arXiv:2301.01656v1 [math.CO] 4 Jan 2023

关于 k 临界图中边数的最大值

Cong Luo* Jie Ma† Tianchi Yang‡

摘要

若一个图的色数为 k，但其任意真子图的色数都小于 k，则称该图为 k 临界图。图论中的一个古老而重要的问题是，确定一个 n 阶 k 临界图的边数最大值。对于任意整数 $k \geq 4$，这个问题都尚未解决。利用 Greenwell 和 Lov´asz 的结构刻画以及 Simonovits 的一个极值结果，Stiebitz 于 1987年证明：对于 $k \geq 4$ 且 n 充分大时，这个最大值小于 n 阶平衡完全 $(k-2)$ 部图的边数。本文在过去 35 年来首次改进了上述结果。我们的证明结合了极值图论中的论证和一些结构分析。我们使用的一个关键引理揭示了稠密 k 临界图中的一种部分结构，这一结果本身或许也具有独立意义。

1 引言

我们所考虑的所有图都是有限简单图。若能给图 G 的顶点赋予 k 种颜色，使得任意两个相邻顶点颜色不同，则称图 G 是 k-可着色的。若图 G 是 k-可着色的，但不是 $(k-1)$-可着色的，则称其为 k-色图。若图 G 是 k-色图，但其每个真子图都是 $(k-1)$-可着色的，则称图 G 为 k-临界图。对于 $k \in \{1,2\}$，唯一的 k-临界图是 K_k；而 3-临界图恰好是奇圈。在本文中，我们研究 $k \geq 4$ 的 k-临界图。

图论中的一个核心问题是确定 n 阶 k-临界图中边的最大数量 $f_k(n)$（见 [6]）。在讨论关于 $f_k(n)$ 的文献之前，我们想指出一个相关且简单的事实：Tur´an 图 $T_k(n)$（即 n 阶平衡完全 k 部图）在所有 n 阶

*中国科学技术大学数学科学学院，中国安徽省合肥市 230026。电子邮箱：luoc@mail.ustc.edu.cn。

†中国科学技术大学数学科学学院，中国安徽省合肥市 230026。研究工作部分得到国家重点研发计划（2020YFA0713100）、国家自然科学基金（12125106）以及安徽量子信息技术计划（AHY150200）的资助。电子邮箱：jiema@ustc.edu.cn。

‡新加坡国立大学数学系，119076，新加坡。本研究部分得到了新加坡国立大学 Hao Huang 教授的启动经费及教育部学术研究基金（AcRF）第 1 层级资助的支持。电子邮箱：tcyang@nus.edu.sg。

k-色图中边数最多。Dirac [2] 通过考察将两个顶点不相交且顶点数相同的奇圈连接起来所得到的图，证明了 $f_6(n) \geq \frac{1}{4}n^2 + n$。Toft [12] 证明，对于每个 $k \geq 4$，都存在一个正常数 c_k，使得对所有整数 $n \geq k$（$n = k+1$ 除外），均有 $f_k(n) \geq c_k n^2$。在最基本且有趣的情形 $k = 4$、5 中，这些常数分别为

$$c_4 \geq \frac{1}{16} = 0.0625 \quad \text{and} \quad c_5 \geq \frac{4}{31} \geq 0.129.$$

在一般情况下，当 $k \geq 6$ 时，[12] 中的显式构造表明，存在无穷多个 n 使得

$$f_k(n) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2k - \delta_k}\right) n^2,$$

其中，当 $\delta_k = 0$ 为 $k \equiv 0$（模 3）时为 $\delta_k = 8/7$，当 $k \equiv 1$ 为 $\delta_k = 44/23$（模 3）时为 $k \equiv 2$，当 f_k 为 n（模 3）时为 $/n^2$。据我们所知，此后尚未发现能够给出更优常数 $_{n\to\infty}{}^{f_k}$（） 的构造。对于任意 $_n$，lim$($ $k \geq 4)$ ~~n 是~~否存在仍是一个开放问题。2013 年，Pegden$\left(\frac{1}{16} - o$研究了稠密的无三角形 $\right) n^2$ -临界图。他构造了无穷多个 $\left(\frac{4}{31} - o$ 个顶点的无三角形 4-临界图，其边数至少为 $\right) n^2$ (1) k；边数至少为 $\left(\frac{1}{4} - o(1)\right) n^2$ 的无三角形 5-临界图；以及对于每个 $k \geq 6$，边数至少为 ′(1) k 的无三角形 ℓ -临界图。根据 Tur ℓan 定理，最后一个界在渐近意义下是最佳可能的。他还证明了，对于任意 $k \geq 6$，存在不含长度至多为 的奇圈的稠密-临界图；对于 而言，这一结果在渐近意义下同样是紧的。

转而讨论 $f_k(n)$ 的上界，由于任何具有 $n > k$ 的 n 阶 k-临界图都不包含作为子图的 K_k，根据 Tur´an 定理可以轻易得到，对于任意 $n > k \geq 4$，$f_k(n) < e(T_{k-1}(n))$。利用 Greenwell 和 Lov´asz [5] 对 k-临界图的子图所作的刻画，以及 Simonovits [10]，的一个经典定理，Stiebitz [11] 于 1987年 改进了这个平凡的上界，证明了

$$f_k(n) < e(T_{k-2}(n)) \text{ for sufficiently large integer } n. \tag{1}$$

自那以后已经过去 35 年，据我们所知，这仍然是最好的上界。

$f_k(n)$ 与确定 k-临界图中 K_{k-1} 的最大副本数这一问题之间存在自然联系。Abbott 和 Zhou [1] 将 Stiebitz [11] 关于 4-临界图的一项早期结果推广，证明对于任意 $k \geq 4$，每个含有 n 个顶点的 k-临界图至多包含 n 个 K_{k-1} 的副本。这个上界在 [7] 中得到进一步改进。最近，Gao 和 Ma [4] 证明了一个锐利结果：对于任意 $n > k \geq 4$，任何含有 n 个顶点的 k-临界图至多包含 $n - k + 3$ 个 K_{k-1} 的副本。如果从一个含有 n 个顶点的 k-临界图中，对每个 K_{k-1} 删除一条边，就可能得到一个不包含 K_{k-1} 的图。利用 Tur´an 定理和 [4]，的上述结果，我们可以推出

$$f_k(n) \leq e(T_{k-2}(n)) + n - k + 3 \text{ for any } n > k \geq 4.$$

本文着重研究 $f_k(n)$ 的上界。我们的首个结果改进了 Stiebitz [11] 提出的长期以来的上界 (1)。

定理 1.1. 对于任意整数 $k \geq 4$ 以及充分大的整数 n，存在一个常数$c_k \geq {}_{36}{}^{1}{}_{(k-1)^2}$，使得 $f_k(n) \leq e(T_{k-2}(n)) - c_k n^2$。

我们的第二个结果讨论 4-临界图。以下定理给出了比定理 1.1 更好的 $f_4(n)$ 上界。

定理 1.2. 对于充分大的整数 n，有 $f_4(n) < 0.164n^2$。

两个定理的证明都依赖于极值图论中的论证（例如 F¨uredi [3] 的稳定性），以及下一节给出的一个结构引理（引理 2.1）。引理 2.1 揭示了稠密临界图（在某些约束条件下）中的部分结构，这种结构可以在许多经典的稠密临界图构造中看到（参见第 2 节开头的讨论）。为此，我们想完整描述著名的 Toft 图的构造（见 [12]）。Toft 图的顶点集由 4 个两两不交且大小相同的集合 A、B、C、D 构成，其中 A 和 D 是奇圈，B 和 C 是独立集，B 与 C 之间的边构成一个完全二部图，而 (A, B) 中的边和 (C, D) 中的边都构成完美匹配。容易验证，n阶 Toft 图是 4-临界图，且有 $\frac{1}{16}n^2 + n$ 条边。我们指出，Toft 图仍然是构造稠密 4-临界图的最佳方案。

我们使用图论中的标准记号。令 $\overline{G}$ 表示图G的补图。对于图 G中的顶点 v，令 $N_G(v)$ 表示 v 在 G 中的邻域，并令 $d_G(v) := |N_G(v)|$ 表示 v 在 G 中的度。当 G 可由上下文明确时，我们通常省略下标。令 $d(G)$ 表示图 G的平均度。此外，对于任意 $S \subseteq V(G)$，令$G[S]$ 表示 G 在顶点集 S上诱导的子图。对于任意两个不相交的集合 A、$B \subseteq V(G)$，令 $G[A, B]$ 表示 G 的诱导二部子图，其二部划分为(A, B)。

本文其余部分安排如下。第 2 节中，我们证明一个对后续证明至关重要的引理。随后，我们在第 3 节证明定理 1.1，并在第 4 节证明定理 1.2。

2 关键引理

本节将证明我们的关键引理，其大意是：如果一个 k-临界图 G 包含某些两两共享 $k-3$个公共顶点的 t 个 K_{k-2} 副本，那么在 G 中存在一个大小为 t 的“诱导”匹配，并且其中的顶点与这些团相连。这表明其中存在一种类似于 Toft 图的子结构（以及许多其他 k-临界图的例子）。特别地，这揭示了 k-临界图的结构不可能接近 Tur´án 图 $T_{k-2}(n)$，因此不等式 (1) 不应为紧的。

引理 2.1. 设 $k \geq 4$，并设 G 是一个 k-临界图。假设 $G[\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-3}\}]$构成 K_{k-3} 的一个副本，且存在一个集合 $W \subseteq N(x_1) \cap \cdots \cap N(x_{k-3}) \cap N(u)$，其中 $u \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-3}\}$ 是某个顶点。那么存在一个集合 W' 和一个双射 $\varphi\colon W \to W'$，使得

$N(\varphi(w)) \cap W = \{w\}$，且对每个 $w \in W$， $N(w) \cap W' = \{\varphi(w)\}$成立。此外，若 $|W| \geq 3$，则 W是 G中的一个独立集，且 $W' \cap W = \emptyset$。

证明。对于每个顶点 $w \in W$，从 k-临界图 G中删除边 uw，即可得到一个 $(k-1)$-可着色图 G'。我们将 G' 的颜色类记为 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$、.....、$\mathcal{C}_{k-1}$。容易看出，顶点 u 和 w 属于同一个颜色类。由于 $G[\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-3}, w\}]$ 是一个 $(k-2)$-团，不妨设 $x_1 \in \mathcal{C}_1$、 $x_2 \in \mathcal{C}_2$、.....、$x_{k-3} \in \mathcal{C}_{k-3}$，以及 u、$w \in \mathcal{C}_{k-2}$。事实 $W \subseteq N(x_1) \cap \cdots \cap N(x_{k-3}) (\cap N)(u)$ 告诉我们，集合 $W \backslash \{w\}$（若非空）必包含于 $\mathcal{C}_{k-1}$ 中，因此 $W \backslash \{w\}$ 是 G 中的独立集。我们断言， $N(w) \cap \mathcal{C}_{k-1}$ 必须包含一个顶点，例如 $\varphi(w)$。否则， $\mathcal{C}_1$、.....、$\mathcal{C}_{k-3}$、$\mathcal{C}_{k-2} - \{w\}$、$\mathcal{C}_{k-1} \cup \{w\}$ 可以构成 G 的一个 $(k-1)$-着色，这与 G 是 k-临界的事实相矛盾。此外， $\{\varphi(w)\} \cup (W \backslash \{w\}) \subseteq \mathcal{C}_{k-1}$ 告诉我们， $N(\varphi(w)) \cap W = \{w\}$。现在定义 $W' := \{\varphi(w) : w \in W\}$。正如我们已经证明的，对于每个 $w \in W$，$N(\varphi(w)) \cap W = \{w\}$ 成立，容易看出 $|W'| = |W|$、$\varphi : W \to W'$ 是一个双射，并且对于每个 $w \in W$， $N(w) \cap W' = \{\varphi(w)\}$ 成立。

此外，如果 $|W| \geq 3$，那么 W是 G中的一个独立集（因为对于每个顶点 $v \in W$，$W \backslash \{v\}$都是 G中的一个独立集）。由 W'与 W之间的边恰好构成一个匹配这一事实可知，在这种情况下 $W' \cap W = \emptyset$。 □

It 如果这个引理（或其证明）能够进一步推广，将会非常有意思。 .

3 一般情形： k-临界

F¨uredi[3] 通过给出 Tur´án 数 ex(n, K_{r+1})稳定性的一个简单且新颖的证明，证明了：如果一个有 n 个顶点的图 G 不含 K_{r+1}，且至少有 $e(T_r(n)) - t$ 条边，其中 $0 \leq t < e(T_r(n)) < n^2$，那么存在 $V(G)$ 的一个划分 $V_1, \ldots, V_r$，使得 $\sum_{i=1}^{r} e(G[V_i]) \leq t$。证明 [3] （见推论 3）还表明，如果将颜色类为 $V_1, \ldots, V_r$ 的完全 r-部图记作 K，那么 $|E(K) \backslash E(G)| \leq 2t$，并且此外， $\sum_{i=1}^{r} (|V_i| - n/r)^2 < 4t + o(n^2)$。我们将其总结为以下引理。

引理 3.1（F¨uredi [3]）。设 G 是一个有 n 个顶点且不含 K_{r+1} 的图，并且 $e(G) \geq e(T_r(n)) - t$，其中 $0 \leq t < e(T_r(n)) < n^2$。那么存在一个完全 r 部图 $K := K(V_1, \ldots, V_r)$，满足 $V(K) = V(G)$），使得

$$|E(K) \backslash E(G)| \leq 2t,$$

and

$$\sum_{i=1}^{r} \left(|V_i| - \frac{n}{r} \right)^2 < 4t + o(n^2).$$

我们现在可以利用引理 2.1 和 3.1 来证明定理 1.1。

定理 1.1 的证明。固定 $k \geq 4$，并令 $C = 36^{1}$ ~~$(k-1)\ 2$~~。设 G 是一个有 n 个顶点的 k-临界图，且其边数为 $e(G) > e(T_{k-2}(n)) - Cn^2$。在证明的其余部分，我们始终假设$n$ 足够大，并为方便起见，用 V 表示 $V(G)$。[1] 中的结果告诉我们，G 中 K_{k-1} 的副本数至多为 n。因此，删去 G 中至多 n 条边后，我们得到一个不含 K_{k-1} 的生成子图 G'。显然，我们有 $e(G') > e(T_{k-2}(n)) - (Cn^2 + n)$。

应用引理 3.1 后，我们得到 V 的一个划分 $V_1, \ldots, V_{k-2}$，以及一个完全的 $(k-2)$-色图 $K := K(V_1, \ldots, V_{k-2})$，使得 $|E(K) \backslash E(G')| \leq 2(Cn^2 + n)$，并且

$$\left| |V_i| - \frac{n}{k-2} \right| < \sqrt{4Cn^2 + o(n^2)} < \frac{n}{3(k-1)} + o(n) \text{ for each } 1 \leq i \leq k-2.$$

不失一般性，假设 $|V_1| \leq \cdots \leq |V_{k-2}|$。因此 $|V_{k-2}| \geq n/(k-2)$。我们称 $E(K) \backslash E(G')$ 中的边为缺边。与顶点 v 在 K 中关联的缺边数称为 v 的缺度。对于每个 $1 \leq i \leq k-2$，我们定义 B_i 为满足以下条件的 V_i 中的 $\left\lceil 3^{n}{}_{(k-1)} \right\rceil$ 个顶点组成的集合：存在某个 m_i，使得 B_i 中任意顶点的缺度至少为 m_i，且 $U_i := V_i - B_i$ 中任意顶点的缺度至多为 m_i。由于缺边总数至多为 $2(Cn^2 + n)$，因此有 $\sum_{i=1}^{k-2} m_i |B_i| < 4(Cn^2 + n)$，从而我们可以得到

$$\sum_{i=1}^{k-2} m_i < 4(Cn^2 + n) \Big/ \left\lceil \frac{n}{3(k-1)} \right\rceil \leq \frac{n}{3(k-1)} + 12(k-1).$$

并且我们可以验证，对于每个 $1 \leq i \leq k-2$，都有

$$|U_i| = |V_i| - |B_i| > n/(k-2) - \frac{n}{3(k-1)} - \frac{n}{3(k-1)} - o(n) > \frac{n}{3(k-2)} \geq \sum_{i=1}^{k-2} m_i + \Theta(n). \quad (2)$$

任取一个顶点 $x_0 \in U_{k-2}$，并令 $Y := N_{G'}(x_0) \backslash V_{k-2}$。显然，

$$|Y| \geq n - |V_{k-2}| - m_{k-2}.$$

我们可以在 G' 中的顶点 $x_1, x_2, \ldots, x_{k-3}$ 上找到一个 K_{k-3} 的副本，使得 $x_i \in U_i \cap Y = U_i \cap N_{G'}(x_0)$：贪心地逐个选择顶点 $x_i \in U_i \cap N_{G'}(x_0) \cap \cdots \cap N_{G'}(x_{i-1})$ 作为 $1 \leq i \leq k-3$，因为对每个 $1 \leq i \leq k-3$，(2) 都成立。接着，由于根据 (2)，对每个 $1 \leq i \leq k-3$，$|U_i| - m_{k-2} \geq |U_i| - \sum_{i=1}^{k-2} m_j > k-2$ 都成立，因此我们可以找到一个不同于 $x_1, x_2, \ldots, x_{k-3}$ 的顶点 $u \in U_{i_0} \cap Y$，其中我们选择 i_0 使得 $m_{i_0} = \min\{m_1, \ldots, m_{k-3}\}$。令 $W := N_{G'}(x_1) \cap \cdots \cap N_{G'}(x_{k-3}) \cap N_{G'}(u) \cap V_{k-2}$。我们可以看到 $W \ni x_0$, $W \cap Y = \emptyset$，并且

$$|W| \geq |V_{k-2}| - \sum_{i=1}^{k-3} m_j - m_{i_0} \geq |V_{k-2}| - \left(1 + \frac{1}{k-3}\right) \sum_{i=1}^{k-3} m_j.$$

然后利用引理 2.1，我们得到一个集合 W'，其中 $|W'| = |W|$，使得对于每个 $w \in W'$，都有 $|N_G(w) \cap W'| = 1$，且 $|W' \cap W| \leq 2$。注意，Y 中的所有顶点都与 $G' \subseteq G$ 中的顶点 $x_0 \in W$ 相邻，因此我们可以得出 $|W' \cap Y| \leq 1$。

由于 $W \cap Y = \emptyset$、$|W' \cap W| \le 2$、$|W' \cap Y| \le 1$ 和 $|W'| = |W|$，我们得到 $n \ge |W \cup Y \cup W'| \ge 2|W| + |Y| - 3$。因此

$$2|W| + |Y| \le n + 3.$$

但另一方面，我们可以验证

$$\begin{aligned} 2|W| + |Y| &\ge 2\left(|V_{k-2}| - \left(1 + \frac{1}{k-3}\right) \sum_{j=1}^{k-3} m_j \right) + (n - |V_{k-2}| - m_{k-2}) \\ &\ge n + |V_{k-2}| - 2\left(1 + \frac{1}{k-3}\right) \sum_{j=1}^{k-2} m_j \\ &\ge n + \frac{n}{k-2} - 2\left(1 + \frac{1}{k-3}\right)\left(\frac{n}{3(k-1)} + 12(k-1)\right) > n + 3. \end{aligned}$$

这推 导出矛盾。因此，对于充分大的 n，我们有 $f_k(n) \le e(T_{k-2}(n)) - Cn^2$。 □

我们想指出，上述证明依赖于 K_{k-2} 的存在。（回想一下，在引理 2.1 中，对于每个顶点 $w \in W$，$G[\{w, x_1, x_2, \ldots, x_{k-3}\}]$ 都形成一个 K_{k-2} 的副本。）因此，采用这种方法，我们无法将上界改进到以下形式

$$e(G) \le \mathrm{ex}(n, K_{k-2}) = e(T_{k-3}(n)) \le e(T_{k-2}(n)) - \frac{n^2}{2(k-2)(k-3)};$$

也就是说，我们无法得到一个阶数量级优于 k^{-2} 的常数 c_k。

4 4-临界情形

本节讨论 4-临界图，并证明定理 1.2。

在给出定理 1.2 的证明之前，我们先简要证明一个略弱于定理 1.2 的界（见定理 4.1），以说明证明思路。在证明定理 4.1 时，我们研究基于 2-路径（即长度为二的路径）的一些局部结构；而在证明定理 1.2 时，我们则用 4-圈（即长度为四的圈）取代 2-路径。

4.1 一个较弱的上界

我们首先证明以下结果。

定理 4.1. 对任意整数 $n \ge 4$，都有 $f_4(n) < \frac{1}{6}n^2 + 10n \le 0.167n^2 + 10n$。

我们还需要以下两个引理。对于图 G，记 $t(G)$ 为 G 中三角形的数量。对于顶点 v，令 $t_G(v)$ 表示 G 中包含顶点 v 的三角形数量。当 G 明确时，我们通常省略下标。

引理 4.2. 假设 G 至多有 n 个三角形，且最小度至少为 3。那么 G 包含一条 2-路径 xyz，使得

$$d(x)+d(y)+d(z)-3t(x)-3t(z)\geq \frac{6e(G)}{n}-\frac{9n^2}{e(G)}.$$

证明。对于某个顶点 $v\in V(G)$，令 $N(v)=\{v_1,v_2,\dots,v_t\}$ 为某个 $t\geq 3$。令

$$\mathcal{P}_v:=\{v_1vv_2,\dots,v_{t-1}vv_t,v_tvv_1\}$$

为一个中心为 v 的二路径族。我们有 $|\mathcal{P}_v|=d(v)$，并且

$$\sum_{xyz\in\mathcal{P}_v}(d(x)+d(y)+d(z))=d(v)^2+2\sum_{u\in N(v)}d(u),$$

$$\sum_{xyz\in\mathcal{P}_v}(t(x)+t(z))=2\sum_{u\in N(v)}t(u).$$

那么令 $\mathcal{P}:=\bigcup_{v\in V(G)}\mathcal{P}_v$。我们有

$$|\mathcal{P}|=\sum_{v\in V(G)}d(v)=2e(G).$$

利用詹森不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{xyz\in\mathcal{P}}(d(x)+d(y)+d(z))&=\sum_{v\in V(G)}d(v)^2+2\sum_{v\in V(G),u\in N(v)}d(u)=\sum_{v\in V(G)}d(v)^2+2\sum_{u\in V(G),v\in N(u)}d(u)\\&=\sum_{v\in V(G)}d(v)^2+2\sum_{u\in V(G)}d(u)^2=3\sum_{v\in V(G)}d(v)^2\geq 12e(G)^2/n.\end{aligned}$$

由于 G 中每个顶点的度至多为 $n-1$，且 $\sum_{u\in V(G)}t(u)=3t(G)\leq 3n$，我们得到

$$\sum_{xyz\in\mathcal{P}}(t(x)+t(z))=2\sum_{v\in V(G)}\sum_{u\in N(v)}t(u)=2\sum_{u\in V(G)}d(u)t(u)\leq 2n\sum_{u\in V(G)}t(u)\leq 6n^2.$$

因此，在 $\mathcal{P}$ 中均匀随机地选取一条 2-路径 xyz，可得

$$\mathbb{E}[d(x)+d(y)+d(z)-3t(x)-3t(z)]\geq\frac{12e(G)^2/n-18n^2}{|\mathcal{P}|}=\frac{6e(G)}{n}-\frac{9n^2}{e(G)}.$$

因此，我们可以找到所需的 2-路径 xyz。 □

引理 4.3. 对于 4-临界图 G 中的任意 2-路径 xyz，有

$$d(x)+d(y)+d(z)-3t(x)-3t(z)\leq n+1.$$

证明. 设 $X := N(x)$, $Y := N(y)$, $Z := N(z)$, 且 $W := X \cap Z$。如果 $u \in X \cap Y$, uxy 是一个三角形，则 $|X \cap Y| \leq t(x)$。类似地， $|Z \cap Y| \leq t(z)$。于是有

$$|X \cup Y \cup Z| \geq |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |Z \cap Y| - |X \cap Z| \geq d(x) + d(y) + d(z) - t(x) - t(z) - |W|.$$

根据引理 2.1，我们可以找到一个集合 $W' \subseteq V(G)$ 和一个双射 $\varphi: W \to W'$，使得 $W' = \{\varphi(w) : w \in W'\}$，并且对于每个 $w \in W$，我们都有 $N(\varphi(w)) \cap W = \{w\}$ 和 $N(w) \cap W' = \{\varphi(w)\}$。

我们考虑 $W' \cap (X \cup Y \cup Z)$ 的大小。由于对于每个 $w \in W$， $N(\varphi(w)) \cap W = \{w\}$ 和 $N(w) \cap W' = \{\varphi(w)\}$ 均成立，并且我们知道 $y \in W$，因此可知 $|W' \cap Y| \leq |W' \cap N(y)| \leq 1$。假设 $v' \in W' \cap X$。存在一个顶点 $v \in W$，使得 vv' 是一条边。于是我们看到 xvv' 是一个三角形。因此， $|W' \cap X| \leq 2t(x)$。类似地， $|W' \cap Z| \leq 2t(z)$。总之，我们有

$$|W' \cap (X \cup Y \cup Z)| \leq |W' \cap X| + |W' \cap Y| + |W' \cap Z| \leq 2t(x) + 2t(z) + 1.$$

最后，我们得到

$$\begin{aligned} n &\geq |X \cup Y \cup Z \cup W'| = |X \cup Y \cup Z \cup W'| + |W'| - |W' \cap (X \cup Y \cup Z)| \\ &= (d(x) + d(y) + d(z) - t(x) - t(z) - |W|) + |W| - (2t(x) + 2t(z) + 1) \\ &= d(x) + d(y) + d(z) - 3t(x) - 3t(z) - 1, \end{aligned}$$

从而完成了该引理的证明。 □

现在我们可以完成本小节的证明。

定理 4.1 的证明。设 G 是一个 n-顶点的 4-临界图。显然， G 的最小度至少为 3。根据 [11] 中的结果， G 至多包含 n 个三角形。应用引理 4.2，我们可以得到一条 2-路径 xyz，满足

$$d(x) + d(y) + d(z) - 3t(x) - 3t(z) \geq \frac{6e(G)}{n} - \frac{9n^2}{e(G)}.$$

结合引理 4.3，可得

$$\frac{6e(G)}{n} - \frac{9n^2}{e(G)} \leq n + 1.$$

这意味着 $e(G) < n^2/6 + 10n$. □

4.2 定理 1.2 的证明

为了证明定理 1.2，我们需要一些新的引理。下面的引理可通过平均法轻易得到：每个图都包含一条边，其两个端点的度数之和至少是该图平均度的两倍。

引理 4.4. 任意图 G 都包含一条边 xy，使得

$$d(x)+d(y)\geq 2d(G).$$

证明。根据詹森不等式，我们可以得到

$$\sum_{xy\in E}(d(x)+d(y))=\sum_{v\in V}d(v)^2\geq nd(G)^2.$$

注意到 $|E|=(nd(G))/2$。因此存在一条边 $xy\in E$，使得

$$d(x)+d(y)\geq\frac{nd(G)^2}{(nd(G))/2}=2d(G),$$

从而证明了该引理。 □

现在我们给出以下关于 4-圈的引理，它可以看作是前一个引理的推广。回顾 Reiman 的著名结果 [9]：任何不含 4-圈的 n 阶图至多有 $\frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3})<n^{\frac{3}{2}}$ 条边。

引理 4.5. 任何具有 $e(G)>\frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3})$ 的 n 阶图 G 都包含一个 4-圈 $v_1v_2v_3v_4$，满足

$$d(v_1)+d(v_2)+d(v_3)+d(v_4)\geq 4d(G)-O(n^{\frac{3}{4}}).$$

证明。固定 $\epsilon:=9n^{-\frac{1}{4}}$。注意到根据 Reiman 的结果 [9]，$G$ 必须包含 4-圈。反设 G 中的任意 4-圈 $v_1v_2v_3v_4$ 都满足 $d(v_1)+d(v_2)+d(v_3)+d(v_4)<4d(G)-4\epsilon n$。令 $A:=\{v\in V\colon d(v)<d(G)\}$，并令 $B:=\{v\in V\colon d(v)\geq d(G)\}$。那么 $A\cup B$ 构成了 $V(G)$ 的一个划分，使得 $G[B]$ 不含任何 4- 圈。

对于每个 $1\leq i\leq d(G)/\epsilon n$，令 $A_i:=\{v\in V\colon d(G)-i\epsilon n\leq d(v)<d(G)-(i-1)\epsilon n\}$。那么这些 A_i 构成 A 的一个划分。对于每个 $1\leq i\leq(n-d(G))/\epsilon n$，令 $B_i:=\{v\in V\colon d(G)+(i-1)\epsilon n\leq d(v)<d(G)+i\epsilon n\}$。那么这些 B_i 构成 B 的一个划分。不难验证，$G[A_1]$ 不含任何 4-圈，并且对于每个 $1\leq i\leq(n-d(G))/\epsilon n$，$G\left[\bigsqcup_{j=1}^{i+1}A_j,B_i\right]$ 不含任何 4-圈。

对于每个 $1\leq i\leq(n-d(G))/\epsilon n$，我们删除 $G[B]$, $G[A_1]$ 和 $G\left[\bigsqcup_{j=1}^{i+1}A_j,B_i\right]$ 中的所有边，从而得到 G 的一个生成子图 G'。根据 Reiman 的结果 [9],，我们可以得到

$$e(G')\geq e(G)-(2+(n-d(G))/\epsilon n)\,n^{\frac{3}{2}}\geq e(G)-2n^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{9}n^{\frac{7}{4}}\geq e(G)-\frac{19}{9}n^{\frac{7}{4}}.$$

因此我们有

$$d(G')\geq d(G)-\frac{38}{9}n^{\frac{3}{4}}.$$

注意，G' 的任意一条边要么包含在 A中，要么位于某个 $j\geq i+2$的 A_j 和 B_i 之间；此外，我们有 $e(G'[A_1])=0$。因此，由于 n 足够大，容易验证，对于 G'中的任意一条边 xy，

$$d_{G'}(x)+d_{G'}(y)<2d(G)-\epsilon n=2d(G)-9n^{\frac{3}{4}}<2d(G').$$

这与引理 4.4 矛盾，从而证明了引理 4.5。 □

下面的引理由引理 2.1 推出，为定理 1.2 的证明提供了关键结构。

引理 4.6. 设 G 是一个 4-临界图。假设 $v_1v_2v_3v_4$ 是 G 中的一个 4-圈，且 V_1、V_2、V_3、V_4 是四个集合，满足 $\{v_2, v_4\} \subseteq V_1 \subseteq N(v_1)$、$\{v_1, v_3\} \subseteq V_2 \subseteq N(v_2)$、$\{v_2, v_4\} \subseteq V_3 \subseteq N(v_3)$ 和 $\{v_1, v_3\} \subseteq V_4 \subseteq N(v_4)$。设 $X = V_1 \cap V_3$ 和 $Y = V_2 \cap V_4$。那么存在集合 X'' 和 Y''，使得

- $X'' \cap (V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4) = \emptyset = Y'' \cap (V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4)$,
- $e(G[X'', X]) \leq |X|$ 和 $e(G[Y'', Y]) \leq |Y|$，且
- $|X''| \geq |X| - 2t_G(v_1) - 2t_G(v_3) - 2$ 和 $|Y''| \geq |Y| - 2t_G(v_2) - 2t_G(v_4) - 2$.

证明。由于 $X \subseteq N(v_1) \cap N(v_3)$，根据引理 2.1，对 $k = 4$，存在一个集合 $X' \subseteq V(G)$ 和一个双射 $\varphi : X \to X'$，使得 $X' = \{\varphi(x) : x \in X\}$，且对于每个 $x \in X$，我们都有$N(\varphi(x)) \cap X = \{x\}$和 $N(x) \cap X' = \{\varphi(x)\}$。我们定义 $X'' := X' \setminus (V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4)$，那么显然 $X'' \cap (V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4) = \emptyset$ 和 $e(G[X'', X]) \leq |X|$。

由于 $Y \subseteq N(v_2) \cap N(v_4)$，根据引理 2.1，对于 $k = 4$，存在一个集合 $Y' \subseteq V(G)$ 和一个双射 $\phi : Y \to Y'$，使得 $Y' = \{\phi(y) : y \in Y\}$；并且对于每个 $y \in Y$，都有 $N(\phi(y)) \cap Y = \{y\}$ 以及 $N(y) \cap Y' = \{\phi(y)\}$。我们定义 $Y'' := Y' \setminus (V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4)$，显然 $Y'' \cap (V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4) = \emptyset$ 且 $e(G[Y'', Y]) \leq |Y|$。

接下来，我们要证明最后一个性质。

V_2 中的所有顶点都与顶点 $v_2 \in X$相邻。因此，对于每个 $x \in X$，由于$|N(x) \cap X'| = 1$，我们有 $|X' \cap V_2| \leq 1$。类似地，我们有 $|X' \cap V_4| \leq 1$、$|Y' \cap V_1| \leq 1$ 和 $|Y' \cap V_3| \leq 1$。

V_1 中的所有顶点都与顶点 v_1 相邻。由于 X' 中的每个顶点在 $X \subseteq N$ 中都有一个邻点（v_1），我们可以验证 $|X' \cap V_1| \leq 2t$（v_1）。类似地，我们有 $|X' \cap V_3| \leq 2t$（v_3）、$|Y' \cap V_2| \leq 2t$（v_2）、$|Y' \cap V_4| \leq 2t$（v_4）。因此，

$$|X''| = |X'| - |X' \cap (V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4)| \geq |X| - 2t(v_1) - 2t(v_3) - 2,$$

and

$$|Y''| = |Y'| - |Y' \cap (V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4)| \geq |Y| - 2t(v_2) - 2t(v_4) - 2,$$

证明至此完成。 □

现在我们准备好证明定理 1.2。

定理 1.2 的证明。在整个证明中，我们假设 n 足够大，并且诸如 v_i's 和 V_i's 这类记号的下标均模 4。反设存在一个 n 个顶点的 4-临界图 G，满足 $e(G) \geq 0.164n^2$。根据 [11] 中的结果，G 至多包含 n 个三角形。令 $V_0 := \{v \in V(G) : t_G(v) \geq \sqrt{n}\}$。显然，我们有 $|V_0| < 3\sqrt{n}$。令 $G' := G[V(G) - V_0]$。不难看出 $e(G') \geq$

$e(G) - n|V_0| > e(G) - 3n^{\frac{3}{2}} \geq 0.164n^2 - o(n^2)$。注意，$t(G') \leq t(G) \leq n$。因此，从 G' 中至多删除 n 条边，就可以得到一个子图 $G'' \subseteq G'$，使得 $t(G'') = 0$、$e(G'') \geq e(G') - n \geq 0.164n^2 - o(n^2)$，并且对于每个 $v \in V(G'') = V(G) - V_0$，都有 $t_G(v) < \sqrt{n}$。将引理 4.5 应用于 G''，可在 G'' 中得到一个 4-圈 $v_1v_2v_3v_4$，使得

$$|V_1| + |V_2| + |V_3| + |V_4| \geq 8e(G'')/n - o(n) \geq 1.312n - o(n), \tag{3}$$

其中，对每个 $1 \leq i \leq 4$，$V_i := N_{G''}(v_i)$。注意，对每个 $1 \leq i \leq 4$，$V_i \cap V_{i+1}$中的每个顶点都必须与 G''中的顶点 v_i、v_{i+1} 构成一个三角形，这与事实 $t(G'') = 0$矛盾。因此显然

$$V_i \cap V_{i+1} = \emptyset \text{ for each } 1 \leq i \leq 4.$$

此外，容易验证，对每个 $1 \leq i \leq 4$，$\{v_{i-1}, v_{i+1}\} \subseteq V_i \subseteq N_G(v_i)$。定义 $X = V_1 \cap V_3$和 $Y = V_2 \cap V_4$。应用引理 4.6，我们可以得到满足引理 4.6 的三个性质的两个集合 X''、Y''。注意，X''和 Y''与 $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$、$V_1 \cap V_3 = X$、$V_2 \cap V_4 = Y$不相交，并且对每个 $1 \leq i \leq 4$，$V_i \cap V_{i+1} = \emptyset$。因此我们可以看出

$$|V_1| + |V_2| + |V_3| + |V_4| - |X| - |Y| + |X'' \cup Y''| \leq n.$$

此外，利用引理 4.6 中的最后一个性质，我们得到

$$|X'' \cup Y''| \geq \max\{|X''|, |Y''|\} \geq \frac{|X''| + |Y''|}{2} \geq \frac{|X| + |Y|}{2} - O(\sqrt{n}). \tag{4}$$

上述两个不等式表明

$$\frac{|X| + |Y|}{2} \geq |V_1| + |V_2| + |V_3| + |V_4| - n - O(\sqrt{n}) \geq 0.312n - o(n). \tag{5}$$

接下来，我们考虑图 G 的非边，即图 $\overline{G}$ 的边。首先，由于$V_i = N_{G''}(v_i) \subseteq N_G(v_i)$ 且 $v_i \in V(G'')$，我们可以看出，对于每个 $1 \leq i \leq 4$，$e(G[V_i]) \leq t_G(v_i) \leq \sqrt{n}$。因此

$$e(\overline{G}[V_i]) \geq \binom{|V_i|}{2} - o(n^2) = \frac{1}{2}|V_i|^2 - o(n^2) \text{ for each } 1 \leq i \leq 4.$$

Thus 注意到对于每个 $1 \leq i \leq 4$，$V_1 \cap V_3 = X$、$V_2 \cap V_4 = Y$ 和 $V_i \cap V_{i+1} = \emptyset$，我们可以得到 t

$$\left|\bigcup_{i=1}^{4} E(\overline{G}[V_i])\right| \geq \sum_{i=1}^{4} e(\overline{G}[V_i]) - \binom{|X|}{2} - \binom{|Y|}{2} \geq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} |V_i|^2 - |X|^2 - |Y|^2\right) - o(n^2).$$

接下来，由于删除至多 n 条边即可使 G 成为无三角形图，且任意 n 顶点的无三角形图至多有 $\frac{1}{4}n^2$ 条边，我们可以看出 $e(G[X'' \cup Y'']) \leq \frac{1}{4}|X'' \cup Y''|^2 + n$，因此

$$e(\overline{G}[X'' \cup Y'']) \geq \frac{1}{4}|X'' \cup Y''|^2 - o(n^2).$$

根据引理 4.6 中关于 X'', Y'' 的性质，我们可以得到

$$e(\overline{G}[X'', X]) \geq |X''||X| - |X| \geq |X|^2 - o(n^2),$$

$$e(\overline{G}[Y'', Y]) \geq |Y''||Y| - |Y| \geq |Y|^2 - o(n^2).$$

由上述三个不等式，我们可以推得

$$\begin{aligned} e(G) = \binom{n}{2} - e(\overline{G}) &\leq \binom{n}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4}|V_i|^2 - |X|^2 - |Y|^2\right) - \frac{1}{4}|X'' \cup Y''|^2 - |X|^2 - |Y|^2 + o(n^2) \\ &\leq \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{8}\left(|V_1| + |V_2| + |V_3| + |V_4|\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{|X| + |Y|}{2}\right)^2 - \left(\frac{|X| + |Y|}{2}\right)^2 + o(n^2) \\ &\leq \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{8}(1.312n)^2 - \frac{5}{4}(0.312n)^2 + o(n^2) < 0.1632n^2 + o(n^2), \end{aligned}$$

其中，第二个不等式由不等式 (4) 得出，第三个不等式则由不等式 (3) 和 (5) 得出。这与假设 $e(G) \geq 0.164n^2$ 矛盾，从而完成定理 1.2 的证明。

□

我们对函数 $f_k(n)$ 的了解总体而言还很有限，甚至尚不清楚是否

$$f_4(n) < f_5(n) \text{ holds for sufficiently large integers } n. \tag{6}$$

因此，接下来探讨这样一个问题似乎很自然：对于某个常数 $c < \frac{4}{31}$ 和充分大的 n，是否有 $f_4(n) \leq cn^2$ 成立。请注意，如果这是真的，那么它将推出 (6)。

致谢。作者感谢 Alexandr Kostochka 教授对稿件初稿提出的许多宝贵意见。

参考文献

[1] H. L. Abbott 和 B. Zhou，关于 Gallai 提出的临界图完全子图猜想，《离散数学》100 (1992), 223–228.[2] G. A. Dirac，4-色图的一种性质及关于临界图的一些评论，《伦敦数学会杂志》27 (1952), 85–92.[3] Z. F¨uredi，极值图稳定性的一种证明：基于 Sze- mer´edi 正则性的 Simonovits 稳定性，《组合理论杂志》B辑 115 (2015), 66–71.[4] J. Gao 和 J. Ma，关于 Gallai 猜想的紧确界，Combinatorica，即将发表.[5] D. Greenwell 和 L. Lov´asz，乘积着色的应用，《匈牙利科学院数学学报》25 (1974), 335–340.[6] T. R. Jensen 和 B. Toft，《图着色问题》，John Wiley & Sons，2011.[7] A. E. K´ezdy 和 H. S. Snevily，关于 Gallai 猜想的推广，《组合理论杂志》 B 辑 70 (1997), 317–324.

[8] W. Pegden，无三角形临界图：一种最优密度构造，Combinatorica 33 (2013), 495–512..[9] I. Reiman，关于 K. Zarankiewicz 的一个问题，《匈牙利科学院数学学报》9 (1958), 269–273.[10] M. Simonovits，一种解决图论极值问题的方法：稳定性问题，载于《图论》，蒂豪尼讨论会论文集，1966，学术出版社，纽约，1968.[11] M. Stiebitz，色临界图的子图，Combinatorica 7 (1987), 303–312.[12] B. Toft，关于临界 k-色图的边数上界，匈牙利数学研究 5 (1970), 461–470.