Navier–斯托克斯–卡恩–希利亚德方程尖锐界面极限的数值研究

T.H.B. Demont[a], S.K.F. Stoter[a], E.H. van Brummelen[a]

[a]埃因霍温理工大学机械工程系，邮政信箱 *513*，*5600 MB* 埃因霍温，荷兰

arXiv:2301.01665v1 [math.NA] 4 Jan 2023

摘要

本文研究 Abels-Garcke-Gr¨un Navier–斯托克斯–卡恩–希利亚德二元流体流动弥散界面模型在弥散界面厚度趋于零时的行为。我们在经典振荡液滴问题的背景下考察这一所谓的尖锐界面极限。为提供参考极限解，我们推导了二维黏性液滴在黏性周围流体中小振幅振荡的新解析表达式。我们采用自适应有限元方法探究 Navier–斯托克斯–卡恩–希利亚德方程的尖锐界面极限，并通过后验误差估计过程指导网格细化。自适应加密过程使我们能够考虑远小于液滴振荡问题中其他相关长度尺度的弥散界面厚度，从而探索渐近区域。对于两种不同的振荡模式，我们确定了弥散界面厚度参数与迁移率参数之间的最优标度关系。此外，我们还考察了迁移率参数偏离最优标度时，弥散界面解趋近锐界面解所受的影响。

关键词：Navier–斯托克斯–卡恩–希利亚德方程、尖锐界面极限、二维振荡液滴、解析解、自适应有限元方法

1. 引言

两种流体组分由分子过渡层隔开的二元流体流动，在科学和工程领域无处不在。例如喷墨打印和增材制造。二元流体流动的数学物理模型通常分为两类：尖锐界面模型和弥散界面模型。在尖锐界面模型中，分隔两种流体组分的表面以余维一流形的形式显式表示。该流形承载运动学和动力学界面条件，这些条件作为相邻两种流体组分初始边值问题的边界条件，同时还决定该流形的演化。因此，尖锐界面模型属于自由边界型。在弥散界面模型中，两种流体组分之间的界面表示为一层薄而有限的过渡层，两种组分在层内混合，其比例从一侧的纯组分到另一侧的纯组分连续且单调地变化。弥散界面模型的优势在于，它本身能够描述因液滴聚并或破裂，或因润湿（即流体-流体前沿沿着（可能具有弹性的）固体基底传播）而导致的流体-流体界面拓扑变化 [28, 19, 31, 34]。

*2023*年*1*月*5*日

两种互不相溶的不可压流体组分的弥散界面模型，通常用 Navier-Stokes–Cahn-Hilliard（NSCH）方程描述。NSCH 方程代表一类模型，过去半个世纪中，人们提出了该类模型的多种形式：Hohenberg 和 Halperin 于20世纪70年代末提出 [16], ；Lowengrub 和 Truskinovsky 于20世纪90年代末提出 [24], ；Shokrpour 等人于 2018 [29] 提出；Abels、Garcke 和 Gr¨un 于 2012 [4]提出。本文着重研究最后一种模型，因为它具有热力学一致性，并且在纯组分情形下能够一致地还原为其基础方程——单流体 Navier–Stokes 方程。

NSCH模型总是包含三个与弥散界面相关的参数，即界面厚度参数 ε、迁移率参数 m 和表面张力参数 σ。界面厚度参数表示两种流体组分之间过渡层的横向长度尺度；在所谓的尖锐界面极限 $\varepsilon \to +0$ 下，过渡层会收缩（确切地说，理论上应当收缩）到一个余维一流形上。迁移率参数决定了弥散界面附近发生相扩散的速率。在NSCH 方程通常作为二元流体模型应用的相分离区间内，迁移率参数决定界面达到平衡的速率。在混合区间内，它控制奥斯特瓦尔德熟化效应的动力学。表面张力参数根据 $2\sqrt{2}\sigma = 3\sigma_{\mathrm{DA}}$ 控制弥散界面的超额自由能 σ_{DA}。值得注意的是，对于NSCH 方程，这种比例关系不依赖于 ε；而Navier-Stokes–Korteweg 方程则不同。

目前对 NSCH 方程尖锐界面极限的理解尚不完整。已知结果和未解问题的概述见 [3, §4.3]。一个重要的未解问题涉及尖锐界面极限下迁移率参数相对于界面厚度参数的适当标度。NSCH 方程的极限解取决于标度关系 $m := m_\varepsilon$。Abels 和 Garcke [3, §4.1]证明，若 $m_\varepsilon = \mathcal{O}(1)$ 在 $\varepsilon \to +0$时成立，他们的 NSCH 模型将收敛到非经典尖锐界面 Navier–Stokes/Mullins–Sekerka 模型；另见 [18, §4]。另一方面，若 m_ε 在 $\varepsilon \to +0$时以适当方式趋于零，则得到经典尖锐界面二元流体模型，此时界面由流体速度 [24, 3, 35]输运。然而，迁移率的衰减不能过快：若 $m_\varepsilon = o(\varepsilon^3)$ 在 $\varepsilon \to +0$时成立，所得 NSCH 模型极限解通常会违反界面两侧压力跃变的 Young–Laplace 条件 [5]。这些结果表明，$0 < a \leq 3$ 在 $\varepsilon \to +0$ 时的 $m_\varepsilon \propto \varepsilon^a$，是得到经典锐界面解的必要且充分条件。不过，对于这些不同可接受迁移率标度下弥散界面解如何趋近锐界面极限解，目前尚不清楚；文献中提出了不同的标度，尤其是在数值模拟方法的背景下。 [11], 中考虑了标度 $m_\varepsilon \propto \varepsilon^3$，其依据是这种正比关系能够确定扩散时间尺度，进而确定弥散界面的平衡速率。 [21], 也基于数值研究，提出了这种迁移率相对于界面厚度的三次标度（以通常的量纲形式表示）。基于不完整的匹配渐近分析论证，文献 [25] 得出结论，适当的标度为 $m \propto \varepsilon^2$。然而，由于该文献中的匹配过程并不完整，因此尚不清楚这一标度关系实际上是否构成必要或充分条件。 [18] 从弥散界面处由曲率引起的膨胀/收缩模态出发，论证了 $m_\varepsilon \propto \varepsilon^a$与 $1 \leq a < 2$。需要指出的是，前述迁移率标度适用于不存在移动接触线和拓扑变化的情况；例如，见 [35]。

本文通过计算研究 Abels–Garcke–Gr¨un Navier-Stokes–Cahn-Hilliard 模型在不同界面动力学和不同迁移率参数下的行为，考察其趋向二维振荡液滴锐界面描述时的极限过程，以解决迁移率最优标度以及趋近锐界面极限解过程中的未解问题。为了探索渐近区域，我们采用自适应有限元方法，并以 a-posteriori 误差估计指导自适应过程；详情见 [31, 11]。

我们在二维情形下，以典型的振荡液滴问题为背景，分析 NSCH 方程的尖锐界面极限。尽管振荡液滴问题由来已久，但二维情形似乎尚未得到广泛研究，文献中也未见二维问题的解。对振荡液滴问题的研究可追溯至 Rayleigh，他给出了无黏液滴在真空中in 1879 [30]的著名振荡频率结果。20世纪30年代，Lamb 将这一结果推广至包含无黏周围流体的影响 [22]。1960年，Reid 将黏性的影响纳入真空中by in- cluding the effect of viscosity [27]，从而推广了真空中振荡液滴的理论。随后，Miller 和 Scriven 在 1968 [26]中提出了完整的理论，其中包含黏性液滴在黏性周围流体中的小振荡解。不过，上述文献只考虑了三维情形，其结果，尤其是黏性解，并不能直接推广至二维情形。显然，三维情形在实际中更为重要，但二维情形本身也有其存在的理由independently as a means of verification for mathematical models and numerical methods。我们对 NSCH 方程尖锐界面极限的分析，一方面需要获得尖锐界面模型的闭式解，为 NSCH 方程提供初始数据和边界数据；另一方面也需要据此系统地确定弥散界面解相对于锐界面解的偏差。因此，本研究的另一个目标是建立黏性液滴在黏性周围流体中小振幅振荡的闭式表达式。我们的推导沿用 Miller 和 Scriven 的方法，但在推导中更完整地阐述了中间步骤和假设，特别是明确考虑了不同场的复数性质，并给出了最终结果的闭式表达式。

本文其余部分安排如下。第2节介绍 Abels–Garcke–Gr¨un Navier-Stokes–Cahn-Hilliard 模型方程，以及在尖锐界面极限下该模型应约化到的耦合 Navier–Stokes 自由边界问题。第3节推导二维黏性液滴在黏性周围流体中发生小振幅振荡时，相应尖锐界面模型的闭式表达式。第4节中，我们通过系统的数值实验，利用这些表达式研究 $\varepsilon \to +0$ 极限下 NSCH 解向锐界面解的趋近过程。

2. 控制方程

我们考虑一个二元流体系统，其中两种流体均建模为不可压缩、等温、不互溶且具有有限黏度的牛顿型流体。鉴于后文将重点讨论浸没液滴，我们将其中一种流体记为 D，表示液滴；另一种记为 A，表示环境流体。描述流体运动的建模框架有多种，采用的表示方法包括弥散界面表示和锐界面表示。图 1 展示了相关的不同区域和材料参数。本文考虑

不可压缩 NSCH模型——具体而言，是 Abels、Garcke 和 Gr¨un 在 [4] 中提出的模型——来描述二元流体动力学。选择该模型的原因在于其具有热力学一致性和不可压缩性，并且在纯组分情形下可一致地还原为相应的单流体 Navier–Stokes 方程。近期，已有研究证明了 Abels–Garcke-Gr¨un 模型在多种情形下的适定性 [14, 1, 2]。

2.1. 弥散界面表示

在弥散界面模型中，两种不互溶流体由一层具有有限厚度的区域隔开，该区域由两种流体的混合物构成，体现了流体 D 与流体 A之间的渐变过渡。我们考虑一个开时间区间 $(0,\ t_{\mathrm{fin}}) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$，以及一个空间区域，它对应于 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ $(d = 2,\ 3)$ 的一个单连通、与时间无关的子集。我们采用一种 Navier–Stokes–Cahn–Hilliard 型模型来描述所谓序参量$\varphi \in [-1, 1]$ 的演化：当 $\phi = 1$ 和 $\phi = -1$时，序参量分别表示纯组分 D 和 A；当 $\varphi \in (-1,\ 1)$ 时，则表示两者的混合物。此外，该模型还描述混合物的速度和压力。Abels、Garcke 和 Gr¨un 提出的 NSCH 模型如下 [4]:

$$
\left.
\begin{aligned}
\partial_t(\rho \boldsymbol{u}) + \nabla\cdot(\rho \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) + \nabla\cdot(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{J}) + \nabla p - \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} - \nabla\cdot\boldsymbol{\zeta} &= 0, && \text{(1a)}\\
\nabla\cdot\boldsymbol{u} &= 0, && \text{(1b)}\\
\partial_t\varphi + \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{u}) - \nabla\cdot(m\nabla\mu) &= 0, && \text{(1c)}\\
\mu + \sigma\varepsilon\Delta\varphi - \frac{\sigma}{\varepsilon}\Psi' &= 0, && \text{(1d)}
\end{aligned}
\right\} \quad \text{in } \Omega
$$

其中，体积平均速度 $\boldsymbol{u}$、压力 p、序参量 φ 和化学势 μ 是未知场。相对质量通量 $\boldsymbol{J}$的闭合关系，

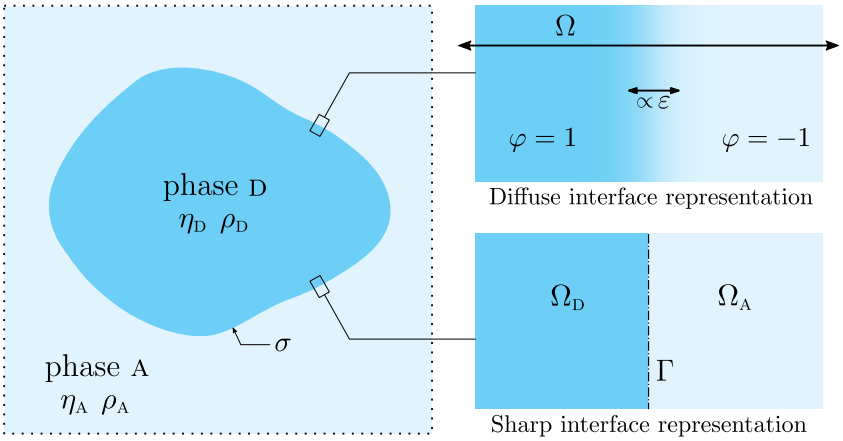

图 1：浸没的不互溶流体物理场景示意图，分别采用弥散界面表示或锐界面表示进行建模。

黏性应力 $\boldsymbol{\tau}$、毛细应力 $\boldsymbol{\zeta}$ 和混合物能量密度 Ψ 的闭合关系如下:

$$\boldsymbol{J} \coloneqq m\frac{\rho_{\mathrm{A}}-\rho_{\mathrm{D}}}{2}\nabla\mu\,, \tag{2a}$$

$$\boldsymbol{\tau} \coloneqq \eta(\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^{T})\,, \tag{2b}$$

$$\boldsymbol{\zeta} \coloneqq -\sigma\varepsilon\nabla\varphi\otimes\nabla\varphi+\boldsymbol{I}\left(\frac{\sigma\varepsilon}{2}|\nabla\varphi|^{2}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\Psi\right)\,, \tag{2c}$$

$$\Psi\left(\varphi\right) \coloneqq \frac{1}{4}\left(\varphi^{2}-1\right)^{2}\,. \tag{2d}$$

其余参数为材料参数和模型参数。模型参数为迁移率参数 $m>0$ 和界面厚度参数 $\varepsilon>0$, 它们分别影响弥散界面的时间尺度和长度尺度。材料参数包括 σ，即根据 $2\sqrt{2}\sigma=3\sigma_{\mathrm{DA}}$对液滴与环境流体之间的表面张力 σ_{DA} 进行重新标度后的值;- 混合物密度 ρ；以及混合物黏度 η。混合物密度和黏度通常取决于 φ。为确保方程组存在解，我们必须允许 φ 取 $[-1,1]$ [15]之外的值。我们引入密度扩展，以确保即使在非物理情形 $\varphi\notin[-1,1]$ [9]下，密度仍为正:

$$\rho(\varphi)=\begin{cases}\frac{1}{4}\rho_{\mathrm{A}}, & \varphi\leq-1-2\lambda\,,\\ \frac{1}{4}\rho_{\mathrm{A}}+\frac{1}{4}\rho_{\mathrm{A}}\lambda^{-2}\left(1+2\lambda+\varphi\right)^{2}, & \varphi\in(-1-2\lambda,-1-\lambda)\,,\\ \frac{1+\varphi}{2}\rho_{\mathrm{D}}+\frac{1-\varphi}{2}\rho_{\mathrm{A}}, & \varphi\in[-1-\lambda,1+\lambda]\,,\\ \rho_{\mathrm{D}}+\frac{3}{4}\rho_{\mathrm{A}}-\frac{1}{4}\rho_{\mathrm{A}}\lambda^{-2}\left(1+2\lambda-\varphi\right)^{2}, & \varphi\in(1+\lambda,1+2\lambda)\,,\\ \rho_{\mathrm{D}}+\frac{3}{4}\rho_{\mathrm{A}}, & \varphi\geq1+2\lambda\,,\end{cases} \tag{3}$$

其中 $\lambda=\rho_{\mathrm{A}}/(\rho_{\mathrm{D}}-\rho_{\mathrm{A}})$。对于黏度插值，我们采用阿伦尼乌斯混合物黏度模型 [6]:

$$\log\eta(\varphi)=\frac{(1+\varphi)\,\Lambda\log\eta_{\mathrm{D}}+(1-\varphi)\log\eta_{\mathrm{A}}}{(1+\varphi)\,\Lambda+(1-\varphi)}\,, \tag{4}$$

其中 $\Lambda=\frac{\rho_{\mathrm{D}}M_{\mathrm{A}}}{\rho_{\mathrm{A}}M_{\mathrm{D}}}$是两种流体之间的本征体积比（ M_{A} 和 M_{D} 分别是它们的摩尔质量）。

注释 1. 为了消除纯组分中的奥斯特瓦尔德熟化效应，可以根据 $m(\varphi)\geq0$ 引入迁移率对相场的退化依赖，且不等式成立当且仅当 $|\varphi|<1$。然而，鉴于退化迁移率会给数值近似过程带来复杂性， *[7]*,我们选择采用常迁移率参数。

注释 2. 本文采用基于体积分数的阿伦尼乌斯关系，即 $\Lambda=1$。由于式 (4) 中的分母因此化为非零常数，这一选择消除了奇异性，并使混合物黏度在包含$[-1,1]$的有限区间内有正下界。更多详情请参见 *[31]* 中的注释 2 。

2.2. 尖锐界面极限

随着 $\varepsilon\to+0$，NSCH模型中弥散界面的宽度趋于零。正如引言中所指出的，在这一极限下得到的具体模型取决于

迁移率 m 的标度关系。如果迁移率也以适当的方式趋于零，则可得到以下经典尖锐界面模型:

$$\rho_i \partial_t \boldsymbol{u}_i + \rho_i \left(\boldsymbol{u}_i \cdot \nabla\right) \boldsymbol{u}_i - \eta_i \Delta \boldsymbol{u}_i + \nabla p_i = 0 \qquad \text{in } \Omega_i = \Omega_i(t)\,, \tag{5a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_i = 0 \qquad \text{in } \Omega_i\,, \tag{5b}$$

$$\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{n} = \mathcal{V} \qquad \text{on } \Gamma = \Gamma(t)\,, \tag{5c}$$

$$[\![\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t}_j]\!] = 0 \qquad \text{on } \Gamma, \text{ for } j = 1, \cdots, d-1\,, \tag{5d}$$

$$[\![-(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T)\boldsymbol{n} + p\boldsymbol{n}]\!] = \sigma_{\mathrm{DA}} \kappa \boldsymbol{n} \qquad \text{on } \Gamma\,, \tag{5e}$$

对于 $i \in \{\mathrm{D}, \mathrm{A}\}$，并且令 $\boldsymbol{n}$ 为 Ω_{D} 外侧的单位法向量（位于 Γ 上）， $\mathcal{V}$ 为界面法向速度， κ 为界面的（加性）曲率， $[\![\cdot]\!]$ 为界面跳跃算子 $[\![g]\!] = g|_{\mathrm{A}} - g|_{\mathrm{D}}$。我们遵循如下约定：若法平面内密切圆的圆心位于液滴区域内，则曲率为负。

与 NSCH模型不同，尖锐界面模型 (5) 分别为每种流体组分描述一组方程，并辅以界面处适当的耦合条件。尖锐界面模型是一个自由边界问题。各场所定义的区域随时间演化，这体现在 $\Omega_i(t)$ 和 $\Gamma(t)$ 对时间的依赖性上。根据 (5c)，速度场与 Ω_i 和 Γ 的演化之间存在内在耦合。由于该方程在界面两侧均成立，且 $\mathcal{V}$ 为单值函数，式 (5c) 蕴含 $[\![\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}]\!] = 0$。

3. 振荡液滴的响应

为了给 NSCH 方程的尖锐界面极限提供一个参考解，我们现在考虑二维情况下自由边界问题 (5) 的解，该解对应于置于环境流体中的圆形液滴的小扰动。用 R_0 表示液滴的半径，可以验证

$$\Omega_{\mathrm{D},0} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : |\boldsymbol{x}| < R_0\} \qquad \Omega_{\mathrm{A},0} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_{\mathrm{D},0}}\,, \tag{6a}$$

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{D},0} = 0 \qquad \boldsymbol{u}_{\mathrm{A},0} = 0\,, \tag{6b}$$

$$p_{\mathrm{D},0} = \sigma_{\mathrm{DA}}/R_0 \qquad p_{\mathrm{A},0} = 0\,, \tag{6c}$$

是 (5) 的一个定常解。我们将使用 (6) 作为生成解。我们考虑对解 (6) 进行适当有界且在无穷远处趋于零的扰动。后一个条件可表示为:

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \big(\boldsymbol{u}, p\big)(\boldsymbol{x}, t) = 0\,. \tag{7}$$

我们对这类液滴自然响应的推导遵循 Miller 和 Scriven [26],的方法，不同之处在于，我们对中间步骤和假设作了更全面的阐述，尤其明确说明了不同场的复值性质。该方法主要包含四个步骤。首先，我们对生成解 (6) 附近的控制方程进行线性化，其中生成解受到界面微小变形的扰动。其次，我们分别推导两个区域中对应于自然响应的通解。第三步，通过约束通解中的自由参数，将界面耦合条件纳入考虑。最后，通过解存在条件，得到假定界面位移的特征时间响应（振荡频率和阻尼率）及其对应形状。

3.1. 形式线性化

我们考虑沿液滴圆周呈正弦形的小振幅界面扰动。为便于表述，我们引入极坐标 $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 以及 $\theta \in [0, 2\pi)$，并采用坐标变换 $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2) = r(\cos\theta,\ \sin\theta)$。我们将界面扰动 $\Gamma_0 = \partial\Omega_{\mathrm{D},\,0}$ 视为对应于以下参数化：

$$\Gamma_\delta(t) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{x} = R_\delta(\theta, t)\,(\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi) \right\}, \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned} R_\delta(\theta, t) &= R_0 + R_0\,\delta\left(\beta\cos(k\theta) + \sqrt{1-\beta^2}\,\sin(k\theta)\right)\cos(\nu t)e^{-\alpha t} \\ &= \Re\left(R_0 + R_0\,\delta\left(\beta\cos(k\theta) + \sqrt{1-\beta^2}\,\sin(k\theta)\right)e^{-\gamma t}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

界面构型 (8)-(9) 表示液滴的阻尼振荡，其模态形状由模态数 $k \in \mathbb{N}$ 描述，角向取决于 $0 \leq \beta \leq 1$，振幅则由 $\delta \ll 1$ 描述，为液滴半径 R_0 的比例。我们只考虑满足 $\mathrm{meas}(\Omega_{\mathrm{D}}) = \mathrm{meas}(\Omega_{\mathrm{D},\,0}) + \mathcal{O}(\delta^2)$ 且 Ω_{D} 的质心位于原点的液滴构型。这意味着 $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$。阻尼率 $\alpha \geq 0$ 和振荡频率 $\nu > 0$ 隐式地依赖于模态数，并将在后续分析中导出。(9) 中的第二个表达式将R_δ 表示为一个复值函数的实部，其中 $\gamma := \alpha - i\nu$。这种形式使我们能够简化后续出现的一些表达式。

结合界面构型 (8)-(9)，我们考虑如下形式的尖锐界面问题的线性渐近解

$$(\boldsymbol{u}_i, p_i, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}, \kappa, \mathcal{V}) = (\boldsymbol{u}_i, p_i, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}, \kappa, \mathcal{V})_0 + \delta(\boldsymbol{u}_i, p_i, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}, \kappa, \mathcal{V})_1, \tag{10}$$

即符合 (10) 的函数，它们满足 (5)，误差至多为 $o(\delta)$，当 $\delta \to 0$ 时。将 (10) 代入尖锐界面方程 (5)，收集 δ 的不同阶数项，并注意到所有 $\mathcal{O}(1)$ 项均为零，这是因为 (10) 中的第一项代表 (5) 的一个解，由此得到关于 (10) 中第二项的以下无穷小条件：

$$\rho\partial_t \boldsymbol{u}_{i,1} - \eta\Delta\boldsymbol{u}_{i,1} + \nabla p_{i,1} = 0 \qquad \text{in } \Omega_{i,0}, \tag{11a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_{i,1} = 0 \qquad \text{in } \Omega_{i,0}, \tag{11b}$$

$$\boldsymbol{u}_{i,1} \cdot \boldsymbol{n}_0 = \mathcal{V}_1 \qquad \text{on } \Gamma_0, \tag{11c}$$

$$[\![\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{t}_0]\!] = 0 \qquad \text{on } \Gamma_0, \tag{11d}$$

$$[\![-\eta\left(\nabla\boldsymbol{u}_1 + (\nabla\boldsymbol{u}_1)^T\right)\boldsymbol{n}_0 + p_1\boldsymbol{n}_0]\!] = \sigma_{\mathrm{DA}}\kappa_1\boldsymbol{n}_0 \qquad \text{on } \Gamma_0, \tag{11e}$$

对于 $i \in \{\mathrm{D}, \mathrm{A}\}$。非线性对流项消失了，因为唯一的非线性一阶扰动项是 $\boldsymbol{u}_{i,\,1}$ 与 $\boldsymbol{u}_{i,\,0} = 0$ 之间的交叉项。同样，一阶条件 (11) 中只出现 $\boldsymbol{n}_0$，因为它与 $\boldsymbol{u}_{i,\,1}$ 相乘后是二阶项，它与 $\boldsymbol{u}_{i,\,0}$ 的点积为零，并且 $[\![p_0\boldsymbol{n}_1]\!] = \sigma_{\mathrm{DA}}R_0^{-1}\boldsymbol{n}_1$ 与右端项 $\sigma_{\mathrm{DA}}\kappa_0\boldsymbol{n}_1$ 抵消。

注 3. 一阶条件设定在静止生成域 $\Omega_{i,\,0}$以及生成界面 Γ_0 上。这是自由边界问题线性化的普遍特征。根据(9) 对界面的扰动，隐含地出现在(11) 中的界面速度扰动 $\mathcal{V}_1$ 和曲率扰动 κ_1 中。

本节其余部分将针对不同的扰动波数 k，求解 (11) 的通解。为便于阅读，以下省略表示扰动阶数的下标。

3.2. 液滴和周围区域中的一阶解

接下来，我们根据描述液滴 D 和环境流体 A 区域的微分方程 (11a)–(11b)，推导一般的一阶解（$\boldsymbol{u}$，p）$_{i,\,1}$。我们先推导与 (11a) 对应的涡量方程，并通过变量分离法求解。随后，根据涡量解求得一阶速度场。相应的一阶压力场则由线动量平衡条件推导得出。

3.2.1. 涡度解

对 (11a) 取旋度，并利用恒等式 $\nabla\times\nabla(\cdot)=0$，即可从控制方程中消去压力。引入涡量 $\omega=\nabla\times\boldsymbol{u}$，由 (11a) 可得

$$\rho\partial_t\left(\nabla\times\boldsymbol{u}\right)-\eta\Delta\left(\nabla\times\boldsymbol{u}\right)+\nabla\times\nabla p=\rho\partial_t\omega-\eta\Delta\omega=0\,. \tag{12}$$

请注意，在二维情形下，涡量可以表示为一个标量场。该标量涡量场的演化方程可视为扩散方程。

为求解 (12) 的通解，我们假设采用以下变量分离形式：

$$\omega(r,\theta,t)\coloneqq\Psi(r)\,\Theta(\theta)\,T(t). \tag{13}$$

将其代入扩散方程的极坐标表示式，得到

$$\Psi(r)\,\Theta(\theta)\,T'(t)=\frac{\eta}{\rho r^2}\Psi(r)\,\Theta''(\theta)\,T(t)+\frac{\eta}{\rho r}\Psi'(r)\,\Theta(\theta)\,T(t)+\frac{\eta}{\rho}\Psi''(r)\,\Theta(\theta)\,T(t)\,, \tag{14}$$

其中 pri mes 表示求导。按照通常的变量分离论证可得 o

$$T'(t)=-\frac{\eta}{\rho}m^2\,T(t)\qquad m\in\mathbb{C}\,, \tag{15a}$$

$$\Theta''(\theta)=-n^2\,\Theta(\theta)\qquad n\in\mathbb{C}\,, \tag{15b}$$

$$r^2\Psi''(r)+r\Psi'(r)+\left(m^2r^2-n^2\right)\Psi(r)=0\,, \tag{15c}$$

其中 $\mathbb{C}$ 为复数集合。

(15a) 和 (15b) 的通解由复值指数函数构成，具体如下：

$$T(t)=c\,e^{-\frac{\eta}{\rho}m^2t}\,, \tag{16a}$$

$$\Theta(\theta)=c_1\,e^{int}+c_2e^{-int}\,. \tag{16b}$$

根据液滴扰动角度依赖性的周期性（符合 (8)），我们推断 $n\in\mathbb{Z}_{\geq0}$。随后可选取任意常数 c_1 和 c_2，使 (16b) 化为两个实值三角函数之和：

$$\Theta(\theta)=C\cos(n\theta)+D\sin(n\theta)\qquad(n\in\mathbb{Z}_{\geq0})\,, \tag{17}$$

其中 C, $D \in \mathbb{R}$ 是决定解的角向的系数。关于 (15c)，我们注意到该方程对应于具有复值缩放因子 $m \in \mathbb{C}$ 的贝塞尔方程。因此，(15c) 的解是贝塞尔函数向复平面的延拓。由于贝塞尔函数在 $\mathbb{R}$ 上是解析函数，因而可通过其幂级数展开将其延拓为 $\mathbb{C}$ 上的解析函数，这种延拓是有定义的。(15c) 的通解由两个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 阶贝塞尔函数的线性组合构成。考虑边界条件后，原因便会明了；因此，我们选择使用第一类贝塞尔函数 J_n 和第二类汉克尔函数 $H_n^{(2)}$:

$$\Psi(r) = Am^2 J_n(mr) + Bm^2 H_n^{(2)}(mr)\,, \tag{18}$$

其中 A, $B \in \mathbb{C}$。将（16a）、（17）和（18）代入（13），可得涡量方程（12）的一般旋转周期解:

$$\omega(r,\theta,t) = \Big[Am^2 J_n(mr) + Bm^2 H_n^{(2)}(mr)\Big]\Big[C\cos(n\theta) + D\sin(n\theta)\Big]\, e^{-\frac{\eta}{\rho}m^2 t}\,, \tag{19}$$

其中 A, $B \in \mathbb{C}$、 C, $D \in \mathbb{R}$ 和 $m \in \mathbb{C}$ 为任意值。

3.2.2. 速度解

为了从一般涡量解（19）中获得速度场，我们根据以下关系引入流函数 χ：

$$\Delta\chi = -\omega\,. \tag{20}$$

根据该流函数可求得速度:

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\chi\,\boldsymbol{e}_r - \frac{\partial}{\partial r}\chi\,\boldsymbol{e}_\theta\,. \tag{21}$$

基于（19）中 ω 的表达式，我们预期（20）的一个特解具有以下形式:

$$\chi(r,\theta,t) = \Upsilon(r)\left[C\cos(n\theta) + D\sin(n\theta)\right] e^{-\frac{\eta}{\rho}m^2 t}\,. \tag{22}$$

将 (22) 代入 (20)，可得到关于 Υ 的以下常微分方程:

$$\Upsilon''(r) + \frac{1}{r}\Upsilon'(r) - \frac{n^2}{r^2}\Upsilon(r) = -Am^2 J_n(mr) - Bm^2 H_n^{(2)}(mr)\,. \tag{23}$$

通解 非齐次常微分方程 (23) 的解为 y:

$$\Upsilon(r) = Er^n + Fr^{-n} + AJ_n(mr) + BH_n^{(2)}(mr)\,. \tag{24}$$

(24) 式中的第一项和第二项构成解的齐次部分。第三项和第四项表示特解部分。因此，由 (21) 可得，速度场的 r 和 θ 分量为:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\chi = \frac{n}{r}\Upsilon(r)\left[D\cos(n\theta) - C\sin(n\theta)\right] e^{-\frac{\eta}{\rho}m^2 t}\,, \tag{25a}$$

$$u_\theta = -\frac{\partial}{\partial r}\chi = -\Upsilon'(r)\left[C\cos(n\theta) + D\sin(n\theta)\right] e^{-\frac{\eta}{\rho}m^2 t}\,. \tag{25b}$$

速度解 (25) 在极限 $r \to 0$、 $r \to \infty$ 和 $t \to \infty$ 下通常并不有界。必须对 (25) 中的系数施加辅助条件，以提取在液滴区域 Ω_{D},0（分别为周围区域 $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega_{\mathrm{D}}$,0）内有界的通解（当 $r \to 0$（分别为 $r \to \infty$）时），并且当 $t \to \infty$ 时也有界。为确保解在极限 $t \to \infty$ 下有界，我们要求 $\Re(m^2) \geq 0$。为评估解 (25) 对空间变量的依赖所导致的有界性，我们注意到，对于所有满足 $|\Im(m)| > 0$ 的 $m \in \mathbb{C}$，贝塞尔函数 $J_n(mr)$ 在 $r \to \infty$ 处是奇异的；而对于所有满足 $\Im(m) > 0$ 的 $m \in \mathbb{C}$，汉克尔函数 $H_n^{(2)}(mr)$ 在原点和 $r \to \infty$ 处是奇异的。此外，根据 (7)，我们注意到，若 $\Im(m) \leq 0$，则 $H_n^{(2)}(mr)$ 在极限 $r \to \infty$ 下趋于零。进一步地， r^n （分别为 r^{-n}）在极限 $r \to \infty$ （分别为 $r \to 0$）下是奇异的。由于在原点处奇异， $H_n^{(2)}$ 和 r^{-n} 在液滴区域 Ω_{D}, $_0 \supset \{0\}$ 中不合适。因此，在液滴区域内，必须满足 $B = 0$ 和 $F = 0$。反之，鉴于 $J_n(mr)$ 和 r^n 在 $r \to \infty$ 处奇异，它们不适用于周围区域。因此，在周围区域内，必须满足 $A = 0$ 和 $E = 0$。

综上，我们得到液滴区域和环境流体区域中的以下一般有界复值速度解：

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{D},r} = {} & e^{-\frac{\eta_{\mathrm{D}}}{\rho_{\mathrm{D}}} m_{\mathrm{D}}^2 t} \Big[D_{\mathrm{D}} \cos(n_{\mathrm{D}}\theta) - C_{\mathrm{D}} \sin(n_{\mathrm{D}}\theta) \Big] \\
& \times \frac{n_{\mathrm{D}}}{r} \Big[A J_{n_{\mathrm{D}}}(m_{\mathrm{D}} r) + E r^{n_{\mathrm{D}}} \Big] , \qquad (26a) \\
u_{\mathrm{D},\theta} = {} & e^{-\frac{\eta_{\mathrm{D}}}{\rho_{\mathrm{D}}} m_{\mathrm{D}}^2 t} \Big[C_{\mathrm{D}} \cos(n_{\mathrm{D}}\theta) + D_{\mathrm{D}} \sin(n_{\mathrm{D}}\theta) \Big] \\
& \times \Big[- A \Big(m_{\mathrm{D}} J_{n_{\mathrm{D}}-1}(m_{\mathrm{D}} r) - \frac{n_{\mathrm{D}}}{r} J_{n_{\mathrm{D}}}(m_{\mathrm{D}} r) \Big) - E n_{\mathrm{D}} r^{n_{\mathrm{D}}-1} \Big] , \qquad (26b) \\
u_{\mathrm{A},r} = {} & e^{-\frac{\eta_{\mathrm{A}}}{\rho_{\mathrm{A}}} m_{\mathrm{A}}^2 t} \Big[D_{\mathrm{A}} \cos(n_{\mathrm{A}}\theta) - C_{\mathrm{A}} \sin(n_{\mathrm{A}}\theta) \Big] \\
& \times \frac{n_{\mathrm{A}}}{r} \Big[B H_{n_{\mathrm{A}}}^{(2)}(m_{\mathrm{A}} r) + F r^{-n_{\mathrm{A}}} \Big] , \qquad (26c) \\
u_{\mathrm{A},\theta} = {} & e^{-\frac{\eta_{\mathrm{A}}}{\rho_{\mathrm{A}}} m_{\mathrm{A}}^2 t} \Big[C_{\mathrm{A}} \cos(n_{\mathrm{A}}\theta) + D_{\mathrm{A}} \sin(n_{\mathrm{A}}\theta) \Big] \\
& \times \Big[- B \Big(m_{\mathrm{A}} H_{n_{\mathrm{A}}-1}^{(2)}(m_{\mathrm{A}} r) - \frac{n_{\mathrm{A}}}{r} H_{n_{\mathrm{A}}}^{(2)}(m_{\mathrm{A}} r) \Big) + F n_{\mathrm{A}} r^{-n_{\mathrm{A}}-1} \Big] , \qquad (26d)
\end{aligned}
$$

满足 $\Re(m_i^2) \geq 0 \, (i \in \{\mathrm{A}, \mathrm{D}\})$ 和 $\Im(m_{\mathrm{A}}) < 0$。

3.2.3. 压力解

为便于推导与式 (26) 相关的无穷小压力解，我们首先指出，根据式 (11a) 和 (11b)，压力解是调和函数。考虑角向依赖为正弦形且周期的、时间依赖符合式 (26) 且有适当界限的函数，可得 p_{D} 的以下一般表达式：

$$
p_{\mathrm{D}}(r, \theta, t) = e^{-\frac{\eta_{\mathrm{D}}}{\rho_{\mathrm{D}}} m_{\mathrm{D}}^2 t} \, r^{\tilde{n}_{\mathrm{D}}} \big(\tilde{D}_{\mathrm{D}} \cos(\tilde{n}_{\mathrm{D}}\theta) + \tilde{C}_{\mathrm{D}} \sin(\tilde{n}_{\mathrm{D}}\theta) \big) , \qquad (27)
$$

其中 $\tilde{n}_{\mathrm{D}} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 C_{D}， $D_{\mathrm{D}} \in \mathbb{C}$ 为任意常数。将 (26) 和 (27) 代入 (11a)，可推知 (27) 与 (26) 之间的相容性要求指标 $\tilde{n}_{\mathrm{D}} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $\tilde{}$ $\tilde{}$对应的系数 C_{D}， $D_{\mathrm{D}} \in \mathbb{C}$ 满足

$$
\tilde{D}_{\mathrm{D}} = D_{\mathrm{D}} E \eta_{\mathrm{D}} m_{\mathrm{D}}^2 , \qquad \tilde{C}_{\mathrm{D}} = - C_{\mathrm{D}} E \eta_{\mathrm{D}} m_{\mathrm{D}}^2 , \qquad \tilde{n}_{\mathrm{D}} = n_{\mathrm{D}} . \qquad (28)
$$

周围区域中的无穷小压力解也可用类似方法确定。总之，我们得到：

$$p_{\mathrm{D}} = E\eta_{\mathrm{D}} m_{\mathrm{D}}^2 \, e^{-\frac{\eta_{\mathrm{D}}}{\rho_{\mathrm{D}}} m_{\mathrm{D}}^2 t} \, r^{n_{\mathrm{D}}} \left[D_{\mathrm{D}} \cos(n_{\mathrm{D}}\theta) - C_{\mathrm{D}} \sin(n_{\mathrm{D}}\theta) \right], \tag{29a}$$

$$p_{\mathrm{A}} = -F\eta_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{A}}^2 \, e^{-\frac{\eta_{\mathrm{A}}}{\rho_{\mathrm{A}}} m_{\mathrm{A}}^2 t} r^{-n_{\mathrm{A}}} \left[D_{\mathrm{A}} \cos(n_{\mathrm{A}}\theta) - C_{\mathrm{A}} \sin(n_{\mathrm{A}}\theta) \right]. \tag{29b}$$

注 4. 值得注意的是，速度解(26) 中出现的贝塞尔函数和汉克尔函数，在压力解(29)中并未出现。这可以这样解释：这些特殊函数直接源自（无压力）涡量方程，因此在均匀压力场下满足动量方程。

3.3. 界面条件

根据 (26) 和 (29)，液滴和环境流体区域中的压力场和速度场通解包含十二个未知系数：A、B、C_{D}、C_{A}、D_{D}、D_{A}、E、F、m_{D}、m_{A}、n_{D} 和 n_{A}。接下来，我们通过对这些系数引入辅助条件，从通解中提取满足运动学界面条件 (11c) 和 (11d) 以及动力学条件 (11e) 的子空间。

3.3.1. 运动学相容条件

运动学条件 (11c)–(11d) 可等价地改写为：

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \cdot \boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{u}_{\mathrm{A}} \cdot \boldsymbol{n}_0 = \mathcal{V}_1 \qquad \text{on } \Gamma_0, \tag{30a}$$

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} \cdot \boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{u}_{\mathrm{A}} \cdot \boldsymbol{t}_0 \qquad \text{on } \Gamma_0. \tag{30b}$$

对于圆形液滴，界面法向量和切向量的生成解 $\boldsymbol{n}_0$ 和 $\boldsymbol{t}_0$ 分别与径向和角向基向量重合。因此，运动学条件 (30a)（分别对应 (30b)）涉及 (26a) 和 (26c)（分别对应 (26b) 和 (26d)）中 $\boldsymbol{u}$ 的径向（分别对应角向）分量。为施加 (30a)，我们需要与 (9) 对应的无穷小界面速度 $\mathcal{V}_1$：

$$\mathcal{V}(\theta, t) = \partial_t R_\delta(\theta, t) = -\delta R_0 \gamma \, e^{-\gamma t} \left(\beta \cos(k\theta) + \sqrt{1-\beta^2} \sin(k\theta) \right), \tag{31}$$

这里我们保留完整的复数形式，以便于阐述。注意到 $\mathcal{V}_0$ 消失，因此 $\mathcal{V} = \delta \mathcal{V}_1$，由 (30a) 可推得

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{\eta_{\mathrm{D}}}{\rho_{\mathrm{D}}} m_{\mathrm{D}}^2 t} \left[D_{\mathrm{D}} \cos(n_{\mathrm{D}}\theta) - C_{\mathrm{D}} \sin(n_{\mathrm{D}}\theta) \right] \left[R_0^{-1} A n_{\mathrm{D}} J_{n_{\mathrm{D}}}(m_{\mathrm{D}} R_0) + E n_{\mathrm{D}} R_0^{n_{\mathrm{D}}-1} \right] \\ &= e^{-\frac{\eta_{\mathrm{A}}}{\rho_{\mathrm{A}}} m_{\mathrm{A}}^2 t} \left[D_{\mathrm{A}} \cos(n_{\mathrm{A}}\theta) - C_{\mathrm{A}} \sin(n_{\mathrm{A}}\theta) \right] \left[R_0^{-1} B n_{\mathrm{A}} H_{n_{\mathrm{A}}}^{(2)}(m_{\mathrm{A}} R_0) + F n_{\mathrm{A}} R_0^{-n_{\mathrm{A}}-1} \right] \\ &= -R_0 \gamma \, e^{-\gamma t} \left(\beta \cos(k\theta) + \sqrt{1-\beta^2} \sin(k\theta) \right). \end{aligned} \tag{32}$$

(32) 中的等式必须对所有 $\theta \in [0, 2\pi)$ 和所有 $t \in \mathbb{R}_{>0}$ 都成立。固定 θ 并改变t，可以推断时间指数必须相同。随后，固定 t 并改变 θ，可知表征三角项的所有参数都必须相同。因此，

$$\frac{\eta_{\mathrm{D}}}{\rho_{\mathrm{D}}} m_{\mathrm{D}}^2 = \frac{\eta_{\mathrm{A}}}{\rho_{\mathrm{A}}} m_{\mathrm{A}}^2 = \gamma, \tag{33a}$$

$$n_{\mathrm{D}} = n_{\mathrm{A}} = k, \tag{33b}$$

$$D_{\mathrm{D}} = D_{\mathrm{A}} = \beta, \tag{33c}$$

$$C_{\mathrm{D}} = C_{\mathrm{A}} = -\sqrt{1-\beta^2}. \tag{33d}$$

在下文中，我们仍在贝塞尔函数和汉克尔函数的自变量中使用 m_{D} 和 m_{A}，但默认其与 γ 的关系满足 (33a)。将 (33) 代入 (30)，得到关于 A，B，E 和 F 的以下三个条件：

$$Ak R_0^{-1} J_k(m_{\mathrm{D}} R_0) + E k R_0^{k-1} = -\gamma R_0 \,, \tag{34a}$$

$$Bk R_0^{-1} H_k^{(2)}(m_{\mathrm{A}} R_0) + F k R_0^{-k-1} = -\gamma R_0 \,, \tag{34b}$$

$$\begin{aligned} -A\left(m_{\mathrm{D}} J_{k-1}(m_{\mathrm{D}} R_0) - k R_0^{-1} J_k(m_{\mathrm{D}} R_0)\right) - E k R_0^{k-1} \\ + B\left(m_{\mathrm{A}} H_{k-1}^{(2)}(m_{\mathrm{A}} R_0) - k R_0^{-1} H_k^{(2)}(m_{\mathrm{A}} R_0)\right) - F k R_0^{-k-1} = 0 \,. \end{aligned} \tag{34c}$$

3.3.2. 动态相容条件

动力学条件 (11e) 可分解为径向分量和角向分量，从而得到以下两个条件：

$$-\eta_{\mathrm{D}} \boldsymbol{n}_0 \left(\nabla \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} + (\nabla \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}})^T\right) \boldsymbol{n}_0 + p_{\mathrm{D}} + \eta_{\mathrm{A}} \boldsymbol{n}_0 \left(\nabla \boldsymbol{u}_{\mathrm{A}} + (\nabla \boldsymbol{u}_{\mathrm{A}})^T\right) \boldsymbol{n}_0 - p_{\mathrm{A}} = \sigma_{\mathrm{DA}} \kappa_1 \quad \text{on } \Gamma \,, \tag{35a}$$

$$-\eta_{\mathrm{D}} \boldsymbol{t}_0 \left(\nabla \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}} + (\nabla \boldsymbol{u}_{\mathrm{D}})^T\right) \boldsymbol{n}_0 + \eta_{\mathrm{A}} \boldsymbol{t}_0 \left(\nabla \boldsymbol{u}_{\mathrm{A}} + (\nabla \boldsymbol{u}_{\mathrm{A}})^T\right) \boldsymbol{n}_0 = 0 \quad \text{on } \Gamma \,. \tag{35b}$$

为了详细阐述动态界面条件 (35a)，我们需要界面曲率的一阶扰动。根据假定的界面位移 (9)，可将曲率的复值形式推导至二阶项：

$$\begin{aligned} \kappa(\theta, t) &= \kappa_0 + \delta \kappa_1(\theta, t) + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &= R_0^{-1} + \delta R_0^{-1} e^{-\gamma t}\left(k^2 - 1\right)\left(\beta \cos(k\theta) - \sqrt{1-\beta^2}\sin(k\theta)\right) + \mathcal{O}(\delta^2) \,. \end{aligned} \tag{36}$$

根据速度 (26) 和压力 (29) 的表达式、(33) 中系数之间的关系以及动态条件 (35)，可得

$$\begin{aligned} &- A\eta_{\mathrm{D}}\left[2m_{\mathrm{D}} k {R_0}^{-1} J_{k-1}(m_{\mathrm{D}} R_0) - 2(k+1)k {R_0}^{-2} J_k(m_{\mathrm{D}} R_0)\right] \\ &\quad + B\eta_{\mathrm{A}}\left[2m_{\mathrm{A}} k {R_0}^{-1} H_{k-1}^{(2)}(m_{\mathrm{A}} R_0) - 2(k+1)k {R_0}^{-2} H_k^{(2)}(m_{\mathrm{A}} R_0)\right] \\ &\quad + E\eta_{\mathrm{D}}\left[m_{\mathrm{D}}^2 {R_0}^{k} - 2(k-1)k {R_0}^{k-2}\right] + F\eta_{\mathrm{A}}\left[m_{\mathrm{A}}^2 {R_0}^{-k} - 2(k+1)k {R_0}^{-k-2}\right] \\ &\qquad = \sigma_{\mathrm{DA}} {R_0}^{-1}(k^2 - 1) \,, \end{aligned} \tag{37a}$$

$$\begin{aligned} &- A\eta_{\mathrm{D}}\left[2m_{\mathrm{D}} {R_0}^{-1} J_{k-1}(m_{\mathrm{D}} R_0) + \left(m_{\mathrm{D}}^2 - 2(k+1)k {R_0}^{-2}\right) J_k(m_{\mathrm{D}} R_0)\right] \\ &\quad + B\eta_{\mathrm{A}}\left[2m_{\mathrm{A}} {R_0}^{-1} H_{k-1}^{(2)}(m_{\mathrm{A}} R_0) + \left(m_{\mathrm{A}}^2 - 2(k+1)k {R_0}^{-2}\right) H_k^{(2)}(m_{\mathrm{A}} R_0)\right] \\ &\quad + 2E\eta_{\mathrm{D}}(k-1)k {R_0}^{k-2} + 2F\eta_{\mathrm{A}}(k+1)k {R_0}^{-k-2} \\ &\qquad = 0 \,. \end{aligned} \tag{37b}$$

3.4. 色散关系

对于每个波数 $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，解的相应特征时间响应系数 $\gamma \in \mathbb{C}$，以及由其余自由参数编码的模态形状，均由一个解存在条件决定。为阐明这一条件，我们首先回顾：满足极限条件 (7)的偏微分方程(11a)-(11b)的一般有界复值速度解和压力解由(26)和(29)给出。

这些通解包含十二个系数。其中八个系数根据运动学界面条件(11c)由(33)确定。运动学条件(11c)和(11d)意味着其余四个系数 A, B, E 和 F 必须满足(34)中的三个恒等式。动力学条件(11e)还要求这四个系数满足(37)中的两个恒等式。关于这些系数的其余五个条件可写成

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}(k,\gamma)} \begin{pmatrix} A \\ B \\ E \\ F \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\gamma R_0 \\ -\gamma R_0 \\ 0 \\ \sigma_{\mathrm{DA}} R_0^{-1}(k^2-1) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}(k,\gamma)}, \tag{38}$$

使得（38）中的前三个方程表示（34），而后两个方程表示（37）。注意到（34）和（37）对波数 k的依赖关系，并回想一下，这些方程中的 m_{D} 和 m_{A} 通过（33a）对时间响应系数 γ 的依赖关系，我们推断 $\boldsymbol{A}$ 的各项取决于 k 和 γ。由于有五个约束和四个未知数，方程组（38）在形式上是超定的，除非右端向量 $\boldsymbol{b}(k,\gamma)$属于 $\boldsymbol{A}(k,\gamma)$的列空间，否则不存在解。解的存在性与条件

$$\boldsymbol{b}(k,\gamma) \in \mathrm{span}(\mathrm{col}(\boldsymbol{A}(k,\gamma)))\,, \tag{39}$$

表明，假定的界面构型（8）中的波数 $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ 与时间响应系数 $\gamma \in \mathbb{C}$ 只有特定组合才对应于液滴的自然响应。

为确定满足存在条件（39）的组合（k,γ），我们注意到（39）等价于

$$\det\big((\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})(k,\gamma)\big) = 0\,, \tag{40}$$

其中，$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ 对应于由 $\boldsymbol{b}$ 增广后的 $\boldsymbol{A}$。(39) 与 (40) 等价，这是因为对于所有 $(k,\ \gamma)$，$\boldsymbol{A}$ 的列向量均线性无关；因此，当且仅当向量 $\boldsymbol{b}$ 属于 $\boldsymbol{A}$ 的列空间时，增广矩阵才是奇异矩阵。此外，根据 $\boldsymbol{A}$ 各列的线性无关性，若 (40) 成立，则 (38) 有唯一解。该解对应于系数 $(A,\ B,\ E,\ F)$；结合 (33)，这些系数根据 (26) 和 (29) 定义了与 $(k,\ \gamma)$ 对应的液滴和环境速度—压力对。

为便于对式（40）中行列式求根并使其具有普适性，我们根据液滴密度 ρ_{D}、液滴黏度 η_{D} 和液滴半径 R_0，对增广矩阵的矩阵元素进行无量纲化。无量纲参数用带波浪号的符号表示。此外，我们引入以下简写记法:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= J_k(\tilde{m}_{\mathrm{D}}(\tilde{\gamma}))\,, & \mathcal{H} &= H_k^{(2)}(\tilde{m}_{\mathrm{A}}(\tilde{\gamma}))\,, & \zeta &= 2(k-1)k\,, \\ \hat{\mathcal{J}} &= \tilde{m}_{\mathrm{D}}(\tilde{\gamma}) J_{k-1}(\tilde{m}_{\mathrm{D}}(\tilde{\gamma}))\,, & \hat{\mathcal{H}} &= \tilde{m}_{\mathrm{A}}(\tilde{\gamma}) H_{k-1}^{(2)}(\tilde{m}_{\mathrm{A}}(\tilde{\gamma}))\,, & \xi &= 2(k+1)k\,. \end{aligned}$$

因此，无量纲化增广矩阵可表示为

$$(\tilde{\boldsymbol{A}}|\tilde{\boldsymbol{b}})(k,\tilde{\gamma}) = \begin{pmatrix} k\mathcal{J} & 0 & k & 0 & -\tilde{\gamma} \\ 0 & k\mathcal{H} & 0 & k & -\tilde{\gamma} \\ -\hat{\mathcal{J}} + k\mathcal{J} & \hat{\mathcal{H}} - k\mathcal{H} & -k & -k & 0 \\ -2k\hat{\mathcal{J}} + \xi\mathcal{J} & \tilde{\eta}_{\mathrm{A}}\left[2k\hat{\mathcal{H}} - \xi\mathcal{H}\right] & \tilde{m}_{\mathrm{D}}^2 - \zeta & \tilde{\eta}_{\mathrm{A}}\left[\tilde{m}_{\mathrm{A}}^2 - \xi\right] & \tilde{\sigma}_{\mathrm{DA}}\left(k^2-1\right) \\ -2\hat{\mathcal{J}} - \left(\tilde{m}_{\mathrm{D}}^2 - \xi\right)\mathcal{J} & \tilde{\eta}_{\mathrm{A}}\left[2\hat{\mathcal{H}} + \left(\tilde{m}_{\mathrm{A}}^2 - \xi\right)\mathcal{H}\right] & \zeta & -\tilde{\eta}_{\mathrm{A}}\xi & 0 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

通常无法以闭式求出 $\det((\tilde{\boldsymbol{A}}|\tilde{\boldsymbol{b}})(k,\tilde{\gamma}))$ 关于 $\tilde{\gamma}$ 的根，因此实际操作中需要采用数值求根算法。确定一个根后，可以提取增广矩阵（41）的核，并缩放相应向量，使其第五个分量为负一，从而得到系数A, B, E, F。

注5。 $\det((\tilde{\boldsymbol{A}}|\tilde{\boldsymbol{b}})(k,\tilde{\gamma}))$ 的根并不唯一：可以推断

$$\left[(\tilde{\boldsymbol{A}}|\tilde{\boldsymbol{b}})(k,\tilde{\gamma}^*)\right] = \left[(\tilde{\boldsymbol{A}}|\tilde{\boldsymbol{b}})(k,\tilde{\gamma})\right]^*, \quad (42)$$

其中，$(\cdot)^*$ 表示复共轭。由于矩阵复共轭的特征值是原矩阵特征值的复共轭，因此，若 $\tilde{\gamma}$ 是$\det((\tilde{\boldsymbol{A}}|\tilde{\boldsymbol{b}})(k,\tilde{\gamma}))$的一个根，则 $\tilde{\gamma}^*$也必然是其根。此外，由于还必须满足 $\Re(\tilde{\gamma}) > 0$，因此只需考虑复平面第四象限内的根。注意到增广矩阵的各项都是解析函数，因此其行列式也是解析函数。这意味着$\det((\tilde{\boldsymbol{A}}|\tilde{\boldsymbol{b}})(k,\tilde{\gamma}))$ 的根构成一个全不连通集，因此，每个根都存在一个邻域，在该邻域内该根是唯一的。本文不探讨$\det((\tilde{\boldsymbol{A}}|\tilde{\boldsymbol{b}})(k,\tilde{\gamma}))$ 在第四象限内根的唯一性。在数值求根过程中，我们已验证，在所找到的根附近的区域内不存在其他根。

借助界面参数化（9）的复表示，将关系式（33）代入（26）和（29），并取其实部，即可得到实值速度场和压力场，以及时间响应系数 γ 和相应的系数 A、B、E和 F。表1列出了表2所述物理场景下的计算参数值，该场景对应于空气中的皮升级水滴。为完整起见，我们说明，我们使用 *Mathematica*的求根器，确定复平面第四象限内满足 $\det((\tilde{\boldsymbol{A}}|\tilde{\boldsymbol{b}})(k、\tilde{\gamma}_k)) = 0$ 的 $\tilde{\gamma} := \tilde{\gamma}_k$ 。参数 E 和 F 的量纲取决于模态数 k。因此，随着 k 增大， E 和 F 的值迅速增大，这表明这些参数在 k方面是病态的。此外，随着模态数 k 增大，相应振荡的频率和阻尼率（均由 γ表征）也会增大。这意味着，如果液滴受到具有多个模态特征的初始扰动，高波数模态会迅速衰减，而低阶模态则主导黏性液体中振荡的黏性液滴的长期动力学。

4. 数值实验

自由边界问题 (5) 在形式上表示 Abels–Garcke–Gr¨unNSCH 模型 (1) 的尖锐界面极限，前提是迁移率在极限过程中按适当方式缩放

表1：悬浮在空气中的半径为 $R = \sqrt{2}\times 10^{1}$微米的水滴的模态解参数值。

k	γ [s^{-1}]	A [10^{-11} 分^{2}秒$^{-1}$]	B [10^{-4}米^{2}秒$^{-1}$]	E [10^{5k-7}米$^{2-k}$秒$^{-1}$]	F [10^{-5k-4}米$^{2+k}$秒$^{-1}$]
2	18788.18393 $-390396.1271\,i$	4664.160935 $+137.5420287\,i$	1.142101737 $+4.485396518\,i$	2.618366811 $+194.0864949\,i$	1.904600443 $+1.883632636\,i$
3	53722.95262 $-777097.6733\,i$	376.1242266 $-953.0487542\,i$	7.390256000 $+6.296111161\,i$	3.392996002 $+182.1390754\,i$	4.168582183 $+3.618449771\,i$
4	104333.5005 $-1223261.977\,i$	−123.9009766 $-195.0741019\,i$	14.90136892 $+1.040690443\,i$	3.548390076 $+152.0972759\,i$	7.942104534 $+6.209497220\,i$
5	170139.1932 $-1722774.521\,i$	−53.99114858 $-11.92064586\,i$	16.35189970 $-10.42851063\,i$	3.366783037 $+121.2100680\,i$	14.10551086 $+10.15645338\,i$
6	250754.7829 $-2270070.007\,i$	−12.54654878 $+6.299980519\,i$	8.074025870 $-20.94948730\,i$	3.017014114 $+94.14089637\,i$	23.99270873 $+16.16915562\,i$

$\varepsilon \to +0$。因此，对于足够小的 δ，第3节推导的振荡液滴解可用于研究弥散界面解趋近锐界面极限解的过程。本节通过自适应有限元方法对这一尖锐界面极限进行数值研究。具体而言，我们关注迁移率参数 m 的标度：在极限 $\varepsilon \to +0$ 下，研究弥散界面解相对于锐界面解的偏差与 m 的关系。作为参考解，我们考虑黏性周围流体中的黏性液滴的最低振荡模态 ($k = 2$)，以及次高阶双重对称模态 ($k = 4$)；参数取值见表2。速度解 (26) 和压力解 (29) 场的相应系数列于表1。

4.1. 设置与离散化

我们考虑的振荡液滴测试案例涉及双重对称模态。测试案例的设置与 [11, 第5]节中的设置类似。为降低计算开销，我们利用构型的对称性，仅考虑液滴—环境流体区域的四分之一。我们将区域 $\Omega = (0,\ 50)^2\ \mu\mathrm{m}^2$ 视为，并在$\Gamma_{\mathrm{sym}} := \{(x_1,\ x_2) \in \partial\Omega :\ \{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\}\}$ 上施加对称条件。由于线性锐界面解实际上根据式（6a）定义在生成该解的圆形液滴区域及其对应的环境流体区域上，而弥散界面模型具有移动界面，因此我们依据初始为圆形的液滴施加辅助条件。具体而言，参照式（9），我们选取 t_0，使得 $-\Im(\gamma)t_0 = \pi/2$，从而有 $R_\delta(\theta,\ t_0) = R_0$；并施加与 t_0 处参考解对应的初始数据，以及与$t + t_0$对应的边界数据。边界的其余部分 $\Gamma_{\mathrm{ext}} := \partial\Omega \setminus \Gamma_{\mathrm{sym}}$则施加狄利克雷

表2：所考虑数值实验的物理参数和数值参数。标有符号 $*$ 的条目表示一个取值范围，具体范围将在文中说明。

液滴		环境流体		界面			数值近似			
ρ_{D}	η_{D}	ρ_{A}	η_{A}	σ_{DA}	ε	m	τ	h_0	$L_{\max}$	K
$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^d}$	$\frac{\text{千克米}^{2-d}}{\mathrm{s}}$	$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^d}$	$\frac{\text{千克米}^{2-d}}{\mathrm{s}}$	$\frac{\text{千克米}^{3-d}}{\mathrm{s}^2}$	m	$\frac{\mathrm{m}^d\,\mathrm{s}}{\mathrm{kg}}$	10 微秒	μm	—	—
10^3	10^{-3}	1	1.813×10^{-5}	7.28×10^{-2}	$*$	$*$	2^{-7}	5	$*$	$*$

速度边界条件，以及序参量和化学势的齐次诺伊曼边界条件：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\cdot,t) &= \delta\boldsymbol{u}_{\mathrm{A}}(\cdot,t_0+t) \\ \partial_n\varphi &= 0 \\ \partial_n\mu &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{ext}},\ \text{for } t\in[0,T)\,, \tag{43}$$

其中， $\delta\boldsymbol{u}_{\mathrm{A}}$ 对应于采用适当系数和缩放 δ的环境流体速度解（26）， $[0,T)$表示所考虑的时间区间。对于上述边界条件组合，压力变量 p 仅确定到一个常数。我们施加辅助条件，使 p 的平均值为零。

我们为序参量施加一个初始条件，使其对应于圆形界面，并与尖锐界面参考解的初始构型一致，即：

$$\varphi(\boldsymbol{x},0)=\varphi_0(\boldsymbol{x}) := \tanh\left(\frac{d_{\pm}(\boldsymbol{x},\Gamma_0)}{\sqrt{2}\varepsilon}\right), \tag{44}$$

其中， $d_{\pm}$（$\boldsymbol{x}$， Γ_0）表示从 $\boldsymbol{x}$ 到 Γ_0的有符号距离。函数 $s\mapsto \tanh(s/\sqrt{2}\varepsilon)$对应于一维空间中相场的Cahn–Hilliard方程平衡解，因此，当 ε 相较于 Γ_0的曲率半径足够小时，相场（44）处于亚稳态。结合（44），我们对速度施加以下初始条件：

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)=\begin{cases} \delta\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x},t_0) & \text{if } \boldsymbol{x}\in\Omega_{\mathrm{D},0}\,, \\ \delta\boldsymbol{u}_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{x},t_0) & \text{if } \boldsymbol{x}\in\Omega_{\mathrm{A},0}\,, \end{cases} \tag{45}$$

其中，（45）右端的数据对应于根据（26）在液滴区域和环境流体区域中的速度解。经验证，此选择所产生的线性化误差相较于下文所考虑的弥散界面解与尖锐界面解之间的偏差可忽略不计后，我们选取扰动幅度 $\delta=10^{-2}$。因此，所选的 δ 值适用于我们对尖锐界面极限的研究。液滴流体、环境流体及界面的特征参数列于表2。

为进行数值模拟，我们采用 [11]中提出的自适应有限元逼近方法。为保持内容连贯，下面简要概述数值方法。对于空间变量，NSCH 方程（1）的弱形式采用 $P3-P2$(Taylor–Hood) $\mathcal{C}^0$截断层次B样条（见 [17, 10, 13]）对速度场和压力场进行离散，并采用 $P3$ $\mathcal{C}^0$截断层次B样条对序参量和化学势进行离散；更多详情见 [31, 第3节1]。自适应加密过程由两层次层次结构的后验误差估计引导，并遵循标准的 SEMR（
`Solve` $\rightarrow$ `Estimate` $\rightarrow$ `Mark` $\rightarrow$ `Refine`）流程 [8, 12]。为了提高每个时间步内自适应加密序列中粗网格上求解过程的稳健性，我们引入了 ε-延拓过程：在自适应加密过程的前 K 次迭代中增大厚度参数 ε （并相应增大迁移率 $m\propto\varepsilon^3$）；详情见 [11, 31] 。每个时间步开始时，流体区域首先由包含 10×10 个单元的均匀网格覆盖，对应的初始网格宽度为 $h_0=5\,\mu$ m，随后执行 $L_{\max}$ 个细化步骤。

细化步骤 $L = 0$、1、.....、$K - 1$ 采用 ε-和 m-延拓过程，而细化步骤 $L = K$、.....、$L_{\max}$ 则使用 ε 和 m 的原始参数值。根据 [23] ，Navier–Stokes 方程中的对流项采用斜对称形式，以消除纯组分区域中因偏离无散性而可能产生的人工能量产生，从而提高离散近似的稳定性。在粗网格上，采用一阶后向欧拉格式，并对双井势进行二阶收缩-扩张分裂，同时加入稳定化项 [33]。在最细网格上，采用二阶克兰克–尼科尔森格式，并对双井势进行隐式处理。二阶克兰克–尼科尔森格式的精度明显高于后向欧拉格式；例如参见 [20]。时间离散采用 $\tau = 2^{-7} \times 10\,\mu\,\mathrm{s}$ 的时间步长。数值过程的参数设置也汇总于表2。离散化的 NSCH 方程所对应的非线性代数方程组采用牛顿法求解，其中线性切线问题使用带预条件子的广义最小残量法求解；该预条件子基于将 NSCH 系统划分为 NS 和 CH 子系统；更多详情见 [11] 。

为说明数值实验的设置，以及在 ε足够小时，解析锐界面解与弥散界面解的数值近似之间的相似性，我们采用界面厚度参数 $\varepsilon = 2^{-10} \times 10^2$ 微米、迁移率 $m = 9.5272 \times 10^{-13}$米^{2}秒/千克、最大细化层级数 $L_{\max} = 7$和延续层级数 $K = 5$进行数值实验。图 2 和图 3 展示了六个时刻的速度场和压力场快照。每个面板的上半部分（相应地，下半部分）显示速度场（相应地，压力场）。每个面板的右半部分（相应地，左半部分）展示弥散界面模拟（相应地，锐界面解）。图中可以看出，锐界面解与弥散界面解在视觉上无法区分。

4.2. 最优迁移率标度

为阐明尖锐界面极限下$\varepsilon \to +0$ 弥散界面解对迁移率标度 $m := m_\varepsilon$的依赖关系，我们针对 ε 和 m的多种组合进行了数值实验。对于每种 ε 和 m的组合，我们按如下方式计算相对于锐界面解的偏差：

$$\mathrm{dev}(\varepsilon, m) = \frac{|||\boldsymbol{u}^{\varepsilon,m} - \boldsymbol{u}|||_{\Omega\times(0,T)}}{|||\boldsymbol{u}|||_{\Omega\times(0,T)}} \quad \text{with} \quad |||\boldsymbol{u}|||_{\Omega\times(0,T)} = \frac{1}{T}\int_0^T \|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t\,, \tag{46}$$

其中，所考虑的时间区间长度 T 对应半个振荡周期。我们考察一组逐渐减小的界面厚度参数 $\varepsilon \in \mathscr{E}$:= $\{2^0, \ldots, 2^{-3}\}\varepsilon_{\max}$，其相对于基准界面厚度 $\varepsilon_{\max} = 2^{-7}\times10^2$微米 $= 7.8125\times10^{-1}$ 微米。基准界面厚度参数约为液滴半径的 5%。对于每个 ε，我们考察集合 $m \in \mathscr{M}$: $= \{2^0, 2^{-1}, \ldots, 2^{-12}\}m_{\max}$（其中与本研究相关的子集）中的迁移率参数，且 $m_{\max} = 2.4389632 \times 10^{-10}$米^{d}秒/千克。迁移率参数的取值范围通过经验确定，使得对于所有 $\varepsilon \in \mathscr{E}$， $[2^{-12}, 1]m_{\max}$ 都包含最优迁移率，即使 dev(ε， m) 最小的迁移率。值得注意的是， $\mathcal{E} \times \mathcal{M}$ 包含迁移率相对于界面厚度的各种单项式标度，即 $m \propto \varepsilon^l$，其中 $l \in \{0, 1, 2, 3\}$。

表3和表4分别列出了两种振荡模式 $k = 2$和 $k = 4$ 的偏差 dev(ε, m)。对于每个 $\varepsilon \in \mathcal{E}$，使偏差最小的迁移率 $m \in \mathcal{M}$ 对应的条目均已标出。可以观察到，确实，迁移率

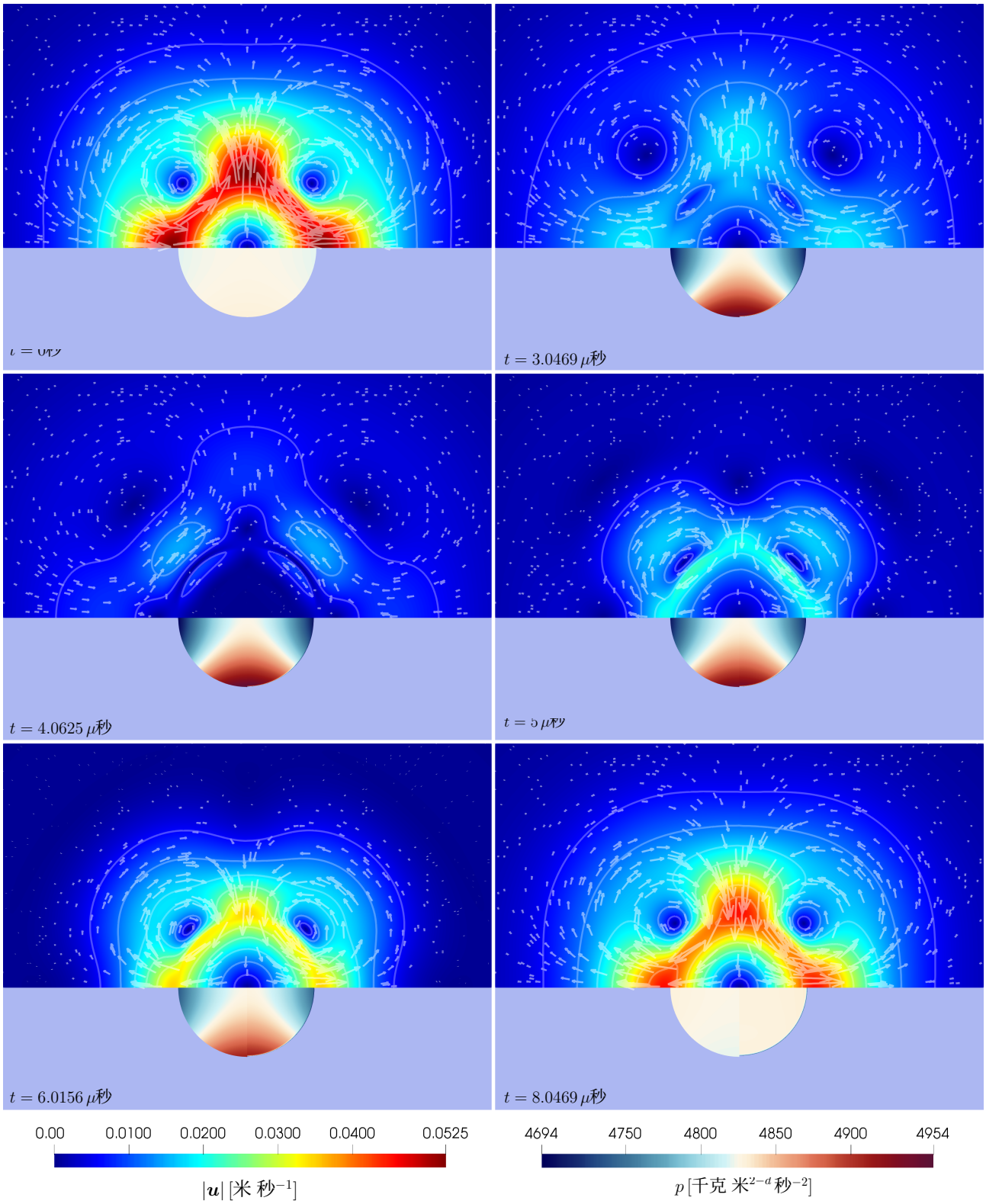

图2：模态 $k = 2$ 的半个液滴振荡过程中，速度场大小 $|\boldsymbol{u}|$ （上）和压力场 p （下）的快照。每个面板的左半部分显示解析尖锐界面解，右半部分显示数值弥散界面解。

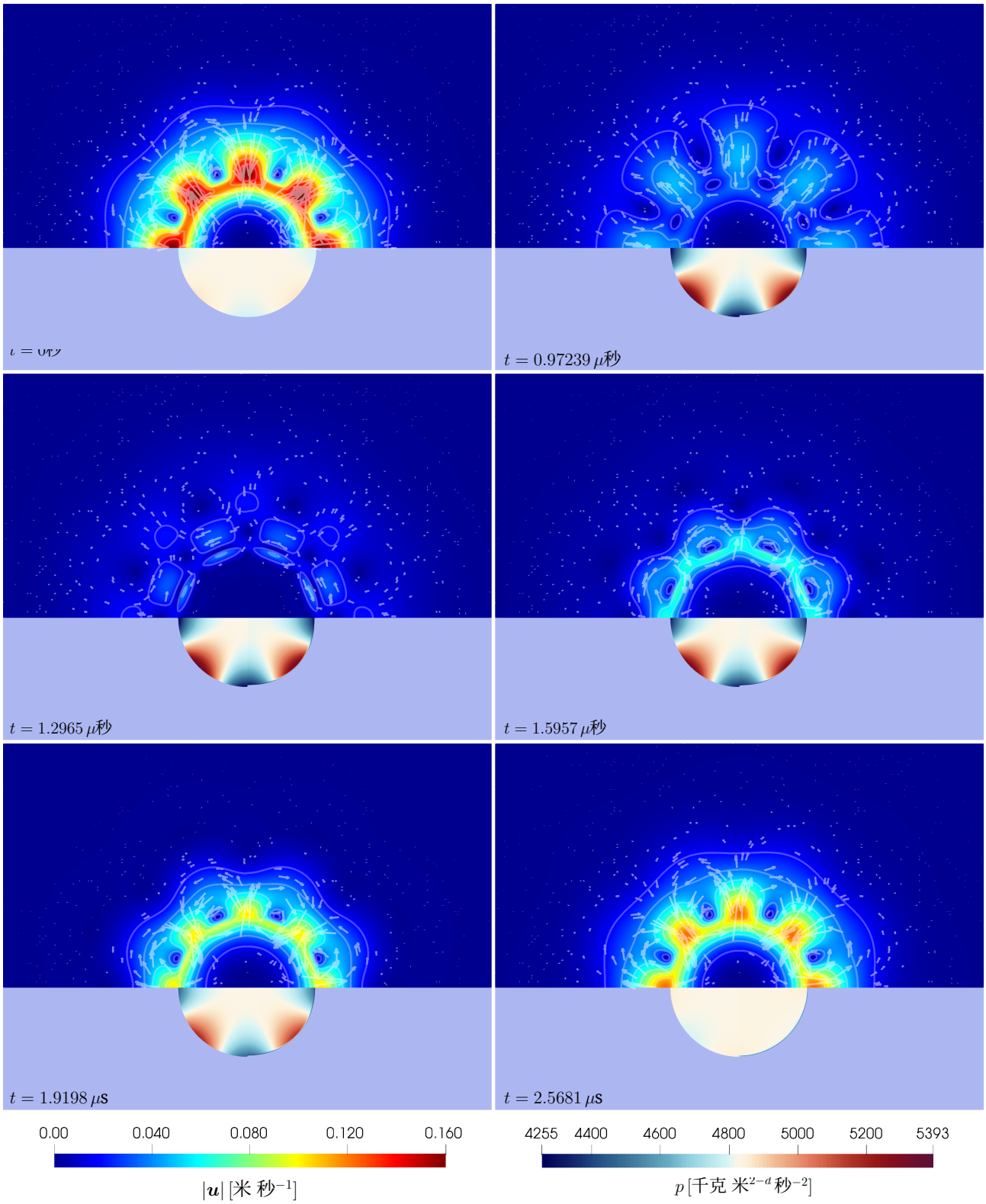

图 3：模态 $k = 4$ 的半个液滴振荡过程中，速度场 $|\boldsymbol{u}|$ （上）和压力场 p （下）大小的快照。每个面板的左半部分显示解析尖锐界面解，右半部分显示数值弥散界面解。

表3：根据 (46)，在$k=2$ 一个半振荡周期内，弥散界面解与锐界面解之间的偏差。

$m/m_{\max}$	$2^{-3}\ \varepsilon_{\max}$	$2^{-2}\ \varepsilon_{\max}$	$2^{-1}\ \varepsilon_{\max}$	$\varepsilon_{\max}$
2^{-12}	6.8295×10^{-2}			
2^{-11}				
2^{-10}				
2^{-9}	1.2634×10^{-2}	7.3709×10^{-2}		
2^{-8}	8.3534×10^{-3}	4.4566×10^{-2}		
2^{-7}	1.2941×10^{-2}	2.1360×10^{-2}	1.0190×10^{-1}	1.3056×10^{-1}
2^{-6}	2.3777×10^{-2}	1.8713×10^{-2}	6.6942×10^{-2}	1.2485×10^{-1}
2^{-5}		4.2245×10^{-2}	3.5126×10^{-2}	1.0979×10^{-1}
2^{-4}			6.2628×10^{-2}	7.9845×10^{-2}
2^{-3}	1.5565×10^{-1}	1.6940×10^{-1}	1.5228×10^{-1}	6.1487×10^{-2}
2^{-2}				1.7640×10^{-1}
2^{-1}				4.2783×10^{-1}
1				8.2210×10^{-1}

表4：根据 (46)，在$k=4$ 一个半振荡周期内，弥散界面解与锐界面解之间的偏差。

$m/m_{\max}$	$2^{-3}\ \varepsilon_{\max}$	$2^{-2}\ \varepsilon_{\max}$	$2^{-1}\ \varepsilon_{\max}$	$\varepsilon_{\max}$
2^{-11}	1.2922×10^{-1}			
2^{-10}				
2^{-9}				
2^{-8}	2.7543×10^{-2}	1.4419×10^{-1}		
2^{-7}	2.3628×10^{-2}	9.3099×10^{-2}		
2^{-6}	3.2089×10^{-2}	5.5083×10^{-2}		
2^{-5}	5.2591×10^{-2}	5.2646×10^{-2}	1.5428×10^{-1}	
2^{-4}		9.4735×10^{-2}	1.0710×10^{-1}	2.9576×10^{-1}
2^{-3}			1.2054×10^{-1}	2.7358×10^{-1}
2^{-2}	3.3162×10^{-1}	3.5898×10^{-1}	2.7331×10^{-1}	2.0927×10^{-1}
2^{-1}				2.5501×10^{-1}
1				6.2529×10^{-1}

与最小偏差对应的值随 ε 减小而减小。更准确地说，对于两种模态，迁移率参数相对于界面厚度参数的最优标度似乎介于 $m\propto\varepsilon$ 和 $m\propto\varepsilon^2$之间。此外，可以注意到，当 ε 减半时，与最优迁移率对应的数值约减半，这表明对于所考虑的液滴振荡情形，只要对弥散界面模型中的迁移率进行适当标度，弥散界面解就会以 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ 的速率趋近锐界面解。

为更精确地评估最优标度关系 $m:=m_\varepsilon$，我们基于表3和表4中最小值附近的二次对数—对数插值，针对每个 ε 确定 m 的最优值。图4绘制了 m 的最优值与 ε之间的关系。对于两个波数，我们观察到最优标度 $m\propto\varepsilon^{a_{\mathrm{opt}}}$ 与 $a_{\mathrm{opt}}\approx1.7$。值得注意的是，两种模态的标度关系中的比例常数不同，并且图线

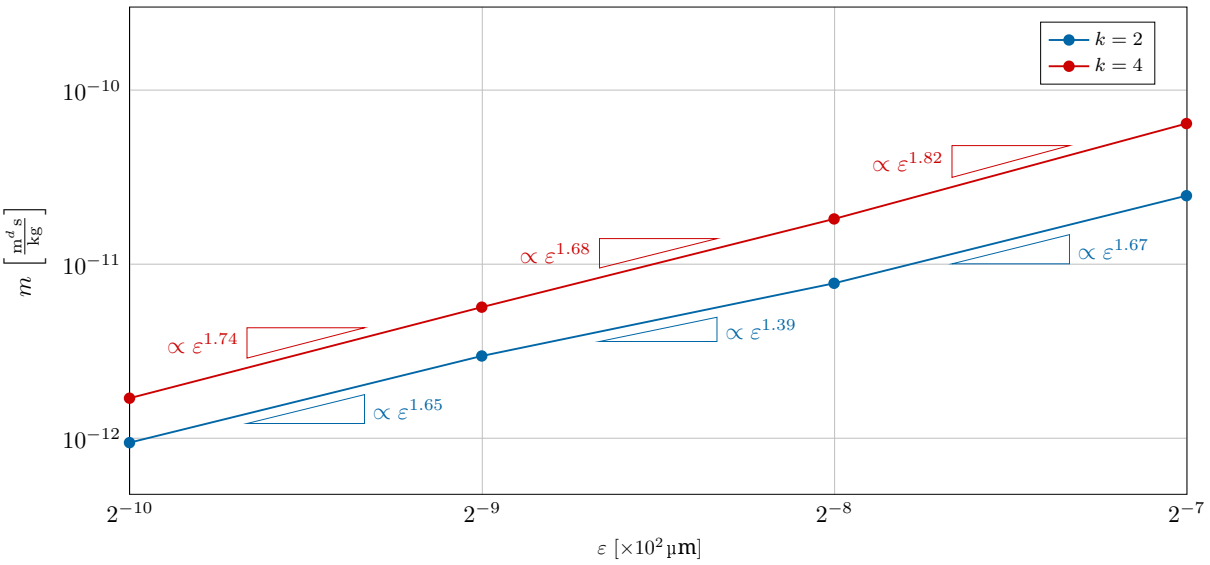

图4：最优　　通过对表3和表4中极小值附近进行二次插值得到的迁移率 m　　.

在 ε依赖关系上偏移了约两倍，即，对于 $k = 4$，最优迁移率约比 $k = 2$的最优迁移率大 $2^{a_{\mathrm{opt}}}$。这表明，最优迁移率实际上遵循 $(\varepsilon/\ell)^{a_{\mathrm{opt}}}$的标度关系，其中 ℓ 表示界面的另一个特征长度尺度；对于所研究的液滴振荡测试案例，该尺度与扰动的波长成正比。这一观察结果有待进一步研究，但我们认为，对这一方面进行详细分析超出了本文的范围。

4.3. 对比例常数的敏感性

在上一节中，我们确定了迁移率参数的最优值，并推断出尖锐界面极限下的最优标度 $m \propto \varepsilon^{a_{\mathrm{opt}}}$。第4.2节的结果还表明，标度关系 $m_\varepsilon = \mathscr{C}\varepsilon^{a_{\mathrm{opt}}}$ 中的比例常数取决于界面的构型和动力学。这引出了一个问题：解对标度关系中比例常数的非最优取值有多敏感?

为阐明在极限 $\varepsilon \to +0$ 下，弥散界面解相对于尖锐界面解的偏差对迁移率的敏感性，图5（分别为图6）针对每个 $\varepsilon \in \mathcal{E}$，绘出了表3（分别为表4）各列中的偏差 $\mathrm{dev}(\varepsilon,\ m)$ 与最小偏差 $\mathrm{dev}(\varepsilon,\ m_{\mathrm{opt},\ \varepsilon})$ 的比值随比值 $m/m_{\mathrm{opt},\ \varepsilon}$ 的变化曲线。注意到图5和图6中的曲线在 $m/m_{\mathrm{opt},\ \varepsilon} = 1$ 附近的斜率趋于零，因此可以得出结论：在最优迁移率附近，相对偏差基本不受迁移率影响。然而，当迁移率偏离最优值较大且 ε 足够小时，相对偏差随 $\max(m/m_{\mathrm{opt},\ \varepsilon},\ m_{\mathrm{opt},\ \varepsilon}/m)$ 几乎线性增加。对于最大的 $\varepsilon \in \mathcal{E}$，相对偏差似乎对迁移率低估的敏感度低于对其高估的敏感度。然而，图5和图6中以实心标记绘出的结果表明，在尖锐界面极限下，相对偏差对迁移率的低估和高估同样敏感。

4.4. 尖锐界面极限中的次优迁移率标度与收敛

为说明迁移率标度对趋近锐界面极限解的影响，图7和图8绘出了偏差 $\mathrm{dev}(\varepsilon,\ (\varepsilon/\varepsilon_{\max})^a\, m_0)$ 随 ε的变化，其中 $a \in \{0, \ldots, 3\}$。

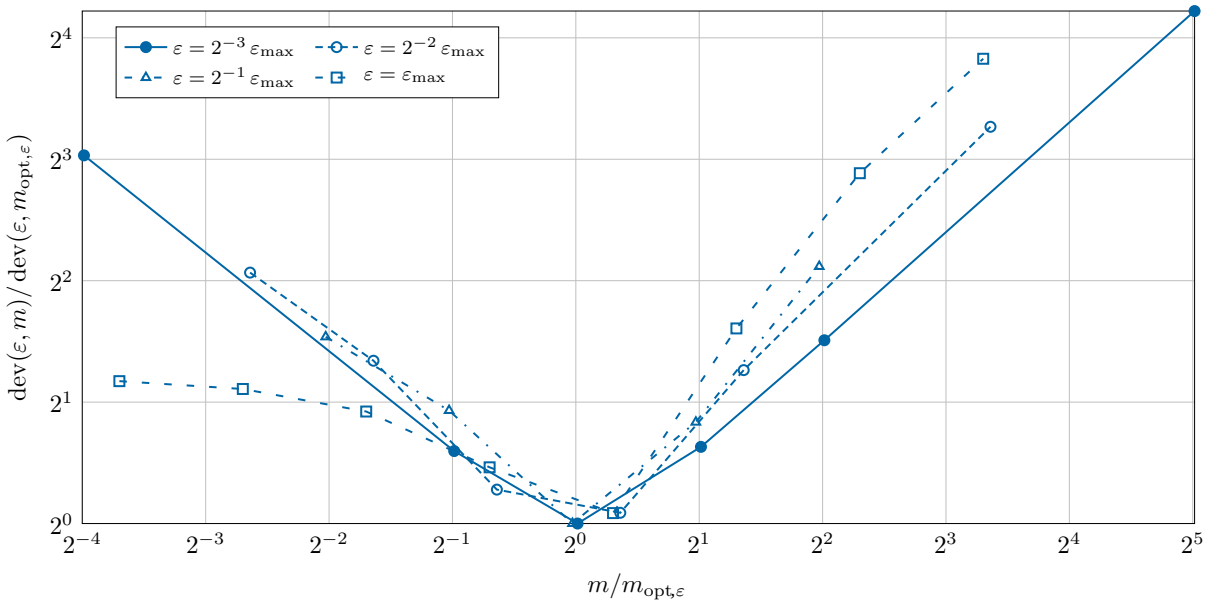

图5：归一化偏差 $\mathrm{dev}(\varepsilon, m)/\mathrm{dev}(\varepsilon, m_{\mathrm{opt},\varepsilon})$ 随归一化迁移率 $m/m_{\mathrm{opt},\varepsilon}$ 的变化，适用于 $k = 2$。

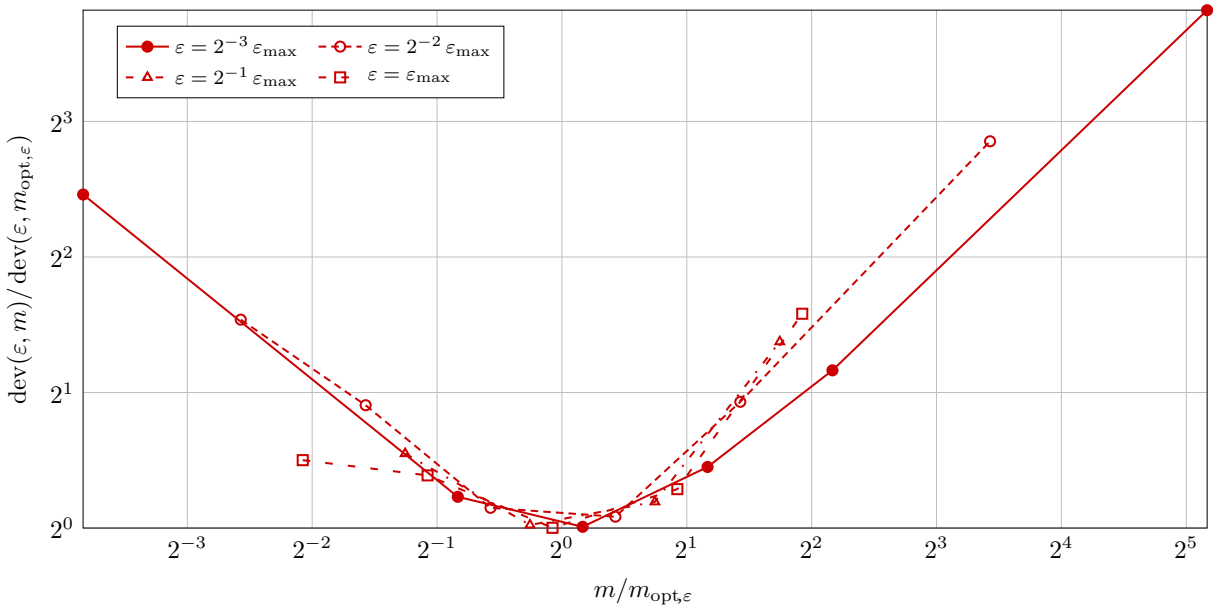

图6：归一化偏差 $\mathrm{dev}(\varepsilon, m)/\mathrm{dev}(\varepsilon, m_{\mathrm{opt},\varepsilon})$ 随归一化迁移率 $m/m_{\mathrm{opt},\varepsilon}$ 的变化，适用于 $k = 4$。

这里，m_0 对应于 $\varepsilon_{\max}$的最优采样迁移率，即 $m_0 = 2^{-3}m_{\max}$（对于$k = 2$）和 $m_0 = 2^{-2}m_{\max}$（对于 $k = 4$）；参见表3和表4。作为参考，图中还包含通过最小化二次插值 $\mathrm{dev}(\varepsilon, m_{\mathrm{opt},\varepsilon})$ 得到的估计最小偏差。图中显示，对于最优标度的迁移率，弥散界面解基本上以 ε 阶趋近锐界面解，即当 $\varepsilon \to +0$ 时，$\mathrm{dev}(\varepsilon, m_{\mathrm{opt},\varepsilon}) = \mathcal{O}(\varepsilon)$。对于线性和二次迁移率标度，

界面厚度，$m \propto \varepsilon^a$ 在 $a \in \{1,2\}$时，即迁移率标度中最接近最优值的整数标度，我们观察到解收敛至锐界面解，但收敛速率并非最优（次线性）。对于常迁移率和三次标度，$m \propto \varepsilon^a$ 在 $a \in \{0,3\}$时，偏差 $\mathrm{dev}(\varepsilon,\ m_0(\varepsilon/\varepsilon_{\max})^a)$ 不会随 $\varepsilon \to +0$ 而消失，即弥散界面解不会收敛至锐界面解。对于 $m \propto \varepsilon^0$，这证实了已知结果：常迁移率下，Abels–Garcke–Gr¨un NSCH 模型收敛至非经典尖锐界面 Navier–Stokes/Mullins–Sekerka 模型；参见 [3]。

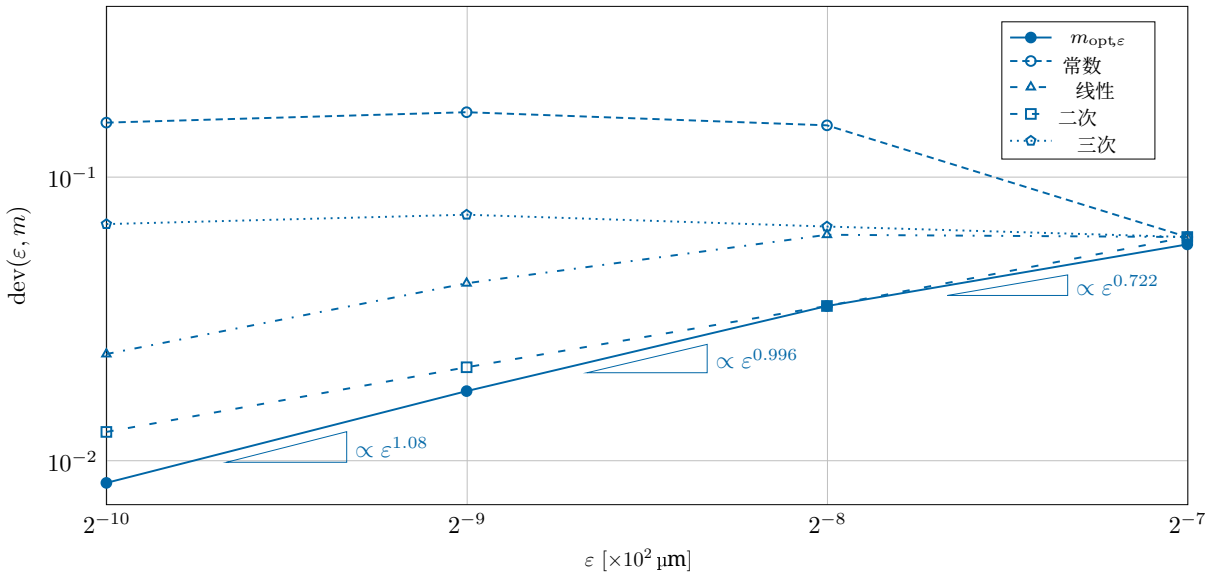

图 7：迁移率 m 采用最优和次优缩放时，振荡模态$k = 2$的误差收敛率。

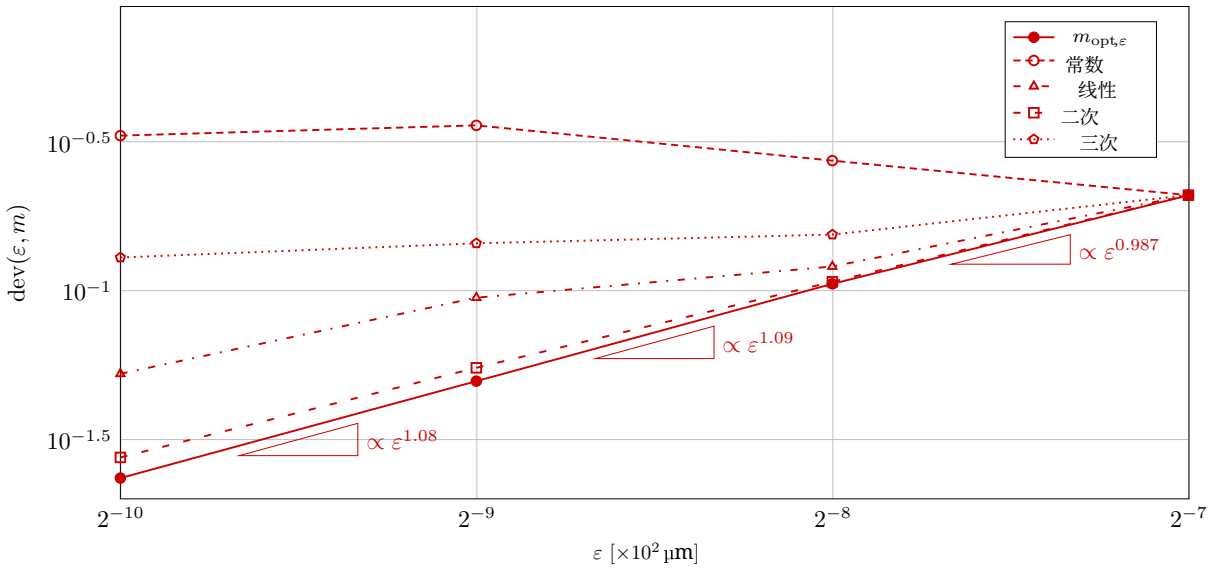

图 8：迁移率 m 采用最优和次优缩放时，振荡模态$k = 4$的误差收敛率。

注释 6. 值得注意的是，在极限 $\varepsilon \to +0$ 下，要收敛至经典锐界面解所必需的次三次迁移率标度，$m \propto \varepsilon^a$ 在 $0 < a < 3$时，意味着与弥散界面相关的特征扩散时间尺度 $T_{\text{diff}} := \varepsilon^3/\sigma m$ 在尖锐界面极限下趋于零。因此，对于所考虑问题中的任意与 ε 无关的特征时间尺度 T_*，例如液滴的振荡周期，均有比值 $T_{\text{diff}}/T_* \to +0$ 随 $\varepsilon \to +0$ 而变化。对于 *NSCH* 方程的数值时间积分方法，因此至关重要的是，这类方法在极限 $T_{\text{diff}}/\tau \to +0$ 下（其中 τ 表示时间步长）具有鲁棒性，以避免尖锐界面极限下过高的计算复杂度。

5. 结论

弥散界面二元流体模型凭借对界面的隐式表示，在描述流体力学中的复杂现象（如流体-流体界面的拓扑变化和动态润湿）方面具有巨大潜力。若界面不发生拓扑变化，弥散界面模型在所谓的尖锐界面极限下应当退化为相应的经典锐界面模型，即界面厚度参数 ε趋于零时。然而，目前对尖锐界面极限的认识仍不完整，尤其是迁移率参数 m随 ε 变化（当 $\varepsilon \to +0$ 时）的标度尚未得到充分理解。本文采用自适应有限元方法，研究了 Abels–Garcke–Gr¨un Navier-Stokes–Cahn-Hilliard 模型在经典的二维振荡液滴情形下的极限行为。

为获得参考锐界面解，我们推导了新的二维解析表达式，用于描述具有不同密度和黏度的黏性周围流体中黏性液滴的小振幅振荡所产生的速度场和压力场。

对于模态数 $k = 2$，4，我们比较了 Navier-Stokes–Cahn-Hilliard 模型的解与相应解析解，所考察的界面厚度参数序列逐渐减小，迁移率参数序列则经过适当选择。通过分析弥散界面解与锐界面解之间的偏差，我们推断，在尖锐界面极限下，$m_{\text{opt},\,\varepsilon} \propto \varepsilon^{a_{\text{opt}}}$ 且 $a_{\text{opt}} \approx 1.7$ 对应于迁移率的最优标度。我们发现，对于 $k = 2$ 和$k = 4$，这一最优标度具有普适性。然而，我们还观察到，比例因子相差约 $2^{a_{\text{opt}}}$ 倍，这表明最优迁移率实际上随 ε 与另一特征长度尺度之比而变化；在本例中，该尺度与扰动的波长成正比。观察到的最优迁移率对界面构型和界面运动的依赖性，值得进一步研究。

对于迁移率参数的最优标度，我们观察到，在极限 $\varepsilon \to +0$ 下，弥散界面解与其尖锐界面极限之间的偏差按照 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ 减小。对迁移率次优整数标度的研究表明，迁移率呈线性和二次标度时也能达到尖锐界面极限，但呈常数或三次标度时则不能。在线性和二次标度下，弥散界面解趋近于锐界面解的速率是次优的（次线性的）。迁移率随 ε 的标度必须低于三次，这意味着特征扩散时间尺度 $\varepsilon^3/\sigma m$（其中 σ 为表面张力）在尖锐界面极限下趋于零。

致谢

本研究部分在工业合作项目喷墨打印中的基础流体动力学挑战（*FIP*）框架内开展。该项目由佳能专业印刷、埃因霍温理工大学、特温特大学和荷兰科学研究组织（NWO）联合开展。T.H.B. Demont 和 S.K.F. Stoter 衷心感谢 FIP 项目提供的经费支持。所有模拟均使用开源软件包 Nutils（www.nutils.org） [32] 完成。

作者感谢埃因霍温理工大学数学与计算机科学系的S.W. Rienstra博士，就文献中有关 NSCH 方程锐界面极限的匹配渐近展开结果的解释进行了富有见地的讨论。

参考文献

[1] H. Abels、D. Depner 和 H. Garcke. 不同密度不可压缩流体两相流弥散界面模型弱解的存在性. 《数学流体力学杂志》, 15(3):453–480, 2013年.[2] H. Abels、D. Depner 和 H. Garcke. 关于具有退化迁移率的不可压缩纳维–斯托克斯/卡恩–希利亚德系统. 《巴黎高等师范学院分析研究所年刊》 ´–分析与非线性, 30(6):1175–1190, 2013年.[3] H. Abels 和 H. Garcke. 不可压缩两相流的弱解与弥散界面模型，第1267–1327页。施普林格国际出版公司, 查姆，2018年。[4] H. Abels、H. Garcke 和 G. Gr¨un. 适用于不同密度不可压缩两相流的热力学一致、框架无关弥散界面模型. 《数学建模与方法应用科学》, 22:1150013, 2012年.[5] H. Abels 和 D. Lengeler. 关于两相流弥散界面模型的尖锐界面极限. 《界面与自由边界》, 395–418, 2014..[6] S. Arrhenius. 稀水溶液的内摩擦. 《物理化学杂志》, 1U(1):285–298, 1887.[7] J. Barrett、J. Blowey 和 H. Garcke. 具有退化迁移率的卡恩–希利亚德方程的有限元近似. 《*SIAM*数值分析杂志》, 37(1):286–318, 2016/11/21 1999年.[8] S. Bertoluzza、R.H. Nochetto、A. Quarteroni、K.G. Siebert 和 A. Veeser. 多尺度与自适应：建模、数值方法与应用. CIME, 2012年.[9] H. Bonart、C. Kahle 和 J.-U. Repke. 使用热力学一致的卡恩–希利亚德–纳维–斯托克斯模型对移动接触线问题进行能量稳定模拟的比较. 《计算物理学杂志》, 399:108959, 2019年.[10] J.A. Cottrell、T.J.R. Hughes 和 Y. Bazilevs. 等几何分析：迈向*CAD*与有限元分析的集成. 威利出版社，奇切斯特，2009年。

[11] T.H.B. Demont、G.J. van Zwieten、C. Diddens 和 E.H. van Brummelen. 二元流体流动弥散界面模型的稳健且精确的自适应近似方法。计算方法与应用力学及工程, 400:115563, 2022年.[12] W. D¨orfler. 泊松方程的收敛自适应算法. 《*SIAM*数值分析杂志》, 33:1106–1124, 1996 年 .[13] C. Giannelli 、 B. J¨uttler 和 H. Speleers. THB 样条：层次样条的截断基. 《计算机辅助几何设计》, 29:485–498, 2012年.[14] A. Giorgini. 密度不匹配两相流二维 Abels–Garcke–Gr¨un 模型的适定性. 《变分法与偏微分方程》, 60(3):100, 2021年.[15] G. Gr¨un、F. Guill´en-Gonz´alez 和 S. Metzger. 关于一般质量密度两相流弥散界面模型的完全解耦收敛格式. 《计算物理通讯》, 19(5):1473–1502, 2016年.[16] P.C. Hohenberg 和 B.I. Halperin. 动态临界现象理论. 《现代物理评论》, 49:435–479, 1977年.[17] T.J.R. Hughes、J.A. Cottrell 和 Y. Bazilevs. 等几何分析：CAD、有限元、非均匀有理B样条、精确几何与网格细化. 计算方法与应用力学及工程, 194:4135–4195, 2005年.[18] D. Jacqmin. 使用相场建模计算两相纳维–斯托克斯流. 《计算物理学杂志》, 155:96–127, 10 1999年.[19] D. Jacqmin. 弥散流体界面的接触线动力学. 《流体力学杂志》, 402:57–88, 2000年.[20] V. John、G. Matthies 和 J. Rang. 不可压缩纳维–斯托克斯方程时间离散/线性化方法的比较. 计算方法与应用力学及工程, 195(44):5995–6010, 2006年.[21] V.V. Khatavkar、P.D. Anderson 和 H.E.H. Meijer. 关于弥散界面模型的尺度分析.《化学工程科学》, 61(8):2364–2378, 2006年.[22] H. Lamb. 《流体动力学》. 大学出版社，纽约，第6版, 1932年.[23] W. Layton. 《不可压缩流的数值分析导论》. 工业与应用数学学会，美国宾夕法尼亚州费城，2008年.[24] J. Lowengrub 和 L. Truskinovsky. 准不可压缩卡恩–希利亚德流体与拓扑转变. 《伦敦皇家学会会刊*A*辑：数学、物理与工程科学》, 454:2617–2654, 1998年.[25] F. Magaletti、F. Picano、M. Chinappi、L. Marino 和 C.M. Casciola. 二元流体卡恩–希利亚德/纳维–斯托克斯模型的尖锐界面极限. 《流体力学杂志》, 714:95–126, 2013年.[26] C.A. Miller 和 L.E. Scriven. 浸没在另一种流体中的流体液滴的振荡.《流体力学杂志》, 32(3):417–435, 1968年。

[27] W.H. Reid. 黏性液滴的振荡。应用数学季刊，18(1):86–89，1960年。[28] P. Seppecher. Cahn-Hilliard理论中的移动接触线。国际工程科学杂志，34:977–992，1996年7月。[29] M. Shokrpour Roudbari、G. S¸im¸sek、E.H. van Brummelen 和 K.G. van der Zee。不同密度的弥散界面两相流模型：一种新的准不可压缩形式和线性能量稳定方法。数学模型与方法及其应用科学，28:733–770，2018年。[30] J.W. Strutt. VI. 射流的毛细现象。伦敦皇家学会会刊，29(196-199):71–97，2021/11/18 1879年。[31] E.H. van Brummelen、T.H.B. Demont 和 G.J. van Zwieten。弹性毛细流固相互作用的自适应等几何分析方法。国际工程科学杂志，122(19):5331–5352，2021/09/30 2021年。[32] G.J. van Zwieten、J. van Zwieten、C.V. Verhoosel、E. Fonn、T.M. van Opstal 和 W. Hoitinga。Nutils（版本 5.0）。2019年。[33] X. Wu、G.J. van Zwieten 和 K.G. van der Zee。用于 Cahn-Hilliard模型的稳定化二阶凸分裂格式及其在弥散界面肿瘤生长模型中的应用。*Int. J. Numer. Method. Biomed. Eng.*，30(2):180–203，2014年。[34] P. Yue 和 J.J. Feng。移动接触线 Cahn–Hilliard模型中的壁面能弛豫。《流体物理》，23:012106，2011年。[35] P. Yue、C. Zhou 和 J.J. Feng。移动接触线 Cahn–Hilliard模型的尖锐界面极限。《流体力学杂志》，645:279–294，2010年。