arXiv:2301.01654v2 [math.NT] 5 Jan 2023

$\mathbf{GL}_3(\mathbb{F}_p)\backslash\mathbf{GL}_3(\mathbb{F}_q)/K$ 的塞尔伯格迹公式

DAKSH AGGARWAL、ASGHAR GHORBANPOUR、MASOUD KHALKHALI、JIYUAN LU、BALÁZS NÉMETH 和 C SHIJIA YU

摘要。本文证明了群 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 的塞尔伯格迹公式的一个离散类比。通过考虑有限域 $\mathbb{F}_q$ 的一个三次扩张，我们定义了上半空间的一个类比以及 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 在其上的作用。为了计算轨道和，我们明确地确定了上半空间中的双陪集空间和基本域。为了理解迹公式的谱侧，我们将关于 $G=\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 和$\Gamma=\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ 的诱导表示 $\rho=\mathrm{Ind}_\Gamma^G 1$ 分解。

目录

1. 引言 1 致谢 2 2. 有限上半空间 3 3. 迹公式 4 3.1. 预迹公式 4 3.2. 双陪集与基本域 6 4. 中心项与双曲项 7 4.1. 中心项 7 4.2. 第一类双曲项 7 4.3. 第二类双曲项 8 5. 抛物项 9 5.1. 第一类抛物项 9 5.2. 第二类抛物项 9 5.3. 第三类抛物项 10 6. 椭圆项 10 6.1. 第一类椭圆项 10 6.2. 第二类椭圆项 12 7. 示例 13 8. 表示的特征标 $\rho=$诱导表示 $\mathrm{Ind}_\Gamma^G 1$ $3\nmid n$ 14 9. 分解 ρ 当 2 时，15参考文献 22 10. 附录 A：基本域与轨道和 23

1. 引言

塞尔伯格迹公式 [7] 是过去一个世纪最负盛名的数学成果之一。在其最初的形式中，它将双曲曲面上的拉普拉斯算子的谱与该曲面上闭测地线的长度联系起来。它可以被视为傅里叶分析中著名的泊松求和公式的非阿贝尔推广，并已在许多领域得到广泛应用，例如数论和自守形式理论（见 Sarnak [6]）。

塞尔伯格迹公式研究的是可以表示为以下形式的双陪集的曲面： $\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$，其中 Γ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的离散子群。为高维矩阵群推导迹公式是一个自然的问题。引用 Dennis Hejhal 的话：“当然，在迹公式被写成 $\mathrm{SL}_4(\mathbb{Z})$ 的形式之前，我们实际上还不会真正理解它。” Dorothy Wallace [10] 已经推导出了 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 的迹公式的明确细节，但四维情形仍然神秘莫测。进一步的推广就是所谓的阿瑟–塞尔伯格迹公式 [3], ，它在朗兰兹纲领中发挥着重要作用。

离散空间（如图）也可以推导出塞尔伯格型迹公式。通过将一个 k正则图实现为无限 k正则树的商，Ahumada [1] 为k正则图找到了这样的公式。Audrey Terras [9]引入了有限上半平面的概念，将其作为庞加莱上半平面模型的有限域类比，其中复数域被有限域 $\mathbb{F}_q$的二次扩张所替代，$q = p^r$ 是素数幂。她利用这些上半平面构造了一个拉马努金图族 [5] ，并在 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)/K$ 上发展了一个表示论迹公式，其中 K 是 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ 的有限域类比。

本文旨在为 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 给出一个相应的迹公式。本文的主要结果如下。考虑预迹公式

$$\sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi,\rho)\,\mathrm{Tr}(\hat{f}(\pi)) = \sum_{\{\gamma\}\in C_\Gamma} \frac{|G_\gamma|}{|\Gamma_\gamma|} I_G(f,\gamma), \tag{1.1}$$

其中， G 是一个有限群， Γ 是 G 的子群， $\rho = \mathrm{Ind}_\Gamma^G 1$ 是 Γ的平凡表示的诱导表示，而 $I_G(f, \gamma)$ 是 γ处 f 的轨道和。这些术语将在第3节中定义，预迹公式的证明也将在那里重述。注意，（1.1）可以看作塞尔伯格迹公式 [7, 9]的表示论类比：左侧可以被视为谱侧，对 G 的不可约表示及其在 ρ中的重数求和；右侧则可以解释为几何侧，对 G中的共轭类求和。在本文中，为了获得有限上半空间的迹公式，我们取 $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 和 $\Gamma = \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$。此外， f： $G \to \mathbb{C}$ 被选为一个 K–双不变函数（K 是上述 p_0 的稳定子），即 $\forall k$、 $h \in K$ 以及 $\forall x \in G$，我们有 $f(kxh) = f(x)$。也可以将 f 视为 $G/K \simeq \mathbb{H}_q$ 上的函数，该函数在 K中元素的左乘下保持不变。

本文的组织如下。第2节中，我们通过考虑有限域 $\mathbb{F}_q$ 的三次扩张，为群 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 定义一个上半平面的类似对象，记作 $\mathbb{H}_q$。我们定义 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 在 $\mathbb{H}_q$ 上的作用，由此为离散迹公式奠定基础。第3节中，我们回顾有限群的标准预迹公式。第4至6节中，我们利用 [2] 中给出的 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 共轭类的显式描述，计算预迹公式 (3.4) 右侧的各项（即所谓的几何侧）。共轭类分为中心型、双曲型、抛物型和椭圆项。这些类型的项均得到了明确辨认。若能以更具概念性的方式理解这些计算，将会有所裨益。第7节中，我们给出若干简单例子，展示公式在预迹公式左侧已先验已知时的应用。第8至9节中，我们通过计算诱导表示 $\rho = \mathrm{Ind}_\Gamma^G 1$的特征标来计算预迹公式的左侧，进而在 $2, 3 \nmid n$ 的情形下求出其不可约表示分解。其他情形下的分解计算与此类似，但涉及更多情况，因此未收入本文的 arXiv 版本。如有需要，可另行索取。

致谢。 我们感谢菲尔兹研究所于2021年组织菲尔兹本科生暑期研究项目。Daksh Aggarwal、Jiyuan Lu、Balazs Németh 和 C Shijia Yu 在参与该项目期间开展了这篇论文的研究。该项目由 Masoud Khalkhali 和 Asghar Ghorbanpour 提出并指导。

2. 有限上半空间

为了将 Terras 的结果推广到 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 情形，我们首先必须讨论有限上半空间的推广。设 p 为素数，且 $q = p^n$ 为正整数 n。上半空间 $\mathbb{H}_q$ 的定义源于考虑 $\mathbb{F}_q$的三次扩张。该构造最早由 Martinez 于 [4]给出。这里我们针对 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 这一特殊情形对其进行明确描述。

引理 2.1. $\mathbb{F}_q$ 存在三次非剩余，当且仅当 $q \equiv 1 \pmod 3$。

证明。令 $q = p^n$。考虑立方映射 $x \mapsto x^3 : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{F}_q^\times$。此映射的核是子群$\mu_3$，由 $\mathbb{F}_q^\times$ 中的三次单位根组成。令 α 为 $\mathbb{F}_q^\times$的生成元。若 $q \equiv 1 \pmod 3$，则有 $\mu_3 = \{1, \alpha^{(q-1)/3}, \alpha^{2(q-1)/3}\}$，此时存在 $(q-1)/3$ 个三次剩余。否则，$\mu_3 = \{1\}$，因此 $\mathbb{F}_q^\times$中的每个元素都是三次剩余。□

从现在起，我们假设 $q \equiv 1 \pmod 3$。取一个三次非剩余 $\delta \in \mathbb{F}_q$，并考虑三次扩张 $\mathbb{F}_q\left(\sqrt[3]{\delta}\right) \simeq \mathbb{F}_{q^3}$。$\mathbb{F}_q\left(\sqrt[3]{\delta}\right)/\mathbb{F}_q$的一组基为 $\{1, \delta^{1/3}, \delta^{2/3}\}$。对于元素 α，我们用 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 表示其分量，即

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2\delta^{1/3} + \alpha_3\delta^{2/3}.$$

我们定义

$$\mathbb{H}_q = \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{F}_q(\sqrt[3]{\delta}) \times \mathbb{F}_q(\sqrt[3]{\delta}) : \begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix} \neq 0\right\}.$$

引理 2.2. 以下映射定义了 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 在 $\mathbb{H}_q$ 上的作用

$$\begin{bmatrix}a & b & c \\ d & e & f \\ r & s & t\end{bmatrix}(\alpha, \beta) = \left(\frac{a\alpha + b\beta + c}{r\alpha + s\beta + t}, \frac{d\alpha + e\beta + f}{r\alpha + s\beta + t}\right).$$

证明. 该作用与 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 中乘法相容，这是因为 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 作用于射影空间 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_{q^3})$。因此，我们需要验证该作用在 $\mathbb{H}_q$中封闭。这是一项常规验证，可参见附录 A。□

我们的特定点为 $p_0 = (\delta^{2/3}, \delta^{1/3}) \in \mathbb{H}_q$。$\mathbf{Aff}_3(\mathbb{F}_q) \leq \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 的作用在 $\mathbb{H}_q$上传递，其中

$$\mathrm{Aff}_3(\mathbb{F}_q) \coloneqq \left\{\begin{bmatrix}a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right\}.$$

利用此作用，我们计算得

$$K \coloneqq \mathrm{stab}(p_0) = \left\{\begin{bmatrix}a & c\delta & b\delta \\ b & a & c\delta \\ c & b & a\end{bmatrix}\right\}.$$

事实上，我们发现

$$K \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_q(\delta^{1/3})^\times : \begin{bmatrix}a & c\delta & b\delta \\ b & a & c\delta \\ c & b & a\end{bmatrix} \mapsto a + b\delta^{1/3} + c\delta^{2/3}.$$

此外，我们还有齐性空间 $\mathbb{H}_q \simeq \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)/K$。作为快速检验，请注意我们有$|\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)| = (q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2)$以及 $|K| = q^3 - 1$（由典范同构得到），因此我们应有 $|\mathbb{H}_q|$ 等于

$$\frac{(q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2)}{q^3-1} = (q^2-1)(q-1)q^3.$$

事实上，根据定义，我们有

$$|\mathbb{H}_q| = |\operatorname{GL}_2(\mathbb{F}_q)| \cdot q^2 = (q^2-1)(q^2-q)q^2 = (q^2-1)(q-1)q^3.$$

备注2.3。请注意，上述构造是 Terras [9] 所定义的有限上半平面的自然推广（这里 δ 是有限域 $\mathbb{F}_q$中的非平方数）：

$$H_q = \left\{ x + y\sqrt{\delta} : x, y \in \mathbb{F}_q, y \neq 0 \right\}.$$

条件 $y \neq 0$ 等价于 1 和 $x + y\sqrt{\delta}$是 $\mathbb{F}_q$上的 $\mathbb{F}_q\left(\sqrt{\delta}\right)$中的线性无关元素。

3. 迹公式

3.1. 预迹公式。我们的迹公式依赖于对一个已知结果——预迹公式——的解释。现在，我们推导预迹公式，并将其置于群 G =$\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 的背景下。预迹公式的核心思想是用两组不同的基计算某个特定算子的迹。我们可以如下构造该算子的相关信息：

设 G 是一个有限群， $\Gamma \leq G$ 是其子群。设 $f : G \to \mathbb{C}$ 是 G上的复值函数。对于表示 $\kappa : G \to \mathrm{GL}(V)$ G （其中 V是一个配备线性 G作用的有限维复向量空间），定义 f 在 κ 处的傅里叶变换如下：

$$\hat{f}(\kappa) = \sum_{g \in G} f(g)\kappa\left(g^{-1}\right).$$

ˆ 注意，傅里叶变换 $f(\kappa)$ 的值属于 End V。现在通过在两组不同的基下计算 ˆ $f(\rho)$ 的迹，并结合 $\rho = \operatorname{Ind}_\Gamma^G 1$，即可得到预迹公式。首先，我们可以将 ρ分解为 G 的不可约表示的直和，从而得到：

$$\operatorname{Tr}\left(\hat{f}(\rho)\right) = \sum_{\pi \in \hat{G}} m(\pi, \rho) \operatorname{Tr}\left(\hat{f}(\pi)\right). \tag{3.1}$$

ˆ这里， G 是 G 的不可约表示集合，而 $m(\pi, \rho)$ 是不可约表示 $\pi \in G$ 在 ρ中的重数。令

$$V = \{f : G \to \mathbb{C} \mid f(\gamma g) = f(g) \quad \forall \gamma \in \Gamma, g \in G\} = L^2(\Gamma \backslash G).$$

由于 G 通过右乘在线性地作用于 V 上，相应的表示恰好是$\rho = \operatorname{Ind}_\Gamma^G 1$。更具体地，对于 $\phi \in V$, g, $x \in G$ ，我们有

$$[\rho(g)\phi](x) = \phi(xg).$$

因此：

$$\left[\hat{f}(\rho)\phi\right](x) = \sum_{y \in G} f(y)\phi\left(xy^{-1}\right) = \sum_{u \in G} f\left(u^{-1}x\right)\phi(u).$$

此外，由于 ϕ 具有 Γ不变性，

$$\left[\hat{f}(\rho)\phi\right](x) = \sum_{y \in \Gamma \backslash G} \sum_{\gamma \in \Gamma} f\left(y^{-1}\gamma x\right)\phi(y).$$

ˆ 现在我们可以用另一种方式计算 $f(\rho)$的迹：考虑 V[1]的示性函数基$\{\delta_y\}_{y\in\Gamma\backslash G}$；相对于该基，ˆ $f(\rho)$由一个矩阵表示，其中对应于 $x,y\in\Gamma\backslash G$ 的元素为 $\sum_{\gamma\in\Gamma} f\left(y^{-1}\gamma x\right)$。因此，

$$\operatorname{Tr}\left[\hat{f}(\rho)\right]=\sum_{x\in\Gamma\backslash G}\sum_{\gamma\in\Gamma} f\left(x^{-1}\gamma x\right). \tag{3.2}$$

我们可以将右侧改写为对 G 中共轭类的求和。令：

$$\Gamma_\gamma=\left\{x\in\Gamma\,|\,x^{-1}\gamma x=\gamma\right\}=\text{centralizer of }\gamma\text{ in }\Gamma$$

$$G_\gamma=\left\{x\in G\,|\,x^{-1}\gamma x=\gamma\right\}=\text{centralizer of }\gamma\text{ in }G$$

$$\{\gamma\}=\left\{x^{-1}\gamma x\,|\,x\in G\right\}=\text{conjugacy class of }\gamma\text{ in }G$$

$$C_\Gamma=\text{set of conjugacy classes in }\Gamma.$$

注意，右陪集 $\Gamma_\gamma\backslash\Gamma$ 与 $\{\gamma\}$ 的元素之间存在一一对应关系，由 $\Gamma_\gamma x\mapsto x^{-1}\gamma x$ 给出。由于共轭类将 Γ 分割，我们可以将内层求和改写为：

$$\sum_{x\in\Gamma\backslash G}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma x)=\sum_{x\in\Gamma\backslash G}\sum_{\{\gamma\}\in C_\Gamma}\sum_{u\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma} f\left(x^{-1}u^{-1}\gamma u x\right).$$

令 $y=ux$，则我们可以将其改写为对右陪集 $y\in\Gamma_\gamma\backslash G$ 的求和：

$$\sum_{x\in\Gamma\backslash G}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma x)=\sum_{y\in\Gamma_\gamma\backslash G}\sum_{\{\gamma\}\in C_\Gamma} f(y^{-1}\gamma y).$$

注意到 $\Gamma_\gamma\le G_\gamma$，因此对于 $t\in\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma$ 和 $s\in G_\gamma\backslash G$，我们可以写成 $y=ts$：

$$\sum_{x\in\Gamma\backslash G}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma x)=\sum_{t\in\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma}\sum_{s\in G_\gamma\backslash G}\sum_{\{\gamma\}\in C_\Gamma} f\left(s^{-1}t^{-1}\gamma ts\right)=\sum_{\{\gamma\}\in C_\Gamma}\frac{|G_\gamma|}{|\Gamma_\gamma|}\sum_{s\in G_\gamma\backslash G} f(s^{-1}\gamma s). \tag{3.3}$$

定义 f 在 γ 处的轨道和 $I_G(f,\gamma)$ 为：

$$I_G(f,\gamma):=\sum_{s\in G_\gamma\backslash G} f(s^{-1}\gamma s).$$

预迹公式现在可由合并 (3.1)–(3.3) 得出：

$$\sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi,\rho)\operatorname{Tr}(\hat{f}(\pi))=\sum_{\{\gamma\}\in C_\Gamma}\frac{|G_\gamma|}{|\Gamma_\gamma|}I_G(f,\gamma), \tag{3.4}$$

其中 $\rho=\operatorname{Ind}_\Gamma^G 1$ 和 $I_G(f,\gamma)$ 是 f 在 γ 处的轨道和，定义如上。请注意，(3.4) 可视为塞尔伯格迹公式 [7, 9] 的表示论类比：左侧可看作谱侧，对 G 的不可约表示求和，并计入它们在 ρ 中的重数；右侧则可解释为几何侧，对 G 中的共轭类求和。更多参考资料见 [9, 第 22] 章。

为得到有限上半空间的迹公式，我们取 $G=\mathbf{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 和 $\Gamma=\mathbf{GL}_3(\mathbb{F}_p)$。此外，$f:\ G\to\mathbb{C}$ 选为一个 K–双不变函数（K 是如上所述的 p_0 的稳定子），即$\forall k$、$h\in K$和 $\forall x\in G$时，我们有 $f(kxh)=f(x)$。也可以将 f视为定义在 $G/K\simeq\mathbb{H}_q$上的函数，它在 K中元素的左乘下保持不变。

[1]对于 $y\in\Gamma\backslash G$，δ_y 是定义在 $\Gamma\backslash G$ 上的函数：当输入为 y 时输出 1，否则输出 0。

注3.5。（3.4）式左侧可以完全用群 G的特征标 χ_π 表示：

$$\operatorname{Tr}\left[\hat{f}(\pi)\right]=\operatorname{Tr}\left[\sum_{g\in G}f(g)\pi\left(g^{-1}\right)\right]=\sum_{g\in G}f(g)\operatorname{Tr}\left[\pi\left(g^{-1}\right)\right]=$$
$$=\sum_{g\in G}f(g)\chi_\pi\left(g^{-1}\right)=\sum_{g\in G}f(g)\overline{\chi_\pi(g)}=\langle f,\chi_\pi\rangle.$$

这里， $\langle x,y\rangle$ 表示复向量空间 $L^2(G)$ 上通常的厄米内积：

$$\langle x,y\rangle=\sum_{g\in G}x(g)\overline{y(g)}$$

在第4至6节中，我们将利用 [2] 中给出的 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ 共轭类的显式描述，计算预迹公式 (3.4) 右侧求和中的每一项。共轭类分为中心型、双曲型、抛物型和椭圆项这几种情形。为简化这些计算，引入另一种工具会很有帮助。

3.2. **双陪集与基本域**。 为了计算轨道和，方便起见，我们将 $G_\gamma\backslash G$ （在可能的情况下）与 $G_\gamma\backslash G/K\times K/Z$ 等同，其中 Z 是 G 的中心，即对角矩阵子群 $\{aI:a\in\mathbb{F}_q^\times\}$。令 $\{t_i\}_{i=1}^l$ 为 $G_\gamma\backslash G/K$ 中双陪集的代表元，并考虑映射：

$$G_\gamma\backslash G/K\times K/Z\to G_\gamma\backslash G$$
$$(G_\gamma t_iK,kZ)\mapsto G_\gamma t_ik.$$

我们首先证明这个映射定义良好且满射。若 $z\in Z$，则 $G_\gamma t_ikz=G_\gamma zt_ik=G_\gamma t_ik$，因为 $z\in G_\gamma$，这是由于 z与 G中的每个元素都交换。现在设 $G_\gamma x\in G\backslash G_\gamma$，那么由于双陪集 $G_\gamma t_iK$构成 G的一个划分，且它们是右陪集 $G_\gamma y$的并，我们可以找到代表元 $t_i\in G$和 $k\in K$，使得 $G_\gamma x=G_\gamma t_ik$。

至于单射，设 t_i、t_j是 $G_\gamma\backslash G/K$中两个双陪集的代表元， k、k'是 K/Z中两个左陪集的代表元。假设 $G_\gamma t_ik=G_\gamma t_jk'.$。由于双陪集要么不相交，要么相同，因此只有当 $t_i=t_j$时才可能出现这种情况。设 $t=t_i$。于是我们有：

$$G_\gamma=G_\gamma tk'k^{-1}t^{-1},\tag{3.6}$$

当且仅当 $tk'k^{-1}t^{-1}\in G_\gamma$时，这种情况才会发生；等价地，当 $k'k^{-1}\in tG_\gamma t^{-1}\cap K$时也会发生。这也可以表述为 $kH=k'H$，其中 $H=tG_\gamma t^{-1}\cap K$。注意， $Z\le K$，且 $Z\le tG_\gamma t^{-1}=G_{t\gamma t^{-1}}$，因为 Z是 G中所有中心化子的交集，所以我们总有 $Z\le K\cap tG_\gamma t^{-1}=H$。若 $Z=H$，则 (3.6) 等价于 $kZ=k'Z$，这意味着上述映射是单射。在我们的具体例子中，中心化子 G_γ 不含有与 K 中的某个矩阵共轭的非中心元素，除非 γ 本身与 K中的某个元素共轭。（例如，可以取 G 中共轭类的简单代表元 γ，并考察 G_γ中元素的特征多项式和特征值；它们在共轭下保持不变。）

因此，我们有两种情况：
情况*1*： γ 与 K中的任何元素都不共轭。因此我们有：

$$I_G(f,\gamma)=\sum_{s\in G_\gamma\backslash G}f(s^{-1}\gamma s)=\sum_{t\in G_\gamma\backslash G/K}\sum_{k\in K/Z}f((tk)^{-1}\gamma tk)=|K/Z|\sum_{t\in G_\gamma\backslash G/K}f(t^{-1}\gamma t).$$

（最后一个等式源于 f 是 K–双不变这一事实。）我们可以将 $G_\gamma\backslash G/K$与 $G_\gamma\backslash\mathbb{H}_q$等同起来。为了计算轨道和，我们将为$G_\gamma$ 在 $\mathbb{H}_q$上的作用找出基本域，即 $\mathbb{H}_q$ 的子集，其中每个 G_γ-轨道恰好包含一个元素。

情况 *2*： γ 与 K中的一个元素共轭。在这种情况下，上述映射不一定是单射。然而， $G_\gamma = G$ 或 K，这取决于 γ 是否与 K 的一个中心元素共轭。于是， $G_\gamma\backslash G$ 要么是平凡的，要么可与 $\mathbb{H}_q$等同。

4.0中心项与双曲项

4.1. **中心项**。 令 $\gamma = \begin{bmatrix} a & 0 & \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$，其中 $a \in \mathbb{F}_p^\times$。在这种情况下， $G_\gamma = G$ 且 $\Gamma_\gamma = \Gamma$。因此，

$I_G(f,\gamma) = f(p_0)$，这类 γ的总贡献为

$$\frac{|G|}{|\Gamma|} f(p_0)\cdot(p-1) = \frac{(q^3-1)(q^2-1)(q-1)q^3}{(p^3-1)(p^2-1)p^3} f(p_0).$$

4.2. **第一类双曲项**。 令 $\gamma = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$， $a \neq b \in \mathbb{F}_p^\times$. 这里

$$G_\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ w & z & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \right\} \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{F}_q^\times$$

对于 Γ_γ，情况也类似。

G_γ 的作用的一个基本域为

$$G_\gamma\backslash\mathbb{H}_q = \{(u+\delta^{1/3}, v+\delta^{2/3}) : u,v \in \mathbb{F}_q\}. \tag{4.1}$$

为作说明，我们在下一个命题中验证这一点。在接下来的几节中，基本域的验证留待附录 A 处理。

命题4.2。 G_γ 的一个基本域由 (4.1) 给出。

证明。 首先，为了证明每个代表元的唯一性，假设存在 $m \in G_\gamma$ 使得

$$m\cdot(u_1+\delta^{1/3}, v_1+\delta^{2/3}) = (u_2+\delta^{1/3}, v_2+\delta^{2/3}).$$

于是我们推出 $y = 0 = w$，且 $x = t = z$。因此， $u_1 = u_2$ 且 $v_1 = v_2$。

接下来，为了证明该基本域的完备性，任取一个元素 $(\alpha,\beta) \in\mathbb{H}_q$。我们希望找到 $m \in G_\gamma, u, v \in \mathbb{F}_q$，使得 $m\cdot(u+\delta^{1/3}, v+\delta^{2/3}) = (\alpha,\beta)$。令 $x = \alpha_2, y = \alpha_3, w = \beta_2, z = \beta_3$，并令 $t = 1$。于是我们看到， u, v是下式的一个解

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix},$$

由于左侧矩阵可逆，因此该方程有解。 □

因此，

$$\begin{aligned}
I_G(f,\gamma) &= \sum_{t\in G_\gamma\backslash G/K}\ \sum_{u\in K/\{aI\}} f((tu)^{-1}\gamma(tu)) \\
&= \sum_{t\in G_\gamma\backslash \mathbb{H}_q} \frac{|K|}{|\{aI\}|} f(t^{-1}\gamma t) \\
&= \frac{q^3-1}{q-1}\sum_{x,y\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{bmatrix}0&1&-y\\1&0&-x\\0&0&1\end{bmatrix}\gamma\begin{bmatrix}0&1&x\\1&0&y\\0&0&1\end{bmatrix}p_0\right) \\
&= (q^2+q+1)\sum_{x,y\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{bmatrix}a&0&(a-b)y\\0&a&(a-b)x\\0&0&b\end{bmatrix}p_0\right) \\
&= (q^2+q+1)\sum_{x,y\in\mathbb{F}_q} f\left((x+\frac{a}{b}\delta^{2/3}, y+\frac{a}{b}\delta^{1/3})\right).
\end{aligned}$$

定义 $f\in L^2(K\backslash G/K)$ 的 视地变换 $Hf\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)\to\mathbb{C}$ 为

$$Hf(\kappa) \coloneqq \sum_{x,y\in\mathbb{F}_q}\sum_{\xi\in\{\kappa\}} f\left(\begin{bmatrix}\xi_{11}&\xi_{12}&x\\\xi_{21}&\xi_{22}&y\\0&0&1\end{bmatrix}p_0\right),$$

其中内层求和遍历 κ 所属共轭类中的 $\xi\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$。因此，这个双曲项等于

$$\begin{aligned}
&(q^2+q+1)\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\\ a\neq b}} \frac{(q^2-1)(q^2-q)(q-1)}{(p^2-1)(p^2-p)(p-1)}\cdot Hf\left(\frac{a}{b}I\right) \\
&= \frac{(q^3-1)(q^2-1)(q^2-q)}{(p^2-1)(p^2-p)(p-1)}\sum_{\substack{a\in\mathbb{F}_p^\times\\ a\neq 1}}(p-1)\cdot Hf(aI) \\
&= \frac{(q^3-1)(q^2-1)(q^2-q)}{(p^2-1)(p^2-p)}\sum_{\substack{a\in\mathbb{F}_p^\times\\ a\neq 1}} Hf(aI).
\end{aligned}$$

我们展示了此情形下轨道和的完整计算，既为了说明计算技巧，也为了引出视地变换。对于接下来的情形，我们省略轨道和的详细计算，但在附录A中列出了一些计算，供有兴趣的读者参考。

4.3. **第二类双曲项**。令 $\gamma=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$ 满足 a，b，$c\in\mathbb{F}_p^\times$彼此不同。此处

G_γ 是对角矩阵的集合，并且：

$$\begin{aligned}
G_\gamma\backslash\mathbb{H}_q = \{(x+\delta^{1/3}+y\delta^{2/3}, r+s\delta^{1/3}+\delta^{2/3}) : ys\neq 1\}\sqcup\{(x+\delta^{2/3}, r+\delta^{1/3}+s\delta^{2/3}) : s\neq 0\} \\
\sqcup\{(x+y\delta^{1/3}+\delta^{2/3}, r+\delta^{1/3}) : y\neq 0\}\sqcup\{(x+\delta^{2/3}, y+\delta^{1/3})\}
\end{aligned}$$

我们有

$$I_G(f,\gamma) = (q^2+q+1)\cdot Hf\left(\begin{bmatrix} a/c & 0 \\ 0 & b/c \end{bmatrix}\right),$$

其中 a、b、$c \in \mathbb{F}_p^\times$来自附录 A 中所述的变量替换。

第二双曲项的总贡献为:

$$\frac{1}{6}(q^2+q+1)\frac{(q-1)^3}{(p-1)^3}\sum_{\substack{a,b,c\in\mathbb{F}_p^\times \\ a\neq b\neq c}} Hf\left(\begin{bmatrix} a/c & 0 \\ 0 & b/c \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{6}(q^2+q+1)\frac{(q-1)^3}{(p-1)^2}\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\setminus\{1\} \\ a\neq b}} Hf\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}(q^3-1)\frac{(q-1)^2}{(p-1)^2}\sum_{\{a,b\}\subseteq\mathbb{F}_p^\times\setminus\{1\}} Hf\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right).$$

5. 抛物项

5.1. **第一类抛物项**。令 $\gamma = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$，$a \in \mathbb{F}_p^\times$。在此情形下，

$$G_\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} d & y & x \\ 0 & c & b \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} : c,d \in \mathbb{F}_q^\times, b,x,y \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

命题 5.1. G_γ 的一个基本域为

$$G_\gamma\backslash\mathbb{H}_q = \{(u\delta^{1/3}, v\delta^{1/3}+\delta^{2/3}) : u,v \in \mathbb{F}_q, u\neq 0\} \sqcup \{(\delta^{1/3}+u\delta^{2/3}, \delta^{1/3}) : u \in \mathbb{F}_q^\times\}.$$

证明。参见附录 A。 □

Fol按照附录 A 中概述的计算，此处的轨道和为 s

$$I_G(f,\gamma) = (q^2+q+1)\left(Hf(I) - f(p_0)\right).$$

因此，第一类抛物项的总贡献为

$$\frac{q^3(q-1)^2}{p^3(p-1)^2}(q^2+q+1)\left(Hf(I)-f(p_0)\right)\cdot(p-1) = \frac{q^3(q^3-1)(q-1)}{p^3(p-1)}\left(Hf(I)-f(p_0)\right).$$

5.2. **第二类抛物项**。令 $\gamma = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$，$a \in \mathbb{F}_p^\times$。我们得到

$$G_\gamma = B = \left\{ \begin{bmatrix} z & y & x \\ 0 & c & b \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} : d,c,z \in \mathbb{F}_q^\times, b,x,y \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

这里 B 是由上三角矩阵构成的波莱尔子群。

命题 5.2。 B 的一个基本域为

$$B\backslash\mathbb{H}_q = \{(\delta^{1/3}, v\delta^{1/3}+\delta^{2/3}) : v \in \mathbb{F}_q\} \sqcup \{(\delta^{2/3}, \delta^{1/3})\}.$$

证明。见附录 A。 □

我们发现轨道和（见附录 A）为

$$I_G(f,\gamma)=(q^2+q+1)\left(f\left(\delta^{2/3}+\delta^{1/3},\delta^{1/3}+1\right)+\sum_{v\in\mathbb{F}_q}f\left((1-v)\delta^{2/3}-v^2\delta^{1/3}+1,\delta^{2/3}+(v+1)\delta^{1/3}\right)\right).$$

~注意，轨道和与 a 无关，因此我们将每个 $I_G(f,\gamma)$ 记作 $I_G(f)$。因此，这些抛物项的总贡献为

$$\frac{q^3(q-1)^2}{p^3(p-1)^2}\tilde{I}_G(f)\cdot(p-1)=\frac{q^3(q-1)^2}{p^3(p-1)}\tilde{I}_G(f).$$

5.3. **第三类抛物项**。令 $\gamma=\begin{bmatrix}a&a&0\\0&0&b\end{bmatrix}$，其中 $a\neq b\in\mathbb{F}_p^\times$。此处

$$G_\gamma=\left\{\begin{bmatrix}x&0&0\\y&x&0\\0&0&z\end{bmatrix}:x,z\in\mathbb{F}_q^\times,y\in\mathbb{F}_q\right\}.$$

再次通过变量替换，我们得到轨道和（参见附录 A）

$$I_G(f,\gamma)=(q^2+q+1)\cdot Hf\left(\begin{bmatrix}a/b&1\\0&a/b\end{bmatrix}\right).$$

这些项的总贡献为

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\\a\neq b}}\frac{q(q-1)^2}{p(p-1)^2}(q^2+q+1)\cdot Hf\left(\begin{bmatrix}a/b&1\\0&a/b\end{bmatrix}\right)&=\frac{q(q-1)^2}{p(p-1)^2}(q^2+q+1)\sum_{\substack{c\in\mathbb{F}_p^\times\\c\neq1}}(p-1)\cdot Hf\left(\begin{bmatrix}c&1\\0&c\end{bmatrix}\right)\\&=\frac{q(q-1)(q^3-1)}{p(p-1)}\sum_{\substack{c\in\mathbb{F}_p^\times\\c\neq1}}Hf\left(\begin{bmatrix}c&1\\0&c\end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

6. 椭圆项

6.1. **第一类椭圆项**。不可约 γ。此类 γ 的特征多项式在 $\mathbb{F}_p[t]$ 中不可约。回想 $q=p^n$。根据 $n\equiv0\pmod3$ 是否成立，需要考虑两种情形。

- $n\equiv0$ (模 3)。在此情形下，我们有域扩张塔 $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_{p^3}/\mathbb{F}_p$。因此，$\gamma$ 类似于 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 中的对角矩阵。但在 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ 中并非如此，这也是此情形不同于第二双曲项的原因。因此，G_γ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的对角矩阵子群，而 Γ_γ是具有 $\mathbb{F}_p$ 中元素的 K，即 $|\Gamma_\gamma|=p^3-1$。由于 G_γ相同，我们可以重用前面第二种双曲情形中 G_γ 的基本域。

  设 γ在 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 中类似于 $\begin{pmatrix}\xi_1&0&0\\0&\xi_2&0\\0&0&\xi_3\end{pmatrix}$，其中 ξ_1、ξ_2、$\xi_3\in\mathbb{F}_{p^3}\backslash\mathbb{F}_p$。与第二双曲项的情形类似，轨道和为：

$$I_G(f,\gamma)=|K/Z|\cdot Hf\left(\begin{bmatrix}\xi_1/\xi_3&0\\0&\xi_2/\xi_3\end{bmatrix}\right).$$

  由于 ξ_1、ξ_2、ξ_3 是伽罗瓦共轭，不失一般性，$\xi_1=\xi_3^p$ 且 $\xi_2=\xi_3^{p^2}$。因此，第一组椭圆项的总贡献为：

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{(q-1)^3}{p^3-1}\cdot\frac{q^3-1}{q-1}\sum_{\xi\in\mathbb{F}_{p^3}^\times\setminus\mathbb{F}_p^\times} Hf\left(\begin{bmatrix}\xi^{p-1} & 0\\ 0 & \xi^{p^2-1}\end{bmatrix}\right).$$

（$\frac{1}{3}$ 这一因子源于求和中每个 γ 都被计数了三次。）

- $n \not\equiv 0 \pmod 3$。在这种情况下，$\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$之间不存在三次扩张，因此 $\mathbb{F}_q(\delta^{1/3})$ 是特征多项式具有根的最小域（当然，这里的“最小”是指包含关系，而非大小）。假设 γ 的一个特征值为 $\alpha_1+\alpha_2\delta^{1/3}+\alpha_3\delta^{2/3}$，对应的特征向量为 $x_1+x_2\delta^{1/3}+x_3\delta^{2/3}$，其中 $\alpha_i\in\mathbb{F}_q$ 且 $x_i\in\mathbb{F}_q^3$。那么，

$$\begin{aligned}\gamma x_1 &= \alpha_1x_1+\alpha_3\delta x_2+\alpha_2\delta x_3,\\ \gamma x_2 &= \alpha_2x_1+\alpha_1x_2+\alpha_3\delta x_3,\\ \gamma x_3 &= \alpha_3x_1+\alpha_2x_2+\alpha_1x_3.\end{aligned}$$

因此，将 γ 看作 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 中的元素时，它与 K 中的一个矩阵相似。反过来，K 中的非对角矩阵给出了 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ 中的不可约元素。此外，在这种情况下，G_γ 恰好就是 K，因此 $G_\gamma\backslash G=\mathbb{H}_q$。将元素 $y\in\mathbb{H}_q$ 与 $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{F}_q)$ 中的元素 $y=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\in$ 对应起来之后并写作 $\gamma=\begin{bmatrix}\alpha & \varepsilon\delta & \beta\delta\\ \beta & \alpha & \varepsilon\delta\\ \varepsilon & \beta & \alpha\end{bmatrix}$，我们可以计算：

$$\begin{aligned}I_G(f,\gamma) &= \sum_{y\in\mathbb{H}_q} f(y^{-1}\gamma y)\\ &= \sum_{a,b,c,d,e,f\in\mathbb{F}_q} f\left(\frac{1}{bd-ae}\begin{bmatrix}-e & b & ce-bf\\ d & -a & af-cd\\ 0 & 0 & bd-ae\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & \varepsilon\delta & \beta\delta\\ \beta & \alpha & \varepsilon\delta\\ \varepsilon & \beta & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}p_0\right)\\ &= \sum_{a,b,c,d,e,f\in\mathbb{F}_q} f\left(\frac{1}{bd-ae}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{bmatrix}p_0\right),\end{aligned}$$

其中矩阵的各列元素如下：

- $x_{11}=\alpha(bd-ae)+\beta(ab+cde-bdf)+\varepsilon(ace-abf-de\delta)$
- $x_{21}=\beta(adf-a^2-cd^2)+\varepsilon(a^2f-acd+d^2\delta)$
- $x_{31}=\beta d+\varepsilon a$
- $x_{12}=\beta(ce^2-bef+b^2)+\varepsilon(bce-b^2f-e^2\delta)$
- $x_{22}=\alpha(bd-ae)+\beta(aef-cde-ab)+\varepsilon(abf-bcd+de\delta)$
- $x_{32}=\beta e+\varepsilon b$
- $x_{13}=\beta(cef+bc-bf^2-e\delta)$
- $x_{23}=\beta(af^2-cdf-ac+d\delta)+\varepsilon(acf-ac^2+df\delta-a\delta)$
- $x_{33}=\alpha+\beta f+\varepsilon c$

遗憾的是，似乎没有明显的方法可以进一步简化这个表达式。对于特定的域 $\mathbb{F}_q$ 计算这一情形时，直接计算似乎比应用此公式更有帮助。

6.2. **第二类椭圆项**。 $\gamma = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$，其中 $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是不可约的，并且

$e \in \mathbb{F}_p^\times$。此外，

$$\Gamma_\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} a & b\xi & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} : c(a^2 - b^2\xi) \neq 0 \right\},$$

其中， ξ 是 $\mathbb{F}_p$中的非平方数。

同样，根据 $n \equiv 0$ 模 2 的奇偶性，即 n 是偶数还是奇数，需要考虑两种情形。

- n 是偶数。在这种情况下， $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^2} \subseteq \mathbb{F}_q$ 和 γ 在 $\mathbf{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 中可对角化。 G_γ 是 $\mathbb{F}_q$上的对角矩阵子群，因此基本域 $G_\gamma \backslash \mathbb{H}_q$ 与第二种双曲情形中的相同。

  设 γ在 G中与 $\left(\begin{smallmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{smallmatrix}\right)$ 相似，其中 η_1、 $\eta_2 \in \mathbb{F}_{p^2} \backslash \mathbb{F}_p$和 $e \in \mathbb{F}_p^\times$。轨道和（与第二种双曲情形类似）为：

$$I_G(f, \gamma) = |K/Z| \cdot Hf\left(\begin{bmatrix} \eta_1/e & 0 \\ 0 & \eta_2/e \end{bmatrix} \right).$$

  由于 η_1、 η_2 是伽罗瓦共轭，不失一般性，我们可以假设 $\eta_1 = \eta_2^p$ 。因此，第二类椭圆项的总贡献为：

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(q-1)^3}{(p-1)(p^2-1)} \cdot \frac{q^3-1}{q-1} \sum_{e \in \mathbb{F}_p^\times} \sum_{\eta \in \mathbb{F}_{p^2}^\times \backslash \mathbb{F}_p^\times} Hf\left(\begin{bmatrix} \eta/e & 0 \\ 0 & \eta^p/e \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(q-1)^3}{(p^2-1)} \cdot \frac{q^3-1}{q-1} \sum_{\eta \in \mathbb{F}_{p^2}^\times \backslash \mathbb{F}_p^\times} Hf\left(\begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^p \end{bmatrix} \right).$$

- n是奇数。在这种情况下， γ 在 $\mathbf{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 中不可对角化。一般而言，它共轭于以下形式的元素：

$$\begin{bmatrix} k & l\xi & 0 \\ l & k & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix},$$

  其中 $k \in \mathbb{F}_p$、 m、 l、 $\xi \in \mathbb{F}_p^\times$ 满足 ξ 是 $\mathbb{F}_p$ 中的非平方数。（这确保行列式 $m(k^2 - l^2\xi)$ 非零。）在这种情况下，我们有：

$$G_\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} a & b\xi & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{F}_q, c(a^2 - b^2\xi) \neq 0 \right\}.$$

  我们为这个特定的 G_γ 寻找一个基本域。

  命题 6.1。 G_γ 的一个基本域如下所示：

$$G_\gamma \backslash \mathbb{H}_q = \left\{ \left(x + u\delta^{1/3} + v\delta^{2/3}, y + \delta^{1/3} \right) : v \in \mathbb{F}_q^\times, x, y, u \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

  相应的轨道和为

$$I_G(f, \gamma) = \frac{(q^3-1)(q^2-1)}{(p-1)(p^2-1)} Hf\left(\begin{bmatrix} k/m & l\xi/m \\ l/m & k/m \end{bmatrix} \right).$$

此情形下第二类椭圆项的总贡献为

$$\frac{(q^3-1)(q^2-1)}{(p^2-1)}\sum_{\substack{s\in\mathbb{F}_p\\ t\in\mathbb{F}_p^\times}} Hf\left(\begin{bmatrix} s & t\xi\\ t & s\end{bmatrix}\right).$$

命题和轨道和计算的详细证明见附录 A。

7. Examples

在本节中，重数的下标表示相应表示的定义域群。令 $\rho=$ 诱导表示$_\Gamma^G 1$ 和 $\kappa=$ 诱导表示$_K^G 1$。

例7.1。设 $f\colon G\to\mathbb{C}$ 为恒一函数。迹公式的右端为 $|G|$，而左端则为（根据特征标正交性）：

$$\sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi,\rho)_G\langle f,\chi_\pi\rangle=\sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi,\rho)_G\langle\chi_1,\chi_\pi\rangle=|G|\cdot m(1,\rho)_G.$$

因此迹公式表明 $|G|\cdot m(1,\rho)=|G|$，这是弗罗贝尼乌斯互反律的一种体现：

$$m(1,\rho)_G=\frac{1}{|G|}\langle 1,\mathrm{Ind}_\Gamma^G 1\rangle_G=\frac{1}{|\Gamma|}\langle\mathrm{Res}_\Gamma^G 1,1\rangle_\Gamma=m(1,1)_\Gamma=1.$$

例7.2。设 $f\colon\mathbb{H}_q\to\mathbb{C}$ 为示性函数 δ_{p_0}，它在 p_0 上取值为 1，在其他地方取值为 0。它是 K–双不变的，因为 $\mathrm{stab}(p_0)=K$。迹公式的左端为：

$$\begin{aligned}\sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi,\rho)_G\langle f,\chi_\pi\rangle&=\sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi,\rho)_G\sum_{g\in G} f(g\cdot p_0)\chi_\pi\left(g^{-1}\right)=\sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi,\rho)_G\sum_{k\in K}\chi_\pi\left(k^{-1}\right)=\\&=\sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi,\rho)_G\langle 1,\chi_\pi\rangle_K=|K|\cdot\sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi,\rho)_G\cdot m(1,\mathrm{Res}_K^G\pi)_K=\\&=|K|\cdot\sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi,\rho)_G\cdot m(\pi,\kappa)_G.\end{aligned}$$

在等式右边，唯一非零的项是中心项，以及当 n不能被 3 整除时出现的第一类椭圆项。若如此，我们断言，对于 K 中的非中心 γ，有$I_G(f,\gamma)=3$.

假设 γ 在同构 $K\simeq\mathbb{F}_q\left(\delta^{1/3}\right)^\times$下对应于乘以 $\xi\in\mathbb{F}_q\left(\delta^{1/3}\right)^\times$。将 γ 视为 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 的一个元素时，其特征值是 ξ的伽罗瓦共轭；在我们的情形中，它们是 ξ、ξ^q 和 ξ^{q^2}。这意味着，落在 K 中的 γ 的共轭恰好是 γ^q 和γ^{q^2}，因此每个轨道和 $I_G(f,\gamma)$ 中恰有三个非零项。

第一类椭圆项的总贡献为：

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{q^3-1}{p^3-1}\sum_{\substack{\gamma\in K\\ \gamma\notin Z}} I_G(f,\gamma)=\frac{(q^3-1)(q^3-q)}{p^3-1}.$$

因此得到：

情况*1*：n 能被 3 整除。因此我们有

$$\sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi,\rho)_G\cdot m(\pi,\kappa)_G=\frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{p^3(p^2-1)(p^3-1)}.$$

情况 *2*： n 不能被 3 整除。因此我们有

$$\sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi,\rho)_G \cdot m(\pi,\kappa)_G = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{p^3(p^2-1)(p^3-1)} + \frac{q^3-q}{p^3-1}.$$

注记 7.3。注意，左边的求和也可以写成：

$$\sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi,\rho)_G \cdot m(\pi,\kappa)_G = \frac{1}{|G|}\langle\chi_\rho,\chi_\kappa\rangle.$$

8. 表示 ρ =诱导表示$_\Gamma^G 1$ 的特征标

我们已经有效地计算出预迹公式 (3.4) 右边的部分，现在转向左边。为此，我们需要表示 χ_ρ 的 ρ特征标，下面来计算它。我们使用诱导表示的特征标的常用公式（见 [9, 第 16]章）：

$$\chi_\rho(\gamma) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{x\in G} \mathbb{I}^\Gamma(x\gamma x^{-1}).$$

我们逐一处理每个共轭类。用 $H_{1,\ q}$,$H_{2,\ q}$,$P_{1,\ q}$, . . . ,$E_{2,\ q}$ 表示 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 中各种类型共轭类的大小。给定一个集合 S，我们用 $\mathbb{I}^S$ 表示 S 的示性函数。

- 中心类： $\gamma = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$,$a \in \mathbb{F}_q^\times$. 由于 $\gamma \in Z(G)$，我们有 $x\gamma x^{-1} = \gamma$。因此，

$$\chi_\rho(\gamma) = \frac{|G|}{|\Gamma|}\mathbb{I}^{\mathbb{F}_p}(a).$$

- 第一双曲类： $\gamma = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$，其中 $a \neq b \in \mathbb{F}_q^\times$. 现在，$\gamma$ 与某个元素相似

Γ 当且仅当 a、b是一个系数属于 $\mathbb{F}_p$的多项式的根时才成立。只有在 a、$b \in \mathbb{F}_p^\times$时才会发生；例如，考察行列式 Det($\gamma$) $= a^2b$即可看出这一点。由于它是 char$_\gamma \in \mathbb{F}_p[x]$的常数项，我们有 Det($\gamma$) $\in \mathbb{F}_p$，这意味着 Det(γ)在 Frobenius 自同构下不变（因为 Gal($\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$)由 Frobenius 生成）。由于 $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$是伽罗瓦的，若 a、$b \notin \mathbb{F}_p$，它们必定是伽罗瓦共轭，即 $a^p = b$ 和 $b^p = a$。但这意味着 $a^2b = (a^2b)^p = b^2a$，也就是 $a = b$，矛盾。因此，简单应用轨道-稳定子定理可得

- 第二双曲类： $\gamma = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$，其中 a、b、$c \in \mathbb{F}_q^\times$互不相同。有三种情形可使 γ 与 Γ中

$$\chi_\rho(\gamma) = \frac{|G|}{|\Gamma|}\frac{H_{1,p}}{H_{1,q}}\mathbb{I}^\Gamma(\gamma).$$

的某个元素相似：三者都是$\mathbb{F}_{p^3}/\mathbb{F}_p$ 中的伽罗瓦共轭（仅当 $3 \mid n$时才可能）；或者 a、b 是 $\mathbb{F}_{p^2}/\mathbb{F}_p$ 中的伽罗瓦共轭，且 $c \in \mathbb{F}_p$ （仅当 $2 \mid n$时才可能）；或者三者都属于 $\mathbb{F}_p$。这些情形对应于求和中的三项：

$$\chi_\rho(\gamma) = \frac{|G|}{|\Gamma|\cdot H_{2,q}}\left(E_{2,p}\cdot \mathbb{I}^{\mathbb{F}_{p^3}\setminus\mathbb{F}_p}(a)\delta_b(a^p)\delta_c(a^{p^2}) + E_{1,p}\cdot \mathbb{I}^{\mathbb{F}_{p^2}\setminus\mathbb{F}_p}(a)\delta_b(a^p)\mathbb{I}^{\mathbb{F}_p}(c) + H_{2,p}\cdot \mathbb{I}^\Gamma(\gamma)\right).$$

- 第一抛物类： $\gamma = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$， $a \in \mathbb{F}_q^\times$。如果 $a \notin \mathbb{F}_p$ 是 $\mathbb{F}_p$ 上的一个多项式的根，那么它的

伽罗瓦共轭 $a^p \neq a$ 也应是该多项式的根，但显然并非如此。因此，

- 第二抛物类： $\gamma = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ $\chi_\rho(\gamma) = \frac{|G|}{|\Gamma|}\frac{P_{1,p}}{P_{1,q}}\mathbb{1}^{\mathbb{F}_p}(a)$. $, a \in \mathbb{F}_q^\times$. 与前一类相似，

- 第三抛物类： $\gamma = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ $\chi_\rho(\gamma) = \frac{|G|}{|\Gamma|}\frac{P_{2,p}}{P_{2,q}}\mathbb{1}^{\mathbb{F}_p}(a)$. 其中 $a \neq b \in \mathbb{F}_q^\times$。通过与第一双曲类类似的论证，我们得到

- 第一椭圆类： $\gamma = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 \\ 0 & w^q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$ $\chi_\rho(g) = \frac{|G|}{|\Gamma|}\frac{P_{3,p}}{P_{3,q}}\mathbb{1}^{\Gamma}(g)$. 其中 $w \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$ 且 $r \in \mathbb{F}_q^\times$。这里， γ 与 Γ 中的某个

元素相似，当且仅当 w、w^q 是 $\mathbb{F}_p$ 上的一个二次不可约多项式的根。然而，若 $2 \mid n$，则 $\mathbb{F}_{p^2}$ 是 $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ 中的一个中间扩张，因此， $\mathbb{F}_p$ 上的任意二次多项式的根都包含在 $\mathbb{F}_q$ 中。于是，若 n 能被 2 整除，则 $\chi_\rho(\gamma) = 0$；否则

- 第二椭圆类： $\gamma = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 \\ 0 & w^q & 0 \\ 0 & 0 & w^{q^2} \end{bmatrix}$ $\chi_\rho(\gamma) = \frac{|G|}{|\Gamma|}\frac{E_{1,p}}{E_{1,q}}\mathbb{1}^{\mathbb{F}_{p^2}\setminus\mathbb{F}_p}(w)\mathbb{1}^{\mathbb{F}_p}(r)$. $, w \in \mathbb{F}_q(\delta^{1/3}) \setminus \mathbb{F}_q$。与前一类一样，若 n 能被 3 整除，

则 $\chi_\rho(\gamma) = 0$，否则

$$\chi_\rho(\gamma) = \frac{|G|}{|\Gamma|}\frac{E_{2,p}}{E_{2,q}}\mathbb{1}^{\mathbb{F}_{p^3}\setminus\mathbb{F}_p}(w).$$

9. 当 $2, 3 \nmid n$ 时 ρ 的分解

本节计算当 2 和 3 均不能整除 n 时 ρ 的分解；因此，$\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ 中的椭圆元素在 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 中仍为椭圆元素。

我们采用 Terras [9, 第 383-4] 页和 Steinberg [8]中的 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 特征标表。通常，为了计算不可约表示 π 在 ρ 中出现的重数 $m(\pi, \rho)$，我们计算它们相应特征标的内积。我们用 H_1、H_2、$P_1 \ldots$、E_2 表示 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ 中不同类型共轭类的大小。我们用 $\mathrm{Nm}^{E/F}$ 表示域扩张 E/F 的范数。

(1) α, $\mathbb{F}_q^\times$ 的一个特征标。于是,

$$m(\alpha,\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\Bigg(\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a^3)+H_1\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\\ a\neq b}}\alpha(a^2b)+\frac{H_2}{6}\sum_{\substack{a,b,c\in\mathbb{F}_p^\times\\ a,b,c\text{ distinct}}}\alpha(abc)+P_1\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a^3)+P_2\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a^3)$$
$$+P_3\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\\ a\neq b}}\alpha(a^2b)+\frac{E_1}{2}\sum_{\substack{w\in\mathbb{F}_{p^2}\setminus\mathbb{F}_p\\ r\in\mathbb{F}_p^\times}}\alpha(r\,\mathrm{Nm}_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(w))+\frac{E_2}{3}\sum_{w\in\mathbb{F}_{p^3}\setminus\mathbb{F}_p}\alpha(\mathrm{Nm}_{\mathbb{F}_{q^3}/\mathbb{F}_q}(w))\Bigg).$$

我们可以根据三种情形简化这些求和:

- $\alpha^3|_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1_\circ$ 每个求和都为零，因此 $m(\alpha,\rho)=0_\circ$
- $\alpha^3|_{\mathbb{F}_p^\times}=1$ 但 $\alpha|_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1_\circ$ 通过简短计算可得

$$m(\alpha,\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\left(1-H_1+\frac{H_2}{3}+P_1+P_2-P_3-\frac{E_2}{3}\right)(p-1)=0.$$

- $\alpha|_{\mathbb{F}_p^\times}=1_\circ$ 于是

$$m(\alpha,\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\{g\}\in C_\Gamma}|\{g\}|=1.$$

(2) π_α，其中 α 是 $\mathbb{F}_q^\times$的一个特征标。

$$m(\pi_\alpha,\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\Bigg((q^2+q)\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a^3)+(q+1)H_1\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\\ a\neq b}}\alpha(a^2b)+\frac{H_2}{3}\sum_{\substack{a,b,c\in\mathbb{F}_p^\times\\ a,b,c\text{ distinct}}}\alpha(abc)+qP_1\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a^3)$$
$$+0+P_3\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\\ a\neq b}}\alpha(a^2b)+0-\frac{E_2}{3}\sum_{w\in\mathbb{F}_{p^3}\setminus\mathbb{F}_p}\alpha(\mathrm{Nm}_{\mathbb{F}_{q^3}/\mathbb{F}_q}(w))\Bigg).$$

- $\alpha^3|_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1_\circ$ 这里同样所有求和都为零，从而得到 $m(\pi_\alpha,\rho)=0_\circ$
- $\alpha^3|_{\mathbb{F}_p^\times}=1$ 但是 $\alpha|_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1_\circ$

$$m(\pi_\alpha,\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\left((q^2+q)-(q+1)H_1+\frac{2}{3}H_2+qP_1-P_3+\frac{E_2}{3}\right)(p-1)$$
$$=\frac{(q-p)(q-p^2)}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}.$$

- $\alpha|_{\mathbb{F}_p^\times}=1_\circ$

$$m(\pi_\alpha,\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\Bigg((q^2+q)(p-1)+(q+1)H_1(p-1)(p-2)+(p-1)(p-2)(p-3)\frac{H_2}{3}$$
$$+qP_1(p-1)+(p-1)(p-2)P_3-\frac{E_2}{3}(p^3-p)\Bigg)$$
$$=\frac{(q-p)(q+p^5-2p^2)}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}.$$

作为合理性检查，要证明它实际上是一个整数并不难。

(3) π'_α, 其中 α 是 $\mathbb{F}_q^\times$的特征标。

$$m(\pi'_\alpha,\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\Bigg(q^3\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a^3)+qH_1\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\\a\neq b}}\alpha(a^2b)+\frac{H_2}{6}\sum_{\substack{a,b,c\in\mathbb{F}_p^\times\\a,b,c\text{ distinct}}}\alpha(abc)+0+0+0$$
$$-\frac{E_1}{2}\sum_{\substack{w\in\mathbb{F}_{p^2}\setminus\mathbb{F}_p\\r\in\mathbb{F}_p^\times}}\alpha(r\,\mathrm{Nm}_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(w))+\frac{E_2}{3}\sum_{w\in\mathbb{F}_{p^3}\setminus\mathbb{F}_p}\alpha(\mathrm{Nm}_{\mathbb{F}_{q^3}/\mathbb{F}_q}(w))\Bigg).$$

- $\alpha^3|_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1$。 $m(\pi_\alpha,\rho)=0$。
- $\alpha^3|_{\mathbb{F}_p^\times}=1$ 但是 $\alpha|_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1$。

$$m(\pi'_\alpha,\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\left(q^3-qH_1+\frac{1}{3}H_2-\frac{E_2}{3}\right)(p-1)=\frac{(q-p)(q-p^2)(q+p^2+p)}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}.$$

- $\alpha|_{\mathbb{F}_p^\times}=1$.

$$\begin{aligned}m(\pi'_\alpha,\rho)&=\frac{1}{|\Gamma|}\Bigg(q^3(p-1)+q(p-1)(p-2)H_1+(p-1)(p-2)(p-3)\frac{H_2}{6}\\&\qquad-(p^2-p)(p-1)\frac{E_1}{2}+(p^3-p)\frac{E_2}{3}\Bigg)\\&=\frac{(q-p)(q^2+pq+p^5-p^4-p^3-p^2)}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}.\end{aligned}$$

(4) $\pi_{\alpha,\ \beta}$ 对于 $\mathbb{F}_q^\times$的不同特征标 α 和 β。

$$\begin{aligned}m(\pi_{\alpha,\beta},\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\Bigg((q^2+q+1)\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a^2)\beta(a)+H_1\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\\a\neq b}}((q+1)\alpha(ab)\beta(a)+\alpha(a^2)\beta(b))\\+\frac{H_2}{6}\sum_{\substack{a,b,c\in\mathbb{F}_p^\times\\a,b,c\text{ distinct}}}(\beta(a)\alpha(bc)+\beta(b)\alpha(ac)+\beta(c)\alpha(ab))+(q+1)P_1\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a^2)\beta(a)\\+P_2\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a^2)\beta(a)+P_3\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\\a\neq b}}(\alpha(ab)\beta(a)+\alpha(a^2)\beta(b))\\+\frac{E_1}{2}\sum_{\substack{w\in\mathbb{F}_{p^2}\setminus\mathbb{F}_p\\r\in\mathbb{F}_p^\times}}\alpha(\mathrm{Nm}_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(w))\beta(r)+0\Bigg).\end{aligned}$$

- $\alpha^2\beta|_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1$。 $m(\pi_{\alpha,\beta},\rho)=0$。

- $\alpha^2\beta\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$ 但是 $\alpha^2\mid_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1$ 和 $\beta\mid_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1$。

$$\begin{aligned} m(\pi_{\alpha,\beta},\rho) &= \frac{1}{|\Gamma|}\Bigg((q^2+q+1)(p-1)-(q+2)(p-1)H_1+(p-1)H_2 \\ &\qquad +(q+1)(p-1)P_1+(p-1)P_2-2(p-1)P_3\Bigg) \\ &= \frac{(q-p)(q-p^2)}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}. \end{aligned}$$

- $\alpha^2\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$ 和 $\beta\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$ 但是 $\alpha\mid_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1$。

$$\begin{aligned} m(\pi_{\alpha,\beta},\rho) &= \frac{1}{|\Gamma|}\Bigg((q^2+q+1)(p-1)-(p-1)(q-p+3)H_1-(p-1)(p-3)\frac{H_2}{2} \\ &\qquad +(q+1)(p-1)P_1+(p-1)P_2+(p-1)(p-3)P_3-(p-1)^2\frac{E_1}{2}\Bigg) \\ &= \frac{(q-p)(q-p^2)}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}. \end{aligned}$$

- $\alpha\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$ 和 $\beta\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$。

$$\begin{aligned} m(\pi_{\alpha,\beta},\rho) &= \frac{1}{|\Gamma|}\Bigg((q^2+q+1)(p-1)+(q+2)(p-1)(p-2)H_1+(p-1)(p-2)(p-3)\frac{H_2}{2} \\ &\qquad +(q+1)(p-1)P_1+(p-1)P_2+2(p-1)(p-2)P_3+(p-1)(p^2-p)\frac{E_1}{2}\Bigg) \\ &= \frac{q(q+p^5-2p^2-p)+p^3(p^5-2p^3-p^2+3)}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}. \end{aligned}$$

(5) $\pi'_{\alpha,\ \beta}$ 对于 $\mathbb{F}_q^\times$ 的不同特征标 α 和 β。

$$\begin{aligned} m(\pi'_{\alpha,\beta},\rho) = \frac{1}{|\Gamma|}\Bigg(& q(q^2+q+1)\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a^2)\beta(a)+H_1\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\\ a\neq b}}((q+1)\alpha(ab)\beta(a)+q\alpha(a^2)\beta(b)) \\ &+\frac{H_2}{6}\sum_{\substack{a,b,c\in\mathbb{F}_p^\times\\ a,b,c\text{ distinct}}}(\beta(a)\alpha(bc)+\beta(b)\alpha(ac)+\beta(c)\alpha(ab))+qP_1\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a^2)\beta(a) \\ &+0+P_3\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\\ a\neq b}}\alpha(ab)\beta(a)-\frac{E_1}{2}\sum_{\substack{w\in\mathbb{F}_{p^2}\setminus\mathbb{F}_p\\ r\in\mathbb{F}_p^\times}}\alpha(\mathrm{Nm}_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}(w))\beta(r)+0\Bigg). \end{aligned}$$

- $\alpha^2\beta\mid_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1.\ m(\pi'_{\alpha,\beta},\rho)=0.$

- $\alpha^2\beta\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$ 但是 $\alpha^2\mid_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1$ 和 $\beta\mid_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1$。

$$\begin{aligned} m(\pi'_{\alpha,\beta},\rho) &= \frac{1}{|\Gamma|}\Bigg(q(q^2+q+1)(p-1)-(2q+1)(p-1)H_1+(p-1)H_2 \\ &\qquad +q(p-1)P_1-(p-1)P_3\Bigg) \\ &= \frac{(q-p)(q-p^2)(q+p^2+p+1)}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}. \end{aligned}$$

- $\alpha^2\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$ 且 $\beta\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$ 但 $\alpha\mid_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1$。

$$\begin{aligned} m(\pi_{\alpha,\beta},\rho) &= \frac{1}{|\Gamma|}\Bigg(q(q^2+q+1)(p-1)+(p-1)(qp-3q-1)H_1-(p-1)(p-3)\frac{H_2}{2} \\ &\qquad +q(p-1)P_1-(p-1)P_3+(p-1)^2\frac{E_1}{2}\Bigg) \\ &= \frac{(q-p)(q(q+p+1)+p^2(p^3-p^2-p-2))}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}. \end{aligned}$$

- $\alpha\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$ 且 $\beta\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$。

$$\begin{aligned} m(\pi_{\alpha,\beta},\rho) &= \frac{1}{|\Gamma|}\Bigg(q(q^2+q+1)(p-1)+(2q+1)(p-1)(p-2)H_1+(p-1)(p-2)(p-3)\frac{H_2}{2} \\ &\qquad +q(p-1)P_1+(p-1)(p-2)P_3-(p-1)(p^2-p)\frac{E_1}{2}\Bigg) \\ &= \frac{(q-p)(q(q+p+1)+p^2(2p-3)(p^2+p+1))}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}. \end{aligned}$$

(6) $\pi_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}$其中 α、β、γ 是 $\mathbb{F}_q^\times$ 的互不相同的特征标。

$$\begin{aligned} m(\pi_{\alpha,\beta,\gamma},\rho) = \frac{1}{|\Gamma|}\Bigg((q+1)(q^2+q+1)\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a)\beta(a)\gamma(a)+H_2\sum_{\substack{a,b,c\in\mathbb{F}_p^\times\\ a,b,c\text{ distinct}}}\alpha(a)\beta(b)\gamma(c) \\ +(q+1)H_1\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\\ a\neq b}}(\alpha(b)\beta(a)\gamma(a)+\beta(b)\gamma(a)\alpha(a)+\gamma(b)\alpha(a)\beta(a)) \\ +(2q+1)P_1\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a)\beta(a)\gamma(a)+P_2\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a)\beta(a)\gamma(a) \\ +P_3\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\\ a\neq b}}(\alpha(b)\beta(a)\gamma(a)+\beta(b)\gamma(a)\alpha(a)+\gamma(b)\alpha(a)\beta(a))+0+0\Bigg). \end{aligned}$$

- $\alpha\beta\gamma\mid_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1$。 $m\ (\pi_{\alpha,\ \beta,\ \gamma,}\ \ \rho)\ =0$。

- $\alpha\beta\gamma\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$ 但 α、β 或 γ 在 $\mathbb{F}_p^\times$. 上的限制都不是平凡特征

$$m(\pi_{\alpha,\beta,\gamma},\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\Bigg((q+1)(q^2+q+1)(p-1)+2(p-1)H_2-3(q+1)(p-1)H_1 \\ +(2q+1)(p-1)P_1+(p-1)P_2-3(p-1)P_3\Bigg) \\ =\frac{(q-p)(q-p^2)(q+p^2+p+2)}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}.$$

- $\alpha\beta\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$ 和 $\gamma\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$ 但 α 和 β 在 $\mathbb{F}_p^\times$ 上都是非平凡的。注意，由于 $m(\pi_{\alpha,\beta,\gamma},\rho)$ 关于 α、β、γ 是对称的，这里的计算对本情形的另外两种排列也成立。

$$m(\pi_{\alpha,\beta,\gamma},\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\Bigg((q+1)(q^2+q+1)(p-1)-(p-1)(p-3)H_2+(q+1)(p-1)(p-4)H_1 \\ +(2q+1)(p-1)P_1+(p-1)P_2+(p-1)(p-4)P_3\Bigg) \\ =\frac{(q-p)(q(q+p+2)+p^2(p^3-p^2-p-3))}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}.$$

- 三个 α、β、γ 在 $\mathbb{F}_p^\times$ 上的限制都是平凡特征。

$$m(\pi_{\alpha,\beta,\gamma},\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\Bigg((q+1)(q^2+q+1)(p-1)+(p-1)(p-2)(p-3)H_2+3(q+1)(p-1)(p-2)H_1 \\ +(2q+1)(p-1)P_1+(p-1)P_2+3(p-1)(p-2)P_3\Bigg) \\ =\frac{(q(q^2+2q+3p^5-p^4-p^3-6p^2-2p)+p^3(p^5-4p^3+p+6))}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}.$$

(7) $\rho_{\alpha,\nu}$ 其中 α 是 $\mathbb{F}_q^\times$ 的一个特征标，而 ν 是 $\mathbb{F}_{q^2}^\times$ 的一个特征标，且满足 $\nu^q\neq\nu$（即它不可分解）。

$$m(\rho_{\alpha,\nu},\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\Bigg((q-1)(q^2+q+1)\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a)\nu(a)+(q-1)H_1\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\\ a\neq b}}\alpha(b)\nu(a)+0 \\ -P_1\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a)\nu(a)-P_2\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(a)\nu(a)-P_3\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\\ a\neq b}}\alpha(b)\nu(a) \\ -\frac{E_1}{2}\sum_{\substack{w\in\mathbb{F}_{p^2}\setminus\mathbb{F}_p\\ r\in\mathbb{F}_p^\times}}\alpha(r)(\nu(w)+\nu(w^p))+0\Bigg).$$

注意，最后一个非零和可以写成 $-E_1\sum_{w\in\mathbb{F}_{p^2}\setminus\mathbb{F}_p}\sum_{r\in\mathbb{F}_p^\times}\alpha(r)\nu(w)$。

- $\alpha\nu\mid_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1$. $m(\rho_{\alpha,\nu},\rho)=0$.

- $\alpha\nu\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$ 但是 $\alpha\mid_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1$ 和 $\nu\mid_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1$。

$$m(\rho_{\alpha,\nu},\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\Big((q-1)(q^2+q+1)(p-1)-(q-1)(p-1)H_1 \\ -(p-1)P_1-(p-1)P_2+(p-1)P_3\Big) \\ =\frac{(q-p)(q-p^2)(q+p^2+p)}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}.$$

- $\alpha\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1,\quad \nu\mid_{\mathbb{F}_{p^3}^\times}\neq 1$ 但 $\nu\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$。

$$m(\rho_{\alpha,\nu},\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\Big((q-1)(q^2+q+1)(p-1)+(q-1)(p-1)(p-2)H_1 \\ -(p-1)P_1-(p-1)P_2-(p-1)(p-2)P_3+(p-1)^2E_1\Big) \\ =\frac{(q-p)(q(q+p)+p^2(p^3-p^2-p-1))}{(p-1)^2p^3(p+1)(p^2+p+1)}.$$

- $\alpha\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$ 和$\nu\mid_{\mathbb{F}_{p^3}^\times}=1$。

$$m(\rho_{\alpha,\nu},\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\Big((q-1)(q^2+q+1)(p-1)+(q-1)(p-1)(p-2)H_1 \\ -(p-1)P_1-(p-1)P_2-(p-1)(p-2)P_3-(p-1)(p^2-p)E_1\Big) \\ =\frac{q(q^2+p^5-p^4-p^3-2p^2)+p^4(-p^4+2p+1)}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}.$$

(8) σ_μ，其中 μ 是 $\mathbb{F}_{q^3}^\times$ 的一个特征标，满足 $\mu^q\neq\mu$。

$$m(\sigma_\mu,\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\Big((q-1)^2(q+1)\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\mu(a)+0+0-(q-1)P_1\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\mu(a)+P_2\sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\mu(a)+0 \\ +0+\frac{E_2}{3}\sum_{w\in\mathbb{F}_{p^3}\setminus\mathbb{F}_p}(\mu(w)+\mu(w^p)+\mu(w^{p^2}))\Big).$$

- $\mu\mid_{\mathbb{F}_p^\times}\neq 1$　$m(\sigma_\mu,\rho)=0$。
- $\mu\mid_{\mathbb{F}_{p^3}^\times}\neq 1$ 但是 $\mu\mid_{\mathbb{F}_p^\times}=1$。

$$m(\sigma_\mu,\rho)=\frac{1}{|\Gamma|}\Big((q-1)^2(q+1)(p-1)-(q-1)(p-1)P_1+(p-1)P_2-(p-1)E_2\Big) \\ =\frac{(q-p)(q-p^2)(q+p^2+p-1)}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}.$$

- $\mu\mid_{\mathbb{F}_{p^3}^\times} = 1$.

$$\begin{aligned} m(\sigma_\mu, \rho) &= \frac{1}{|\Gamma|}\left((q-1)^2(q+1)(p-1) - (q-1)(p-1)P_1 + (p-1)P_2 + (p^3-p)E_2\right) \\ &= \frac{q(q^2-q-p^4-p^3+p) + p^4(p^4-p^2+1)}{p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)}. \end{aligned}$$

参考文献

[1] G. Ahumada。树上的周期函数与塞尔伯格迹公式。巴黎科学院学报，305:709–712，1987。[2] M. I. al Ali、C.H. Hering 和 J. Schäeffer。关于一般线性群 GL(3, *q*) 的共轭类。罗马尼亚数学科学学会数学通报，38 (86)(3/4):105–111，1994。[3] J. Arthur。迹公式导论，克莱数学会议录，第 4 卷，2005。[4] M. G. Martinez。有限上半空间及相关超图。数论杂志，84 360，10 2000 342：–。[5] M. R. Murty。拉马努金图。拉马努金数学学会杂志，18，第 1 期：1–20，2003。[6] P. Sarnak。不定二元二次型的类数。数论杂志，15(2):229–247，1982。[7] A. Selberg。弱对称黎曼空间上的调和分析与不连续群及其在狄利克雷级数中的应用。*J. Indian Math. Soc.*，20:47–87，1956。[8] R. Steinberg。gl(3,q)、gl(4,q)、pgl(3,q) 和 pgl(4,q) 的表示。加拿大数学杂志，3:225 - 235，1951。[9] A. Terras。有限群上的傅里叶分析及其应用。伦敦数学会学生丛书。剑桥大学出版社，1999。[10] D. I. Wallace。$SL(3,\mathbb{Z})\backslash SL(3,\mathbb{R})/SO(3,\mathbb{R})$ 的塞尔伯格迹公式。美国数学会汇刊，345(1):1–36，1994。

10. 附录 A：基本域与轨道和

在本附录中，我们给出基本域的证明，并进行一些轨道和的计算。

• 引理 2.2 的证明

证明。 注意，若 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q\left(\delta^{1/3}\right)$，则 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{H}_q$ 当且仅当 $\{\alpha, \beta, 1\}$ 构成 $\mathbb{F}_q\left(\delta^{1/3}\right)$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上的一组基。

假设 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{H}_q$，且 $x, y, z \in \mathbb{F}_q$ 满足：

$$x \cdot \frac{a\alpha + b\beta + c}{r\alpha + s\beta + t} + y \cdot \frac{d\alpha + e\beta + f}{r\alpha + s\beta + t} + z \cdot 1 = 0.$$

分母 $r\alpha + s\beta + t$ 只有在 $r = s = t = 0$ 时才可能非零（因为 $\alpha, \beta, 1$ 线性无关），但由于 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ r & s & t \end{vmatrix} \neq 0$，这是不可能的。因此我们得到：

$$x(a\alpha + b\beta + c) + y(d\alpha + e\beta + f) + z(r\alpha + s\beta + t) = 0$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ r & s & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

这意味着 $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ r & s & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，因为 $\alpha, \beta, 1$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上线性无关。由于我们的矩阵是非奇异的，因此 $x = y = z = 0 \text{and} \left\{ \frac{a\alpha+b\beta+c}{r\alpha+s\beta+t}, \frac{d\alpha+e\beta+f}{r\alpha+s\beta+t}, 1 \right\}$ 是 $\mathbb{F}_q\left(\delta^{1/3}\right)$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上的一组基，从而证明了 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ 以上述形式作用于 $\mathbb{H}_q$。□

- **第二双曲项。**

$$
\begin{aligned}
I_G(f,\gamma) &= \sum_{t\in G_\gamma\backslash G/K}\ \sum_{u\in K/\{aI\}} f((tu)^{-1}\gamma(tu)) \\
&= \sum_{t\in G_\gamma\backslash \mathbb{H}_q} \frac{|K|}{|\{aI\}|} f(t^{-1}\gamma t) \\
&= \frac{q^3-1}{q-1}\sum_{\substack{x,y,r,s\in\mathbb{F}_q\\ ys\neq 1}} f\left(\begin{bmatrix} \frac{s}{sy-1} & \frac{1}{1-sy} & \frac{r-sx}{sy-1} \\ \frac{1}{1-sy} & \frac{y}{sy-1} & \frac{x-ry}{sy-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \gamma \begin{bmatrix} y & 1 & x \\ 1 & s & r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} p_0\right) + \\
&+ \frac{q^3-1}{q-1}\sum_{\substack{x,r,s\in\mathbb{F}_q\\ s\neq 0}} f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ -s & 1 & xs-r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ s & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} p_0\right) + \\
&+ \frac{q^3-1}{q-1}\sum_{\substack{x,y,r\in\mathbb{F}_q\\ y\neq 0}} f\left(\begin{bmatrix} 1 & -y & -x+yr \\ 0 & 1 & -r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \gamma \begin{bmatrix} 1 & y & x \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} p_0\right) \\
&+ \frac{q^3-1}{q-1}\sum_{x,r\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} p_0\right) \\
&= (q^2+q+1)\sum_{\substack{x,y,r,s\in\mathbb{F}_q\\ ys\neq 1}} f\left(\begin{bmatrix} \frac{b-asy}{1-sy} & \frac{s(a-b)}{sy-1} & \frac{asx-br+c(r-sx)}{sy-1} \\ \frac{y(b-a)}{sy-1} & \frac{a-bsy}{1-sy} & \frac{-ax+bry+c(x-ry)}{sy-1} \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} p_0\right) + \\
&+ (q^2+q+1)\sum_{\substack{x,r,s\in\mathbb{F}_q\\ s\neq 0}} f\left(\begin{bmatrix} a & 0 & ax-cx \\ bs-as & b & -axs+br+c(xs-r) \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} p_0\right) + \\
&+ (q^2+q+1)\sum_{\substack{x,y,r\in\mathbb{F}_q\\ y\neq 0}} f\left(\begin{bmatrix} a & ay-by & ax-byr+c(yr-x) \\ 0 & b & br-cr \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} p_0\right) + \\
&+ (q^2+q+1)\sum_{x,y\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{bmatrix} a & 0 & ax-cx \\ 0 & b & br-cr \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} p_0\right) = (q^2+q+1)(S_1+S_2+S_3+S_4)
\end{aligned}
$$

我们分别化简这四项。注意，代换：

$$\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{asx-br+c(r-sx)}{sy-1} \\ \frac{-ax+bry+c(x-ry)}{sy-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{sy-1}\begin{bmatrix}(a-c)s & c-b \\ c-a & (b-c)y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ r\end{bmatrix}$$

作为 $\begin{vmatrix}(a-c\ s & c-b\,)\,(\ )y \\ c-a & b-c\end{vmatrix} = (a-c)(b-c)(sy-1) \neq 0$ 是可逆的。因此：

$$S_1 = \sum_{x,r\in\mathbb{F}_q}\ \sum_{\substack{y,s\in\mathbb{F}_q\\ ys\neq 1}} f\left(\begin{bmatrix} \frac{b-asy}{1-sy} & \frac{s(a-b)}{sy-1} & x \\ \frac{y(b-a)}{sy-1} & \frac{a-bsy}{1-sy} & r \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} p_0\right) = \sum_{x,r\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{bmatrix} b & 0 & x \\ 0 & a & r \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} p_0\right) +$$

$$+\sum_{\substack{x,y,r\in\mathbb{F}_q\\ y\neq 0}} f\left(\begin{bmatrix} b & 0 & x\\ y(a-b) & a & r\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix} p_0\right)+\sum_{\substack{x,r,s\in\mathbb{F}_q\\ s\neq 0}} f\left(\begin{bmatrix} b & s(b-a) & x\\ 0 & a & r\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix} p_0\right)+\sum_{x,r\in\mathbb{F}_q}\sum_{\substack{y,s\in\mathbb{F}_q^\times\\ ys\neq 1}} f\left(\begin{bmatrix} \frac{b-asy}{1-sy} & \frac{s(a-b)}{sy-1} & x\\ \frac{y(b-a)}{sy-1} & \frac{a-bsy}{1-sy} & r\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix} p_0\right)$$

我们可以像上面一样进行类似的变量变换 $\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{r}\end{bmatrix}$，并得到:

$$S_2=\sum_{\substack{x,r\in\mathbb{F}_q\\ s\in\mathbb{F}_q^\times}} f\left(\begin{bmatrix} a & 0 & x\\ (b-a)s & b & r\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix} p_0\right)$$

$$S_3=\sum_{\substack{x,r\in\mathbb{F}_q\\ y\in\mathbb{F}_q^\times}} f\left(\begin{bmatrix} a & (a-b)y & x\\ 0 & b & r\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix} p_0\right)$$

$$S_4=\sum_{x,r\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{bmatrix} a & 0 & x\\ 0 & b & r\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix} p_0\right)$$

综合以上结果可得，$S_1+S_2+S_3+S_4$ 是以下求和:

$$S_1+S_2+S_3+S_4=Hf\left(\begin{bmatrix} a/c & 0\\ 0 & b/c\end{bmatrix}\right)$$

这是因为在求和 $S_1+S_2+S_3+S_4$ 中，$\left[\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{smallmatrix}\right]$ 的每个共轭恰好在上方的 2×2 块中出现一次。

因此，总贡献为:

$$\frac{1}{6}(q^2+q+1)\frac{(q-1)^3}{(p-1)^3}\sum_{\substack{a,b,c\in\mathbb{F}_p^\times\\ a\neq b\neq c}} Hf\left(\begin{bmatrix} a/c & 0\\ 0 & b/c\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{6}(q^2+q+1)\frac{(q-1)^4}{(p-1)^3}\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_p^\times\setminus\{1\}\\ a\neq b}} Hf\left(\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}(q^3-1)\frac{(q-1)^3}{(p-1)^3}\sum_{\{a,b\}\subseteq\mathbb{F}_p^\times\setminus\{1\}} Hf\left(\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}\right)$$

- **命题 5.1 的证明**

证明。 首先证明每个代表元的唯一性。假设存在 $m\in G_\gamma$使得

$$m\cdot(u_1\delta^{1/3},v_1\delta^{1/3}+\delta^{2/3})=(u_2\delta^{1/3},v_2\delta^{1/3}+\delta^{2/3}).$$

那么我们推出 $y=0$，从而得到 $u_1=u_2$。我们还看到 $c=d$，这意味着 $v_1=v_2$。接下来，假设

$$m\cdot(u_1\delta^{1/3},v_1\delta^{1/3}+\delta^{2/3})=(\delta^{1/3}+u_2\delta^{2/3},\delta^{1/3}).$$

但这立即推出 $c=0$，矛盾。同理,

$$m\cdot(\delta^{1/3}+u_1\delta^{2/3},\delta^{1/3})=(\delta^{1/3}+u_2\delta^{2/3},\delta^{1/3}),$$

直接推出 $u_1=u_2$。

为证明这个基本域的完备性，任取一个元素 $(\alpha,\beta)\in\mathbb{H}_q$。若 $\beta_3\neq 0$，则注意到

$$\begin{bmatrix}1 & \alpha_3 & \alpha_1\\ 0 & \beta_3 & \beta_1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\left((\alpha_2-\alpha_3\frac{\beta_2}{\beta_3})\delta^{1/3},\frac{\beta_2}{\beta_3}\delta^{1/3}+\delta^{2/3}\right)=(\alpha,\beta).$$

否则，我们必有 $\beta_2\neq 0$，此时

$$\begin{bmatrix}1 & \alpha_2-1 & \alpha_1\\ 0 & \beta_2 & \beta_1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\left(\delta^{1/3}+\alpha_3\delta^{2/3},\delta^{1/3}\right)=(\alpha,\beta).$$

□

- **第一抛物项**。

$$\begin{aligned}
I_G(f,\gamma)&=\sum_{t\in G_\gamma\backslash G/K}\sum_{u\in K/\{aI\}}f((tu)^{-1}\gamma(tu))\\
&=\sum_{t\in G_\gamma\backslash\mathbb{H}_q}\frac{|K|}{|\{aI\}|}f(t^{-1}\gamma t)\\
&=\frac{q^3-1}{q-1}\left(\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{F}_q\\ u\neq 0}}f\left(\begin{bmatrix}-\frac{v}{u} & 1 & 0\\ \frac{1}{u} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\gamma\begin{bmatrix}0 & u & 0\\ 1 & v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}p_0\right)+\sum_{u\in\mathbb{F}_q^\times}f\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{u} & -\frac{1}{u} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\gamma\begin{bmatrix}u & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}p_0\right)\right)\\
&=(q^2+q+1)\left(\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{F}_q\\ u\neq 0}}f\left(\begin{bmatrix}a & 0 & -\frac{av}{u}\\ 0 & a & \frac{a}{u}\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}p_0\right)+\sum_{u\in\mathbb{F}_q^\times}f\left(\begin{bmatrix}a & 0 & \frac{a}{u}\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}p_0\right)\right)\\
&=(q^2+q+1)\left(\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{F}_q\\ u\neq 0}}f\left(-\frac{v}{u}+\delta^{2/3},\frac{1}{u}+\delta^{1/3}\right)+\sum_{u\in\mathbb{F}_q^\times}f\left(\delta^{2/3}+\frac{1}{u},\delta^{1/3}\right)\right)\\
&=(q^2+q+1)\left(Hf(I)-f(p_0)\right)
\end{aligned}$$

- **命题 5.2 的证明**。首先，我们验证：若 $m\in B$ 满足 $mx=y$，对 $x,y\in B\backslash\mathbb{H}_q$，则 $x=y$。假设存在 $m\in B$ 使得

$$m(\delta^{1/3},v_1\delta^{1/3}+\delta^{2/3})=(\delta^{1/3},v_2\delta^{1/3}+\delta^{2/3}).$$

于是我们立即得到 $c/a=1$，从而 $v_1=v_2$。最后，也很容易看出，我们无法利用 B 在 $B\backslash\mathbb{H}_q$的不交并中将元素从一个集合移至另一个集合。

接下来，我们验证对于任意元素 $(\alpha,\beta)\in\mathbb{H}_q$（其中 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2\delta^{1/3}+\alpha_3\delta^{2/3}$且 $\beta=\beta_1+\beta_2\delta^{1/3}+\beta_3\delta^{2/3}$），存在 $m\in B$ 和 $x\in B\backslash\mathbb{H}_q$，使得 $mx=(\alpha,\beta)$。首先假设 $\beta_3\neq 0$。

$$\begin{bmatrix}\alpha_2-\alpha_3\frac{\beta_2}{\beta_3} & \alpha_3 & \alpha_1\\ 0 & \beta_3 & \beta_1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\left(\delta^{1/3},\frac{\beta_2}{\beta_3}\delta^{1/3}+\delta^{2/3}\right)=(\alpha,\beta)$$

如果 $\beta_3 = 0$, 则

$$\begin{bmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & \beta_2 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\delta^{2/3}, \delta^{1/3}\right) = (\alpha, \beta)$$

- **第二抛物项。**

$$\begin{aligned}
I_G(f,\gamma) &= \sum_{t\in G_\gamma\backslash G/K} \sum_{u\in K/\{aI\}} f((tu)^{-1}\gamma(tu)) \\
&= \sum_{t\in G_\gamma\backslash \mathbb{H}_q} \frac{|K|}{|aI|} f(t^{-1}\gamma t) \\
&= \frac{q^3-1}{q-1}\left(f\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\gamma\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}p_0\right) + \sum_{v\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{bmatrix}-v&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\gamma\begin{bmatrix}0&1&0\\1&v&0\\0&0&1\end{bmatrix}p_0\right)\right) \\
&= (q^2+q+1)\left(f\left(\begin{bmatrix}a&a&0\\0&a&a\\0&0&a\end{bmatrix}p_0\right) + \sum_{v\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{bmatrix}-av+a&-av^2&a\\a&av+a&0\\0&0&a\end{bmatrix}p_0\right)\right) \\
&= (q^2+q+1)\left(f\left(\delta^{2/3}+\delta^{1/3}, \delta^{1/3}+1\right) + \sum_{v\in\mathbb{F}_q} f\left((1-v)\delta^{2/3} - v^2\delta^{1/3} + 1, \delta^{2/3} + (v+1)\delta^{1/3}\right)\right)
\end{aligned}$$

- **第三抛物项。**

$$G_\gamma\backslash\mathbb{H}_q = \{(\delta^{1/3} + u\delta^{2/3} + v, r\delta^{2/3} + s) : r \neq 0\} \sqcup \{(\delta^{2/3} + v, r\delta^{1/3} + s) : r \neq 0\}.$$

$$\begin{aligned}
I_G(f,\gamma) &= \sum_{t\in G_\gamma\backslash G/K} \sum_{u\in K/\{aI\}} f((tu)^{-1}\gamma(tu)) \\
&= \sum_{t\in G_\gamma\backslash \mathbb{H}_q} \frac{|K|}{|\{aI\}|} f(t^{-1}\gamma t) \\
&= \frac{q^3-1}{q-1}\left(\sum_{\substack{u,v,r,s\in\mathbb{F}_q \\ r\neq 0}} f\left(\begin{bmatrix}0&\frac{1}{r}&-\frac{s}{r}\\1&-\frac{u}{r}&\frac{su}{r}-v\\0&0&1\end{bmatrix}\gamma\begin{bmatrix}u&1&v\\r&0&s\\0&0&1\end{bmatrix}p_0\right) + \sum_{\substack{v,r,s\in\mathbb{F}_q \\ r\neq 0}} f\left(\begin{bmatrix}1&0&-v\\0&\frac{1}{r}&-\frac{s}{r}\\0&0&1\end{bmatrix}\gamma\begin{bmatrix}1&0&v\\0&r&s\\0&0&1\end{bmatrix}p_0\right)\right) \\
&= (q^2+q+1)\Bigg(\sum_{\substack{u,v,r,s\in\mathbb{F}_q \\ r\neq 0}} f\left(\begin{bmatrix}\frac{a(r+u)}{r}&\frac{a}{r}&\frac{a(s+v)-bs}{r}\\-\frac{au^2}{r}&\frac{a(r-u)}{r}&-\frac{-arv+asu+auv+brv-bsu}{r}\\0&0&b\end{bmatrix}p_0\right) \\
&\quad + \sum_{\substack{v,r,s\in\mathbb{F}_q \\ r\neq 0}} f\left(\begin{bmatrix}a&0&v(a-b)\\\frac{a}{r}&a&\frac{a(s+v)-bs}{r}\\0&0&b\end{bmatrix}p_0\right)\Bigg).
\end{aligned}$$

在两个求和中使用以下变量替换:

$$\begin{bmatrix}\tilde{v}\\\tilde{s}\end{bmatrix} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix}a & (a-b)\\(a-b)r-au & (b-a)u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\s\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}v^*\\s^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a-b & 0\\a/r & (a-b)/r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\s\end{bmatrix}$$

两个行列式均为 $(a-b)^2/r \neq 0$，因此这些变换可逆。由此可知，上述求和可化为 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 中抛物共轭类的 horocycle 变换。

$$I_G(f,\gamma) = (q^2+q+1)Hf\left(\begin{bmatrix} a/b & 1 \\ 0 & a/b \end{bmatrix}\right)$$

- **命题 6.1 的证明。**

我们先证明，G_γ在 $\mathbb{H}_q$ 上的每个轨道都至少包含一个上述形式的元素。设 $z \in \mathbb{H}_q$，并写作：

$$z = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} p_0$$

我们希望找到不全为零的 r、$s \in \mathbb{F}_q$ 以及 $t \in \mathbb{F}_q^\times$，使得：

$$\begin{bmatrix} r & s\xi & 0 \\ s & r & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & u & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对某些 $v \in \mathbb{F}_q^\times$、$u$、$x$、$y \in \mathbb{F}_q$成立。这相当于在 $\mathbb{F}_q$上求解以下关于 s、r、t的方程组：

$$\begin{aligned} sa + rd &= 0 \\ sb + re &= 1 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

根据假设，行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$ 非零，因此上述方程组在 $\mathbb{F}_q$上关于 s、r、t有唯一解；此外，s 和 r不能同时为零。

现在我们需要证明定义域不包含任何轨道重复。假设：

$$\begin{bmatrix} r & s\xi & 0 \\ s & r & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & u & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v' & u' & x' \\ 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将上述方程重新写出，我们得到：

$$\begin{aligned} sv &= 0 \\ su + r &= 1 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

由于 $v \neq 0$，我们得到 $s = 0$、$r = 1$ 和 $t = 1$，因此左边的第一个矩阵是恒等矩阵，这意味着 $x = x'$、$y = y'$、$u = u'$ 和 $v = v'$，证明得证。

- **第二椭圆项。**

$$I_G(f,\gamma) = \frac{(q-1)(q^2-1)}{(p-1)(p^2-1)} \cdot \frac{q^3-1}{q-1} \sum_{\substack{x,y,u \in \mathbb{F}_q \\ v \in \mathbb{F}_q^\times}} f\left(\begin{bmatrix} v & u & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k & l\xi & 0 \\ l & k & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & u & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} p_0\right) =$$

$$= \frac{(q^3-1)(q^2-1)}{(p-1)(p^2-1)} \sum_{\substack{u\in\mathbb{F}_q \\ v\in\mathbb{F}_q^\times}} \sum_{x,y\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{bmatrix} -lu+k & \frac{l\xi-lu^2}{v} & \frac{x(-lu+k)+y(l\xi-ku)+m(uy-x)}{v} \\ vl & lu+k & lx+ky-my \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} p_0\right)$$

Set:

$$\tilde{x} = \frac{(k-m-lu)}{v}\cdot x + \frac{(m-k)u+l\xi}{v}\cdot y$$
$$\tilde{y} = lx + (k-m)y$$

与此变量替换相对应的行列式为 $\left((k-m)^2 - l^2\xi\right)/v$。它只有在 $k-m=0$ 和 $l=0$ 时才可能为零，因为 ξ 不是平方数；但这样一来， γ 就会与某个对角矩阵相似，这与我们的假设矛盾。因此，轨道和可简化为：

$$I_G(f,\gamma) = \frac{(q^3-1)(q^2-1)}{(p-1)(p^2-1)} \sum_{\substack{u\in\mathbb{F}_q \\ v\in\mathbb{F}_q^\times}} \sum_{\tilde{x},\tilde{y}\in\mathbb{F}_q} f\left(\begin{bmatrix} -lu+k & \frac{l\xi-lu^2}{v} & \tilde{x} \\ vl & lu+k & \tilde{y} \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} p_0\right)$$

最后，注意到左上角的 2×2 块与 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 上的椭圆矩阵 $\left[\begin{smallmatrix} k & l\xi \\ l & k \end{smallmatrix}\right]$ 相似。因此我们得到

$$I_G(f,\gamma) = \frac{(q^3-1)(q^2-1)}{(p-1)(p^2-1)} Hf\left(\begin{bmatrix} k/m & l\xi/m \\ l/m & k/m \end{bmatrix}\right).$$

布朗大学数学系，美国罗得岛州普罗维登斯，邮编 02912电子邮件地址：daksh_aggarwal@brown.edu

西安大略大学数学系，加拿大安大略省伦敦，邮编 N6A 5B7电子邮件地址：aghorba@uwo.ca

西安大略大学数学系，加拿大安大略省伦敦，邮编 N6A 5B7电子邮件地址：masoud@uwo.ca

多伦多大学数学系，加拿大安大略省多伦多，邮编 M5S 2E4电子邮件地址：jiyuan.lu@mail.utoronto.ca

剑桥大学应用数学与理论物理系，英国剑桥，邮编 CB3 0WA电子邮件地址：bn273@cam.ac.uk

数学系，多伦多大学，多伦多，安大略省，加拿大，M5S 2E4电子邮件地址：cyu@math.toronto.edu