arXiv:2301.01655v1 [math.NA] 4 Jan 2023

基于复几何光学的快速绝对三维电阻抗断层成像：实验水槽数据

S. J.HAMILTON、P. A. Muller、D. Isaacson、V. Kolehmainen、J. Newell、O. Rajabi Shishvan、G. Saulnier 和 J. Toivanen

Abstract. *Objective:* 展示首批基于复几何光学的三维绝对电阻抗断层成像重建结果，这些结果来自实验水槽数据。 *Approach:* 将用于绝对电阻抗断层成像的基于 CGO 的方法与传统的全变分正则化非线性最小二乘重建方法进行比较。此外，通过考虑区域形状建模不正确的情况，开展了额外的稳健性测试。 *Main Results:* 基于 CGO 的方法速度快，且对区域建模错误表现出很强的稳健性，其表现可与经典差分电阻抗断层成像相媲美；与全变分正则化非线性最小二乘参考重建相比，边界伪影更少。 *Significance:* 本研究首次展示了基于复几何光学的全三维绝对电阻抗断层成像重建，并将其与全变分正则化的绝对重建进行比较。重建速度（1–5 秒）和质量令人鼓舞，为绝对电阻抗断层成像的后续研究带来希望。

1. Introduction

本文的主要目标是展示使用基于复几何光学的重建算法，从自适应电流断层成像系统 ACT 5 [65] 在水槽表面电极阵列上测得的实验电阻抗断层成像数据中，生成水槽内部电导率三维绝对（静态）图像的可行性、速度和稳健性。本研究的主要贡献在于，首次采用基于复几何光学的方法，从实验测得的三维电阻抗断层成像数据生成电导率绝对（静态）图像，并研究这些方法在存在建模误差时的稳健性。

“绝对”或“静态”电导率图像，是利用在一个时间点 [24]对物体表面进行一组实验测量所生成的物体内部电导率图像。相反，“动态”或“时间差分”成像则使用在两个不同时间测得的两组数据，生成电导率在这两个测量时间之间发生的变化图像。本文展示了使用基于复几何光学的算法从三维实验数据生成的这两类图像。

电阻抗断层成像的应用始于一个多世纪前的地球物理勘探 [4, 44] ，此后已拓展至多个领域，包括流体和气体输运 [26, 40, 80], 以及生物医学成像 [2, 7, 20, 29, 35, 36, 42, 70]。如今，市面上已有可实时监测肺功能的系统，临床试验也正在进行，以确定这些系统在多大程度上可用于指导机械通气 [12, 73, 75]。这些系统通常

Key words and phrases. 电阻抗断层成像、绝对成像、电导率。S. J. Hamilton 任职于马凯特大学数学与统计科学系（美国威斯康星州密尔沃基，邮编 53233），电子邮件：sarah.hamilton@marquette.edu。D. Isaacson 任职于伦斯勒理工学院数学系（美国纽约州特洛伊，邮编 12180）。V. Kolehmainen 和 J. Toivanen 任职于东芬兰大学应用物理系（芬兰库奥皮奥，邮编 FI-70210）。P. A. Muller 任职于维拉诺瓦大学数学与统计系（美国宾夕法尼亚州维拉诺瓦，邮编 19085）。J. Newell 任职于伦斯勒理工学院生物医学工程系（美国纽约州特洛伊，邮编 12180）。O. Rajabi Shishvan 和 G. Saulnier 任职于纽约州立大学奥尔巴尼分校电气与计算机工程系（美国纽约州奥尔巴尼，邮编 12222）。J. Toivanen 任职于东芬兰大学应用物理系（芬兰库奥皮奥，邮编 FI-70210）。[1]

生成并显示两种状态之间电导率差异的二维图像，例如充气肺与排气肺的图像，以利用动态（差分）成像方法和算法 [2, 29]。改善癌症和中风诊断的需求推动了能够对三维绝对或静态内部电导率和介电常数成像的系统与方法的发展 [17, 18, 33, 43, 45]。有兴趣的读者可参阅 [15] ，进一步了解电阻抗断层成像的应用。

大多数绝对（静态）电阻抗断层成像重建工作，主要是求解简化的线性化问题，或迭代求解基于优化的方法；后者需要反复求解正问题，而在网格非常密集时，计算成本可能很高。基于 CGO 的方法是直接方法，因为它们不需要迭代。这些方法能够求解完整的非线性数学逆问题，也不需要反复求解正问题，例如通过有限元法（FEM）求解。D-bar 反演算法是二维中特定类型的基于 CGO 的反演算法，已用于根据水槽上的实验数据，实时生成二维绝对图像和差分图像；也用于实验室和临床环境下的人体差分成像。有关二维 D-bar 方法及其应用的最新综述，参见 [55] ；其理论基础见 [59]。

在三维情形下，D-bar 型方程的解的存在性与唯一性 [58, 63] 可以得到证明，但重建算法所依据的构造性证明并未直接使用三维 D-bar 方程，而是利用高频（非物理）极限，将非线性散射数据与线性傅里叶数据联系起来。三维基于 CGO 的方法在数值实现方面的进展较新。文献 [34]首次介绍了三维基于 CGO 的方法在模拟电极数据上的数值实现，其中电流注入发生在球体表面。文献 [47]给出了一种三维基于 CGO 的反演算法、正则化方案、在特定假设下的严格稳定性证明，以及若干重建示例；这些示例根据整个球体表面（无电极）上的数值模拟狄利克雷数据，重建球体内部的电导率。迄今为止，三维基于 CGO 的算法能否用于实验数据仍是一个悬而未决的问题。本文通过证明能够从长方体表面 32 个电极测得的实验数据中快速、稳健地恢复电导率，对这一问题作出肯定回答；本文的工作建立在文献 [34]的基础上。

在 [10, 32, 36, 42]中已经证明，可以构建电阻抗断层成像（EIT）系统，生成胸腔内部的三维静态和动态图像，显示心脏和肺部区域，以及这些区域因通气和灌注产生的变化。这些系统采用了线性化方法和迭代方法。前者速度快但准确性较低，后者速度较慢。近期的三维复几何光学（CGO）反演算法及其分析结果表明，将其应用于合成数据或模拟数据时，有望实现更快且更准确的处理 [23, 34, 47]。本文将在实验电阻抗断层成像数据上测试这些算法的性能。

本文比较了以下利用由ACT5成像系统采集的实验水槽数据生成三维静态图像的方法：

- 一种基于Calder´on最初提议、将复几何光学（CGO）思想引入该领域的CGO线性化方法 [13]。我们将该算法称为Calder´on方法。
- 两种基于 CGO 的方法，用于求解完整的非线性反演问题，分别基于 Sylvester 和 Uhlmann 最初的唯一性证明，以及 Nachman 在 [58, 71] 中给出的构造性唯一性证明。第一种是$\mathbf{t_{exp}}$ 算法，第二种称为$\mathbf{t}^0$, [22, 34] ，二者都是对原始构造性证明的简化。
- 一种更传统的迭代反演方法，基于优化并采用全变差（TV）正则化。

使用 ACT5系统，在矩形水槽的六个表面上安装的 32 个电极测量了电阻抗断层成像数据。该系统能够自适应地确定施加到全部 32 个电极上的电流模式，使这些电极上的电压与所施加的电流成正比。这些“特征电流”构成一个离散正交集，并提供更优的电压数据

以便在可施加到水槽的电流或功率有限时，重建水槽内部的电导率。自适应电流断层成像系统的理论见 [14, 30, 31, 38, 52, 53, 60, 68]。

本文其余部分安排如下。第 2 节简要回顾电阻抗断层成像的数学基础，并介绍本文采用的方法：CGO 和参考重建算法、ACT5 数据采集的实验设置、将要探讨的鲁棒性测试，以及用于评估结果的指标。结果部分（第 3 节）展示了在正确和错误域建模下恢复的电导率的切片、三维和等值面渲染。第 4 节讨论结果，第 5 节给出结论。

2. Methods

在这项工作中，我们将三种基于 CGO 的方法（Calder´on 方法、$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ 方法和 $\mathbf{t}^0$ 方法）与一种更常见的迭代全变分（TV）正则化非线性最小二乘法进行比较，用于绝对电阻抗断层成像重建。作为比较，我们还纳入了这些基于 CGO 的方法的时差电阻抗断层成像图像，并将其与线性化差分成像方法进行比较。我们首先简要回顾这一数学问题。

2.1. 数学背景。 当能够以无限精度测量物体边界各处的数据时，重建其内部电导率的数学问题，目前被许多数学界人士称为“Calder´on 问题”，因为 A. Calder´on 曾将这个逆问题表述如下 [13]：在二维或更高维空间中，能否根据在物体表面 $\partial\Omega$ 上进行的所有可能电学测量，求出物体 Ω 内部的电导率 $\sigma(x)$？这里，假设物体内部的电压或势 $u(x)$ 由施加的表面电流密度 $j(x)$ 产生，并满足麦克斯韦方程组在低频下的如下近似形式。我们将其称为带诺伊曼边界条件的电导率方程：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma(x) \nabla u(x) &= 0, \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ \sigma(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu(x)} &= j(x), \qquad x \in \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

这里，$\nu = \nu(x)$ 表示表面 $x \in \partial\Omega$ 处指向外侧的单位法向量，并且 $\frac{\partial u(x)}{\partial \nu(x)} = \nu(x) \cdot \nabla u(x)$。我们用 $\mathcal{R}_\sigma$ 表示从施加的电流密度到表面所产生电压的映射，称为“诺伊曼到狄利克雷”（ND）映射，其中 $\mathcal{R}_\sigma j \equiv u(x)$ 对于 $x \in \partial\Omega$ 成立，而 $u(x)$ 满足带有诺伊曼数据 $j(x)$ 的电导率方程 (2.1)。

Calder´on 问题也可以表述为以下数学问题：给定诺伊曼-狄利克雷映射或算子 $\mathcal{R}_\sigma$，或者等价地，给定其逆——狄利克雷-诺伊曼（DN）算子 $\Lambda_\sigma := \mathcal{R}_\sigma^{-1}$，能否求出 $\sigma(x)$？Calder´on 表明，如果 $\sigma(x)$与某个常数相差不大，就可以从诺伊曼-狄利克雷映射中恢复它的一个近似值。他的简短论文巧妙地通过引入特殊解 $e^{\zeta \cdot x}$，展示了如何利用傅里叶变换实现这一点。这些特殊解满足具有常数电导率的电导率方程，即拉普拉斯方程，其中 ζ是一个满足 $\zeta \cdot \zeta = 0$的复值向量。在二维或更高维度中，只要电导率接近常数，这种方法就可行；它催生了本文所述的 Calder´on 方法，也促成了更强大的方法：通过将 Calder´on 的解推广为我们如今所称的复几何光学（CGO）解，求解完整的非线性问题。这类解由 [71, 72]在其里程碑式论文中首次提出；该论文证明，三维或更高维度中的 Calder´on 问题有唯一解，并将反演问题归结为极限 $|\zeta| \to \infty$下的傅里叶变换。下文 § 2.3 中介绍的$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ 和$\mathbf{t}^0$ 方法遵循这一策略，不同于 [55]中介绍的二维 D-bar 方法。在二维中，这一策略行不通，因为 CGO 解是通过求解一个涉及复向量 ζ 中的 D-bar 算子的一阶线性偏微分方程，并令其趋于 0 而得到的。

利用这些 CGO 解以及源自逆散射理论的 D-bar 方法构造性证明，并将其应用于散射和声学的工作，见 [58,63]。

CGO 方法被用于证明更困难的二维情形下的唯一性；在 [59] 中针对 $\sigma \in \mathcal{C}^2(\Omega)$，以及后来在 [5] 中针对 $\sigma \in L^\infty(\Omega)$，都详细给出了重建电导率的构造性方法。其他在关于电导率的各种假设下证明唯一性的开创性工作包括 [25,48,50,63,64,74]。关于 Calder´on 问题分析及数值分析领域最新进展的大量参考文献，可见 [11,23,28,56,77]； [47,55]。

接下来，我们将关注这样一个问题：如何根据有限次、且精度有限的实验测量，重建内部电导率的近似值。不幸的是，这是一个病态问题，而且与纯数学问题不同，它没有唯一解。尽管如此，有时仍可以用有限个自由度（即体素）重建出有用的内部电导率近似值。我们将通过根据实验数据生成图像，并将其与水槽内部的实际电导率进行比较来加以说明。

对于表面上有 L 个电极的物体，电阻抗断层成像问题是根据在这 L 个电极上进行的所有可能电学测量，求出内部电导率的近似值。具体而言，我们假设向这些电极施加 $L-1$ 组线性独立的电流模式， $\vec{I}^{(k)}$ $k=1$，2，……，$L-1$，并测量由此产生的电压模式， $\vec{V}^{(k)}$，其中 $I_\ell^{(k)}$ 和 $\vec{V}$ $^{(k)}$ $_\ell$ 分别表示在第 k^{th} 组模式下施加到第 ℓ^{th} 个电极的电流和测得的电压，适用于 $\ell=1$，2，……， L。根据电荷守恒以及我们对接地的选择，我们假设

$$\sum_{\ell=1}^{L} I_\ell^{(k)} = \sum_{\ell=1}^{L} V_\ell^{(k)} = 0.$$

k^{th} 电压或势 $u^{(k)}(x)$ 在体内产生，其由电导率方程 $\nabla \cdot \sigma \nabla u^{(k)} = 0$ 和“完全电极模型”决定：[16,69] 其中：

$$\begin{aligned} \int_{e_\ell} \sigma(x) \frac{\partial u^{(k)}(x)}{\partial \nu(x)} dS(x) = I_\ell^{(k)}, \qquad & x \in e_\ell \\ \sigma(x) \frac{\partial u^{(k)}(x)}{\partial \nu(x)} = 0, \qquad & x \notin \bigcup_{\ell=1}^{L} e_\ell \\ u^{(k)}(x) + z_\ell \sigma(x) \frac{\partial u^{(k)}(x)}{\partial \nu(x)} = V_\ell^{(k)}, \qquad & x \in e_\ell. \end{aligned} \tag{2.2}$$

这里， z_ℓ 是 ℓ^{th} 电极上的有效接触阻抗（或表面阻抗）。所用的电流模式是电流-电压映射的特征向量；该映射是均匀盐水槽的诺伊曼-狄利克雷映射的矩阵近似。对于静态/绝对成像，这些模式通过对均匀水槽进行模拟以数值方式求得；对于差分/动态成像，则通过自适应方法在实验中求得。由电导率分布 σ 对应的诺伊曼-狄利克雷映射的矩阵近似记为矩阵 $\mathbf{R}_\sigma$，其中 $\mathbf{R}_\sigma \vec{I}^{(k)} = \vec{V}^{(k)}$，并定义 $\mathbf{R}_\sigma \vec{1} = \vec{0}$。这里，向量$\vec{1}$、 $\vec{0}$分别表示所有分量均为 1 或 0 的向量。基于 CGO 的方法中所用的狄利克雷-诺伊曼映射的离散类比为 $\mathbf{L}_\sigma := \mathbf{R}_\sigma^{-1}$。

2.2. Calder´on 的方法。 遵循 Calder´on 的原始论文 [13], ，Calder´on 的方法通过电导率的傅里叶变换来近似电导率 $\sigma(x)$。下面简要介绍该方法，更多细节请参阅 [9,13,34,57] 。Calder´on 的方法假设电导率相对于常数背景 σ_b 存在小扰动 $\delta\sigma(x)$，即 $\sigma(x) = \sigma_b + \delta\sigma(x)$。本文假设背景电导率 $\sigma_b = 1$。如果背景常数不为 1，则可按照 [34,39] 中的方法对问题进行缩放和反缩放。

文献 [34],中所述的 Calder´on 三维方法分为以下三个步骤：

步骤 1： 利用狄利克雷-诺伊曼映射 Λ_σ 和 Λ_1，通过以下方式近似小幅电导率扰动的傅里叶变换：$\widehat{\delta\sigma}(z)$

$$\widehat{\delta\sigma}(z) \approx \hat{\mathrm{F}}(z) := -\frac{1}{2\pi^2|z|^2}\int_{\partial\Omega} e^{\pi i(z\cdot x)+\pi(a\cdot x)}\left(\Lambda_\sigma - \Lambda_1\right) e^{\pi i(z\cdot x)-\pi(a\cdot x)} dS(x), \tag{2.3}$$

其中 z 和 a 满足

$$z, a \in \mathbb{R}^3, |z| = |a|, \text{ and } z\cdot a = 0, \tag{2.4}$$

且 Λ_1 是常数电导率为 1 时的狄利克雷-诺伊曼映射。

步骤 2： 对以下内容进行逆傅里叶变换 $\hat{\mathrm{F}}(z)$：

$$\delta\sigma^{\mathbf{CAL}}(x) \approx \mathcal{F}^{-1}\{\hat{\mathrm{F}}(z)\}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathrm{F}}(z) e^{-2\pi i(x\cdot z)} dz. \tag{2.5}$$

步骤 3： 将背景值加到扰动上，以恢复近似电导率 $\sigma^{\mathbf{CAL}}(x)$：

$$\sigma^{\mathbf{CAL}}(x) = \sigma_b + \delta\sigma^{\mathbf{CAL}}(x). \tag{2.6}$$

Calder´on 方法中傅里叶变换的定义不同于下文介绍的$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ 和$\mathbf{t}^0$ 方法所采用的定义。不过，每种方法都与其自身的定义一致，也与该方法相关文献中的定义一致。

在本文中，我们在球面傅里叶坐标中计算 $\hat{\mathrm{F}}(z)$。因此，我们选择

$$z = |z|(\cos\tilde{\phi}\sin\tilde{\theta}, \sin\tilde{\phi}\sin\tilde{\theta}, \cos\tilde{\theta}) \text{ and } a = |z|(\cos\tilde{\phi}\cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\phi}\cos\tilde{\theta}, -\sin\tilde{\theta}),$$

其中 $|z| \geq 0$、$0 \leq \phi \leq 2\pi$ 和 $0 \leq \theta \leq \pi$ 满足 (2.4)。于是，(2.5) 中的逆傅里叶变换变为

$$\delta\sigma^{\mathbf{CAL}}(x) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |z|^2 \sin\tilde{\theta}\hat{\mathrm{F}}(|z|,\tilde{\phi},\tilde{\theta}) e^{-2\pi i(x\cdot z)} d\tilde{\theta} d\tilde{\phi} d|z|. \tag{2.7}$$

此外，我们还实现了光滑化函数 $\hat{\eta}\begin{pmatrix}z\\y\end{pmatrix}$ 的使用，该函数由 [13] 引入，并针对某个参数 $y \in \mathbb{R}$，以减少 $\sigma(x)$ 中跳跃间断导致的吉布斯现象，同时恢复 $\delta\sigma^{\mathbf{CAL}}$

$$\delta\sigma^{\mathbf{CAL}}(x) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |z|^2 \sin\tilde{\theta}\hat{\mathrm{F}}(|z|,\tilde{\phi},\tilde{\theta})\hat{\eta}\left(\frac{z}{y}\right) e^{-2\pi i(x\cdot z)} d\tilde{\theta} d\tilde{\phi} d|z|. \tag{2.8}$$

我们实现了与 [9, 34], 中相同的光滑化函数

$$\hat{\eta}\left(\frac{z}{y}\right) = e^{-\pi t|z|^2}, \tag{2.9}$$

其中，$y = 1/\sqrt{t}$ 和 t 起平滑参数的作用，t 值越大，重建结果越平滑，在 σ 中不连续点处的跳变也越小 (x)。

由于噪声会导致 (2.3) 在较大的 $|z|$ 处发散，我们采用非均匀截断正则化策略。文献 [46], 证明，类似的正则化策略对于二维 D-bar 方法是稳定的；该文还指出，非均匀截断也能产生可靠的重建。在我们的情形中，我们将首先计算外半径为 T_{z_2} 的范围内 $|z|$ 对应的 $\hat{\mathrm{F}}(z)$。我们保留实部和虚部振幅均低于某一阈值的 $\hat{\mathrm{F}}(z)$ 值，该阈值由较小半径 $|z| \leq T_{z_1}$ 内 F 的振幅确定；其他位置的 F 均设为 0。两个半径均通过经验确定。内半径 T_{z_1} 选取为 z 空间中的一个区域，在该区域内噪声不会导致 F 发散；而 T_{z_2} 的选择则旨在尽可能保留 F 中合理的信息，同时不在 F 的非零区域引入空洞。因此，我们计算的截断 F 为

$$\hat{\mathrm{F}}_R(z) = \begin{cases} \hat{\mathrm{F}}(z), & \text{if } |z| \le T_{z_2}, \text{ and } |\mathrm{Re}(\hat{\mathrm{F}}(z))| \le \max\limits_{|z|\le T_{z_1}} |\mathrm{Re}(\hat{\mathrm{F}}(z))|,\ |\mathrm{Im}(\hat{\mathrm{F}}(z))| \le \max\limits_{|z|\le T_{z_1}} |\mathrm{Im}(\hat{\mathrm{F}}(z))| \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \tag{2.10}$$

利用截断的 F，对方程 (2.8) 按径向变量进行截断，从而得到近似

$$\delta\sigma_R^{\mathbf{CAL}}(x) = \int_0^{T_{z_2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |z|^2 \sin\tilde{\theta}\, \hat{\mathrm{F}}_R(|z|,\tilde{\phi},\tilde{\theta}) e^{-\pi t|z|^2} e^{-2\pi i(x\cdot z)} d\tilde{\theta} d\tilde{\phi} d|z|. \tag{2.11}$$

对于本文展示的差分图像，我们仅执行该方法的步骤 1 和 2，并在计算 (2.11) 之前，将 (2.3) 中的 Λ_1 替换为参考 DN 映射 $\Lambda_{\sigma_{\mathrm{ref}}}$。因此，绝对图像的流程为

$$(\Lambda_\sigma, \Lambda_1) \xrightarrow{1} \hat{\mathrm{F}}(z) \xrightarrow{2} \delta\sigma^{\mathbf{CAL}} \xrightarrow{3} \sigma^{\mathbf{CAL}}$$

而本文中差分图像的流程为

$$\left(\Lambda_\sigma, \Lambda_{\sigma_{\mathrm{ref}}}\right) \xrightarrow{1} \hat{\mathrm{F}}(z) \xrightarrow{2} \delta\sigma^{\mathbf{CAL}}.$$

2.2.1. *Numerical Implementation.* In this section, we review the implementation details of Calderón's 方法中介绍的方法。

对于步骤 1，我们通过将边界积分离散化如下，计算 $|z| \le T_{z_2}$ 的 (2.3)，

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{F}}(z) &= -\frac{1}{2\pi^2|z|^2} \int_{\partial\Omega} e^{\pi i(z\cdot x)+\pi(a\cdot x)} \left(\Lambda_\sigma - \Lambda_1\right) e^{\pi i(z\cdot x)-\pi(a\cdot x)} dS(x) \\ &\approx -\frac{1}{2\pi^2|z|^2} \left(\frac{|\partial\Omega|}{L}\right) \left(e^{\pi i(z\cdot\mathbf{x})+\pi(a\cdot\mathbf{x})}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{Q} \left(\mathbf{L}_\sigma - \mathbf{L}_1\right) \mathbf{Q}^{\mathbf{T}} \left[e^{\pi i(z\cdot\mathbf{x})-\pi(a\cdot\mathbf{x})}\right], \end{aligned} \tag{2.12}$$

其中，$|\partial\Omega|$ 是区域的表面积；L 是电极数量；$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{(L\times 3)}$ 表示 L个电极的笛卡尔中心向量；$\mathbf{T}$ 表示传统的非共轭矩阵转置；$\mathbf{L}_\sigma$ 和$\mathbf{L}_1$ 分别表示狄利克雷-诺伊曼映射 Λ_σ 和 Λ_1 的离散矩阵近似；而$\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{L\times N_{li}}$表示使用 N_{li}个线性无关的施加电流在 L 个电极上构造的标准正交基，构造方法与 [34]中相同。矩阵$\mathbf{L}_1$ 基于完全电极模型 (2.2) 的有限元法解。具体问题的网格细节见下文第 2.6 节。

ˆ随后，我们根据方程 (2.10) 和 (2.12) 计算 F_R。对于步骤 2，在 x 中等间距的矩形网格上，使用三维辛普森法则，通过 (2.11) 计算电导率差异 $\delta\sigma_R^{\mathbf{CAL}}(x)$；该法则使用 $N_{|z|} = 10, N_{\tilde{\theta}} = 10$ 和 $N_{\tilde{\phi}} = 30$ 个在˜ ˜ $|z|, \theta$ 和 ϕ 网格上均匀分布的节点。随着傅里叶域中的节点数量增加，计算时间也会增加，但可以实现一定程度的伪影抑制。根据经验，伪影抑制的效果似乎不足以证明在这些参数设置之外进一步增加计算时间是合理的。

差分图像使用 (2.11) 和 (2.12) 计算，在 (2.12) 中用离散参考狄利克雷-诺伊曼映射替换 $\mathbf{L}_1$，即$\mathbf{L}^{\sigma_{\mathrm{ref}}}$。对于本文的仿体槽实验，该参考映射来自仅装有与实验相匹配的盐水且不含其他夹杂物的水槽所采集的数据。

本文中 $\sigma_R^{\mathbf{CAL}}(x)$ 的绝对重建使用 (2.6) 生成，其中用σ_{best}替换 σ_b

$$\sigma_R^{\mathbf{CAL}}(x) = \sigma_{\mathrm{best}} + \delta\sigma_R^{\mathbf{CAL}}(x).$$

随后将解插值到一个 $64\times 64\times 64$ 矩形网格上。

后续 [39], σ_{best} 由下式给出

$$\sigma_{\mathrm{best}} = \frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{\ell=1}^{L} U_\ell^k U_\ell^k}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{\ell=1}^{L} U_\ell^k V_\ell^k}, \tag{2.13}$$

其中， U_ℓ^k是电导率为 1 西门子/米时在电极 ℓ 上测得的 k^{th} 模拟电压模式， V_ℓ^k是非均匀电导率 σ 时在电极 ℓ 上测得的 k^{th} 电压模式。模拟电压与用于计算$\mathbf{L}_1$, 的电压相同，具体说明见 §2.6.1。

2.3. 第一种和第二种方法。

这两种和这些方法均源自 [58, 62, 63] 的构造性证明，并涉及称为复几何光学 （CGO）解 [71]的特殊解。为方便读者，本文在此作简要概述。更多细节请参见 [22, 23, 34, 58]。

假设电导率在边界 $\partial\Omega$ 的邻域内为常数 $\sigma_c = 1$ ，则实值电导率方程 (2.1) 可转换为薛定谔方程

$$(-\Delta + q(x))\,\widetilde{u}(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{2.14}$$

通过变量替换 $q(x) = \frac{\Delta\sqrt{\sigma(x)}}{\sqrt{\sigma(x)}}$和 $\widetilde{u}(x) = u(x)\sqrt{\sigma(x)}$，并将 $\sigma(x) \equiv 1$ 延拓至所有$x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$。对于 $\zeta(\xi) \in \mathcal{V}_\xi$，变换后的问题存在唯一的 CGO 解

$$(-\Delta + q(x))\,\psi(x,\zeta) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

其中，当 $\psi(x,\ \zeta) \sim e^{ix\cdot\zeta}$ 较大时， $|x|$ 或 $|\zeta|$，并且

$$\mathcal{V}_\xi = \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^3 \middle| \zeta^2 = 0,\ (\xi+\zeta)^2 = 0 \right\}, \quad \text{for each } \xi \in \mathbb{R}^3, \tag{2.15}$$

其中， $\zeta^2 = \zeta\cdot\zeta$和 ζ是纯辅助参数。随后可根据狄利克雷-诺伊曼映射 Λ_σ 恢复电导率 $\sigma(x)$，如下所示。

对于每个 $x \in \partial\Omega$ 和 $\zeta \in \mathcal{V}_\xi$，求解第二类弗雷德霍姆积分方程:

$$\psi(x,\zeta) = e^{ix\cdot\zeta} - \int_{\partial\Omega} G_\zeta(x-y)\,(\Lambda_\sigma - \Lambda_1)\,\psi(y,\zeta)\,dS(y), \tag{2.16}$$

其中

$$G_\zeta(x) = \frac{e^{ix\cdot\zeta}}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ix\cdot k}}{|k|^2 + 2k\cdot\zeta}dk, \quad x \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\},$$

表示法捷耶夫格林函数 [27]。然后，计算散射数据

$$\mathbf{t}(\xi,\zeta) = \int_{\partial\Omega} e^{-ix\cdot(\xi+\zeta)}\,(\Lambda_\sigma - \Lambda_1)\,\psi(x,\zeta)\,dS(x). \tag{2.17}$$

当 $|\zeta|$ 较大时，薛定谔势 $q(x)$ 可通过逆傅里叶变换恢复

$$q(x) \approx \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathbf{t}(\xi,\zeta)\right\}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi}\mathbf{t}(\xi,\zeta)\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{2.18}$$

然后通过求解边值问题恢复电导率

$$\begin{cases} (-\Delta + q(x))\tilde{u}(x) &= 0 & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ \tilde{u}(x) &= 1 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.19}$$

对于 $\widetilde{u}(x)$，并计算 $\sigma(x) = (\tilde{u}(x))^2$。这就是完整非线性重建方法。

在散射数据 (2.17) 中，用其渐近行为 $e^{ix\cdot\zeta}$ 替换 CGO 解 $\psi(x,\zeta)$，通过

$$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}(\xi,\zeta) = \int_{\partial\Omega} e^{-ix\cdot(\xi+\zeta)}\,(\Lambda_\sigma - \Lambda_1)\,e^{ix\cdot\zeta}\,dS(x). \tag{2.20}$$

得到一种*“Born 近似”*，通常称为电阻抗断层成像的$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ 近似。使用这一近似散射数据代替完全非线性的$\mathbf{t}(\xi,\zeta)$，即可通过（2.18）恢复近似势$\mathbf{q}^{\mathbf{exp}}(x)$，并通过（2.19）恢复电导率 $\sigma^{\mathbf{exp}}(x)$。流程如下:

$$(\Lambda_\sigma, \Lambda_1) \xrightarrow{1} \mathbf{t}^{\mathbf{exp}}(\xi,\zeta) \xrightarrow{2} \mathbf{q}^{\mathbf{exp}}(x) \xrightarrow{3} \sigma^{\mathbf{exp}}(x).$$

在（2.16）中，针对复几何光学解的迹，将单层势中的法捷耶夫格林函数$G_\zeta(x)$替换为拉普拉斯算子的标准格林函数 $G_0(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$，即可计算得到一种中间近似。因此，求解

$$\psi^0(x,\zeta) = e^{ix\cdot\zeta} - \int_{\partial\Omega} G_0(x-y)\,(\Lambda_\sigma - \Lambda_1)\,\psi^0(y,\zeta)\,dS(y), \tag{2.21}$$

对于复几何光学解 $\psi^0(x,\ \zeta)$，避免使用呈指数增长的法捷耶夫格林函数。随后，在（2.17）中用 $\psi^0(x,\ \zeta)$ 代替 $\psi(x,\ \zeta)$，计算散射数据的相应近似，然后继续恢复 $\mathbf{q}^0(x)$ 和 $\sigma^0(x)$。接下来，流程

$$(\Lambda_\sigma, \Lambda_1) \xrightarrow{1} \psi^0(x,\zeta) \xrightarrow{2} \mathbf{t}^0(\xi,\zeta) \xrightarrow{3} \mathbf{q}^0(x) \xrightarrow{4} \sigma^0(x).$$

需要指出的是，如上所述，这些方法假设区域边界附近的电导率为常数$\sigma_c = 1$。如第 2.2 节所述，当常数 σ_c 不为 1 时，可以像 [34, 39] 中那样对问题进行缩放和反缩放。实际中，我们按照（2.13）给出的方法 σ_{best}，估计与数据最匹配的常数电导率。具体而言，如 [34], 中所述，我们用 $_\sigma{}^{1\ \text{最佳}}\Lambda_\sigma$代替 Λ_σ来缩放狄利克雷-诺伊曼映射，并在最后使用 $\sigma^{\mathbf{exp}}(x) = \sigma_{\text{best}}\left(\tilde{u}^{\text{exp}}(x)\right)$ 和 $\sigma^0(x) = \sigma_{\text{best}}\left(\tilde{u}^0(x)\right)$进行重新缩放。

在本文中，我们同时考虑$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ 和$\mathbf{t}^0$ 方法。值得注意的是，这是$\mathbf{t}^0$ 首次应用于非连续 DN 数据，也是$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ 或$\mathbf{t}^0$ 首次应用于实验三维电阻抗断层成像数据，并用于绝对电阻抗断层成像或时差电阻抗断层成像。

2.3.1. 数值实现。 这里给出上述$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ 和$\mathbf{t}^0$ 算法实现所涉及的数值细节。与上述 Calder´on 方法一样，核心思想是按照第 2.2 节所述，在相同的标准正交基$\mathbf{Q}$ 中展开函数。

对于每个电极中心 x_ℓ，根据 [21], ，将 $\psi(x,\zeta)$ 和 $e^{ix\cdot\zeta}$ 展开为

$$\psi(x_\ell,\zeta) \approx \sum_{j=1}^{N_{li}} b_j(\zeta)\mathbf{Q}_\ell^j, \qquad e^{ix_\ell\cdot\zeta} \approx \sum_{j=1}^{N_{li}} c_j(\zeta)\mathbf{Q}_\ell^j, \qquad \ell = 1,\dots L, \tag{2.22}$$

其中$\mathbf{Q}_\ell^j$ 表示$\mathbf{Q}$的第（ℓ, j）个元素。然后，边界积分方程（2.21）可近似为

$$\begin{aligned}
\psi^0(x_\ell,\zeta) &= = e^{ix_\ell\cdot\zeta} - \int_{\partial\Omega} G_0(x_\ell - y)\,(\Lambda_\sigma - \Lambda_1)\,\psi^0(y,\zeta)\,dS(y) \\
&\approx e^{ix_\ell\cdot\zeta} - \sum_{\ell'=1}^{L}\int_{E_{\ell'}} G_0(x_\ell - y)\,(\Lambda_\sigma - \Lambda_1)\,\psi^0(y,\zeta)\,dS(y) \\
&\approx e^{ix_\ell\cdot\zeta} - \left[\sum_{\ell'=1}^{L}\int_{E_{\ell'}} G_0(x_\ell - y)dS(y)\right]\left[(\mathbf{L}_\sigma - \mathbf{L}_1)\,\psi^0(y_{\ell'},\zeta)\right],
\end{aligned} \tag{2.23}$$

其中 $E_{\ell'}$ 表示 ℓ'^{th} **扩展** 电极，其中$\bigcup_{\ell'=1}^{L} E_{\ell'} = \partial\Omega$，且 $E_{\ell'}$ 彼此不相交 [37]。请注意，真实电极不必覆盖表面 $\partial\Omega$，只有我们将用于离散化积分的扩展（数学）电极才需要如此。然后，利用式 (2.22) 中的展开代入式 (2.23)，可得

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N_{li}} b_j(\zeta)\mathbf{Q}_\ell^j &\approx \sum_{j=1}^{N_{li}} c_j(\zeta)\mathbf{Q}_\ell^j - \left[\sum_{\ell'=1}^{L}\int_{E_{\ell'}} G_0(x_\ell - y)dS(y)\right]\left[(\mathbf{L}_\sigma - \mathbf{L}_1)\sum_{j=1}^{N_{li}} b_j(\zeta)\mathbf{Q}_{\ell'}^j\right] \\
&= \sum_{j=1}^{N_{li}} c_j(\zeta)\mathbf{Q}_\ell^j - \left[\sum_{\ell'=1}^{L}\int_{E_{\ell'}} G_0(x_\ell - y)dS(y)\right]\left[\sum_{j=1}^{N_{li}} b_j(\zeta) f_j\left(y_{\ell'}\right)\right],
\end{aligned} \tag{2.24}$$

其中 $f_j(y_{\ell'})$ 表示 $(\mathbf{L}_\sigma - \mathbf{L}_1)$ 作用于 $\mathbf{Q}^j$ 并在 $y_{\ell'}$ 处取值，其可计算为 $\mathbf{Q}(\mathbf{L}_\sigma - \mathbf{L}_1)$ 的 (ℓ', j) 项。定义

$$\widetilde{\mathbf{G}}_0(\ell,\ell') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|x_\ell - y_{\ell'}|} & \ell \neq \ell' \\ 0 & \ell = \ell', \end{cases} \tag{2.25}$$

其中，我们已在 $x_\ell = y_\ell$ 处去除了奇点。假设对每个 $\ell = 1,\ldots,L$，都有 $|E_\ell| = |\partial\Omega_L|$，并在 (2.24) 中使用 (2.25)，可得

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_{li}} b_j(\zeta)\mathbf{Q}_\ell^j &\approx \sum_{j=1}^{N_{li}} c_j(\zeta)\mathbf{Q}_\ell^j - \frac{|\partial\Omega|}{L}\sum_{j=1}^{N_{li}} b_j(\zeta)\sum_{\ell'=1}^{L}\widetilde{\mathbf{G}}_0(\ell,\ell')f_j(y_{\ell'}) \\ &\approx \sum_{j=1}^{N_{li}} c_j(\zeta)\mathbf{Q}_\ell^j - \frac{|\partial\Omega|}{L}\sum_{j=1}^{N_{li}} b_j(\zeta)\left[\widetilde{\mathbf{G}}_0\mathbf{Q}\left(\mathbf{L}_\sigma - \mathbf{L}_1\right)\right](\ell,j) \end{aligned}$$

或者写成矩阵形式，

$$\mathbf{Q}\vec{b} = \mathbf{Q}\vec{c} - \frac{|\partial\Omega|}{L}\widetilde{\mathbf{G}}_0\mathbf{Q}\left(\mathbf{L}_\sigma - \mathbf{L}_1\right)\vec{b}.$$

该方程的解可通过求解以下关于未知数 b 的方程组得到，

$$(I + A)\,\vec{b} = \vec{c}, \tag{2.26}$$

其中 $A = |\partial\Omega_L|\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\widetilde{\mathbf{G}}_0\mathbf{Q}(\mathbf{L}_\sigma - \mathbf{L}_1)$，且 I 是单位矩阵。如果扩展电极 E_ℓ 的尺寸不一致，则可以根据实际情况以加权和代替统一权重 $|E_\ell| = |\partial\Omega_L|$。

接下来，按照 [34], ，可通过以下方式计算所有小于所选截断半径 T_ξ 的 $|\xi|$ 对应的散射数据 $\mathbf{t}^0(\xi,\zeta(\xi))$

$$\mathbf{t}^0(\xi,\zeta) \approx \begin{cases} \frac{|\partial\Omega|}{L}\left[e^{-i\mathbf{x}\cdot(\xi+\zeta)}\right]^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}\left(\mathbf{L}_\sigma - \mathbf{L}_1\right)\vec{b} & |\xi| < T_\xi \\ 0 & else, \end{cases} \tag{2.27}$$

因为 $\vec{b} = \mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\psi^0(\mathbf{x}\ \zeta)$，其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{(L\times 3)}$ 与第 2.2.1 节中的相同，即一个存储电极中心的向量。

接下来，通过在三维空间中使用辛普森法则对截断的散射数据 $\mathbf{t}^0$ 进行逆傅里叶变换，恢复近似势 $\mathbf{q}^0$。

$$\mathbf{q}^0(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{[-T_\xi,T_\xi]^3} e^{ix\cdot\xi}\,\mathbf{t}^0(\xi,\zeta(\xi))\,d\xi.$$

或者，也可以使用逆快速傅里叶变换来进一步提速，同时注意求积点和核的具体形式。按照 [34], ，首先使用约含 21，000 个三维单元的网格求解边值问题（2.19），再计算 $\sigma^0(x) = \sigma_{\text{best}}(\tilde{u}(x))^2$，从而恢复电导率 $\sigma^0(x)$。三维可视化是通过使用 MATLAB 的散点插值函数，将数据插值到 $64\times64\times64$ 矩形网格上得到的。ζ 值则按照 [23] 中概述的最小 ζ 方法计算。我们指出，尽管已证明当 $|\zeta|$ [58, 71] 较大以及 $|\zeta|$ [19] 较小时，边界积分方程（2.16）的解不存在异常点；但对于此处在计算机上执行计算所需的中间取值，这仍是一个悬而未决的问题。

$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ 重建的获得方式与$\mathbf{t}^0$, 类似，不过这次绕过边界积分方程（2.17），直接计算

$$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}(\xi,\zeta) \approx \begin{cases} \frac{|\partial\Omega|}{L}\left[e^{-i\mathbf{x}\cdot(\xi+\zeta)}\right]^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}\left(\mathbf{L}_\sigma-\mathbf{L}_1\right)\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\left[e^{i\mathbf{x}\cdot\zeta}\right] & |\xi|<T_\xi \\ 0 & else, \end{cases}$$

其中，我们将系数向量 b 替换为 $e^{ix\cdot\zeta}$ 的渐近行为展开式，该展开式由 $\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\left[e^{i\mathbf{x}\cdot\zeta}\right]$给出。

通过将矩阵 $\mathbf{L}_1$替换为 $\mathbf{L}^{\sigma_{\text{ref}}}$，并在最后一步计算 $\sigma_{\text{diff}(x)} = \sigma(x) - \sigma_{\text{best}}$，即可使用 $\mathbf{t}^0$ 和 $\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ 方法进行差分成像。

2.4. 参考方法。 全变分正则化非线性最小二乘重建将作为本文所研究的基于 CGO 的绝对成像案例的参考重建。经典的线性差分成像方案（下文也将予以回顾）将作为基于 CGO 的差分图像的参考方法。

2.4.1. 采用 *TV* 正则化的绝对成像。 绝对电阻抗断层成像中一种广泛使用的数值方法是全变分（TV）正则化非线性最小二乘极小化

$$\hat{\sigma} = \arg\min_{\sigma>0}\{\|L_e\left(V-U(\sigma,z_*)\right)\|^2 + \alpha\mathrm{TV}_\beta(\sigma)\}, \tag{2.28}$$

其中，$U(\sigma, z)$ 是有限维前向映射，$z_* \in \mathbb{R}^L$ 是通过极小化的初始化步骤获得的固定电极接触阻抗，L_e 是 e 的噪声精度矩阵的 Cholesky 因子，因此 $L_e^{\mathrm{T}}L_e = \Gamma_e^{-1}$；标量 α 是正则化参数，而 $\mathrm{TV}^\beta(\sigma)$ 是（平滑的）全变差正则化泛函 [66]

$$\mathrm{TV}_\beta(\sigma) = \int_\Omega \sqrt{\|\nabla\sigma\|^2+\beta}\,\mathrm{d}r, \tag{2.29}$$

其中 β 是（固定的）平滑参数。式（2.28）中的前向模型 $U(\sigma, z)$ 基于完全电极模型 [69] 的有限元法（FEM）离散化。有关 FEM 模型的详细信息，请参见 [41, 78, 79]。在 FEM 模型中，电导率被近似为均匀四面体网格中定义于 N 个节点上的分片线性节点基函数的线性组合，从而得到未知量向量 $\sigma \in \mathbb{R}^N$；电势则采用类似方式进行近似，但使用的四面体网格要密集得多，并在电极附近进行了细化。式（2.28）中的非线性优化通过配备线搜索算法的滞后 Gauss-Newton 方法求解。线搜索通过有界最小化实现，从而确保满足非负性约束 $\sigma > 0$。有关该方法的更多详细信息，请参见 [76]。

式（2.28）所用的固定接触阻抗 z_* 和初始（常数）电导率估计，是通过求解以下非线性最小二乘问题获得的

$$(\sigma_0, z_*) = \arg\min_{\sigma_c, z>0}\{\|L_e\left(V-U(\sigma_c,z)\right)\|^2\}, \tag{2.30}$$

其中，标量 $\sigma_c \in \mathbb{R}$ 是空间常数电导率图像 $\sigma_c\mathbf{1}$ 的系数，且 $z \in \mathbb{R}^L$。非线性最小二乘问题 (2.30) 通过 Gauss-Newton 优化求解。

2.4.2. 线性差分成像。 在线性差分成像中，例如参见 [6, 8], ，目标是重建两次测量 (V1; V2) 之间的电导率变化。本文采用的基准线性差分成像方法使用观测模型的线性化近似

$$V_1 \approx U(\sigma_0, z_*) + J_\sigma(\sigma_1-\sigma_0) + e_1 \tag{2.31}$$
$$V_2 \approx U(\sigma_0, z_*) + J_\sigma(\sigma_2-\sigma_0) + e_2, \tag{2.32}$$

其中，雅可比矩阵 J_σ of $U(\sigma, z_*)$ 在 $\sigma = \sigma_0$ 处求值。使用这些线性化模型，测量值之差变为

$$\begin{aligned} \delta V &= V_2 - V_1 \\ &= (U(\sigma_0) + J_\sigma(\sigma_2 - \sigma_0) + e_2) - (U(\sigma_0) + J_\sigma(\sigma_1 - \sigma_0) + e_1) \\ &= J_\sigma \delta\sigma + \delta e, \end{aligned} \tag{2.33}$$

其中 $\delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ 和 $\delta e = e_2 - e_1$。现在，逆问题是基于差分数据 δV 和模型 (2.33) 重建 $\delta\sigma$。线性问题的一种广泛应用的表述方式是采用（广义）Tikhonov 正则化，并使用促进平滑性的正则化泛函

$$\hat{\delta\sigma} = \arg\min_{\delta\sigma} \left\{ ||L_{\delta e}(\delta V - J_\sigma \delta\sigma)||^2 + ||L_p \delta\sigma||^2 \right\}, \tag{2.34}$$

其中 $L_{\delta e}$ 是 δe 的噪声精度矩阵的 Cholesky 因子，因此 $L_{\delta e}^{\mathrm{T}} L_{\delta e} = \Gamma_{\delta e}^{-1}$ =$(\Gamma_{e_1} + \Gamma_{e_2})^{-1}$。本文通过使用基于距离的协方差函数来构造正则化矩阵 L_p。具体而言，我们设定 $L_p^{\mathrm{T}} L_p = \Gamma_p^{-1}$，其中（先验协方差）矩阵 Γ_p 使用基于距离的相关函数 [54]构造

$$\Gamma_p(i,j) = \mathrm{std}(\sigma)^2 \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2a^2} \right), \quad i,j = 1, \ldots, N, \tag{2.35}$$

其中，参数 a 控制相关长度，可通过将距离$\|x_i - x_j\|$ 设为选定值 d（例如目标半径的一半），并将 $\Gamma_p(i,\ j)$设为该距离对应的期望协方差（例如方差的 1%）来求解。

2.5. **实验设置**。 ACT5 [65] 是一种 32 电极并行 EIT 仪器，使用 32 个电流源向目标施加电流模式，并使用 32 个电压表测量产生的电压。ACT5 中的电流源会调节输出电流，以补偿经并联阻抗损失的电流，包括连接仪器与电极的电缆电容所引起的损耗，从而能够以高精度施加所需的电流模式 [67]。ACT5 可在 11 kHz 至 1 MHz 的频率范围内施加峰值幅度为 0.25 mA 的正弦电流。电压表可测量峰值最高达 0.5 V 的电压，最大信噪比（SNR）为 96 dB。由于电流源能够补偿电缆的并联电容，因此系统使用接地屏蔽电缆运行 [1]。

测试槽由厚度为 3/8 英寸的有机玻璃制成，内部尺寸为 17.0cm x 25.5cm x 17.0cm。32 个电极由 16 号 316 不锈钢制成，每个电极的尺寸均为 80.0 mm 见方。测试槽内表面按照电极的形状和深度进行铣削，使内表面保持平整。电极之间的标称间隙为 5.0 mm。32 个电极的布置方式为两端各四个、两侧各六个。穿过每个电极中心的螺栓穿透有机玻璃，以便连接 ACT5 电子设备的电缆。水槽的五个侧面用胶粘合，并预留了在四角用螺纹杆固定顶部的结构。顶部不同位置设有直径为 0.6 mm 的通孔，用于穿入细线悬挂目标；还可使用 25 号皮下注射针，在盖子就位后完成水槽的注液。使用时，将盐水混合至室温下所需的背景电导率，并使用 Oakton CON $6+$手持式电导率仪进行测量。

目标在实验前一天制备：向蒸馏水中加入氯化钠和几滴食用色素，直至达到所需电导率，并用可浸入式电导率计测量。随后，一边搅拌一边缓慢加热溶液，同时加入 4% 琼脂（Fisher Scientific），直至温度达到 $85℃-90℃$。将混合物倒入内径为 5.27 cm 的球形模具中，静置过夜使其凝固。此时也将测试单元装满，以便使用 ACT5仪器验证最终电导率。

首先采集了水槽中装有目标电导率（24 毫西门子/米）盐水且未放入目标时的数据。随后，将目标放入水槽中，并用细牙签从

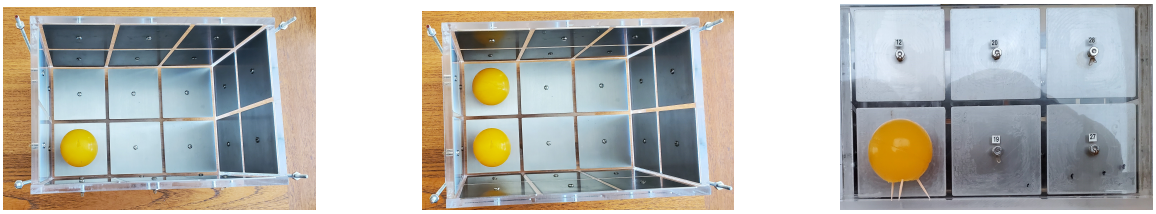

FIGURE 1. 实验装置。左：单目标实验的俯视图。中：双目标实验的俯视图。右：目标高出水槽底部的侧视图。请注意，目标在测试单元中的测量值为 290 毫西门子/米。

下方支撑。拍摄了水槽的照片，记录每个目标的位置，以确认其位置。所用球体的电导率值约为 290 毫西门子/米。后续电导率重建使用了 100 帧以上的平均数据。实验数据将在 GitHub 上公开。[1]

请注意，尽管我们在长方体水槽上进行测试，数学重建算法并不局限于这种几何形状。

2.6. **鲁棒性测试**。 除了使用正确的域建模来测试重建方法外，我们还考虑对区域进行中度和强度较大的错误建模。对于基于 CGO 的方法，错误的域建模会在以下环节产生影响。首先，在模拟 $\mathbf{L}_1$ DN 数据时，需要使用已知电导率 $\sigma \equiv 1$ 西门子/米和施加的电流模式求解正向电阻抗断层成像问题。其次，错误的域建模会导致电极中心 $\mathbf{x}$ 和区域表面积的信息不准确；随后， $\sigma^{\mathbf{CAL}}$、$\sigma^{\mathbf{exp}}$和 σ^0 的重建结果是在错误的区域上恢复的。对于 TV 正则化方法，错误的域建模体现在最小化问题 (2.28) 中使用的基于有限元法的正向映射 $U(\sigma, z)$ 以及计算网格上。对于线性差分成像方法，错误的域建模体现在最小化问题 (2.34) 中正向映射 $J_{\delta\sigma}$ 的雅可比矩阵以及计算网格上。

在实践中，精确的域建模可能颇具挑战。为此，我们考察了区域形状略有偏差的区域（18cm x 27cm x 19cm），以及区域形状严重偏差的区域（20cm x 35cm x 25cm）[2]。电极按照原始箱体设计均匀分布，但由于箱体尺寸有所变化，其位置和间距显然与实际情况不同。图 2（中间和右侧）展示了较大的箱体区域。随后，测试了每种重建方法，并假设实际实验中的电压和电流测量值来自图 2 所示的箱体。

时间差分重建使用实验水槽中仅含 24 毫西门子/米盐水时的基线测量值进行。随后将这些数据用于 §2.3.1 和 §2.4.2 中讨论的重建方法。

2.6.1. 正向建模和正则化参数。对于基于 CGO 的方法，使用模拟电压数据和 EIDORS [3,78]形成了狄利克雷-诺伊曼映射 Λ_1 的矩阵近似 $\mathbf{L}_1$。EIDORS 数据通过使用完全电极模型 (2.2) 的有限元近似求解正向电导率问题生成，其中 $\sigma \equiv 1$ 西门子/米。在每种域建模情况下（见图 2），正问题均在相应尺寸的箱体上求解，使用尺寸为 8cm × 8cm 的电极、约 250,000 个节点和 120 万个单元，并在电极附近进行高密度细化，同时采用 EIDORS 中的默认接触阻抗。对于

[1]参见 https://github.com/sarahjhamilton/open3D_电阻抗断层成像_数据[2]由于最长边与最短边的比值较小，§2.2.1 中提到的 Calder´ 方法所用的 $16 \times 16 \times 16$ X-网格无法覆盖整个区域，因此在区域形状严重偏差的情况下使用 $32 \times 32 \times 32$ x-网格

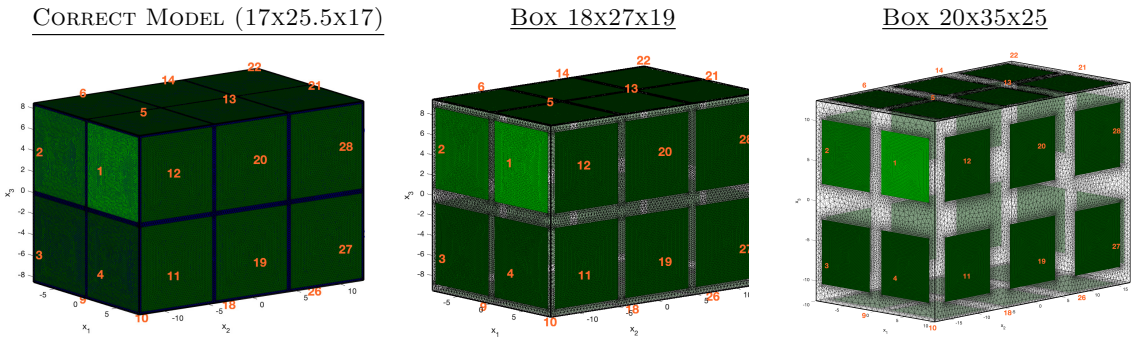

Figure 2. 3维渲染的模拟箱体，用于稳健性测试。

参考方法，基于有限元法的正问题使用与基于 CGO 的方法相同的电势网格求解，而电导率则分别在更稀疏的均匀网格中进行近似；对于不同的域建模情况，网格分别包含 8,918、9,410、14,678 个节点，以及 43,690、45,106、72,438 个单元。

各重建方法的正则化参数按以下方式选取。Calder´on 方法的正则化参数 T_{z_1} 和 T_{z_2} 通过经验选定，分别为 1.4 和 1.7；所有重建所用的平滑参数均选为 $t = 0.1$ 。这些数值通过经验选取，以获得最佳视觉重建效果。用于$\mathbf{t}^{\exp}$ 和$\mathbf{t}^0$ 方法的非线性散射数据，其截断半径 T_ξ 针对此处展示的每种情况，均通过经验在 $[10.5, 12]$ 范围内选取。目标的位置似乎不会随 T_ξ发生显著变化，但对比度似乎对该参数的选取较为敏感。下文第 4 节将进一步讨论。对于全变分正则化方法，通过计算一系列采用不同 α 和 β 值的重建来选取正则化参数 α 和光滑参数 β： α 的取值范围为 [1e-6, 100] ， β的取值为 [1e-4、0.1] ；随后选取在正确域模型情况下重建视觉质量最佳的参数。选定的数值 $\alpha = 0.01$ 和 $\beta = 0.001$ 用于所有采用不同域模型的测试案例。对于线性差分成像方法，视觉效果最佳的重建采用了电导率标准差 std(σ) $= 16\sigma_0$ 以及参数 a；该参数根据相关距离为 $d = l_{\text{box}}/8$时、协方差为方差的 1% 计算得出，其中 l_{box} 为用作域模型的箱体最长边的长度。

2.7. 评估指标。 由于本研究主要聚焦于实验数据重建，因此无法与已知的“真实值”进行比较并获得零误差。目标的电导率值测得约为 290 毫西门子/米，且目标放置时大致位于整个箱体中某个子立方体的中心。利用这些数据，我们可以近似估算重建结果的定位误差（LE），以及每个重建目标的最大电导率。

如 [34]，中所示，LE 通过以下方式测量重建目标质心与真实目标质心之间的距离：

$$\text{LE} = \sqrt{(x_1^{\text{recon}} - x_1^{\text{truth}})^2 + (x_2^{\text{recon}} - x_2^{\text{truth}})^2 + (x_3^{\text{recon}} - x_3^{\text{truth}})^2}. \tag{2.36}$$

定位误差为 0 是理想情况，表示目标重建在正确的位置。在我们的实验中，球形目标的中心被放置在各方向上最近电极的中心处；在式（2.36）中，(x_1^{truth}， x_2^{truth}， x_3^{truth}) 是我们对目标中心真实位置的最佳估计，同时承认估计值与真实位置之间可能存在毫米级误差。按照 [34], 获取重建目标的中心后，我们使用重建结果的阈值分割，通过 MATLAB的 regionprops3 识别目标。分割阈值用于根据经验识别超过某一百分比的区域

最大重建电导率。我们注意到，分割目标的体积会随阈值的选择而变化；但随着百分比（即阈值）提高，质心位置会趋于稳定（精确到毫米），我们据此计算 LE。

由于本研究的一个主要重点是考察算法对建模误差的容忍度，我们报告了 LE 的**缩放后**版本，

$$\text{Scaled LE} = \frac{\sqrt{(x_1^{\text{recon}} - x_1^{\text{truth}})^2 + (x_2^{\text{recon}} - x_2^{\text{truth}})^2 + (x_3^{\text{recon}} - x_3^{\text{truth}})^2}}{25.5}, \tag{2.37}$$

其中，我们将公式 (2.36) 中的 LE 除以 25.5 cm，即真实水槽最长边的长度。计算 LE 指标时使用的这一缩放值，在所有错误建模情景中均保持不变。

3. Results

我们首先展示在域建模正确的情况下，针对一个和两个目标以及四种重建方法的绝对电阻抗断层成像重建结果（图3）。左侧展示的是箱体底部电极排中央的横截面；该切片穿过物理目标的中心。中间列展示从三维重建中提取的等值面，以指示目标的位置、大小和数量。等值面使用 MATLAB 的 regionprops3 提取，采用阈值分割，阈值范围为水槽中恢复电导率最大值的 60% 至 85%。由于不同方法的模糊程度各异，因此没有在所有示例和重建方法中使用统一阈值。请注意，由于等值面取决于该阈值，它们可能无法呈现完整重建中的所有信息。因此，第三列展示了区域内电导率的完整三维渲染。该三维渲染在 MATLAB 中生成，方法是显示 100 个间距相等的 x_1-x_3 切片，并将每个切片的透明度设为 0.1。

Table 1. 单一目标**绝对**成像评估指标，涵盖所有区域建模场景。

		Calder´on	$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$	$\mathbf{t}^{0}$	TV
缩放 LE	正确域	**0.042**	0.094	0.098	0.043
	18x27x19号箱	0.075	0.131	0.119	**0.021**
	20x35x25号箱	0.241	0.250	**0.231**	n/a
最大目标电导率（mS/m）	正确域	63.77	**300.00**	308.67	44.26
	18x27x19号箱	76.94	303.32	**284.67**	70.14
	20x35x25号箱	85.51	**305.63**	260.88	n/a

图 4 展示了模型中度失配区域的绝对电阻抗断层成像重建，而图 5 展示了模型显著失配区域的绝对电阻抗断层成像重建。差分图像见图 6。表 1 和表 2 列出了绝对图像中各目标的最大电导率和缩放定位误差指标，表 3 则列出了差分图像的相应指标。每行中以粗体标出的条目表示该行的最佳指标值。

4. Discussion

从正确域建模的情形开始，Calder´on、$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$、$\mathbf{t}^{0}$, 和全变分方法均生成了能清晰显示目标且定位良好的重建结果。正如预期，全变分图像最为清晰。$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ 和$\mathbf{t}^{0}$ 方法取得了最佳对比度，并且最接近估算的实验电导率。Calder´on和全变分方法的对比度较低，但缩放定位误差更小。值得注意的是，如图 6 所示，就伪影而言，绝对 CGO 重建与相应的差分图像一样干净。CGO 方法需要使用模拟电压数据；这些数据来自相同的实验设置，但电导率为

TABLE 2. 所有区域建模情形下双目标**绝对**成像的评估指标。注：目标1与单目标情形中的目标相同。

			Calder´on	$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$	$\mathbf{t}^{\mathbf{0}}$	TV
缩放 LE	目标1	正确域	0.056	0.098	0.105	**0.034**
		18x27x19号箱	0.103	0.135	0.133	**0.021**
		20x35x25号箱	0.268	0.267	**0.257**	n/a
	目标2	正确域	0.062	0.195	0.180	**0.031**
		18x27x19号箱	0.120	0.191	0.214	**0.057**
		20x35x25号箱	**0.277**	0.311	0.295	n/a
最大目标 电导率（mS/m）	目标1	正确域	55.61	**310.95**	315.50	55.57
		18x27x19号箱	73.53	216.29	**322.39**	68.29
		20x35x25号箱	80.00	334.58	**264.72**	n/a
	目标2	正确域	60.47	**234.85**	226.35	53.94
		18x27x19号箱	67.94	153.82	**203.84**	64.22
		20x35x25号箱	77.81	**285.06**	244.80	n/a

TABLE 3. 所有区域建模情形下的双目标**差异** 成像评估指标。注：目标1与单目标情形中的目标相同。

			Calder´上	$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$	$\mathbf{t}^{\mathbf{0}}$	线性
缩放 LE	目标1	正确域	**0.034**	0.095	0.103	0.049
		18x27x19号箱	**0.022**	0.116	0.124	0.065
		20x35x25号箱	**0.113**	0.242	0.243	n/a
	目标2	正确域	0.053	0.100	0.094	**0.050**
		18x27x19号箱	0.043	0.116	0.115	**0.029**
		20x35x25号箱	**0.112**	0.230	0.233	n/a
最大目标 电导率（mS/m）	目标1	正确域	57.18	**277.83**	295.63	484.83
		18x27x19号箱	61.72	**272.80**	282.05	227.95
		20x35x25号箱	56.30	**253.46**	243.88	227.95
	目标2	正确域	53.84	**266.91**	284.25	490.88
		18x27x19号箱	59.91	**294.17**	306.30	208.05
		20x35x25号箱	55.07	293.61	**282.38**	n/a

$\sigma \equiv 1$ 西门子/米。尽管这些数据并未针对电阻抗断层成像设备（噪声和接触阻抗）进行调校，这些方法仍生成了高质量的绝对重建。

转向不正确的域建模后，我们发现所有方法都能很好地处理中等程度的域失配，而 CGO 方法也能很好地处理严重的域失配。在 18cm x 27cm x 19cm 的情况下，CGO重建中没有明显的边界伪影，而全变分重建中只有中等程度的边界伪影。在更严重的失配情况下，假设数据来自一个大得多的箱体（20cm x 35cm x 25cm），而非真实区域（17cm x 25.5cm x 17cm），$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ 和$\mathbf{t}^{0}$ 方法仍能生成良好的重建结果，显示出正确数量的目标以及水槽中的正确区域。沿 x_3 方向的定位效果最差，导致目标略微拉长。尽管 Calder´ 在 20x35x25 号箱条件下的重建中存在伪影，该方法仍能将真实物体识别为导电性最强的物体。对于 20x35x25 号箱的两种情况，全变分算法均未能识别任何目标。在这些区域模型不正确的情况下，全变分重建中的伪影是可以预期的，因为基于正则化非线性最小二乘最小化的电阻抗层析绝对成像算法已知对建模误差高度敏感，例如区域形状建模误差，参见 [49, 51, 61]。

我们可以看到 Calder´on 方法所依据的假设所产生的影响：电导率是相对于某一常数的小扰动。在物理实验中，导体的电导率约为背景盐水的十二倍。这一点可从 Calder´on 方法低估

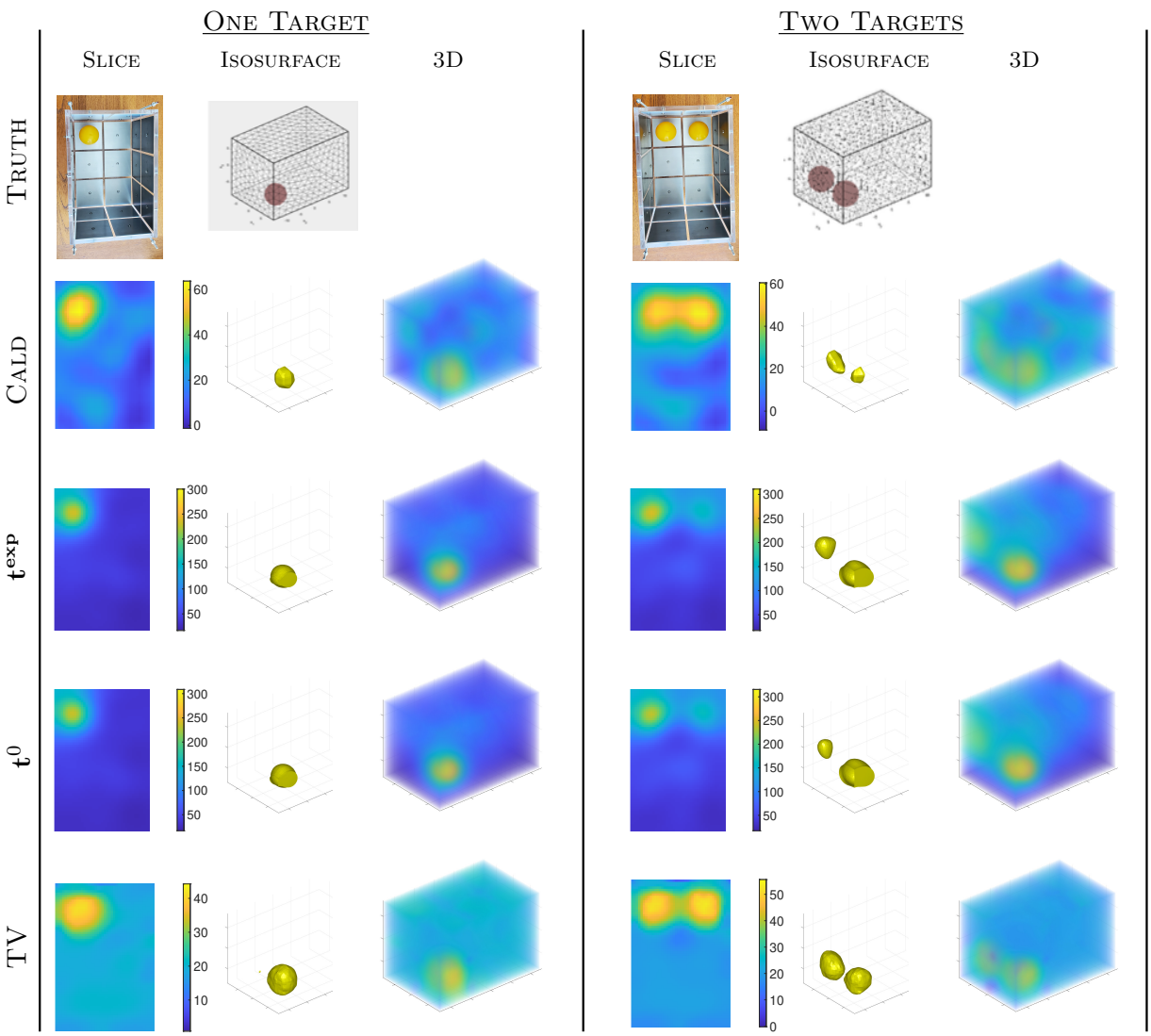

Figure 3. **绝对成像**重建，对比了复几何光学方法与采用正确域建模的正则化方法。图中显示了电导率的切片、等值面和三维渲染图。请注意，真实目标的实测电导率约为 290 毫西门子/米。

最大电导率这一现象中看出。不过，这种方法能够很好地定位目标，这并不令人意外；唯一的例外是域建模误差较大的绝对图像。Calder´on 重建中出现的伪影，与二维情况下使用 Calder´on 进行绝对成像时观察到的现象一致，例如所有绝对重建中都出现吉布斯现象，以及在域模型不正确时电极位置处重建出的电导率偏高。在所有建模情景中，正则化全变分方法都难以处理高对比度目标，得到的最大目标电导率远低于测量值。在模拟情景中也观察到了同样的现象，不过低对比度目标的最大电导率能够被可靠地恢复。对此至少部分可以用测量结果对比度可分辨性的饱和来解释：随着目标夹杂物电导率增加，其对测量结果的影响逐渐减弱；达到一定程度后，TV 正则化方法便无法区分高电导率与更高电导率。

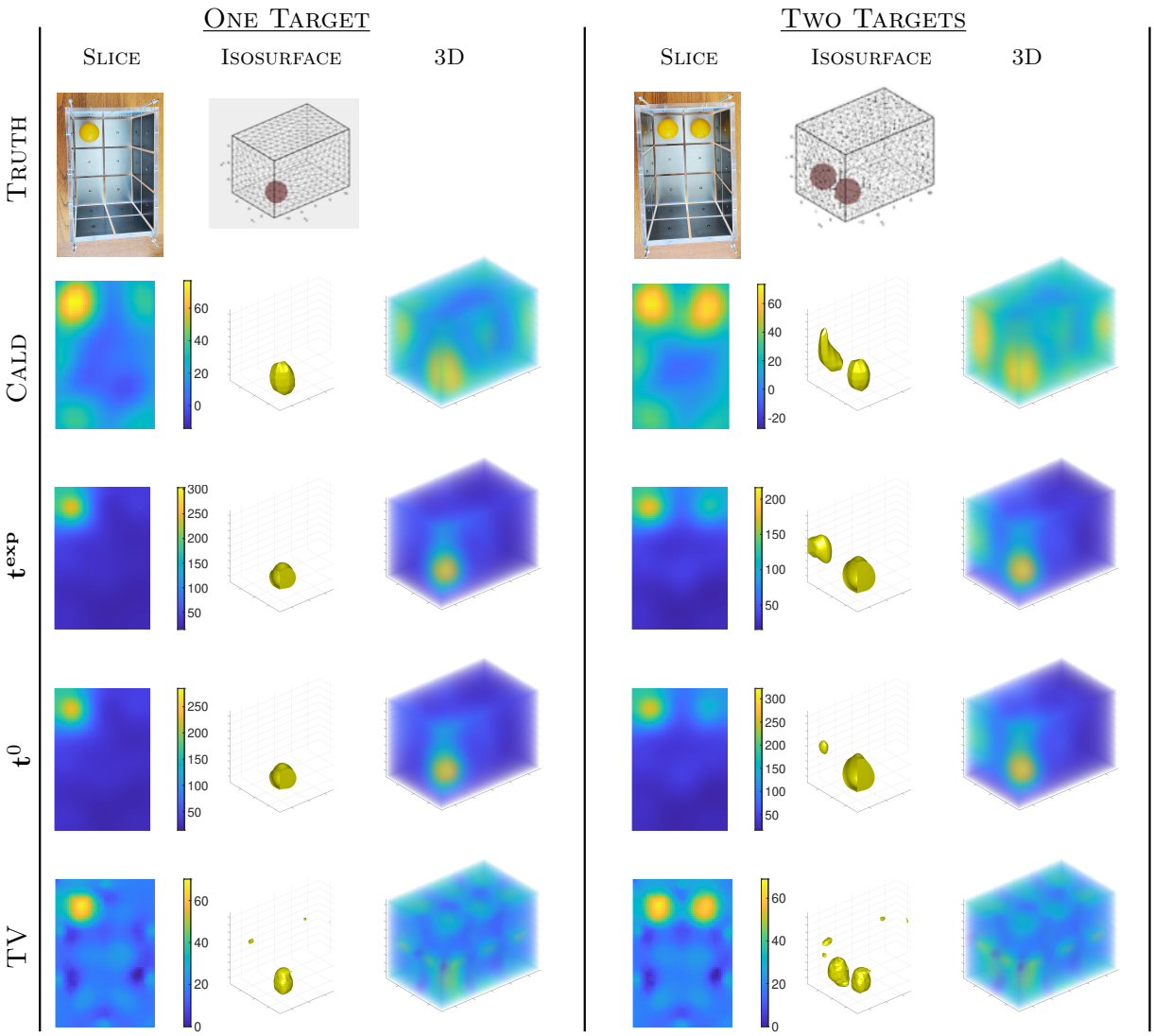

FIGURE 4. **绝对图像**重建：比较 CGO 方法与正则化方法在域建模存在中度错误情况下的结果，所用箱体尺寸为 18cm x 27cm x 19cm。请注意，真实目标的实测电导率约为 290 毫西门子/米。

我们注意到，本实验所使用的电极非常大，而区域的结构（一个带棱角的箱体）可能会加剧某些建模和/或硬件挑战。尽管如此，该研究仍为三维绝对电阻抗断层成像重建的可行性提供了有价值的结果。

Calder´on 的差分图像能够处理更严重的区域模型失配，$\mathbf{t}^{exp}$ 和$\mathbf{t}^0$ 方法也同样如此。严重的模型失配对于线性差分成像参考方法而言过于严苛，该方法未能识别目标，见图 6。

尽管在本文研究的各个示例中，$\mathbf{t}^{exp}$ 和 $\mathbf{t}^0$ CGO 方法都能可靠地重建目标的对比度和近似位置，但与二维基于 D-bar 的方法相比，它们对用于截断非线性散射数据的正则化参数 T_ξ 似乎更加敏感。图 7 展示了对于单个目标、正确域建模的情形， T_ξ 对缩放定位误差和最大重建电导率值的影响

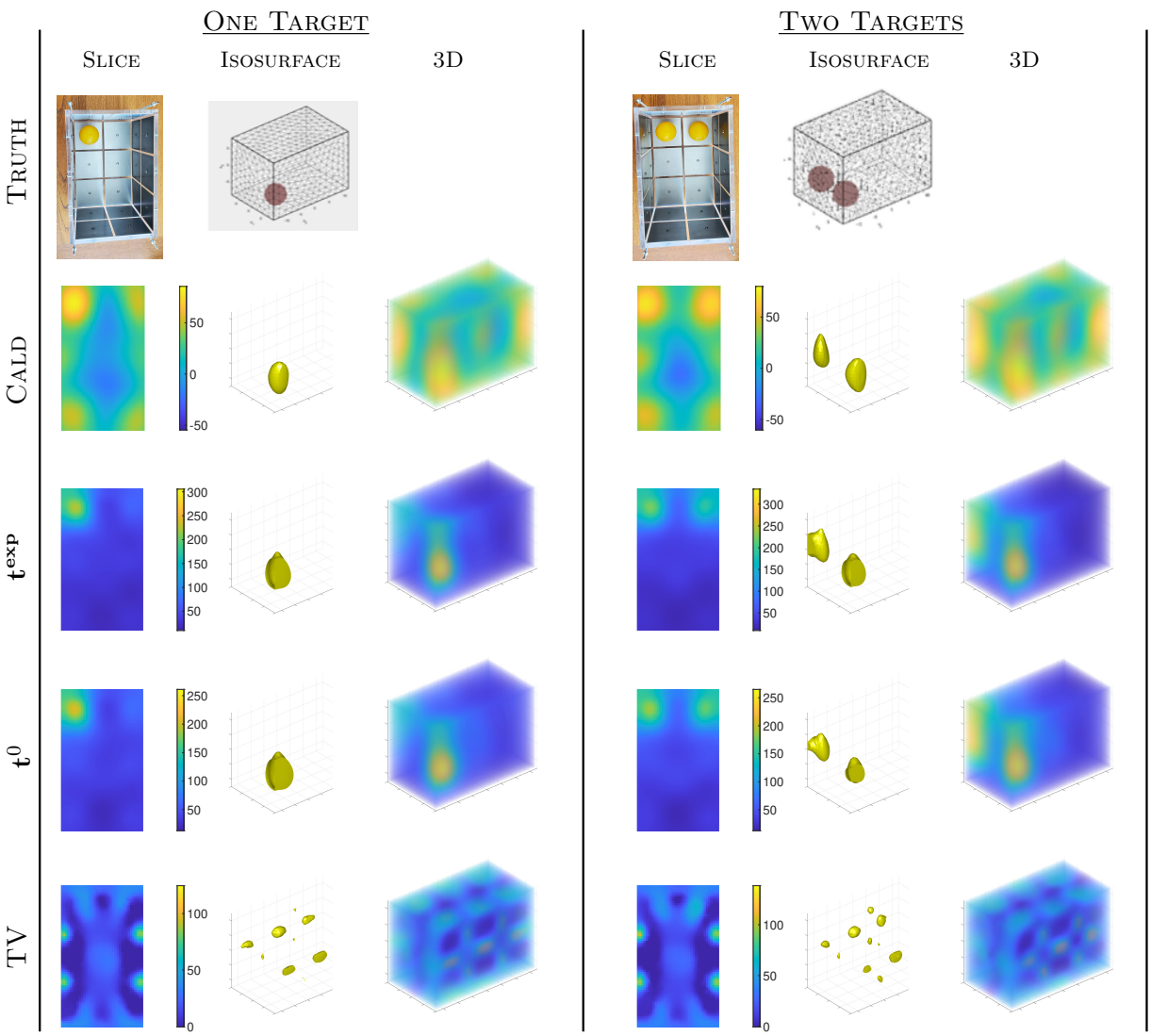

FIGURE 5. **绝对图像**重建，对比了 CGO 方法与采用很大程度上错误的域建模的正则化方法，使用尺寸为 20cm x 35cm x 25cm 的箱体。请注意，真实目标的实测电导率约为 290 毫西门子/米。

。请注意，此处还进行了二次非均匀截断：实部或虚部的幅值超过 20 的散射数据均被置为零。调整该数值也会影响重建。本研究选取 20，是因为它在各个示例中总体表现可靠。对比度似乎比定位误差更加敏感。与 [23]，中一样，采用了 ξ 的最小 ζ 参数化，因为在三维中，散射数据同时是 $\zeta \in \mathbb{C}^3$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^3$ 的函数，而在二维 D-bar 方法中则仅是 $k \in \mathbb{C}$ 的函数。其他参数化方式以及对正则化参数影响的深入研究虽然颇有意义，但超出了本研究的范围。

在速度方面，在配备 2.3 吉赫兹双核 Intel® Core i5 处理器的 MacBook Pro 上运行重建时，Calder´重建在 $16 \times 16 \times 16$ x网格上进行，并插值到 $64 \times 64 \times 64$ x网格的情况下，在未针对并行化进行优化时需要 1 至 2 秒。当初始 x网格为 $32 \times 32 \times 32$时，每次重建所需时间增加到 6–8 秒。在一台

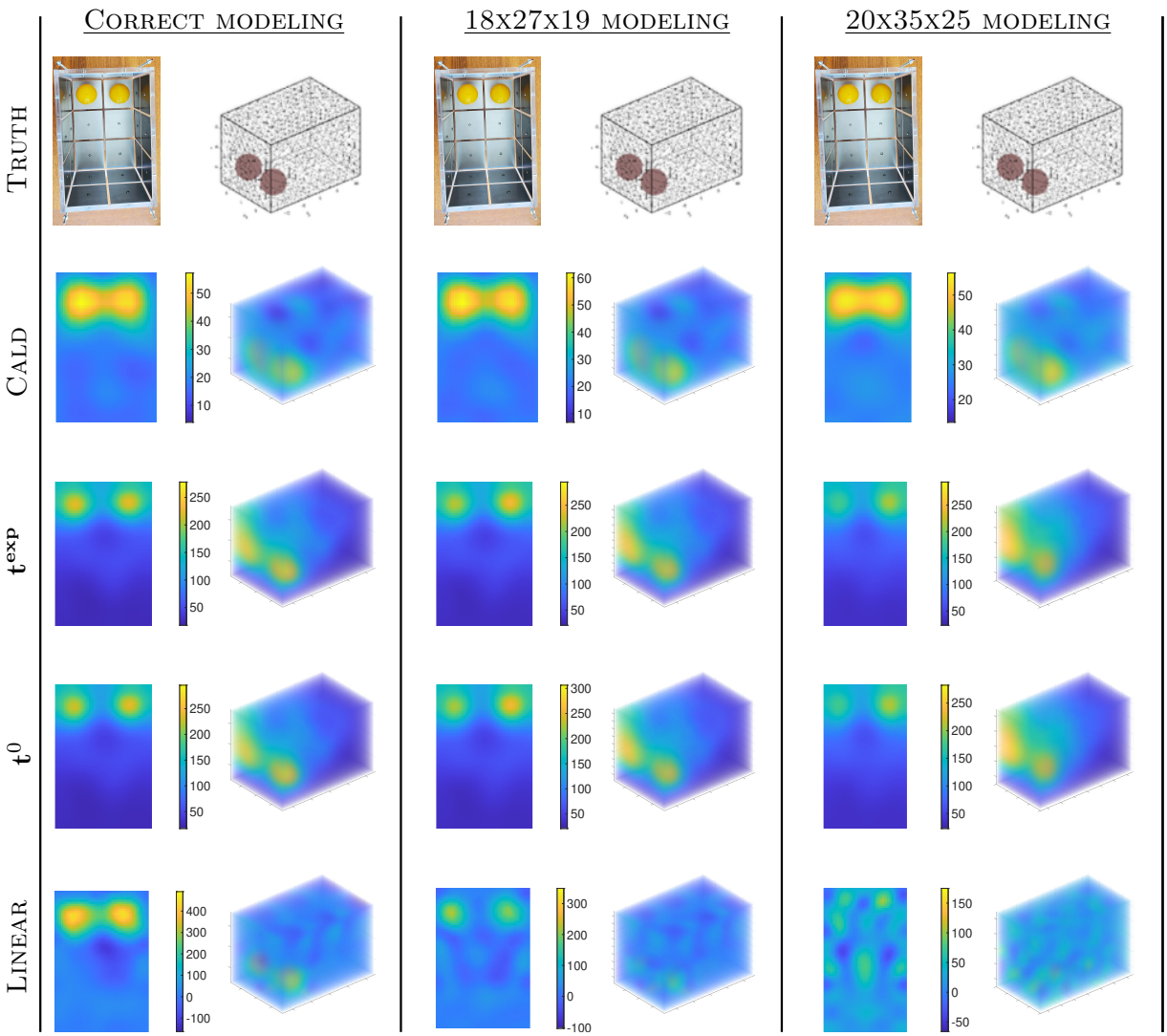

Figure 6. **差值图像**重建，对比了 CGO 方法与一种典型线性方法。图中展示了在正确域建模以及域建模误差逐渐增大的情况下，电导率的切片和三维渲染图。请注意，真实目标与背景之间测得的电导率差约为 266 毫西门子/米。

配备 AMD EPYC 7702P 64 核处理器 2.00 吉赫兹的 PC 上，重建时间分别为 0.6–0.7 秒和 4 秒，同样未针对并行化进行优化。在配备 4 吉赫兹四核 Intel® Core i7 处理器的 2015 年 iMac 上，$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ 和 $\mathbf{t}^{0}$ 方法使用 $21 \times 21 \times 21$ x网格计算势 $q(x)$ 时，每次重建需要 3–4 秒；使用 a $41 \times 41 \times 41$ x网格计算 $q(x)$ 时，每次重建需要 6–8 秒。这些计时结果均未经过优化，其中计算成本最高的部分是计算逆傅里叶变换以及使用有限元法求解边值问题。在配备 256GB 随机存取存储器和两枚 10 核 Intel® Xeon® CPU E5-2630 v4 @2.20GHz 处理器的服务器上进行计算时，正则化总变差重建和线性差分重建的平均耗时分别为 2–3 小时和 3 分钟。我们注意到，总变差正则化非线性最小二乘方法的计算时间相当长，是由于三维问题具有较高的计算

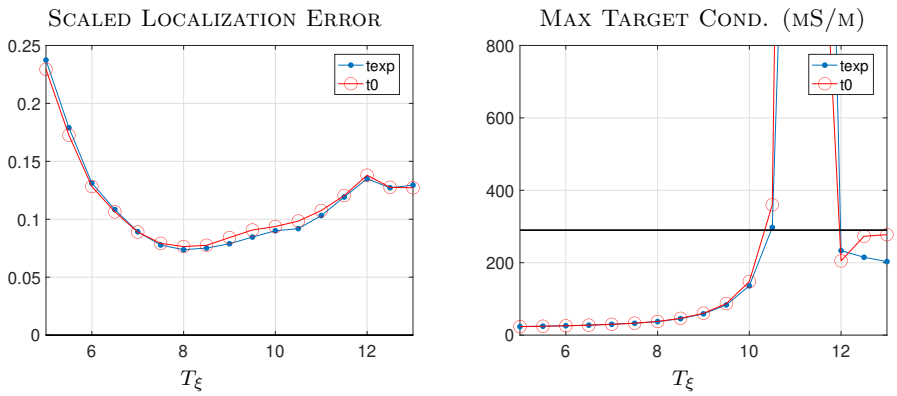

FIGURE 7. 比较散射半径截断值 T_ξ 对 $\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ 和 $\mathbf{t}^0$ 复几何光学方法的影响：缩放定位误差（左）以及重建目标的最大值。 T_ξ =11、11.5 的最大电导率值（右）超出图表范围，跃升至 1500–5000 毫西门子/米。

几何形状颇具挑战性，因为要使完全电极模型正向模型（2.2）达到足够精度，就必须在电极附近显著细化网格，导致基于有限元法的正向模型具有大量自由度（约 250,000 个节点）。在高斯-牛顿法的每次迭代中，有限元模型都需要在线搜索过程中求解多次；使用当前网格时，每次正向求解约需 80 秒计算时间。

5. CONCLUSIONS

在本研究中，我们首次使用基于复几何光学的方法，对实验三维水槽数据进行了三维绝对电阻抗断层成像重建，并将结果与当前标准方法——采用全变分正则化的非线性最小二乘法——进行了比较。我们证明，在域建模正确的情况下，所有方法都能获得高质量的三维绝对重建，其质量可与线性差分成像相媲美。对于适度的域建模误差，所有方法——Calder´on、$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$、$\mathbf{t}^0$，和全变分方法——都能较好地应对，定位误差和目标对比度几乎没有明显变化。对于域建模误差较大的情况，$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ 和$\mathbf{t}^0$ 方法正确识别了目标，且对比度较高；Calder´on 重建中则出现了额外伪影，而误差对全变分方法而言过于显著。与全变分方法相比，复几何光学重建的计算成本微不足道（未经优化时，Calder´on 每次重建耗时不到 1 秒，$\mathbf{t}^{\mathbf{exp}}$ 和 $\mathbf{t}^0$, 每次重建约需 5 秒，而全变分方法每次重建需 2–3 小时）。

ACKNOWLEDGMENTS

本文所报告的研究得到了美国国家生物医学成像与生物工程研究所（隶属美国国立卫生研究院）的资助，资助编号为 R21EB028064（SH 和 JN）和 1R01EB026710-01A1（GS、DI、JN 及 ACT5 设备的开发）。本文内容完全由作者负责，并不一定代表美国国立卫生研究院的官方观点。JT 和 VK 获得了芬兰科学院（项目 336791，芬兰逆问题建模与成像卓越中心）、简与阿托斯·埃尔科基金会以及芬兰神经中心的资助。

REFERENCES

[1] Ahmed Abdelwahab、Omid Rajabi Shishvan 和 Gary J. Saulnier。通过屏蔽同轴电缆驱动负载的电阻抗断层成像自适应电流源性能。在 *IEEE Engineering in Medicine Biology Society (EMBC)* *2020 42nd Annual International Conference of the* 1448 1451, 2020 ，第 – 页。

[2] Andy Adler 和 David Holder。 *Electrical impedance tomography: methods, history and applications*。CRC出版社，2021年。[3] Andy Adler 和 William RB Lionheart。EIDORS 的用途与误用：用于电阻抗断层成像的可扩展软件基础。 *Physiological measurement*，27(5):S25，2006年。[4] Louis Allaud 和 Maurice Martin。 *Schlumberger: The history of a technique*。约翰·威立父子出版公司，1977年。[5] K. Astala 和 L. P¨aiv¨arinta。平面上的 Calder´on 逆电导率问题。 *Annals of Mathematics*，163 1 265 299，2006年（）：–。[6] Andrew P Bagshaw、Adam D Liston、Richard H Bayford、Andrew Tizzard、Adam P Gibson、A.Thomas Tidswell、Matthew K Sparkes、Hamid Dehghani、Colin D Binnie 和 David S Holder。使用基于有限元法的重建算法进行人脑功能的电阻抗断层成像。 *NeuroImage*，20(2):752–764，2003年。[7] D. C. Barber 和 B. H. Brown。应用电位断层成像。 *Journal of Physics E: Scientific Instruments*，17 723 733，1984年：–。[8] David C Barber 和 Andrew D Seagar。电阻图像的快速重建。 *Clinical Physics and Physiological Measurement* 8 4 47, 1987 ，（A）：。

[9] J. Bikowski 和 J. Mueller。使用 Calder´on 方法的二维电阻抗断层成像重建。 *Inverse Problems and Imaging*，2 1 43 61，2008年（）：–。[10] R. Blue。 *Real-time three-dimensional electrical impedance tomography*。博士论文，伦斯勒理工学院，纽约州特洛伊，1997年。[11] L. Borcea。电阻抗断层成像。 *Inverse Problems*，18:99–136，2002年。[12] Laurent Brochard。通过电阻抗断层成像评估招募（RECRUIT）。https:// clinicaltrials.gov/ct2/show/NCT04460859，2022年4月。[在线；访问日期：22. Apr。 2022]。[13] A.-P. Calder´ *to Continuum Physics (Rio de Janeiro, 1980)* 65 73 *Seminar on Numerical Analysis and its Applications* on。关于一个边界逆问题。在，第 – 页。巴西数学会，里约热内卢，1980。[14] M. Cheney 和 D. Isaacson。阻抗成像中的可区分性。 *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 39 8 852 860, 1992 ，（）：–。

[15] M. Cheney、D. Isaacson 和 J. C. Newell。电阻抗断层成像。 *SIAM Review*，41(1):85–101，1999年。[16] K.S. Cheng、D. Isaacson、J.C. Newell 和 D.G. Gisser。电流计算机断层成像的电极模型。 *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*，36(9):918–924，1989年9月。[17] V. Cherepenin、A. Karpov、A. Korjenevsky、V. Kornienko、A. Mazaletskaya、D. Mazourov 和 D. Meister。用于乳腺癌检测的三维电阻抗断层成像（EIT）系统。 *Physiological Measurement*，22 1 9 18，2001年（）：–。[18] Myoung Hwan Choi、Tzu-Jen Kao、D. Isaacson、G. Saulnier 和 J.C. Newell。采用乳腺摄影几何结构进行乳腺癌成像的电阻抗断层成像重建算法。 *Biomedical Engineering IEEE Transactions on* 54 4 700 710, 2007 ，，（）：–。

[19] H. Cornean、K. Knudsen 和 S. Siltanen。面向三维电阻抗断层成像的 *d*-bar重建方法。 *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*，14(2):111–134，2006年。[20] Thiago de Castro Martins、Andr´e Kubagawa Sato、Fernando Silva de Moura、Erick Dario Le´on Bueno de Ca-margo、Olavo Luppi Silva、Talles Batista Rattis Santos、Zhanqi Zhao、Knut M¨oeller、Marcelo Brito Passos Amato、Jennifer L Mueller 等。肺部电阻抗断层成像应用综述：绝对图像的理论与算法。 *Annual Reviews in Control*，48:442–471，2019年。[21] M. DeAngelo 和 J. L. Mueller。使用改进的散射变换近似对人体胸部和水槽数据进行二维 D-bar 重建。 *Physiological Measurement*，31:221–232，2010年。[22] Fabrice Delbary、Per Christian Hansen 和 Kim Knudsen。电阻抗断层成像：使用散射变换进行三维重建。 *Applicable Analysis*，91(4):737–755，2012年。[23] Fabrice Delbary 和 Kim Knudsen。用于三维 Calder´on 问题的数值非线性复几何光学算法。 *Inverse Problems and Imaging*，8(4):991–1012，2014年。[24] Mouloud A. Dena¨ı、Mahdi Mahfouf、Suzani Mohamad-Samuri、George Panoutsos、Brian H. Brown 和 Gary H. Mills。重症患者中由绝对电阻抗断层成像（aeit）引导的通气治疗：模拟与未来趋势。 *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*，14(3):641–649，2010年。[25] V Druskin。分段连续电导率条件下电法勘探逆问题和电测井逆问题的唯一解。 *Earth Physics*，18(1)，1982年。[26] M.R. Eggleston、R.J. Schwabe、D. Isaacson 和 L.F. Coffin。电流计算机断层成像在金属缺陷成像中的应用。 *Review of Progress in Quantitative NDE*，9:455–462，1989年。[27] L. D. Faddeev。Schr¨odinger 方程的增长解。 *Soviet Physics Doklady*，10:1033–1035，1966年。[28] Joel Feldman、Mikko Salo 和 Gunther Uhlmann。Calder´on 问题——逆问题导论。 *Preliminary notes on the book in preparation*，2019年。

[29] In´ez Frerichs、Marcelo BP Amato、Anton H Van Kaam、David G Tingay、Zhanqi Zhao、Bart-lomiej Grychtol、Marc Bodenstein、Herv´e Gagnon、Stephan H B¨ohm、Eckhard Teschner 等。胸部电阻抗断层成像检查、数据分析、术语、临床应用与建议：TRanslational EIT developmeNt stuDy 组的共识声明。 *Thorax*，72(1):83–93，2017年。[30] DG Gisser、D. Isaacson 和 JC Newell。电流计算机断层成像与特征值。 *SIAM Journal on Applied Mathematics* 50 6 1623 1634, 1990 ，( ): – 。

[31] DG Gisser、David Isaacson 和 JC Newell。自适应电流断层成像系统的理论与性能。 *Clinical Physics and Physiological Measurement*，9(4A):35，1988年。[32] John Corban Goble。 *The three-dimensional inverse problem in electric current computed tomography*。博士论文，伦斯勒理工学院，1990年。[33] Nir Goren、James Avery、Thomas Dowrick、Eleanor Mackle、Anna Witkowska-Wrobel、David Werring 和 David Holder。卒中患者的多频电阻抗断层成像与神经影像学数据。 *Scientific data* 5 180112, 2018 ，: 。[34] Sarah J Hamilton、David Isaacson、Ville Kolehmainen、Peter A Muller、Jussi Toivainen 和 Patrick F Bray。使用直接反演 t^{exp} 和 Calder´on 方法从模拟电极数据重建三维电阻抗断层成像图像。 *Inverse Problems & Imaging*，2021年。[35] R. P. Henderson 和 J. G. Webster。用于胸腔空间特异性测量的阻抗相机。*IEEE Transactions on Biomedical Engineering*，BME-27:250–254，1978年。[36] D.S. Holder，编者。 *Electrical impedance tomography; methods，history，and applications*。IOP Publishing Ltd.，2005年。[37] Nuutti Hyv¨onen。通过电极测量近似电阻抗断层成像的理想化边界数据。 *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*，19:1185–1202，2009年。[38] D. Isaacson。通过电流计算机断层成像区分电导率。 *IEEE Transactions on Medical Imaging* 5 2 91 95, 1986 ，( ): – 。

[39] D. Isaacson、J. L. Mueller、J. C. Newell 和 S. Siltanen。采用 D-bar 方法重建电阻抗断层成像胸部仿体。 *IEEE Transactions on Medical Imaging*，23:821–828，2004年。[40] J. Kaipio 和 E. Somersalo。 *Statistical and Computational Inverse Problems* 160 *Applied Mathematical*，第 卷。*Sciences* 2004 施普林格出版社，。[41] J.P. Kaipio、V. Kolehmainen、E. Somersal 和 M. Vauhkonen。电阻抗断层成像中的统计反演与蒙特卡洛采样方法。 *Inverse Problems*，16(5):1487–1522，2000年。[42] Tzu-Jen Kao、Bruce Amm、David Isaacson、Jonathan Newell、Gary Saulnier 和 Jennifer L Mueller。用于肺功能监测的实时同步多源 EIT 成像三维重建算法。*bioRxiv*，2020年。[43] Tzu-Jen Kao、Gregory Boverman、David Isaacson、Gary J Saulnier、Jonathan C Newell、Richard H Moore 和 Daniel B Kopans。用于乳腺癌检测的区域导纳谱与断层合成图像。In *2007 29th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*，第4142–4145页。IEEE，2007年。[44] George Vernon Keller 和 Frank C Frischknecht。地球物理勘探中的电法。1966年。[45] T.E. Kerner、K.D. Paulsen、A. Hartov、S.K. Soho 和 S.P. Poplack。乳房电阻抗谱：26名受试者的临床成像结果。 *IEEE Transactions on Medical Imaging*，21(6):638–645，2002年。[46] K. Knudsen、M. Lassas、J.L. Mueller 和 S. Siltanen。逆电导率问题的正则化 D-bar 方法。 *Inverse Problems and Imaging*，3(4):599–624，2009年。[47] Kim Knudsen 和 Aksel Kaastrup Rasmussen。三维 calder´on 问题的直接正则化重建。 *Inverse Problems and Imaging*，2022年。[48] R. Kohn 和 M. Vogelius。通过边界测量确定电导率。 *Communications on Pure and Applied Mathematics* 37 289 298, 1984 ，: – 。

[49] Ville Kolehmainen、Matti Lassas 和 Petri Ola。边界和接触阻抗已知不准确时的电阻抗断层成像问题。 *IEEE transactions on medical imaging*，27(10):1404–1414，2008年。[50] R. E. Langer。微分方程中的一个逆问题。 *Bulletin of the American Mathematical Society*，39 814 820，1933年: – 。[51] A Lehikoinen、S Finsterle、Arto Voutilainen、LM Heikkinen、M Vauhkonen 和 JP Kaipio。计算域的近似误差与截断及其在地球物理断层成像中的应用。 *Inverse Problems & Imaging* 1 2 371, 2007 ，( ): 。

[52] Taoran Li、David Isaacson、Jonathan C Newell 和 Gary J Saulnier。电阻抗断层成像重建中的自适应技术。 *Physiological measurement*，35(6):1111，2014年。[53] Taoran Li、Tzu-Jen Kao、David Isaacson、Jonathan C Newell 和 Gary J Saulnier。用于电阻抗断层成像图像重建的自适应 Kaczmarz 方法。 *Physiological measurement*，34(6):595，2013年。[54] Chad Lieberman、Karen Willcox 和 Omar Ghattas。大规模统计逆问题的参数与状态模型降阶。 *SIAM Journal on Scientific Computing*，32(5):2523–2542，2010年。

[55] Jennifer L Mueller 和 Samuli Siltanen。电阻抗断层成像的 d-bar 方法——揭秘。*Inverse problems*，36(9):093001，2020年。[56] J.L. Mueller 和 S. Siltanen。 *Linear and Nonlinear Inverse Problems with Practical Applications*。工业与应用数学学会，2012年。[57] P. A. Muller、J. L. Mueller 和 M. M. Mellenthin。Calder´on 方法在受试者特定区域上的实时实现。 *IEEE Trans. Med. Imaging*，36(9):1868–1875，2017年。[58] A. I. Nachman。根据边界测量进行重建。 *Annals of Mathematics*，128:531–576，1988年。[59] A. I. Nachman。二维边界逆问题的全局唯一性。 *Annals of Mathematics*，143 71 96，1996年: – 。[60] J Newell。伦斯勒的经验。载于 D Holder 编, *Electrical Impedance Tomography: methods history* , , 第 – 页。。 *and applications* 388 410 2005
[61] Antti Nissinen、Ville Petteri Kolehmainen 和 Jari P Kaipio。补偿电阻抗断层成像中因未知域边界导致的建模误差。 *IEEE transactions on medical imaging* 30 2 231 242, , ( ): – 。[62] R. G. 2010
Novikov 和 G. M. Khenkin。多维逆散射问题中的 ∂ *Uspekhi*-方程。, :93，1987年。 *Mat. Nauk.* 42
[63] R.G. Novikov。方程 $-\delta\psi + v\ x\ - eu\ x\ \ \psi = 0$ *Functional Analysis and Its Applications* 22 4 263 272, 1988
(( ) ( ))的多维逆谱问题。, ( ): – 。[64] Robert L Parker。电阻率测深的逆问题。 *Geophysics*，49(12):2143–2158，1984年。[65] O. Rajabi Shishvan、A. Abdelwahab 和 G.J. Saulnier。ACT 5 *Proceedings of the 21st International Conference on Biomedical Applications of Electrical Impedance Tomography* 2021 EIT 系统。载于 . Zenodo，2022年6月。[66] L.I. Rudin、S. Osher 和 E. Fatemi。基于全变分的非线性去噪算法。 *Physica D: Nonlinear Phenomena* 60 1 4 259 268, 1992 , (-): – 。[67] Gary Saulnier、Ahmed Abdelwahab 和 Omid Rajabi Shishvan。用于电阻抗断层成像的基于数字信号处理器的电流源。 *Physiological Measurement*，41:064002，2020年6月。[68] Gary J Saulnier。电阻抗断层成像仪器。载于 D Holder 编, *Electrical Impedance Tomography: Methods History* , , 第 – 页。IOP *and Applications* 67 104 2005
Publishing，布里斯托尔，。[69] Erkki Somersalo、Margaret Cheney 和 David Isaacson。电流计算机断层成像电极模型的存在性与唯一性。 *SIAM Journal on Applied Mathematics*，52(4):1023–1040，1992年。[70] David Keith Swanson。 *Measurement errors and origin of electrical impedance changes in the limb*。博士论文，威斯康星大学麦迪逊分校，1976年。[71] J. Sylvester 和 G. Uhlmann。边界逆问题的全局唯一性定理。 *Annals of Mathematics* 125 153 169, 1987 , : – 。[72] John Sylvester 和 Gunther Uhlmann。电法勘探中边界逆问题的唯一性定理。 *Communications on Pure and Applied Mathematics*，39(1):91–112，1986年。[73] PLUG 小组。PLUG 小组：胸膜压工作组。https://www.plugwgroup.org，2022年4月。 [在线；访问日期：4月22日。 2022]。[74] AN Tikhonov。关于电法地球物理勘探问题解的唯一性。载于 *Dokl. Akad.* , 卷 , 第 – 页。[75] *Nauk SSSR* 69, 797 800, 1949
Timpel。https://www.timpelmedical.com，2022年4月。 [在线；访问日期：4月22日。 2022]。[76] Jussi Toivanen、Asko H¨anninen、Tuomo Savolainen、Nina Forss 和 Ville Kolehmainen。使用电阻抗断层成像监测出血性卒中。载于 *Bioimpedance and Spectroscopy*，第271–298页。爱思唯尔，2021年。[77] Gunther Uhlmann。《逆问题：看见不可见之物》。 *Bulletin of Mathematical Sciences*，4(2):209–279，2014年。[78] M. Vauhkonen。 *Electrical Impedance Tomography and Prior Information*。博士论文，库奥皮奥大学，1997年。[79] M. Vauhkonen、D. Vad´asz、P. A. Karjalainen、E. Somersalo 和 J. P. Kaipio。电阻抗断层成像中的 Tikhonov 正则化与先验信息。 *IEEE Transactions on Medical Imaging*，17:285–293，1998年。[80] Mi Wang。 *Industrial tomography: systems and applications*。爱思唯尔，2015年。