)$，而且，

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}^{*},\boldsymbol{\mu}^{*})\cap\Lambda^{*}\neq\{\mathbf{0}\}\implies c_1\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{\lambda}},\boldsymbol{\mu})\cap\Lambda\neq\{\mathbf{0}\}.$$

因此，考虑到（23），

$$\omega_{\times}(\Theta^{\intercal})\geqslant\delta\implies\omega_{\times}(\Theta)\geqslant\gamma=\frac{m\delta+m-1}{(n-1)\delta+n}.$$

于是，

$$\omega_{\times}(\Theta)\geqslant\frac{\omega_{\times}(m\Theta^{\intercal})+m-1}{(n-1)\omega_{\times}(\Theta^{\intercal})+n}.$$

将三元组（Θ， m， n）替换为（$\Theta^{\intercal}$， n， m），得到（5）。

致谢。作者是理论物理与数学发展基金会“BASIS”举办的“JuniorLeader”竞赛的获奖者，并谨向其赞助方和评审团致谢。

参考文献

[1] F. J. Dyson 关于同时丢番图逼近。伦敦数学会会刊，(2) 49 (1947)，409–420。
[2] O. N. German 乘法丢番图指数的转移不等式。斯捷克洛夫数学研究所会刊，275 (2011)，216–228。[3] J. W. S. Cassels 丢番图逼近导论。剑桥大学出版社（1957）。[4] W. M. Schmidt 丢番图逼近。数学讲义，785，施普林格出版社（1980）。[5] O. N. German 关于丢番图指数与欣钦转移原理。莫斯科组合数论杂志，2:2 (2012)，22–51[6] O. N. German，K. G. Evdokimov 马勒转移定理的加强。数学消息，79:1 (2015)，60–73。[7] K. Mahler Ein ¨Ubertragungsprinzip f ¨ur lineare Ungleichungen。ˇCas. Peˇst. Mat. Fys.，68 (1939)，85–92。
[8] K. Mahler 关于复合凸体，I。伦敦数学会会刊（3），5 (1955)，358–379。
[9] K. Mahler 关于复合凸体，II。伦敦数学会会刊（3），5 (1955)，380–384。