arXiv:2301.01663v1 [math.AC] 4 Jan 2023

非常强有限型环

JIM COYKENDALL 和 TRIDIB DUTTA

Abstract. SFT（ *strong finite type*）条件由 J. Arnold [1]提出，最初用于研究形式幂级数环具有有限 Krull 维数的条件。在交换环的背景下，SFT 性质是一种近似诺特性质，它是形式幂级数环具有有限 Krull 维数性质的必要条件。许多学者都从形式幂级数环维数的角度研究过这一条件。本文探讨 SFT 性质的一种特化变体（从某种意义上说也更自然），并将其称为 VSFT（ *very strongfinite type*）性质。与 SFT 性质一样，VSFT 性质是理想的一种性质，也可以扩展为带幺元交换环的一种全局性质。任何具有 VSFT 性质的理想（分别地，环）都具有 SFT 性质。本文探讨 SFT 性质与 VSFT 性质之间的相互关系。

1. Introduction and Background

本文将极强有限型（VSFT）的概念引入交换环及其理想的研究中。该性质是强有限型（SFT）性质的强化，Arnold 最早在研究形式幂级数环的维数时引入了这一性质（见 [1]）。众所周知，若 R 是带幺元的交换诺特环，且 $\dim(R) = n$，那么 $\dim(R[[x]]) = n+1$。在非诺特情形下，人们所知甚少。首个重大成果是 [1] 中的以下定理:

定理 1.1. 设 R 是带幺元的交换环。若 R 不具有 SFT性质，则 $\dim(R[[x]])$ 为无限。

由前一定理自然引出一个问题："若 R 是有限维的 SFT 环，$\dim(R[[x]])$ 是否也有限？" [7] 对此给出了否定答案，此后包括 [12] 和 [10] 在内的多项研究进一步拓展了这项工作。 [16], [4], [10] 等文献将 SFT性质作为研究 Krull 维数（尤其是幂级数环中的 Krull 维数）的工具； [13] 和 [14] 等文献则利用它研究更一般的素理想链以及素谱的行为。此外， [6], [9], 和 [11] 等文献还对 SFT性质及其若干推广本身进行了研究。

作为交换环的一种性质，SFT性质是一种近似诺特的性质，因此自然会引出许多问题，其中一些已经得到解答，另一些仍未解决。例如，已知（见 [7]），若 R 是 SFT 的，则 $R[[x]]$ 未必是 SFT 的（这与众所周知的事实形成对比：若 R 是诺特的，则 $R[[x]]$ 是诺特的）。另一方面，若 R 是 SFT 的，

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：13C05、13A15、13C13。
Key words and phrases. 诺特，SFT。

$R[x]$ 的情况（即 SFT性质是否在多项式扩张中保持）仍未解决。

本文旨在考察 SFT 和 VSFT（稍后将给出定义）性质，探究它们之间的相互关系，并与诺特性质进行比较。

我们首先回顾 SFT 理想和 SFT 环的概念。本文中，“环”指带幺元的交换环。

定义 1.2. 设 R 是一个环， I 是 R的一个理想。若存在有限生成理想 $\mathcal{B} \subseteq I$ 和正整数 n ，使得对所有 $x \in I$都有 $x^n \in \mathcal{B}$ ，则称 I 为 SFT 理想。

定义 1.3. 若环 R的每个理想都是 SFT 理想，则称 R 为 SFT 环。

以下记号将使我们的论述更为简洁；后文中将大量使用这些记号。

记号 1.4. 假设如定义 1.2 所述，我们有一个 SFT 理想 I、一个有限生成理想 $\mathcal{B} \subseteq I$，以及一个正整数 n ，使得对所有 $x \in I$， $x^n \in \mathcal{B}$ 成立。我们称 I关于数据（I， $\mathcal{B}$，n）是 SFT，并将 n称为指标。注意，通常 $\mathcal{B}$ 和 n 的选取并不唯一。

2. Motivating Examples、 the VSFT Property、 and Ideal-TheoreticResults

很自然会想知道：如果 I是一个关于数据（I， $\mathcal{B}$， n）的 SFT 理想，那么是否存在一个正整数 m 使得 $I^m \subseteq \mathcal{B}$? 在 SFT 理想是有限生成的特殊情形下，答案显然是肯定的（因此，具有这一性质的环自然会成为诺特环的一种推广）。然而，正如下面的例子所示，这一性质一般并不成立。

例 2.1. 设 $\mathbb{F}_p$ 是特征为 p的域；我们从整环$R = \mathbb{F}_p[x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots]$开始，并令 $I \subseteq R$ 为理想 $I := (x_1^p, x_2^p, \cdots)$。我们将 x_i 在 R/I 中的像记为$\overline{x}_i$，并注意到 $T := R/I$是一个仅有素理想 $\mathfrak{M} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots)$的零维环。注意，每个 $z \in \mathfrak{M}$都具有性质 $z^p = 0$，因此 $\mathfrak{M}$是一个数据为$(\mathfrak{M}, 0, p)$的 SFT。然而，不存在正整数 n 和有限生成理想 $\mathcal{B}$ 使得 $\mathfrak{M}^n \subseteq \mathcal{B}$。为说明这一点，假设存在有限生成的 $\mathcal{B}$ 和正整数 n ，使得$\mathfrak{M}^n \subseteq \mathcal{B}$。由于 $\mathcal{B}$是有限生成的（例如由 $y_1, y_2, \cdots, y_t$生成），且每个生成元y_i 都具有性质 $y_i^p = 0$，因此容易看出 $\mathcal{B}$，进而 $\mathfrak{M}$是幂零理想。但对所有 n，元素 $\overline{x}_1\overline{x}_2\cdots\overline{x}_n$都是 $\mathfrak{M}^n$中的非零元素，这与其幂零性矛盾。

在上面的例子中，计算很大程度上依赖于该环的特征为 p。如果我们试图在特征 0 的情形下模仿这个例子，就会遇到一些显而易见的困难。事实上，结果表明，特征为零时的类似例子本质上更为复杂。我们稍后会给出这样一个例子。但此刻，我们将给出几个例子，为进一步研究奠定基础。

注意，在例 2.1 中，我们使用了一个非整环来说明要阐述的观点。现在，我们将在整环的情形下给出一个非有限生成的 SFT 理想的例子。

例2.2。考虑下面这个整环

$$R = \mathbb{F}_2[y, x_1, x_2, \cdots, \frac{y}{x_1}, \frac{y}{x_1^2}, \cdots, \frac{y}{x_2}, \frac{y}{x_2^2}, \cdots]$$

现在考虑理想 $I = (y, \frac{y}{x_1}, \frac{y}{x_1^2}, \cdots, \frac{y}{x_2}, \frac{y}{x_2^2}, \cdots)$。显然，该理想的生成元满足 SFT性质，因为对所有 $m > 0$，$(\frac{y}{x_k^m})^2 = (y)(\frac{y}{x_k^{2m}}) \in (y)$。由于环的特征为 2，不难验证，$I$ 中的任意元素的平方都属于理想 (y)。这表明 I 是 SFT。

在例2.2中，I 的任意两个生成元的乘积都不属于 (y)（例如 $(\frac{y}{x_1})(\frac{y}{x_2})$），也就是说，$I^2 \nsubseteq (y)$。

前两个例子的共同主题是，尽管 I 是一个 SFT 理想，但 I 的任何次幂都无法包含在有限生成子理想中。这引出了以下对 SFT理想的专门化定义；与 SFT概念较为基础的性质相比，这一定义或许更偏向理想论。

定义2.3. 设 R 为一个环，$I \subseteq R$ 为一个理想。若存在有限生成理想 $\mathcal{B}$ 和正整数 n，使得 $I^n \subseteq \mathcal{B}$，则称 I 具有极强有限型（VSFT）性质。与SFT情形类似，我们称这样的VSFT理想是带有数据（I，$\mathcal{B}$，n）的VSFT理想。

定义2.4. 若环 R的每个理想都是VSFT理想，则称 R 为VSFT环。

我们指出，显然，任何具有VSFT性质的理想都是SFT理想（因此，任何VSFT环都是SFT环）。

下面给出几个简单但有用的观察。

注2.5. 若 I是带有数据（I，$\mathcal{B}$，N）的VSFT理想，则对于每个整数 $k \geqslant N$，I都是带有数据（I，$\mathcal{B}$，k）的VSFT理想。

注2.6. 若 I 是有限生成的，则它显然是VSFT理想（此时，VSFT数据可由 $\{I, I, 1\}$ 给出）。因此，诺特环也是VSFT环。

由于例 2.1 和例2.2 是 SFT 理想但不是 VSFT 理想，我们现在给出一个非平凡的 VSFT 理想的例子。

例2.7。考虑理想 $I = (2, 2x, 2x^2, 2x^3, \cdots, 2x^n, \cdots) \subseteq \mathbb{Z} + 2x\mathbb{Z}[x]$。如前所述，$x \notin R$，因此上述理想不是有限生成的。考虑由元素 2 生成的理想。于是 $(2) \subset I$。该理想中任意两个不同生成元的乘积都属于 (2)，也就是说，$(2x^m)(2x^k) = (2)(2x^{m+k}) \in (2)$，因为$2x^{m+k} \in R$。更一般地，考虑理想 I 中的两个元素。它们是 $\alpha = 2x^{k_1}p_1(x) + \cdots + 2x^{k_r}p_r(x)$，其中 $p_i(x) \in R$，以及 $\gamma = 2x^{m_1}q_1(x) + \cdots + 2x^{m_t}q_t(x)$，其中 $q_j(x) \in R$。那么显然 $\alpha\gamma \in (2)$。因此，I 是一个 VSFT 理想。

可以利用几乎整元素构造出丰富的非平凡 VSFT 理想。下一个结果凸显了这种联系，并推广了前面的例子。

定理 2.8. 设 K 是整环 R 的分式域。设 $\alpha \in K$ 是 R 上的几乎整元素，$0 \neq r \in R$ 是满足以下条件的元素：对

所有 $n \in \mathbb{N}$。设 $\mathfrak{M} = (\alpha, \alpha^2, \cdots)$ 是由 α 及其所有幂生成的 K 的 $R-$ 子模。那么理想 $(r, r\mathfrak{M}) \subseteq R$ 是 VSFT，其数据为 $\{(r, r\mathfrak{M}), (r)\ 2\}$。

证明。若 rm_1、rm_2 满足 m_1、$m_2 \in \mathfrak{M}$，则 $rm_1m_2 \in r\mathfrak{M} \subset R$。 □

VSFT（分别地，SFT）理想定义的一个直接推论体现在以下命题中。

命题 2.9. 设 R 是一个环，I 是一个 VSFT（分别地，SFT）理想，其数据为 $\{I, \mathcal{B}, n\}$。则 $\sqrt{I} = \sqrt{\mathcal{B}}$。

证明。根据 SFT 理想的定义，我们有 $\mathcal{B} \subseteq I \subseteq \sqrt{I} \subseteq \sqrt{\mathcal{B}}$，因此等式显然成立。由于任意 VSFT 理想都是 SFT 理想，证明完成。□

作为一个推论，我们得到以下结果。

推论 2.10. 若 Q 是 R 中具有数据 $\{Q, \mathcal{B}, n\}$ 的根 VSFT（分别为 SFT）理想，则 $Q = \sqrt{\mathcal{B}}$。

命题 2.9 得出的结论是，若 I 不是有限生成的，则子理想 $\mathcal{B}$ 不可能是根理想。我们在下面的命题中总结这一观察。

命题 2.11. 设 I 是一个具有数据（I，$\mathcal{B}$，N）的 VSFT 理想，其中 I 不是有限生成的。那么 $\mathcal{B}$ 不可能是根理想（因此也不可能是素理想）。

在奠定了这些基础并给出一些初步例子之后，我们现在来比较 SFT 性质与 VSFT 性质的一些基本特征。

本节首先指出，若 I 是 VSFT（分别为 SFT）理想，则 I 的任意幂也都是 VSFT（分别为 SFT）理想（其（V）SFT 数据可能有所不同）。

命题 2.12. 设 R 是一个环，且 I 是一个 VSFT（分别为 SFT）理想，其 VSFT 数据（分别为 SFT 数据）为 $(I, \mathcal{B}, n)$。那么，对于所有整数 $m \geqslant 1$，I^m 也是一个 VSFT 理想（分别为 SFT 理想），其 VSFT 数据（分别为 SFT 数据）为 $(I^m, \mathcal{B}^m, n)$（分别为 $(I^m, \mathcal{B}^m, mn)$）。

证明. 对于 VSFT 的情形，我们注意到 $I^n \subseteq \mathcal{B}$，因此 $(I^n)^m = (I^m)^n \subseteq \mathcal{B}^m$。由于 $\mathcal{B}^m$ 是有限生成的，I^m 是具有数据 $(I^m, \mathcal{B}^m, n)$ 的 VSFT。

在 I 是具有数据 $(I, \mathcal{B}, n)$ 的 SFT 的情形下，我们首先注意到，由于 $\mathcal{B} \subseteq I$，于是 $\mathcal{B}^{mn} \subseteq \mathcal{B}^m \subseteq I^m$ 且为有限生成的。因此，若 $\alpha \in I^m \subseteq I$，则 $\alpha^n \in \mathcal{B}$，从而 $\alpha^{mn} \in \mathcal{B}^m$。这就证明了该命题。□

给定一个具有数据 $\{I.\mathcal{B}, n\}$ 的 (V)SFT 理想，我们已经证明 I^m 也具有 (V)SFT 性质，并且有相关数据。值得探究的是，最小的正整数 k（用 n 和 m 表示）是多少，才能使得存在一个有限生成理想J，满足 I^m 具有 (V)SFT 数据 $\{I^m, J, k\}$。

本节接下来的结果是一项核心结果，它表明 (V)SFT 性质由素谱决定；也就是说，一个环是 (V)SFT 的，当且仅当每个素理想都是 (V)SFT 的。

定理 2.13. 环 R 是 VSFT（分别为 SFT）当且仅当每个素理想$P \subseteq R$ 都是 VSFT（分别为 SFT）。

证明. SFT 情形的结论已在 [1] 中证明，因此我们只考虑 VSFT 情形。

我们首先注意到，若 R 是 VSFT，则 R 的每个理想，特别是 R 的每个素理想，都是 VSFT。

对于另一个方向，我们假设 R 的每个素理想都是 VSFT，但 R 本身不是 VSFT。根据假设，我们可以找到一个不是 VSFT 理想的理想 $I \subseteq R$。令 Γ 为 R 中包含理想 I 的所有非 VSFT 理想构成的集合。Γ 是一个非空偏序集，其偏序关系为集合包含。若令 $\mathfrak{C}$ 为 Γ 中的一条链，并且 $\mathcal{P} = \bigcup_{J\in\mathfrak{C}} J$。那么，只要 $\mathcal{P}$ 不是 VSFT，$\mathcal{P}$ 就是 $\mathfrak{C}$ 的一个上界。

我们首先证明 $\mathcal{P}$ 不是 VSFT 理想。为此，我们假设 $\mathcal{P}$ 是 VSFT，其数据为 $\{\mathcal{P}, \mathcal{B}, N\}$。此外，我们假设 $\mathcal{B} = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_k)$。由于 $\mathcal{P}$ 是理想链的并集，$\mathfrak{C}$，每个 $y_i \in J_{\alpha_i}$ 都对应某个 $J_{\alpha_i} \in \mathfrak{C}$。由于 $\mathfrak{C}$ 是一条链，我们不妨设对所有 $1 \leqslant i \leqslant k$，每个 $J_{\alpha_i} \subseteq J_{\alpha_k}$ 都成立。因此，$\mathcal{B} \subseteq J_{\alpha_k} \subseteq \mathcal{P}$。根据假设，我们有 $\mathcal{P}^N \subseteq \mathcal{B}$，从而 $J_{\alpha_k}^N \subseteq \mathcal{B}$。这与 J_{α_k} 不是 VSFT 这一事实矛盾，从而证明了我们的第一个断言。

下一步，我们将证明 $\mathcal{P}$ 是一个素理想。为此，我们假设 $\mathcal{P}$ 不是素理想，并找出两个元素 a、$b \notin R$，使得 $ab \in \mathcal{P}$。根据 $\mathcal{P}$ 的极大性，理想 $(\mathcal{P}, a)$ 和 $(\mathcal{P}, b)$ 都是 VSFT。因此，存在有限生成理想 $\mathcal{B}_a \subseteq (\mathcal{P}, a)$ 和 $\mathcal{B}_b \subseteq (\mathcal{P}, b)$，以及固定的正整数 M、N，使得 $(\mathcal{P}, a)^M \subseteq \mathcal{B}_a$ 且 $(\mathcal{P}, b)^N \subseteq \mathcal{B}_b$。

由于 $\mathcal{B}_a \subseteq (\mathcal{P}, a)$，我们可以假设 $\mathcal{B}_a = (x_1, x_2, \cdots, x_s, a)$，其中每个 $x_i \in \mathcal{P}$。类似地，我们写作 $\mathcal{B}_b = (y_1, y_2, \cdots, y_t, b)$，其中每个 $y_i \in \mathcal{P}$。若定义 $\mathcal{B} := \mathcal{B}_a\mathcal{B}_b$，则

$$\mathcal{B} = (\{x_i y_j\}_{i,j}, \{a y_j\}_j, \{b x_i\}_i, ab).$$

注意到，生成元 $ab \in \mathcal{P}$ 根据假设，以及形如 $x_i y_j$、$a y_j$ 和 $b x_i$ 的生成元都属于 $\mathcal{P}$，因为每个 x_i、$y_j \in \mathcal{P}$。综合上述观察，我们注意到 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$ 且是有限生成的。此外，由于 $\mathcal{P}^M \subseteq \mathcal{B}_a$ 和 $\mathcal{P}^N \subseteq \mathcal{B}_b$，于是 $\mathcal{P}^{M+N} \subseteq \mathcal{B}$，这与我们已经证明 $\mathcal{P}$ 不是 VSFT 相矛盾。我们得出 $\mathcal{P}$ 是素理想。

我们看到，如果 R 有一个不是 VSFT 的理想，那么 R 必须有一个不是 VSFT 的素理想。证明完毕。□

如果 I 是一个带有数据 $\{I, \mathcal{B}, n\}$ 的 (V)SFT 理想，那么了解如何改变其中后两个分量中的数据会很有帮助。我们将看到，通过改变数据的第三项，可以使 I 的有限生成子理想成为包含于 I 中的任意有限生成理想，前提是其根包含 I。我们在下一个结果中将这一点形式化；该结果对于验证示例尤其有用。

定理 2.14. 设 I 是一个 VSFT（分别地，SFT）理想。如果 $\mathcal{B}$ 是任意一个满足 $\mathcal{B} \subseteq I \subseteq \sqrt{\mathcal{B}}$ 的有限生成理想，那么存在一个正整数 m，使得 I 具有 VSFT（分别地，SFT）数据 $(I, \mathcal{B}, m)$

证明。设 I 是 VSFT，且 $\mathcal{B}$ 是一个有限生成理想，使得 $\mathcal{B} \subseteq I \subseteq \sqrt{\mathcal{B}}$。由于 I 是 VSFT，存在一个有限生成理想 $J \subseteq I$ 和一个正整数 n，使得 $I^n \subseteq J$。为了证明存在一个正整数 m 使得 $I^m \subseteq \mathcal{B}$，我们转到商 $R/\mathcal{B}$。J 在 $R/\mathcal{B}$ 中的像是有限生成的，并且由于 $J \subseteq I \subseteq \sqrt{\mathcal{B}}$，$J$ 的像是 $R/\mathcal{B}$ 中的幂零理想。由于任何有限生成的幂零

理想都是幂零的，我们必有一个正整数 k 使得 $J^k \subseteq \mathcal{B}$。因此 $I^{nk} \subseteq J^k \subseteq \mathcal{B}$。SFT 情形的证明几乎完全相同。□

最后，我们给出一个定理，说明 VSFT性质的涵盖范围相当广：若 J 是一个具有 VSFT性质的根理想，且$\sqrt{I} = J$，那么 I 也是 VSFT。

定理2.15. 设 R 是一个环， I 是 R 的一个理想，且其根 J是一个带有数据 $(J, \mathcal{B}, n)$ 的 VSFT 理想。那么存在一个正整数 $k > 0$，使得 $J^k \subseteq I$。此外， I 也是一个 VSFT 理想。

证明。我们先证明第二个结论（即 I 是 VSFT）。由于 $\sqrt{I} = J$， $J/$ I 是 R/I 的一个幂零理想，并且由于 $\mathcal{B} \subseteq J$ 是有限生成的且 $\sqrt{B} = J$，其像 e 在典范投影 $R \longrightarrow R/I$ 下的 $\mathcal{B}$ 的像是一个幂零（因此是幂零的）理想。因此存在一个 $m \in \mathbb{N}$，使得 $\mathcal{B}^m \subseteq I$。由于 $\mathcal{B}^m \subseteq I$ 且 $J^{nm} \subseteq \mathcal{B}^m$，我们有 e $I^{nm} \subseteq J^{nm} \subseteq \mathcal{B}^m$ 因此 I是具有数据（$I, \mathcal{B}^m, nm$）的 VSFT。

对于第一条陈述，我们参照上文，并注意到 $J^{nm} \subseteq \mathcal{B}^m \subseteq I$。 □

3. Bifurcation of the Properties

有了上一节的结果，我们现在更有条件构造一些是 SFT 但不是 VSFT 的环的例子。我们给出的第一个例子是一个一维拟局部整环，它是一个一维诺特赋值整环的整扩张，并且是 SFT 但不是 VSFT。

例 3.1。我们考虑整环

$$R = \mathbb{F}_2(y_1^2, y_2^2, y_3^2, \cdots .)[[x^2]][xy_1, xy_2, xy_3, \cdots]$$

理想 $I = (x, xy_1^2, xy_2, xy_3, \cdots)$是 R的唯一极大理想（容易看出，若 $z \notin I$，则 z 是单位）。由于 R 是域上的幂级数环的整扩张， I 是 R的唯一非零素理想。我们考虑有限生成理想 $\mathcal{B} = (x^2) \subseteq I$，并注意到 $I = \sqrt{\mathcal{B}}$。我们观察到，对所有 $n \geqslant 1$，$(xy_n)^2 = (x^2)(y_n^2) \in (x^2)$；又由于 R 的特征为 2，这一结论也适用于 I的生成元之和。另一方面，若 $k_1, k_2, \cdots, k_m$是互不相同的正整数，则$(xy_{k_1})(xy_{k_2}) \cdots (xy_{k_m}) \notin (x^2)$。这表明 I是 SFT，但由定理 2.14 可知 I 不是 VSFT。由于 I 是 R 的唯一非零素理想，根据定理 2.13， R 不是 VSFT，而是一个 SFT整环。

在下一个例子中，我们给出一个特征为零、但不是 VSFT 的 SFT整环。

例 3.2。我们从以下整环开始：

$$T = \mathbb{Z}_{(2)}[2^{1+\frac{1}{2}}, 2^{2+\frac{1}{2^2}}, 2^{3+\frac{1}{2^3}}, \cdots, 2^{n+\frac{1}{2^n}}, \cdots]$$

并用此定义 $R := T_{\mathfrak{N}}$，其中 $\mathfrak{N}$ 是由集合 $\{2, 2^{1+\frac{1}{2}}, 2^{2+\frac{1}{2^2}}, 2^{3+\frac{1}{2^3}}, \cdots, 2^{n+\frac{1}{2^n}}, \cdots\}$ 生成的 T 的极大理想。另请注意，对于所有 n，元素 $2^{n+\frac{1}{2^n}}$ 都在 $\mathbb{Z}_{(2)}$ 上整，因为 $(2^{n+\frac{1}{2^n}})^{2^n} = 2^{n2^n+1} \in \mathbb{Z}_{(2)}$；因此，由于 $\mathbb{Z}_{(2)}$ 是一维的，且 R 在 $\mathbb{Z}_{(2)}$ 上整，R 也是一维的。也很容易看出， R 是拟局部的（且特征为 0）。

在下面的计算中，我们证明 $\mathfrak{M} := R\mathfrak{N}$ 是 SFT 的，其数据为 $(\mathfrak{M},(2),2)$，但 $\mathfrak{M}$ 不是 VSFT。

首先注意到，对于所有 $n \geqslant 1$，$(2^{n+\frac{1}{2^n}})^2 = (2)(2^n)(2^{(n-1)+\frac{1}{2^{(n-1)}}}) \in (2)$；由此根据多项式定理可容易地推出，$\mathfrak{M}$ 中的任意元素的平方都是(2)中的元素。因此，我们已经证明 $\mathfrak{M}$ 具有 SFT性质，其数据为$(\mathfrak{M}, (2), 2)$。

关于 VSFT性质，我们注意到定理 2.14 表明，如果$\mathfrak{M}$ 具有 VSFT性质，那么对于某个正整数 k，它具有数据为$(\mathfrak{M}, (2)\ k)$的 VSFT性质。考虑 k 个不同生成元的乘积:

$$(2^{n_1+\frac{1}{2^{n_1}}})(2^{n_2+\frac{1}{2^{n_2}}})(2^{n_3+\frac{1}{2^{n_3}}})\cdots(2^{n_k+\frac{1}{2^{n_k}}})$$

将其改写为

$$2^{n_1+n_2+\cdots+n_k+\frac{1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n_k}}},$$

其中，不失一般性地假设 $n_1 > n_2 > \cdots > n_k$。为导出矛盾，我们假设上述乘积是(2)中的元素。如果确实如此，那么我们可以写成

$$(2^{n_1+\frac{1}{2^{n_1}}})(2^{n_2+\frac{1}{2^{n_2}}})(2^{n_3+\frac{1}{2^{n_3}}})\cdots(2^{n_k+\frac{1}{2^{n_k}}})$$

$$= (2)(2^{n_1+\cdots+n_k+\frac{1}{2^{n_1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n_k}}-1}).$$

对于该元素

$$2^{n_1+\cdots+n_k+\frac{1}{2^{n_1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n_k}}-1}$$

要属于 R，必须满足

$$2^{(n_1+\cdots+n_k+\frac{1}{2^{n_1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n_k}}-1)} = 2^{(n_1'+\cdots+n_s'+\frac{1}{2^{n_1'}}+\cdots\frac{1}{2^{n_s'}})}2^M,$$

对于整数 M 和 $n_1' \geqslant n_2' \geqslant \cdots \geqslant n_s'$。这又可以写成

$$2^{(n_1+\cdots+n_k+\frac{1}{2^{n_1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n_k}}-1)} = 2^{(\frac{1}{2^{m_1}}+\cdots\frac{1}{2^{m_t}})}2^N,$$

其中 N 是正整数，且 $m_1 > m_2 > \cdots > m_t$，并注意到 $N \geqslant m_1+m_2+\cdots+m_t$。

比较 2 的指数可知,

$$(\frac{1}{2^{n_1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n_k}})-(\frac{1}{2^{m_1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m_t}}) \in \mathbb{Z}.$$

注意 $n_1 = m_1$，通过归纳法可得，对于所有$1 \leqslant i \leqslant k$，$k = t$ 且 $n_i = m_i$。由此可得

$$2^{(n_1+\cdots+n_k-1)} = 2^N = 2^{(m_1+\cdots+m_t-1)}$$

这与 $N \geqslant m_1+m_2+\cdots+m_t$ 矛盾。

我们已经证明，对于所有 k，都可以找到由 k 个 (2) 的根中的元素构成的乘积，该乘积不属于 (2)。根据定理 2.14，R 不是 VSFT。

4. Flatness and Behavior in Extensions

人们通常认为整扩张是“良好”的扩张，因为环论中许多重要的基本性质在整扩张下都能保持。然而，我们将在下一个例子中看到，(V)SFT 性质在整扩张下未必表现良好。特别是，我们将给出一个例子，其中 VSFT 环的整闭包甚至不是 SFT 环。值得注意的是，一般而言，诺特环的整扩张（甚至整闭包）未必是诺特环（尽管相关例子非常复杂，有兴趣的读者可参见 [15] ）。

以下例子曾在 [7] 中用于类似的情境。

例4.1. 考虑一个非离散赋值整环 V，其值群为$\mathbb{Q}$；具体而言，令 $A = \mathbb{F}_2[x; \mathbb{Q}_0^+]$ 为以含 2 个元素的域为系数、非负有理数指数的幺半群整环，并令 $V = A_{\mathfrak{M}}$ ，其中 $\mathfrak{M}$ 是 A的极大理想，由 $\mathfrak{M} = (\{x^\alpha\}_{\alpha>0})$ 给出。令 $R := \mathbb{F}_2 + xV$。 R 有唯一的非零素理想，即 xV，且容易看出该理想是一个数据为 $(xV, (x), 2)$ 的 VSFT 理想。由定理 2.13， R是一个一维 VSFT整环。然而，整环 V 是 R 的整闭包，它甚至不是 SFT整环，因此不可能是 VSFT。

这个例子还揭示了这样一个事实：VSFT整环的上环甚至可能不是SFT整环。然而，正如下一个结果所示，在合理的限制条件下，VSFT性质可以扩展到该整环的一个上环。继续陈述并证明该结果之前，我们先回顾平坦模（扩张）的定义以及广义变换的概念。详细内容见 [2]。

定义4.2. 设 A 为一个R-模。若函子 $- \otimes_R A$ 是正合的，则称 A 为平坦 R–模。此外，若 T 是 R 的一个环扩张，且 T 作为 R–模是平坦的，则称该环扩张为平坦的。

设 R 为一个整环，其分式域为 K。按照 [2], ，令 $\mathfrak{F}$ 为 R中的理想的乘法闭集。定义 $R_{\mathfrak{F}}$ 为集合 $\{z \in K | zA \subseteq R,$ 其中 $A \in \mathfrak{F}\}$。此外，若 T 是 R的一个平坦上环，则可以选取 $\mathfrak{F}$ ，使得 $T = R_{\mathfrak{F}}$ ，并且对所有 $A \in \mathfrak{F}$都有 $AT = T$ 。

借助这一工具，我们证明下面的结果。

定理4.3. 设 R 是一个 VSFT整环。若 T 是 R的平坦上环，则 T 也是 VSFT。

证明. 我们将证明，平坦上环 T 的每个素理想都是 VSFT；由定理 2.13 即可得出结论。

设 Q 是 T的一个素理想。令 $P = Q \bigcap R$。根据假设， P是 VSFT。因此，存在一个有限生成理想 $\mathcal{B} \subseteq P$ 和一个正整数 N ，使得$P^N \subseteq \mathcal{B}$。现在，根据 [2] 中证明的一个结果（见定理 1.2 的证明），我们可以在 R 中找到一个乘法封闭理想集 $\mathfrak{F}$ ，使得 $Q = P_{\mathfrak{F}}$。因此，对于 $q \in Q$，$qA \subseteq P$，其中某个 $A \in \mathfrak{F}$。令 q_1、q_2、$\cdots$、q_N为 Q中的任意 N元素。因此，存在 $\mathfrak{F}$中的 N个理想 A_1、A_2、$\cdots$、A_N，使得 $q_1A_1 \subseteq P$、$q_2A_2 \subseteq P$、$\cdots$、$q_NA_N \subseteq P$。因此，$(q_1q_2\cdots q_N)(A_1A_2\cdots A_N) \subseteq P^N \subseteq \mathcal{B}$。

由于 $\mathfrak{F}$在乘法下封闭， $A = A_1A_2\cdots A_N \in \mathfrak{F}$。因此，$(q_1q_2\cdots q_N)A \subseteq \mathcal{B}$。现在定义 $\mathfrak{A}$为 T的一个子集，令 $\{z \in T | (q_1q_2\cdots q_N)z \in \mathcal{B}T\}$，并注意到 $\mathfrak{A}$是 T的一个理想。

此时，我们注意到 $A \subseteq \mathfrak{A}$。由于 $A \in \mathfrak{F}$，且我们知道可以如此选取 $\mathfrak{F}$，使得对于 $A \in \mathfrak{F}$，有 $AT = T$，因此我们得出 $\mathfrak{A} = T$（注意 $T = AT \subseteq \mathfrak{A}T = \mathfrak{A}$）。由于 $1 \in T = \mathfrak{A}$，$(q_1 q_2 \cdots q_N)1 \in \mathcal{B}T$。注意，$\mathcal{B}T$是 T 的一个有限生成理想，满足 $\mathcal{B}T \subseteq Q$；并且，来自 Q 的任意 N 个元素的乘积都属于 $\mathcal{B}T$。因此，$Q^N \subseteq \mathcal{B}T$，所以 Q 是 VSFT。□

观察到整环的局部化是该整环的平坦上环，即可得到上述定理的一个直接推论。

推论4.4。设 R 是一个整环，且 S 是 R中的一个乘法集。如果 R 是VSFT，则 R_S也是VSFT。

推论4.5。设 R 是一个VSFT Pr¨ufer整环，则 R 的每个上环都是VSFT。

证明。众所周知，Pr¨ufer整环的每个上环都是平坦上环。因此，根据定理4.3，我们知道每个上环也都是VSFT。□

值得注意的是，Pr¨ufer整环不一定是VSFT，但Pr¨ufer整环的每个上环都是Pr¨ufer整环。因此，设有一条由不同的Pr¨ufer整环组成的链 $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，它们都包含于同一个分式域中；并规定：当且仅当 $\alpha \leqslant \beta$ 时，对指标集 Λ 进行全序排列。推论4.5表明，如果存在一个 $\alpha \in \Lambda$ 使得 D_α 是VSFT，那么对于所有满足 $\alpha \leqslant \beta$的$\beta \in \Lambda$，D_β 都是VSFT。

我们还记录 VSFT 在同态像中的性质。与诺特性质和 SFT性质的情形一样，VSFT性质在同态像中得以保持。

定理4.6. VSFT环的同态像是 VSFT。

证明. 设 R 是一个 VSFT环，S 是它在同态 ϕ 下的同态像。根据定理 2.13，我们需要证明 S 中的每个素理想都是 VSFT。

设 P 是 S 的一个素理想。那么众所周知，$\phi^{-1}(P)$ 是 R 的一个素理想。根据假设，$\phi^{-1}(P)$ 是一个 VSFT 理想。因此，存在 R 的一个有限生成理想 $\mathcal{B} \subseteq \phi^{-1}(P)$ 和一个正整数 N，使得 $(\phi^{-1}(P))^N \subseteq \mathcal{B}$。设 $\mathcal{B}$ 的生成元为 r_1、r_2、$\cdots$、r_k。现在任取 N 个来自 P 的元素p_1、p_2、$\cdots$、p_N。存在 $q_i \in \phi^{-1}(P)$，使得对所有i，均有 $p_i = \phi(q_i)$。根据 $\phi^{-1}(P)$ 的 VSFT 数据，我们得到 $q_1 q_2 \cdots q_N \in \mathcal{B}$。因此，对所有 i，均有 $q_1 q_2 \cdots q_N = s_1 r_1 + s_2 r_2 + \cdots + s_k r_k$（$s_i \in R$）。所以，$\phi(q_1 q_2 \cdots q_N) = \phi(s_1 r_1 + s_2 r_2 + \cdots + s_k r_k)$ 或 $p_1 p_2 \cdots p_N = \phi(s_1)\phi(r_1) + \phi(s_2)\phi(r_2) + \cdots + \phi(s_k)\phi(r_k)$。因此，存在 S 中的一个有限生成理想 $\mathcal{A} := \phi(\mathcal{B}) = (\phi(r_1)\ \phi(r_2)\ \cdots, \phi(r_k))$，它包含于 P，使得 $P^N \subseteq \mathcal{A}$。因此，$P$ 是 VSFT，这就完成了证明。□

为求完整起见，我们记录 VSFT 环的一些有用性质。这些都是 SFT 环所具有的性质（参见 [3]），因此我们列出这些性质而不作证明。

定理 4.7. 若 R 是 SFT 环，则 R 具有以下性质。

(1) R 满足根理想的升链条件。(2) 任意理想 $I \subseteq R$ 之上极小的素理想只有有限多个。(3) R 的任意根理想都是有限多个素理想的交。

(4) 任意根理想都是某个有限生成理想的根。

现在我们考虑将 (V)SFT 理想推广到环扩张中。特别是，下一个定理表明，如果一个 VSFT 理想在扩张环中仍然存在，那么扩张后的理想也满足 VSFT 性质。对于 SFT 环也有类似的结果，但其证明更为微妙，我们将另行阐述。

定理 4.8. 设 R 是包含于另一环 T 中的环。设 I 是 R 的一个 VSFT 理想，其数据为 $(I, \mathcal{B}, N)$，且它在 T 中保持不变。那么 IT 也是 VSFT 理想，其数据为 $(IT, \mathcal{B}T, N)$。

证明. 根据假设， $\mathcal{B}$ 是有限生成的，因此其扩张 $\mathcal{B}T$ 也是有限生成的。此外，我们注意到 $\mathcal{B}T \subseteq IT$。 IT 的一个典型元素形如 $i_1t_1+i_2t_2+i_3t_3+\cdots+i_nt_n$，其中 $i_m \in I$ 和 $t_m \in T$，对所有 m 均成立。令 $s_1, s_2, \cdots, s_N$ 为 IT 中的 N 任意元素。则 $s_1 = i_{11}t_{11} + i_{12}t_{12} + \cdots + i_{1n_1}t_{1n_1}$, $s_2 = i_{21}t_{21} + i_{22}t_{22} + \cdots + i_{2n_2}t_{2n_2}, \cdots,$ $s_N = i_{N1}t_{N1}+i_{N2}t_{N2}+\cdots+i_{Nn_N}t_{Nn_N}$。乘积$s_1s_2\cdots s_N$ 的一个典型项为 $i_{1k_1}i_{2k_2}\cdots i_{Nk_N}t_{1k_1}t_{2k_2}\cdots t_{Nk_N}$，其中 $k_1, k_2, \cdots, k_N$ 是适当的整数，用以标记各元素中的项，并且 $j \leqslant k_j \leqslant n_j$，对所有满足 $1 \leqslant j \leqslant N$ 的 j 均成立。根据假设， I 是数据为 $(I, \mathcal{B}, N)$ 的 VSFT 理想。因此 $I^N \subseteq \mathcal{B}$，从而 $i_{1k_1}i_{2k_2}\cdots i_{Nk_N} \in \mathcal{B}$，这意味着 $i_{1k_1}t_{1k_1}i_{2k_2}t_{2k_2}\cdots i_{Nk_N}t_{Nk_N} \in \mathcal{B}T$。乘积中的每一项都属于 $\mathcal{B}T$，它们的和也属于其中。因此， $s_1s_2\cdots s_N \in \mathcal{B}T$。于是 $(IT)^N \subseteq \mathcal{B}T$，从而 IT 是 VSFT 理想。□

以下定理（定理 2.1，见 [6]）是处理 SFT 情形时很有用的工具。

定理 4.9. 设 Γ 是环 R 的一个 SFT 理想，其数据为 (Γ, B, N)。若 $\{a_i\}_{i=1}^N$是 Γ中元素的一个集合，则

$$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=N} \left(\frac{N!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}\right) a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_m^{k_m} \in B$$

其中 $n_j \geqslant 1$，对所有 j均成立。特别地， $N!a_1a_2\cdots a_N \in B$。

为继续证明，我们需要一个额外的技术性结果。下文中，记号$\lfloor x \rfloor$ 表示下取整函数。若 p 是一个正素数，我们定义 $v_p\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ 为 p–进赋值，并定义 $f_p\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}$ 为

$$f_p(m) = \sum_{k \geqslant 1} \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor.$$

函数 f_p 和 v_p 的用途在于以下一个众所周知的结果；该结果可在文献中的多个地方找到（例如 [5]）。

命题 4.10.（勒让德）对所有 $n \in \mathbb{N}$, $v_p(n!) = \sum_{k \geqslant 1} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor = f_p(n)$。

此外，我们引入以下命题，以处理我们的 SFT 扩张定理。

命题 4.11。对于所有满足以下条件的实数 $N > M \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m > 0$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m \leqslant NM,$$

我们有

$$f_p(NM) \geqslant f_p(N) + f_p(a_1) + f_p(a_2) + \cdots + f_p(a_m).$$

证明。注意，存在一个非负整数 k 使得 $p^k \leqslant M < p^{k+1}$；我们对 k 进行归纳。

对于基例，令 $k=0$，并注意到这意味着，对于所有i，$f_p(a_i)=0$。因此我们有

$$f_p(NM) \geqslant f_p(N) \geqslant f_p(N)+f_p(a_1)+f_p(a_2)+\cdots+f_p(a_m),$$

由此即可确立基例。

归纳地，假设对于所有 $k \leqslant n$，若 $p^k \leqslant M < p^{k+1}$ 且

$$a_1+a_2+\cdots+a_m \leqslant NM$$

则有

$$f_p(NM) \geqslant f_p(N)+f_p(a_1)+f_p(a_2)+\cdots+f_p(a_m).$$

现在假设 $p^{n+1} \leqslant M < p^{n+2}$ 且 $a_1+a_2+\cdots+a_m \leqslant NM$。注意到我们有 $\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p}+\cdots+\frac{a_m}{p} \leqslant \frac{NM}{p}$。因此

$$\lfloor \frac{NM}{p} \rfloor \geqslant \lfloor \frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p}+\cdots+\frac{a_m}{p} \rfloor \geqslant \lfloor \frac{a_1}{p} \rfloor + \lfloor \frac{a_2}{p} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{a_m}{p} \rfloor$$

我们还注意到，$f_p(x)=\lfloor \frac{x}{p} \rfloor + f_p(\frac{x}{p})$。

由于 $p^n \leqslant \frac{M}{p} < p^{n+1}$，我们应用归纳假设得到

$$f_p(NM)=\lfloor \frac{NM}{p} \rfloor + f_p(\frac{NM}{p}) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \lfloor \frac{a_i}{p} \rfloor + f_p(N) + \sum_{i=1}^{m} f_p(\frac{a_i}{p}) \geqslant f_p(N)+\sum_{i=1}^{m} f_p(a_i),$$

由此证明完毕。 □

推论 4.12。如果 $k_1+k_2+\cdots+k_m=NM$且每个 $k_i < N$，那么 $N!$ 整除 $\frac{(NM)!}{k_1!\,k_2!\,\cdots k_m!}$。

证明。只需证明，对于所有正素数 p，$v_p(N!) \leqslant v_p\left(\frac{(NM)!}{k_1!\,k_2!\,\cdots k_m!}\right)$；根据命题 4.10，这等价于证明 $f_p(NM) \geqslant f_p(N)+f_p(k_1)+f_p(k_2)+\cdots+f_p(k_m)$，而这立即由命题 4.11 得出。

□

现在我们给出关于 SFT 环的类似结果。在此定理中，我们假设 Γ 是一个非平凡的（即非有限生成的）SFT 理想。如果 Γ是有限生成的，则其 SFT 数据可以选为（Γ，Γ，1）。

定理 4.13. 设 $R \subseteq T$ 是环。若 Γ 是 R 的非平凡 SFT 理想，其数据为 (Γ, B, N)，则 ΓT 也是 T 的 SFT 理想，其数据为 $(\Gamma T, BT, N(N-1))$。

证明. 设 $\gamma := \sum_{i=1}^{m} a_i t_i$ 是 ΓT 的一个元素（含有 $a_i \in \Gamma$ 和 $t_i \in T$）。注意到

$$\gamma^{N^2-N} = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=N^2-N} \frac{(N^2-N)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}(a_1t_1)^{k_1}(a_2t_2)^{k_2}\cdots(a_mt_m)^{k_m}$$

其中每个 $k_i \geqslant 0$。

当然，如果任一幂 k_i 大于或等于 N，那么上述和中对应的项属于 BT，因此我们只需考虑满足每个 $k_i \leqslant N-1$ 的项。

在此假设下，令 $(N(N-1))!\,k_1!k_2!\cdots k_m!\,(a_1t_1)^{k_1}(a_2t_2)^{k_2}\cdots(a_mt_m)^{k_m}$ 为上述和中的一个典型元素，且每个 $k_i \leqslant N-1$。由于每个 $k_i \leqslant N-1$，并且 $N(N-1) = k_1+k_2+\cdots+k_m$，因此 $m \geqslant N$。由于每个 $a_i \in \Gamma$，$m \geqslant N$，且 $(N(N-1))!\,k_1!k_2!\cdots k_m!$ 可被 $N!$ 整除（根据推论 4.12），由定理 4.9 可知，项 $(N(N-1))!\,k_1!k_2!\cdots k_m!\,(a_1t_1)^{k_1}(a_2t_2)^{k_2}\cdots(a_mt_m)^{k_m} \in BT$，由此定理得证。□

我们指出，在某些情形下，要看出指数 N^2-N 是必要的，最简单的方法是考虑一个特征为 0 的环，其中含有一个带有数据 (I,B,N) 的 SFT 理想 I，然后再考虑 $R[x]$ 中的理想 $I[x]$。定理 4.13 表明，如果 I 是 SFT，那么 $I[x]$ 也是，但我们要指出，SFT 环的多项式扩张是否也是 SFT，这个问题仍未解决。

5. Valuation and Prüfer Domains

秉承前述结果的思路，我们考察 SFT 性质与 VSFT 性质等价的一些情形；特别是，我们探究整环为赋值整环或 Prüfer 整环的情形。当然，这些整环类本身就十分重要，但就 SFT 性质的应用而言，它们尤其相关，特别是在研究 $\mathrm{Spec}(R[[x]])$ 时（例如 [3], [12], [4]）。

我们从一个最初发表于 [6] 的结果开始。这个结果有一个很好的推论：对于包含特征 0 域的整环，VSFT 性质与 SFT 性质等价。

定理 5.1. 设 R 是一个特征 0 的整环，$\Gamma \subset R$ 是 R 的一个 SFT 理想，其数据为 (Γ,B,N)。假设 P 是一个极小于 Γ 且满足 $P\bigcap\mathbb{Z}=(0)$ 的素理想。那么在局部化 R_P 中，Γ 仍成立，并且 $(\Gamma R_P)^N \subseteq BR_P$。特别地，如果 R 包含有理数，那么所有 SFT 理想都是 VSFT。

现在我们将证明，在赋值整环中，乃至更一般地，在 Prüfer 整环中，这些条件等价。我们先给出一个更一般、适用范围更广的论述。

定理 5.2. 设 R 是一个根闭整环，$I \subseteq R$ 是一个 SFT 理想，其数据为 $(I,\mathcal{B},n)$。如果可以将 $\mathcal{B}$ 选为主理想，那么 I 就是 VSFT。

证明。设 I 是 R 的一个理想，其 SFT 数据为 $(I,\mathcal{B},n)$。根据假设，我们可以选取 $\mathcal{B}=(\gamma)$，其中 $\gamma \in R$。现在从 I 中任取 n 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$。于是对所有 i, $x_i^n = \gamma r_i$，其中 $r_i \in R$，这就得到方程

$$x_1^n x_2^n \cdots x_n^n = \gamma^n r_1 r_2 \cdots r_n.$$

注意到 $(\overline{x_1x_2\cdots x_n})^n = r_1r_2\cdots r_n \in R$，因此由于 R 是根闭的，$\overline{x_1x_2\cdots x_n} \in R$。因此 $x_1x_2\cdots x_n \in (\gamma)$，且 I 是 VSFT。□

下一个推论可由定理 5.2 和定理 2.14 直接得到。

推论 5.3。若 R 是一个根闭整环，且具有如下性质：每个素理想都是某个主理想的根，则 SFT 与 VSFT 性质等价。

证明。只需证明，若 R 是 SFT，则它是 VSFT。为此，我们回顾一下，根据定理 2.13，只需证明每个素理想 P 都是 VFST。设 $P \subset R$ 是素理想，其 SFT 数据为 $(P,\mathcal{B},n)$。我们的假设是，P 是某个主理想的根

，结合定理 2.14，可确保我们能选取 $\mathcal{B}$ 为主理想；现在定理 5.2 表明 P 是 VSFT。□

命题 5.4. 在赋值整环 V 中，SFT 条件与 VSFT 条件等价。

证明。若 V 是赋值整环，则它是整闭的，因此也是根闭的。我们还注意到，若 V 是 SFT 的，则每个素理想都是某个有限生成理想的根；又因为 V 是赋值整环，该有限生成理想必为主理想。推论 5.3 适用。□

命题 5.5. 在 Pr¨ufer 整环中，SFT 条件与 VSFT 条件等价。

证明。这个结论的证明很大程度上依赖于 [3] 中的命题 3.1。该结果指出，Pr¨ufer 整环 P 的一个素理想是 SFT，当且仅当存在 P 中的有限生成理想 A，使得 $P^2 \subset A \subset P$；换言之，当且仅当 P 是 VSFT。□

注 5.6. 由上述定理可知，若 R 是整闭的（或完全整闭的，或 Ω-几乎整闭的，见 [8]），那么只要可以选取主理想作为子理想，VSFT 条件与 SFT 条件便等价。由于第 3 节所举示例中使用的素理想都是某个主理想的根，关键在于这两个整环都不是整闭的。

References

[1] J. T. Arnold. 幂级数环中的 Krull 维数。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 177 304, 1973 299: – .[2] J. T. Arnold 和 J. W. Brewer. 关于交换环的平坦上环、理想变换及广义变换。 *J. Algebra*, 18:254–263, 1971.[3] Jimmy T. Arnold. Pr¨ufer 整环上的幂级数环。 *Pacific J. Math.*, 44:1–11, 1973. [4] Gyu Whan Chang、Byung Gyun Kang 和 Phan Thanh Toan. 几乎 Dedekind 整环上幂级数环的 Krull 维数。 *J. Algebra*, 438:170–187, 2015. [5] Eckford Cohen. 勒让德恒等式。 *Amer. Math. Monthly*, 76:611–616, 1969. [6] J. Condo 和 J. Coykendall. SFT 环的强收敛性质。 *Comm. Algebra*, 27 5 2073( ): –2085, 1999. [7] J. Coykendall. SFT 性质并不意味着幂级数环具有有限维数。

J. , ( ): – . [8]

Algebra 256 1 85 96, 2002

Jim Coykendall 和 Tridib Dutta. 整性的推广。 *Canad. Math. Bull.*, 53 4 639( ): –653, 2010. [9] Sal ma Elaoud 和 Byung Gyun Kang. SFT 性质与环

R X *J. Pure Appl.* (( )). , ( ):

Algebra 204 2 270 279, 2006

– .[10] B. G. Kang 、 K. A. Loper 、 T. G. Lucas 、 M. H. Park 和 P. T. Toan. 非 SFT 环上幂级数环的 Krull 维数。 *J. Pure Appl. Algebra*, 217(2):254–258, 2013. [11] B. G. Kang 和 M. H. Park. 关于 t-SFT-环的注记。 *Comm. Algebra*, 34(9):3153–3165, 2006. [12] B. G. Kang 和 M. H. Park. Pr¨ufer 整环上的幂级数扩张的 SFT 稳定性。*Manuscripta Math.*, 122(3):353–363, 2007. [13] K. Alan Loper 和 Thomas G. Lucas. 构造幂级数环中的素理想链。

J. , : – .[14]

Algebra 334 175 194, 2011

K. Alan Loper 和 Thomas G. Lucas. 构造幂级数环中的素理想链，II。 *J. Algebra Appl.*, 12(1):1250123, 30, 2013. [15] Masayoshi Nagata. 诺特整环整闭包的注记。

Mem. Coll. Sci. Univ. , : – .[16]

Kyoto Ser. A. Math. 28 121 124, 1954

Phan Thanh Toan 和 Byung Gyun Kang. 非 SFT 整环上幂级数环的 Krull 维数。 *J. Algebra*, 499:516–537, 2018.

School of Mathematical and Statistical Sciences, Clemson University, Clemson, SC29634*Email address*, J.Coykendall: jcoyken@clemson.edu*Email address*, T. Dutta: dutta.tridib@gmail.com