arXiv:2301.01670v1 [math.NA] 4 Jan 2023

采用 $L1$格式和分级网格求解Kirchhoff型时间分数阶非局部扩散-波动方程的对称分数阶降阶方法

Pari J. Kundaliya, [1] Sudhakar Chaudhary[2]

摘要

本文提出一种线性化全离散格式，用于求解Kirchhoff型时间分数阶非局部扩散波方程。该格式通过在空间上采用有限元方法、在时间上采用 $L1$ 格式构造。我们推导了全离散解在 $L^{\infty}\left(H_0^1(\Omega)\right)$ 范数下的 α-稳健先验界和先验误差估计，其中 $\alpha \in (1, 2)$为时间分数阶导数的阶数。最后，我们进行了一些数值实验，以验证理论结果。

关键词：时间分数阶扩散波方程；非局部问题；弱奇异性； $L1$ 格式； α-稳健；收敛估计 AMS（MOS）：35R11，65M60，65M12。

1 引言

近年来，时间分数阶扩散波方程得到了广泛而深入的研究（参见 [1–4,16–19]及其中的参考文献）。分数阶扩散波方程可通过将经典扩散方程或波动方程中的一阶或二阶时间导数替换为分数阶导数 [2,3]而导出。分数阶扩散波方程可用于模拟反常扩散过程、电磁响应和声学响应 [4, 9]。

本文研究以下 Kirchhoff型时间分数阶非局部扩散波方程:

$$ {}_0^cD_t^{\alpha}u(x,t) - a(l(u))\,\Delta u(x,t) = f(x,t) \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T], \tag{1a} $$

$$ u(x,t) = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T], \tag{1b} $$

$$ u(x,0) = u_0(x) \text{ and } u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{1c} $$

[1]印度古吉拉特邦艾哈迈达巴德基础设施、技术、研究与管理学院数学系，（pariben.kundaliya.pm@iitram.ac.in）[2]印度古吉拉特邦艾哈迈达巴德基础设施、技术、研究与管理学院数学系，（sudhakarchaudhary@iitram.ac.in）

其中， $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ （$d = 1$ 或 2）是边界为光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域， $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ，且 l （u） $= \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \|\nabla u\|^2$. 。项 ${}_0^c D_t^\alpha u$（x， t）是 u 的 α^{th} 阶 Caputo 分数阶导数，其中 $\alpha \in \in$(1, 2)，其定义 [10] 如下：

$$ {}_0^c D_t^\alpha u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha}\, \frac{\partial^2 u(x,s)}{\partial s^2}\, ds, \quad t > 0. \tag{2} $$

当 $\alpha = 1$ 时，(1) 化为 Kirchhoff型非局部扩散方程 [7, 8] ；当 $\alpha = 2$ 时，(1) 化为 Kirchhoff型非局部波动方程 [11–14]。对于 $1 < \alpha < 2$，方程 (1) 有望在 Kirchhoff型非局部扩散方程与波动方程之间实现插值。这就是我们称 (1) 为 Kirchhoff型时间分数阶非局部扩散-波动方程的原因。文献中已有许多论文研究以下 Kirchhoff型非局部波动方程（对应于 $\alpha = 2$）解的存在唯一性： [11, 13, 14],

$$ u_{tt} - M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \Big)\, \Delta u = f(x,t) \quad \text{in } \Omega \times (0,T], \tag{3a} $$

$$ u(x,t) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0,T], \tag{3b} $$

$$ u(x,0) = u_0(x) \text{ and } u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{in } \Omega. \tag{3c} $$

方程 (3) 描述了 $1D$ 中弹性弦或 $2D$ [30] 中膜的振动。 [5, 6] 中的作者开发了用于求解一维非局部 Kirchhoff 方程 (3) 的数值算法。 [14], 中采用有限元方法和牛顿迭代求解二维非局部 Kirchhoff 方程 (3)。 [2], 中的作者考虑了一个一般的 $1D$ 振动弦时间分数阶波动方程，并讨论了利用分离变量法和拉普拉斯变换求解该方程。

由于时间分数阶导数具有非局部性质，且扩散系数也具有非局部性，求得（1）的解析解要么不可能，要么非常困难。如今，分数阶偏微分方程的数值解研究已成为研究人员关注的重要领域。文献中有许多关于时间分数阶波动方程数值分析的工作 [16–19, 31, 32, 34]。特别是， 文献 [31] 的作者研究了一种时间分布阶波动方程，并采用交替方向隐式差分格式对其求解。文献 [32, 34], 的作者引入了一个新变量，以降低时间导数的阶数，并推导出一种时间二阶格式，用于求解时间多项分数阶波动方程。文献 [17] 采用对称分数阶降阶方法求解半线性分数阶扩散-波动方程。时间分数阶波动方程的解 u 在 $t = 0$ 附近可能存在弱奇异性，即 u_{tt} 在 $t = 0$ [18]处发散。在本文中，我们也假设（1）的解在时间 $t = 0.$ 附近具有弱奇异性。当我们在均匀网格上使用 $L1$ 格式时，弱奇异性通常会导致

次优收敛率 [15, 21]。为克服这一困难，我们采用分级网格 [16, 18, 25] 对时间区间进行离散。
本文提出一种用于求解（1）的线性化格式。该格式基于外推 [33] ，并采用时间方向上的 $L1$ 分级网格格式 [20–22] 和空间方向上的有限元方法。由于 $L1$ 格式是为求解时间分数阶扩散方程（$0 < \alpha < 1$）而设计的，因此我们需要将问题（1）转化为一个低阶方程组。为此，我们遵循 [17]中给出的思路。此外，本文推导出的先验界和误差估计具有 α-鲁棒性 [26]。

本文的组织结构如下：第2节介绍一些常用记号，并利用对称分数阶降阶方法重述问题（1）。第3节给出线性化全离散格式，以获得问题（1）的数值解。第4节和第5节分别推导全离散解的先验界和先验误差估计。第6节通过数值实验验证理论结果。

2 预备知识与降阶

记号：本文中， $C > 0$ 表示与网格参数 h 和 N. 无关的一个一般常数。我们用$(\cdot, \cdot)$表示空间 $L^2(\Omega)$上的内积，用 $\|\cdot\|$ 表示其范数。对于 $m \in \mathbb{N}$， $H^m(\Omega)$表示带有范数 $\|\cdot\|_m$ 的标准Sobole夫空间，而空间 $H_0^1(\Omega)$由 $H^1(\Omega)$中边界 $\partial\Omega$. 上的迹为零的函数组成。此外，记$\|\cdot\|_{L^\infty(H^m)} = \sup_{0<t\leq T}\|\cdot\|_m$, $m \in \mathbb{N}$.

对于我们的 分析，需要对函数 a、 f、 u_0 和 u_1 [1作出以下假设 4]:

- H1：对于函数 a ： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，存在 m_1、 $m_2 > 0$ ，使得 $0 < m_1 \leq a(x) \leq m_2 < \infty$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- H2：函数 a ： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是利普希茨连续的。也就是说，存在 $L > 0$ 使得

$$|a(x_1) - a(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

- H3： $f \in L^2(0, T;\, L^2(\Omega))$ 且 $u_0, u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$。

在本文中，我们还假设问题 (1) 存在具有足够正则性的唯一解，这也是后续分析所必需的。

现在，我们使用对称分数阶降阶技术 [17] 重新表述问题 (1)。为此，我们需要以下引理。

引理 2.1. *[17]*对于 $\alpha \in (1,2)$ 以及任意函数 $z(t) \in C^1[0,T] \cap C^2(0,T]$，有

$$ {}_0^c D_t^{\alpha} z(t) = {}_0^c D_t^{\alpha} \overline{z}(t) = {}_0^c D_t^{\frac{\alpha}{2}} \left({}_0^c D_t^{\frac{\alpha}{2}} \overline{z}(t) \right), \tag{5} $$

其中 $\overline{z}(t) = z(t) - t\, z'(0)$。

接下来，我们假设 $\beta = \frac{\alpha}{2}$, $\overline{u}(t) = u(t) - t\, u_1$ 和 $v = {}_0^c D_t^{\beta} \overline{u}.$。因此，$v(x,0) = 0, \forall x \in \Omega$ [17]。现在，应用引理 2.1，可将问题 (1) 转化为以下方程组：

$$ {}_0^c D_t^{\beta} v(x,t) - a(l(u))\, \Delta \overline{u}(x,t) = f(x,t) + t\, a(l(u))\, \Delta u_1 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T], \tag{6a} $$

$$ {}_0^c D_t^{\beta} \overline{u} - v = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T], \tag{6b} $$

$$ \overline{u}(x,t) = 0 \text{ and } v(x,t) = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T], \tag{6c} $$

$$ \overline{u}(x,0) = u_0(x) \text{ and } v(x,0) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega. \tag{6d} $$

现在，问题 (6) 的弱形式是求 $\overline{u}(\cdot,t)$ $v(\cdot,t) \in H_0^1(\Omega)$，使得对于每个 $t \in (0,T]$ 和 $\forall \omega \in H_0^1(\Omega)$,

$$ \left({}_0^c D_t^{\beta} v, \omega \right) + a\big(l(u)\big) \left(\nabla \overline{u}, \nabla \omega \right) = (f, \omega) + t\, a\big(l(u)\big) \left(\Delta u_1, \omega \right), \tag{7a} $$

$$ \left({}_0^c D_t^{\beta} \overline{u}, \omega \right) - (v, \omega) = 0, \tag{7b} $$

$$ \big(\overline{u}(x,0), \omega \big) = \big(u_0(x), \omega \big) \text{ and } \big(v(x,0), \omega \big) = 0. \tag{7c} $$

3 全离散格式

为了推导全离散格式，首先对空间区域 Ω进行离散。设 Ω_h 是将区域 Ω 划分为互不相交子区间（1D 情形）和三角形 T_k （2D 情形）的一个（准均匀）分割，步长为 h。对于有限整数 $M > 0$，我们考虑 $H_0^1(\Omega)$ 的 M 维子空间 X_h，其定义如下。

$$ X_h := \Big\{ w \in C^0(\bar{\Omega}) : w_{|T_k} \in P_1(T_k),\, \forall\, T_k \in \Omega_h \text{ and } w = 0 \text{ on } \partial\Omega \Big\}. $$

此外，我们定义函数 $\phi_i \in X_h$（对每个 $i = 1$、2、.....、M），使得 ϕ_i 在 i^{th} 节点处取值为 1，并在其他节点处为 0。显然，$\{\phi_i\}_{i=1}^{M}$ 构成了 X_h. 的一组基。

下面回顾离散拉普拉斯算子、L^2 投影和 Ritz 投影 [29] 的定义。

定义 3.1. 离散拉普拉斯算子是一个映射 Δ_h: $X_h \to X_h$，定义为

$$ (\Delta_h w_1,\, w_2) = -(\nabla w_1,\, \nabla w_2), \quad \forall\, w_1,\, w_2 \in X_h. \tag{8} $$

定义 3.2. L^2 投影是一个映射 $P_h : L^2(\Omega) \to X_h$，满足

$$(P_h w_1, w_2) = (w_1, w_2), \quad \forall w_1 \in L^2(\Omega) \text{ and } \forall w_2 \in X_h. \tag{9}$$

定义 3.3。Ritz 投影是一个映射 $R_h : H_0^1(\Omega) \to X_h$，满足 t

$$(\nabla R_h w_1, \nabla w_2) = (\nabla w_1, \nabla w_2), \quad \forall w_1 \in H_0^1(\Omega) \text{ and } \forall w_2 \in X_h. \tag{10}$$

由 [29, 引理 1.1], 可得

$$\|w - R_h w\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla(w - R_h w)\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^2 \|\Delta w\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall w \in H^2 \cap H_0^1. \tag{11}$$

接下来，我们对时间域 $[0,T]$进行离散。为此，令 $N \in \mathbb{N}$和 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T$为时间区间 $[0,T]$的一个分割，使得 $t_n = T(\frac{n}{N})^r$，其中 $n = 0, 1, ..., N$，且 $r \geq 1$为网格分级参数。这里，步长 τ_n定义为 $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, $\forall n = 1, 2, ..., N$。步长 τ_n和网格点 t_n满足以下估计式 [22–24]:

$$\tau_n \leq CTN^{-r}(n-1)^{r-1}, \quad \text{for } 2 \leq n \leq N, \tag{12}$$

and

$$t_n \leq 2^r t_{n-1}, \quad \text{for } 2 \leq n \leq N. \tag{13}$$

由估计式 (12) 和 (13) 可知，存在一个与步长 τ_n 无关的常数 $C_r > 0$，使得

$$\tau_{n-1} \leq \tau_n \leq C_r \tau_{n-1}, \quad \text{for } 2 \leq n \leq N. \tag{14}$$

现在，对于定义在 $[0,T]$上的任意函数 w，我们定义 $w^n := w(t_n)$，对所有 $n = 0, 1, ..., N$以及

$$\widehat{w}^n := \frac{\tau_{n-1} + \tau_n}{\tau_{n-1}} w^{n-1} - \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} w^{n-2}, \quad \text{for } 2 \leq n \leq N. \tag{15}$$

以下引理将有助于推导先验误差估计。

引理 3.1. 设 $\delta \in (0,1) \cup (1,2)$。若 $w(\cdot,t) \in C^1[0,T] \cap C^2(0,T]$且 $\|\partial_t^q w(\cdot,t)\|_1 \leq C(1 + t^{\delta - q})$，其中 $q = 0, 1, 2, 3$，则

$$|w^n - \widehat{w}^n| \leq C N^{-min\{2, r\delta\}}, \quad for\ 2 \leq n \leq N. \tag{16}$$

证明。本引理的证明可由泰勒定理、式（12）和式（13）得出。

□

现在，对于函数 $w \in C[0,T] \cap C^3(0,T]$，在分级网格 $[16,20,22]$ 上，${}_0^c D_{t_n}^{\beta} w$ 的 L1 近似可表示为：

$$ {}_0^c D_{t_n}^{\beta} w \approx D_N^{\beta} w^n := d_{n,1}\, w^n - d_{n,n}\, w^0 + \sum_{k=1}^{n-1} (d_{n,k+1} - d_{n,k})\, w^{n-k}, \tag{17} $$

其中

$$ d_{n,k} = \frac{(t_n - t_{n-k})^{1-\beta} - (t_n - t_{n-k+1})^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)\, \tau_{n-k+1}}, \quad \text{for } 1 \le k \le n \le N. \tag{18} $$

以下引理给出了在分级网格上使用 $L1$ 格式离散 Caputo 分数阶导数所产生的误差大小。

引理 3.2. *[16]* 设 $\delta \in (0,1) \cup (1,2)$，且 $\|\partial_t^q w(x,t)\|_1 \le C(1 + t^{\delta - q})$，其中 $q = 0,1,2,3$。则存在常数 $C > 0$，使得

$$ \|{}_0^c D_{t_n}^{\beta} w - D_N^{\beta} w^n\|_1 \le C\, t_n^{-\beta}\, N^{-min\{2-\beta,\, r\delta\}}, \quad \forall n = 1,2,...,N. \tag{19} $$

分别用 U^n, $\overline{U}^n$, V^n 表示 u, $\overline{u}$ 和 v 在 t_n 处的近似值，则对于 $n \ge 2$，方程 (6) 的线性化全离散格式如下：求 $\overline{U}^n, V^n \in X_h$，使得对于所有 $\omega \in X_h$,

$$ \big(D_N^{\beta} V^n, \omega\big) + a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\, (\nabla \overline{U}^n, \nabla \omega) = (f^n, \omega) + t_n\, a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\, (\Delta u_1, \omega), \tag{20a} $$

$$ \big(D_N^{\beta} \overline{U}^n, \omega\big) - (V^n, \omega) = 0, \tag{20b} $$

$$ U^0 = R_h u_0 \text{ and } V^0 = 0, \tag{20c} $$

且 $U^1 = U^0 + \tau_1\, P_h u_1$. 注意，可以根据关系式 $\overline{U}^1 = U^1 - t_1\, P_h u_1$ 和 $V^1 = D_N^{\beta} \overline{U}^1$. 求得 $\overline{U}^1$ 和 V^1

下文将问题 (20) 写成矩阵形式。根据 D_N^{β} 的定义，并将 $\omega = \phi_i\, (1 \le i \le M)$ 代入 (20)，可得

$$ \begin{aligned} &\big(d_{n,1}\, V^n,\, \phi_i\big) + \Big(- d_{n,n}\, V^0 + \sum_{k=1}^{n-1} (d_{n,k+1} - d_{n,k})\, V^{n-k},\, \phi_i \Big) \\ &\qquad + a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\, (\nabla \overline{U}^n,\, \nabla \phi_i) = (f^n,\, \phi_i) + t_n\, a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\, (\Delta u_1,\, \phi_i), \\ &\big(d_{n,1}\, \overline{U}^n,\, \phi_i\big) + \Big(- d_{n,n}\, \overline{U}^0 + \sum_{k=1}^{n-1} (d_{n,k+1} - d_{n,k})\, \overline{U}^{n-k},\, \phi_i \Big) - (V^n,\, \phi_i) = 0. \end{aligned} \tag{21} $$

由于 $\overline{U}^n$、$V^n \in X_h$，我们可以写成

$$ \overline{U}^n = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j^n\, \phi_j \quad \text{and} \quad V^n = \sum_{j=1}^{M} \beta_j^n\, \phi_j, \quad \text{for some } \alpha_j^n,\, \beta_j^n \in \mathbb{R}. \tag{22} $$

将 $\overline{U}^n$ 和 V^n 的这些值代入（21），可得到以下矩阵方程组。

$$B\,\beta^n + \frac{1}{d_{n,1}}\,a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,A\,\alpha^n + \frac{1}{d_{n,1}}\,B\,G^n = \frac{1}{d_{n,1}}\,F^n + \frac{t_n}{d_{n,1}}\,a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,E, \tag{23}$$

and

$$d_{n,1}\,B\,\alpha^n + B\,H^n = B\,\beta^n, \tag{24}$$

其中，B为质量矩阵，A为刚度矩阵，$\beta^n = [\beta_1^n \;\; \beta_2^n \;\; \ldots \;\; \beta_M^n]^T$，$\alpha^n = [\alpha_1^n \;\; \alpha_2^n \;\; \ldots \;\; \alpha_M^n]^T$，向量 $G^n = (G_{i1}^n)_{1\le i\le M}$、$H^n = (H_{i1}^n)_{1\le i\le M}$、$F^n = (F_{i1}^n)_{1\le i\le M}$、$E = (E_{i1})_{1\le i\le M}$的元素如下：对于每个 $i = 1, 2, ..., M$,

$$\begin{aligned}
G_{i1}^n &= \Big(- d_{n,n}\,V^0 + \sum_{k=1}^{n-1} (d_{n,k+1} - d_{n,k})\,V^{n-k},\, \phi_i \Big) \\
H_{i1}^n &= \Big(- d_{n,n}\,\overline{U}^0 + \sum_{k=1}^{n-1} (d_{n,k+1} - d_{n,k})\,\overline{U}^{n-k},\, \phi_i \Big) \\
F_{i1}^n &= (f^n,\, \phi_i) \quad \text{and} \quad E_{i1} = (\Delta u_1,\, \phi_i).
\end{aligned}$$

将式（24）中的 $B\,\beta^n$ 代入式（23），得到

$$d_{n,1}\,B\,\alpha^n + B\,H^n + \frac{1}{d_{n,1}}\,a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,A\,\alpha^n + \frac{1}{d_{n,1}}\,B\,G^n = \frac{1}{d_{n,1}}\,F^n + \frac{t_n}{d_{n,1}}\,a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,E, \tag{25}$$

因此,

$$\alpha^n = \Big(d_{n,1}\,B + \frac{a\big(l(\widehat{U}^n)\big)}{d_{n,1}}\,A\Big)^{-1}\Big(\frac{1}{d_{n,1}}\,F^n + \frac{t_n}{d_{n,1}}\,a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,E - \frac{1}{d_{n,1}}\,BG^n - BH^n\Big), \tag{26}$$

and

$$\beta^n = B^{-1}\left(d_{n,1}\,B\,\alpha^n + B\,H^n\right) = d_{n,1}\,\alpha^n + H^n. \tag{27}$$

4 先验界

本节推导全离散解的先验界。为此，我们首先在以下引理中陈述 $L1$ 格式的强制性。

引理 4.1. *[16, 28]*设函数 $w^n = w(\cdot, t_n)$ 属于 $L^2(\Omega)$，其中 $n = 0$、1、...、N。则有

$$\Big(D_N^\beta w^n,\, w^n\Big) \;\ge\; \frac{1}{2}\,D_N^\beta \|w^n\|^2, \quad \forall n = 1, 2, ..., N. \tag{28}$$

此外，对于每个 $n=1$、2、...、N，我们将系数 $Q_{n-i}^{(n)}$ 定义如下 [26,27]:

$$Q_{n-i}^{(n)} := \begin{cases} \frac{1}{d_{i,0}} \sum_{k=i+1}^{n} \left(d_{k,k-i-1} - d_{k,k-i}\right) Q_{n-k}^{(n)}, & \text{if } i = 1, 2, ..., (n-1), \\ \\ \frac{1}{d_{n,0}}, & \text{if } i = n. \end{cases} \tag{29}$$

引理 4.2. *[26, 27]* 对于常数 $\gamma \in (0, 1)$，系数 $Q_{n-i}^{(n)}$ 定义于满足 (29)

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{n-i}^{(n)}\, i^{r(\gamma-\beta)} \;\le\; \frac{\Gamma(1+\gamma-\beta)}{\Gamma(1+\gamma)}\, T^{\beta} \left(\frac{t_n}{T}\right)^{\gamma} N^{r(\gamma-\beta)}, \quad \textit{for } 1 \le n \le N. \tag{30}$$

下面的离散分数阶 Grönwall 不等式将在推导全离散解的先验界和先验误差估计时发挥作用。

引理 4.3. *[17]* 设 $(g^n)_{n=1}^{N}$ 和 $(\lambda_i)_{i=0}^{N-1}$ 为给定的非负序列。假设存在常数 Λ 使得 $\Lambda \ge \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i$ ，且最大步长满足

$$\max_{1\le n\le N} \tau_n \;\le\; \frac{1}{\sqrt[\beta]{4\,\Gamma(2-\beta)\,\Lambda}}. \tag{31}$$

那么，对于满足以下条件的任意非负序列 $(\chi^k)_{k=0}^{N}$ 和 $(\psi^k)_{k=0}^{N}$

$$D_N^{\beta}\left[(\chi^n)^2 + (\psi^n)^2\right] \;\le\; \sum_{k=1}^{N} \lambda_{n-k} \left(\chi^k + \psi^k\right)^2 \;+\; \left(\chi^n + \psi^n\right) g^n, \quad 1 \le n \le N, \tag{32}$$

有

$$\chi^n + \psi^n \;\le\; 4\, E_{\beta}\big(4\,\Lambda\, t_n^{\beta}\big) \left(\chi^0 \;+\; \psi^0 \;+\; \max_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{k} Q_{k-i}^{(k)}\, g^i\right), \quad \textit{for } 1 \le n \le N, \tag{33}$$

其中 $E_{\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k\beta)}$ 是米塔格-莱夫勒函数。

现在我们推导全离散解的先验界。

定理 4.1. 对于每个 $n = 2, 3, \ldots, N$，全离散解 $\overline{U}^n$ 和 V^n 满足

$$\|V^n\| + \|\nabla \overline{U}^n\| \le C\left(1 + \|V^0\| + \|\nabla \overline{U}^0\|\right). \tag{34}$$

Proof。我们在 (20a) 中取 $\omega = V^n$，并在 (20b) 中取 $\omega = -a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\, \Delta_h \overline{U}^n$，得到

$$\left(D_N^{\beta} V^n,\, V^n\right) \;+\; a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\left(\nabla \overline{U}^n,\, \nabla V^n\right) \;= \left(f^n,\, V^n\right) \;+\; t_n\, a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\left(\Delta u_1,\, V^n\right), \tag{35}$$

and

$$-a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,\big(D_N^\beta \overline{U}^n,\,\Delta_h \overline{U}^n\big) + a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,(V^n,\,\Delta_h \overline{U}^n)\,=0. \tag{36}$$

根据 (36) 中 Δ_h 的定义，我们可以得到

$$a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,\big(\nabla D_N^\beta \overline{U}^n,\,\nabla \overline{U}^n\big) - a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,(\nabla V^n,\,\nabla \overline{U}^n)\,=0. \tag{37}$$

将 (35) 和 (37) 相加，得到

$$\big(D_N^\beta V^n,\,V^n\big)\,+a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,\big(\nabla D_N^\beta \overline{U}^n,\,\nabla \overline{U}^n\big)\,=(f^n,\,V^n)\,+\,t_n\,a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,(\Delta u_1,\,V^n). \tag{38}$$

利用引理 4.1、 a 的界、柯西-施瓦茨不等式以及 $t_n \le T$ 在 (38) 中这一事实，可得

$$D_N^\beta \|V^n\|^2\,+\,m_1\,D_N^\beta \|\nabla \overline{U}^n\|^2\,\le \big(\|f^n\|\,+\,T\,m_2\,\|\Delta u_1\|\big)\,\|V^n\|. \tag{39}$$

因此，

$$D_N^\beta\big(\|V^n\|^2\,+\,m_1\,\|\nabla \overline{U}^n\|^2\big)\,\le \big(\|f^n\|\,+\,T\,m_2\,\|\Delta u_1\|\big)\,\big(\|V^n\|+\sqrt{m_1}\,\|\nabla \overline{U}^n\|\big). \tag{40}$$

将引理 4.3 应用于 (40)，$\Big($其中 $\chi^n = \|V^n\|$、$\psi^n = \sqrt{m_1}\,\|\nabla \overline{U}^n\|$、$\lambda_i = 0$，对于 $\forall i = 0, 1, \ldots, N-1$, $g^n = \|f^n\|\,+\,T\,m_2\,\|\Delta u_1\|$，并取 $\Lambda = 1\Big)$，可得

$$\|V^n\|\,+\,\sqrt{m_1}\,\|\nabla \overline{U}^n\|\,\le\,4\,E_\beta\big(4\,t_n^\beta\big) \Big[\|V^0\|+\sqrt{m_1}\,\|\nabla \overline{U}^0\|+\max_{1\le k\le n}\big(\|f^k\|+T m_2\|\Delta u_1\|\big)\sum_{i=1}^{k} Q_{k-i}^{(k)}\Big]. \tag{41}$$

利用假设 H3 和引理 4.2（取 $\gamma = \beta$），代入式 (41)，可得

$$\|V^n\|\,+\sqrt{m_1}\|\nabla \overline{U}^n\|\,\le\,C\,\big(1+\|V^0\|+\|\nabla \overline{U}^0\|\big), \tag{42}$$

其中 $C = 4E_\beta\big(4\,t_n^\beta\big)$ 最大值 $\big\{1,\,\sqrt{m_1},\,\underbrace{\Gamma^{T^\beta}_{(1+\beta)}}\big\}$.

因此，

$$\|V^n\|\,+\|\nabla \overline{U}^n\|\,\le\,C\,\big(1+\|V^0\|+\|\nabla \overline{U}^0\|\big). \tag{43}$$

证明至此完成。 □

注 4.1. 利用式 (34)，可得到 $\|\nabla U^n\|$ 的一个如下界：

$$\|\nabla U^n\|\,\le\,\|\nabla \overline{U}^n\|+T\|\nabla u_1\|\,\le\,C. \tag{44}$$

注 4.2. 关于式 (20) 的全离散解 $\overline{U}^n$ 和V^n 的存在唯一性结论，可沿用 *[14, 21]*, 中的类似思路，利用先验界以及布劳威尔不动点定理的一个推论得到 *[29]*。

5 先验误差估计

对于 t 为推导误差估计，我们需要以下正则性假设。

$$ {}_0^cD_{t_n}^{\alpha} u \in L^{\infty}(0,T;H^2(\Omega)) \quad \text{and} \quad u \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)). \tag{45} $$

与本工作中的 [17], 类似，我们也假设

$$ \|\partial_t^q u\|_1 \le C\,(1+t^{\alpha-q}) \quad \text{and} \quad \|\partial_t^q v\|_1 \le C\,(1+t^{\beta-q}), \quad \text{for } q=0,1,2,3. \tag{46} $$

现在，根据 $\overline{u}$ 的定义和假设 (46)，可得 $\|\partial_t^q \overline{u}\|_1 \le C\,(1+t^{\alpha-q})$，其中 $q=0$，1，2，3。

接下来，我们使用 Ritz 投影 R_h 将误差分解如下:

$$ \begin{aligned} \overline{u}^n - \overline{U}^n &= \overline{u}^n - R_h\overline{u}^n + R_h\overline{u}^n - \overline{U}^n = \rho^n + \theta^n, \\ v^n - V^n &= v^n - R_h v^n + R_h v^n - V^n = \xi^n + \eta^n, \end{aligned} \tag{47} $$

其中 $\rho^n := \overline{u}^n - R_h\overline{u}^n$, $\theta^n := R_h\overline{u}^n - \overline{U}^n$, $\xi^n := v^n - R_h v^n$ 和 $\eta^n := R_h v^n - V^n$.

定理 5.1. 对于 $2 \le n \le N$，设 $(\overline{u}^n, v^n)$ 和 $(\overline{U}^n, V^n)$ 分别为 (7) 和 (20) 的解，则

$$ \|\nabla\overline{u}^n - \nabla\overline{U}^n\| + \|v^n - V^n\| \le C\left(h + N^{-\min\{2-\beta,\, r\beta\}}\right). \tag{48} $$

证明。由全离散格式 (20)，可得

$$ \begin{aligned} &\left(D_N^{\beta}\,\eta^n,\,\omega\right) + a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,(\nabla\theta^n,\,\nabla\omega) \\ &= \left(D_N^{\beta} R_h v^n,\,\omega\right) - \left(D_N^{\beta} V^n,\,\omega\right) + a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,(\nabla R_h\overline{u}^n,\,\nabla\omega) - a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,(\overline{U}^n,\,\nabla\omega) \\ &= \left(D_N^{\beta} R_h v^n,\,\omega\right) + a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,(\nabla\overline{u}^n,\,\nabla\omega) - (f^n,\,\omega) - t_n\,a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,(\Delta u_1,\,\nabla\omega) \\ &= \left(D_N^{\beta} R_h v^n,\,\omega\right) + a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,(\nabla\overline{u}^n,\,\nabla\omega) - \left({}_0^cD_{t_n}^{\beta} v,\omega\right) - a\big(l(u^n)\big)\,(\nabla\overline{u}^n,\nabla\omega) \\ &\quad + t_n\,a\big(l(u^n)\big)\,(\Delta u_1,\omega) - t_n\,a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,(\Delta u_1,\,\nabla\omega) \\ &= \left(D_N^{\beta} R_h v^n - {}_0^cD_{t_n}^{\beta} v,\,\omega\right) + \left\{a\big(l(\widehat{U}^n)\big) - a\big(l(u^n)\big)\right\}(\nabla\overline{u}^n,\nabla\omega) \\ &\quad + t_n\left\{a\big(l(u^n)\big) - a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\right\}(\Delta u_1,\,\omega), \end{aligned} \tag{49} $$

and

$$ \begin{aligned} \left(D_N^{\beta}\theta^n,\,\omega\right) - (\eta^n,\,\omega) &= \left(D_N^{\beta} R_h\overline{u}^n,\,\omega\right) - \left(D_N^{\beta}\overline{U}^n,\,\omega\right) - (R_h v^n,\,\omega) + (V^n,\,\omega) \\ &= \left(D_N^{\beta} R_h\overline{u}^n - {}_0^cD_{t_n}^{\beta} R_h\overline{u},\,\omega\right). \end{aligned} \tag{50} $$

在 (49) 中取 $\omega = \eta^n$，在 (50) 中取 $\omega = -a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,\Delta_h\theta^n$，可得

$$\begin{aligned}&\big(D_N^\beta\,\eta^n,\,\eta^n\big)\,+\,a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,(\nabla\theta^n,\,\nabla\eta^n)=\,\big(D_N^\beta R_h v^n-\,{}_0^cD_{t_n}^\beta v,\,\eta^n\big)\\&+\,\big\{a\big(l(\widehat{U}^n)\big)-a\big(l(u^n)\big)\big\}\,(\nabla\overline{u}^n,\nabla\eta^n)\,+\,t_n\,\big\{a\big(l(u^n)\big)-a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\big\}\,(\Delta u_1,\,\eta^n),\end{aligned}\tag{51}$$

and

$$\begin{aligned}&-a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,\big(D_N^\beta\theta^n,\,\Delta_h\theta^n\big)+a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,(\eta^n,\,\Delta_h\theta^n)\\&\qquad=\,-a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,\big(D_N^\beta R_h\overline{u}^n-\,{}_0^cD_{t_n}^\beta R_h\overline{u},\,\Delta_h\theta^n\big).\end{aligned}\tag{52}$$

根据 Δ_h 的定义，(52) 可写为

$$\begin{aligned}&a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,\big(\nabla D_N^\beta\theta^n,\,\nabla\theta^n\big)-a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,(\nabla\eta^n,\,\nabla\theta^n)\\&\qquad=\,a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,\big(\nabla D_N^\beta R_h\overline{u}^n-\,\nabla\,{}_0^cD_{t_n}^\beta R_h\overline{u},\,\nabla\theta^n\big).\end{aligned}\tag{53}$$

将 (51) 和 (53) 相加，得到

$$\begin{aligned}&\big(D_N^\beta\,\eta^n,\,\eta^n\big)\,+\,a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,\big(\nabla D_N^\beta\theta^n,\,\nabla\theta^n\big)=\,\big(D_N^\beta R_h v^n-\,{}_0^cD_{t_n}^\beta v,\,\eta^n\big)\\&+\,\big\{a\big(l(u^n)\big)-a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\big\}\,(\Delta\overline{u}^n,\,\eta^n)\,+\,t_n\,\big\{a\big(l(u^n)\big)-a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\big\}\,(\Delta u_1,\,\eta^n)\\&+a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\,\big(\nabla D_N^\beta\overline{u}^n-\,\nabla\,{}_0^cD_{t_n}^\beta\overline{u},\,\nabla\theta^n\big).\end{aligned}\tag{54}$$

利用柯西-施瓦茨不等式以及 (54) 中 a 的界，得到

$$\begin{aligned}&\big(D_N^\beta\,\eta^n,\,\eta^n\big)\,+\,m_1\,\big(\nabla D_N^\beta\theta^n,\,\nabla\theta^n\big)\le\,\big\|D_N^\beta R_h v^n-\,{}_0^cD_{t_n}^\beta v\big\|\,\|\eta^n\|\\&+\,\big|a\big(l(u^n)\big)-a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\big|\,\|\Delta\overline{u}^n\|\,\|\eta^n\|\,+\,T\,\big|a\big(l(u^n)\big)-a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\big|\,\|\Delta u_1\|\,\|\eta^n\|\\&+m_2\,\big\|\nabla D_N^\beta\overline{u}^n-\,\nabla\,{}_0^cD_{t_n}^\beta\overline{u}\big\|\,\|\nabla\theta^n\|.\end{aligned}\tag{55}$$

Now,

$$\begin{aligned}\big\|D_N^\beta R_h v^n-\,{}_0^cD_{t_n}^\beta v\big\|\,&\le\big\|D_N^\beta R_h v^n-\,{}_0^cD_{t_n}^\beta R_h v\big\|+\big\|\,{}_0^cD_{t_n}^\beta R_h v-\,{}_0^cD_{t_n}^\beta v\big\|\\&\le C\,\big(h^2+t_n^{-\beta}\,N^{-\min\{2-\beta,\,r\beta\}}\big),\end{aligned}\tag{56}$$

and

$$\big\|\nabla D_N^\beta\overline{u}^n-\,\nabla\,{}_0^cD_{t_n}^\beta\overline{u}\big\|\le\,C\,t_n^{-\beta}\,N^{-\min\{2-\beta,\,r\alpha\}}\,\le C\,t_n^{-\beta}\,N^{-\min\{2-\beta,\,r\beta\}},\tag{57}$$

其中用到了引理 3.2 和 (11)。

此外，

$$\begin{aligned}\big|a\big(l(u^n)\big)-a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\big|\,&\le L\,\big|l(u^n)-l(\widehat{U}^n)\big|\,\le\,L\,\big|\|\nabla u^n\|^2-\|\nabla\widehat{U}^n\|^2\big|\\&\le L\,\big|\|\nabla u^n\|-\|\nabla\widehat{U}^n\|\big|\,\big(\|\nabla u^n\|+\|\nabla\widehat{U}^n\|\big)\\&\le C\,L\,\|\nabla u^n-\nabla\widehat{U}^n\|\\&\le CL\,\big(\|\nabla u^n-\nabla\widehat{u}^n\|+\|\nabla\widehat{u}^n-\nabla\widehat{U}^n\|\big).\end{aligned}\tag{58}$$

由引理 3.1 可得

$$\|\nabla u^n - \nabla \widehat{u}^n\| \le C\, N^{-min\{2,\, r\alpha\}} \le C\, N^{-min\{2,\, r\beta\}}, \tag{59}$$

由 (14) 和 (11)，我们得到

$$\begin{aligned}
\|\nabla \widehat{u}^n - \nabla \widehat{U}^n\| =& \left\| \left(1+\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}\right) \nabla(u^{n-1}-U^{n-1}) - \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} \nabla(u^{n-2}-U^{n-2}) \right\| \\
=& \left\| \left(1+\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}\right) \nabla(\rho^{n-1}+\theta^{n-1}) - \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} \nabla(\rho^{n-2}+\theta^{n-2}) \right\| \\
\le& \left(1+\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}\right) \left(\|\nabla\rho^{n-1}\| + \|\nabla\theta^{n-1}\|\right) + \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} \left(\|\nabla\rho^{n-2}\| + \|\nabla\theta^{n-2}\|\right) \\
\le& C(1+C_r)h + (1+C_r)\|\nabla\theta^{n-1}\| + CC_r h + C_r\|\nabla\theta^{n-2}\| \\
\le& C(1+2C_r)h + (1+C_r)\|\nabla\theta^{n-1}\| + C_r\|\nabla\theta^{n-2}\|.
\end{aligned} \tag{60}$$

将 (59) 和 (60) 代入 (58)，可得

$$\begin{aligned}
\left|a\big(l(u^n)\big) - a\big(l(\widehat{U}^n)\big)\right| \le& CLN^{-min\{2,\, r\beta\}} + CL(1+2C_r)\, h + CL(1+C_r)\, \|\nabla\theta^{n-1}\| \\
&+ CLC_r\, \|\nabla\theta^{n-2}\|.
\end{aligned} \tag{61}$$

将 (56)、(57) 和 (61) 中的值代入 (55)，并结合 (45) 和假设 H3，可得

$$\begin{aligned}
&\left(D_N^\beta\, \eta^n,\, \eta^n\right) + m_1 \left(\nabla D_N^\beta \theta^n,\, \nabla\theta^n\right) \le C\left(h^2 + t_n^{-\beta}\, N^{-\min\{2-\beta,\, r\beta\}}\right) \|\eta^n\| \\
&+ \left(CLN^{-min\{2,\, r\beta\}} + CL(1+2C_r)\, h + CL(1+C_r)\, \|\nabla\theta^{n-1}\| + CLC_r\, \|\nabla\theta^{n-2}\|\right) \\
&\quad C(1+T)\, \|\eta^n\| + C\, m_2\, t_n^{-\beta}\, N^{-\min\{2-\beta,\, r\beta\}}\, \|\nabla\theta^n\|.
\end{aligned} \tag{62}$$

利用引理 4.1 以及 (62) 中 $C(h^2+h+N^{-min\{2,\, r\beta\}})\ \sqrt{m_1}\|\nabla\theta^n\| \ge 0$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned}
&D_N^\beta\left(\|\eta^n\|^2 + m_1\, \|\nabla\theta^n\|^2\right) \le C_1\left(h^2 + h + N^{-min\{2,\, r\beta\}} + t_n^{-\beta}\, N^{-\min\{2-\beta,\, r\beta\}}\right) \|\eta^n\| \\
&+ \frac{CL}{\sqrt{m_1}}(1+C_r)\,(1+T)\,\sqrt{m_1}\,\|\nabla\theta^{n-1}\|\,\|\eta^n\| + C\left(h^2 + h + N^{-min\{2,\, r\beta\}}\right)\sqrt{m_1}\,\|\nabla\theta^n\| \\
&+ \frac{CLC_r}{\sqrt{m_1}}\,(1+T)\,\sqrt{m_1}\,\|\nabla\theta^{n-2}\|\,\|\eta^n\| + \frac{C\, m_2}{\sqrt{m_1}}\, t_n^{-\beta}\, N^{-\min\{2-\beta,\, r\beta\}}\,\sqrt{m_1}\,\|\nabla\theta^n\|,
\end{aligned} \tag{63}$$

其中 C_1 取决于 L、C_r 和 T.
将不等式 $ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ 应用于式（63），可得

$$\begin{aligned}
D_N^\beta\left(\|\eta^n\|^2 + m_1\, \|\nabla\theta^n\|^2\right) \le& \frac{C_3}{2}\, m_1\, \|\nabla\theta^{n-1}\|^2 + \|\eta^n\|^2 + \frac{C_4}{2}\, m_1\, \|\nabla\theta^{n-2}\|^2 \\
&+ C_2\left(h^2 + h + N^{-min\{2,\, r\beta\}} + t_n^{-\beta}\, N^{-\min\{2-\beta,\, r\beta\}}\right)\left(\|\eta^n\| + \sqrt{m_1}\,\|\nabla\theta^n\|\right),
\end{aligned} \tag{64}$$

其中常数 C_2 取决于 C_1、 m_1、 m_2，而常数 C_3 和 C_4 取决于 L、 C_r、 T、 m_1.

由于 $\left(\frac{C_3}{2}\|\eta^{n-1}\|^2 + \frac{C_4}{2}\|\eta^{n-2}\|^2 + m_1\|\nabla\theta^n\|^2\right) \geq 0$, 由 (64) 可得

$$\begin{aligned} D_N^{\beta}\big(\|\eta^n\|^2 + m_1\|\nabla\theta^n\|^2\big) \leq \frac{C_3}{2}\big(\|\eta^{n-1}\|^2 + m_1\|\nabla\theta^{n-1}\|^2\big) + \big(\|\eta^n\|^2 + m_1\|\nabla\theta^n\|^2\big) \\ + C_2\big(h^2 + h + N^{-min\{2,r\beta\}} + t_n^{-\beta}N^{-\text{最小}\{2-\beta,r\beta\}}\big) \\ \big(\|\eta^n\| + \sqrt{m_1}\|\nabla\theta^n\|\big) + \frac{C_4}{2}\big(\|\eta^{n-2}\|^2 + m_1\|\nabla\theta^{n-2}\|^2\big). \end{aligned} \tag{65}$$

将引理 4.3 应用于 (65) $\Big($, 取 $\chi^n = \|\eta^n\|$, $\psi^n = \sqrt{m_1}\|\nabla\theta^n\|$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \frac{C_3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{C_4}{2}$, $\lambda_i = 0$, 对于 $\forall i = 3, 4, \ldots, N-1$, $g^n = C_2\big(h^2 + h + N^{-min\{2,r\beta\}} + t_n^{-\beta}N^{-\text{最小}\{2-\beta,r\beta\}}\big)$ 并取 $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2\Big)$, 可得

$$\begin{aligned} \|\eta^n\| + \sqrt{m_1}\|\nabla\theta^n\| \leq 4E_\beta\big(4\Lambda t_n^{\beta}\big)\Big[\|\eta^0\| + \sqrt{m_1}\|\nabla\theta^0\| + C_2\big(h^2 + h + N^{-min\{2,r\beta\}}\big) \\ \underset{1\leq k\leq n}{\text{最大值}} \sum_{i=1}^{k} Q_{k-i}^{(k)} + C_2 N^{-\text{最小值}\{2-\beta,r\beta\}} \underset{1\leq k\leq n}{\text{最大值}} \sum_{i=1}^{k} Q_{k-i}^{(k)} t_i^{-\beta}\Big]. \end{aligned} \tag{66}$$

Now,

$$t_i^{-\beta} \leq T^{-\beta}N^{r\beta}\, i^{-r\beta} \leq T^{-\beta}N^{r\beta}\, i^{r(l_N-\beta)}, \quad \text{where } l_N = \frac{1}{\ln N}. \tag{67}$$

将引理 4.2 应用于 $\gamma = l_N$ 和 $\gamma = \beta$, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} Q_{k-i}^{(k)}\, i^{r(l_N-\beta)} &\leq \frac{\Gamma(1+l_N-\beta)}{\Gamma(1+l_N)}\, T^{\beta}\left(\frac{t_n}{T}\right)^{l_N} N^{r(l_N-\beta)} \\ &\leq \frac{\Gamma(1+l_N-\beta)}{\Gamma(1+l_N)}\, T^{\beta}\, N^{r(l_N-\beta)}, \end{aligned} \tag{68}$$

and

$$\sum_{i=1}^{k} Q_{k-i}^{(k)} \leq \frac{T^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}\left(\frac{t_n}{T}\right)^{\beta} \leq \frac{T^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}. \tag{69}$$

由于 $\overline{U}^0 = U^0 = R_h u_0$ 和 $V^0 = 0$, 我们得到 $\|\nabla\theta^0\| = 0$ 和 $\|\nabla\eta^0\| = 0$.

将 (67)-(69) 中的值代入 (66)，可得

$$\begin{aligned}\|\eta^n\| + \sqrt{m_1}\,\|\nabla\theta^n\| \leq & 4\,E_\beta\big(4\,\Lambda\,t_n^\beta\big)\Big[C_2\left(h^2+h+N^{-min\{2,r\beta\}}\right)\frac{T^\beta}{\Gamma(1+\beta)} \\ & + C_2\,N^{-\min\{2-\beta,r\beta\}}\,\frac{\Gamma(1+l_N-\beta)}{\Gamma(1+l_N)}\,T^{-\beta}N^{r\beta}\,T^\beta\,N^{r(l_N-\beta)}\Big] \\ \leq & C\left(h^2+h+N^{-min\{2,r\beta\}}+N^{-\min\{2-\beta,r\beta\}}\right) \\ \leq & C\left(h+N^{-\min\{2-\beta,r\beta\}}\right),\end{aligned} \tag{70}$$

其中，C 取决于 C_2、T和 l_N.
由于 $\min\{1,\sqrt{m_1}\}\left(\|\eta^n\| + \|\nabla\theta^n\|\right) \leq \|\eta^n\| + \sqrt{m_1}\,\|\nabla\theta^n\|$,

$$\left(\|\eta^n\| + \|\nabla\theta^n\|\right) \leq C\left(h+N^{-\min\{2-\beta,r\beta\}}\right). \tag{71}$$

因此，结合使用（11）和（71）以及三角不等式，可得

$$\|\nabla\overline{u}^n-\nabla\overline{U}^n\|+\|v^n-V^n\| \leq C\left(h+N^{-\min\{2-\beta,r\beta\}}\right). \tag{72}$$

至此，证明完成。 □

注 5.1. 在上述工作中，我们假设问题（1）或（7）具有足够正则性的唯一解。其证明尚待发现。

6 数值实验

为了验证我们的理论结果，本节进行一些数值实验。在每个例子中，时间区间取为 $[0,1]$，并对 Ω 采用准一致剖分，在每个空间方向上使用 (M_s+1) 个节点。为了获得最优收敛率，我们选择分级参数$r=\frac{2-\beta}{\beta}$.。为得到时间方向上的收敛率，设定 $M_s=N^{2-\beta}$.2。类似地，令 $N=M_s^{\overline{2-\beta}}$，以得出空间方向上的收敛阶。

例1。在第一个例子中，取 $\Omega=(0,\pi)$ $a(w)=3+\sin w$，并在式 (1) 中选择 $f(x,t)$, 使得问题 (1) 的解析解为 $u(x,t)=(t^3+t^\alpha)\sin x$。

如表1所示，在分级网格上，对于不同的 $\alpha.$ 值，时间方向上的收敛率在 $L^\infty\left(H_0^1(\Omega)\right)$ 范数下为 $N^{-(2-\beta)}$。表2验证了空间方向上 $H_0^1(\Omega)$ 范数的收敛阶。

N	$\alpha = 1.4$		$\alpha = 1.5$		$\alpha = 1.8$	
	误差	OC	误差	OC	误差	OC
2^7	7.01E-03	1.266809	8.63E-03	1.226166	1.62E-02	1.090252
2^8	2.91E-03	1.279812	3.69E-03	1.235579	7.63E-03	1.091875
2^9	1.20E-03	1.288394	1.57E-03	1.241687	3.58E-03	1.093030
2^{10}	4.91E-04	-	6.63E-04	-	1.68E-03	-

表1：采用分级网格求解例1时，时间方向上 $L^\infty\left(H_0^1(\Omega)\right)$ 范数的误差和收敛阶。

M_s	$\alpha = 1.4$		$\alpha = 1.5$		$\alpha = 1.8$	
	误差	OC	误差	OC	误差	OC
2^4	1.43E-01	1.005690	1.43E-01	1.005830	1.43E-01	1.005599
2^5	7.12E-02	1.001684	7.11E-02	1.001614	7.11E-02	1.001458
2^6	3.55E-02	1.000449	3.55E-02	1.000422	3.55E-02	1.000374
2^7	1.78E-02	-	1.78E-02	-	1.78E-02	-

表2：例1中空间方向上 $H_0^1(\Omega)$ 范数下的误差和收敛阶。

例2。对于第二个例子，取 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ $a(w) = 3 + \sin w$，并选择 $f(x, t)$，使得偏微分方程（1）的解析解为 $u(x, t) = (t^3 + t^\alpha)(x - x^2)(y - y^2)$。

由表3和表4可观察到，对于不同的 α 值，我们在时间方向和空间方向上均获得了定理（5.1）所预测的最优收敛阶。

N	$\alpha = 1.4$		$\alpha = 1.5$		$\alpha = 1.8$	
	误差	OC	误差	OC	误差	OC
2^4	1.00E-02	1.323437	1.12E-02	1.248964	1.71E-02	1.098823
2^5	4.00E-03	1.304197	4.73E-03	1.252916	7.97E-03	1.107867
2^6	1.62E-03	1.305113	1.99E-03	1.249295	3.70E-03	1.093619
2^7	6.56E-04	-	8.35E-04	-	1.73E-03	-

表3：例2采用分级网格时，时间方向上 $L^\infty\left(H_0^1(\Omega)\right)$ 范数的误差和收敛阶。

M_s	$\alpha=1.4$		$\alpha=1.5$		$\alpha=1.8$	
	误差	OC	误差	OC	误差	OC
2^3	4.45E-02	0.993890	4.45E-02	0.993887	4.45E-02	0.993892
2^4	2.24E-02	0.998464	2.24E-02	0.998464	2.24E-02	0.998465
2^5	1.12E-02	0.999615	1.12E-02	0.999615	1.12E-02	0.999615
2^6	5.60E-03	-	5.60E-03	-	5.60E-03	-

表4：例2中空间方向上 $H_0^1(\Omega)$范数的误差和收敛阶。

注释 6.1. 本文采用 $L1$ 格式对时间变量进行离散，这使得时间方向上的精度达到 $O\left(N^{-\min\{2-\beta,r\beta\}}\right)$。也可以采用 $L2\text{-}1_\sigma$ 近似 *[35]* 对 Caputo导数进行离散，从而使时间方向上的精度达到 $O\left(N^{-\min\{2,r\beta\}}\right)$。

参考文献

[1] F. Mainardi, P. Paradisi, 分数阶扩散波，《计算声学杂志》, 9-1 (2001), 1417-1436.

[2] T. Sandev 和 Z. Tomovski，振动弦的一般时间分数阶波动方程，《物理学杂志A：数学与理论》，43 (2010).[3] O. P. Agrawal，有界区域上定义的分数阶扩散波动方程的解，《非线性动力学》，29 (2002), 145-155.[4]J. Huang、D. Yang、L. Jay，非线性时间分数阶扩散波动方程的高效方法及其快速实现，《数值算法》，85 (2020), 375-397.[5] I. Christie、J. Sanz-Serna，非线性积分微分波动系统的Galerkin方法，《计算方法与应用力学和工程》，44-2 (1984), 229-237.[6] J. Peradze，非线性Kirchhoff弦方程的数值算法，《数值数学》，102 (2005),311-342.[7] M. Chipot、B. Lavot，关于涉及Dirichlet能量的非局部问题的评述，《帕多瓦大学数学研讨会纪要》，110 (2003), 199-220.

[8] S. Zheng, M. Chipot，带非局部项的非线性抛物方程解的渐近行为，Asymptot. Anal.，45 (3–4) (2005)，301–312。

[9] Z. Sun, X. Wu，扩散波系统的全离散差分格式，应用数值数学，56-2 (2006)，193-209。[10] K. Diethelm，《分数阶微分方程分析：Caputo型微分算子的应用》，数学讲义，施普林格，(2010)。[11] S. Pohoˇzaev，关于一类拟线性双曲方程，Math USSR Sbornik，25 (1975)，145-158。[12] A. Arosio, S. Panizzi，Kirchhoff弦的适定性，Trans. Am. Math. Soc.，348-1 (1996)，305-330。[13] F. Hirosawa，Kirchhoff方程整体可解性的一类非解析函数，Nonlinear Anal.，116 (2015)，37-63。[14] S. Chaudhary, V. Srivastava，非局部双曲问题的半离散有限元近似，Appl. Anal.，101-2 (2022)，479-496。[15] B. Jin, B. Li, Z. Zhou，非线性次扩散方程的数值分析，SIAM J. Numer. Anal.，56(1) (2018) 1-23。[16] N. An, G. Zhao, C. huang, X. Yu， α-鲁棒 H^1-norm 弱奇异解超扩散方程有限元方法的分析，Comput. Math. Appl.，118 (2022)，159-170。[17]P. Lyu, S. Vong，半线性扩散波方程直接非均匀逼近的对称分数阶降阶方法，科学计算杂志，93-34 (2022)。[18] J. Shen, M. Stynes, Z. Sun，弱奇异解多维分数阶波动方程的两种有限差分格式，Comput. Methods Appl. Math，21 (2021)，913-928。[19] J. Shen, C. Li, Z. Sun，一种适用于阶数在(1, 2)内的Caputo导数的H2N2插值及其在多维时间分数阶波动方程中的应用，科学计算杂志，83-38 (2020)。[20] M. Stynes, E. O'Riordan, J. Gracia，分级网格上时间分数阶扩散方程有限差分方法的误差分析，SIAM J. Numer. Anal.，55 (2017)，1057-1079。

[21] S. Chaudhary, P. J. Kundaliya，采用分级网格上的L1格式求解含非局部扩散项的次扩散方程，数学与计算模拟，195 (2022)，119-137。[22] N. Kopteva，二维和三维分数阶导数问题在分级网格与均匀网格上采用L1方法的误差分析，数学与计算模拟，8 (2019)，2135-2155。[23] C. Huang, M. Stynes，时间分数阶扩散方程有限元方法的最优空间 $H^1 - norm$ 分析，计算与应用数学杂志，367 (2020)，112435。[24] X. Li, H.Liao, L. Zhang，求解次扩散问题的一种采用非等时间步长的二阶快速紧致格式，《数值分析》，86 (2021)，1011-1039。[25] K. Mustapha, W. McLean，一种用于分数阶波动方程的二阶精度数值方法，《数值数学》，105 (2007)，481-510。[26]H. Chen, M. Stynes，时间分数阶初边值问题中误差估计的发散，IMA数值分析杂志，41-2 (2021)，974-997。[27] H. Liao, W. Mclean, J. Zhang，一种离散Gr ¨onwall不等式及其在次扩散问题数值格式中的应用，SIAM数值分析杂志，57-1 (2019)，218-237。[28] C. Huang, M. Stynes，时间分数阶Allen-Cahn方程全离散有限元方法的最优 H^1 空间收敛性，计算数学进展，46-4 (2020)，63。[29] V. Thom$\acute{e}$e，抛物型问题的Galerkin有限元方法，第二版（修订扩充版），施普林格，柏林（2006）。[30] G. Kirchhoff，《力学讲义》，莱比锡：Teubner（1883）。[31] G. Gao, Z. Sun，求解二维时间分布阶波动方程的两种交替方向隐式差分格式，科学计算杂志，69-2 (2016)，506-531。[32] P. Lyu, Y. Liang, Z. Wang，一种用于非线性多项时间分数阶波动方程的快速线性化有限差分法，应用数值数学，151 (2020)，448-471。

[33] D. Kumar, K. Nisar，针对光滑解非线性耦合延迟次扩散系统的一种结合分数阶Crank–Nicolson方法的新型线性化Galerkin有限元格式，《数学方法与应用科学》，45 (2022)，1377-1401。

[34] H. Sun、X. Zhao 和 Z. Sun，基于插值逼近的时间多项分数阶波动方程时间二阶差分格式，科学计算杂志，78-1（2019），467-498。[35] A. Alikhanov，一种新的时间分数阶扩散方程差分格式，《计算物理学杂志》，280（2015），424-438。