arXiv:2301.01671v1 [math.LO] 4 Jan 2023

阿贝尔群中的三元组之和

IDO FELDMAN 和 ASSAF RINOT

Abstract. 受加法 Ramsey 理论中的一个问题启发，我们将 Todor̆cevi´c 对三维组合立方体的划分推广到其他三维对象。作为推论，我们得到：若连续统假设不成立，那么对于每个基数为 $\aleph_2$ 的阿贝尔群 G，都存在一种着色 $c\colon G\to\mathbb{Z}$，使得对于每个不可数的 $X\subseteq G$ 和每个整数 k，都存在 X 中三个互不相同的元素 x、y、z，使得 $c(x+y+z)=k$。

1. Introduction

根据 Hindman 的著名定理（见 [HS12，推论 5.9]），对于任意将无限交换消去半群 $(G,+)$ 划分为两个单元 A 和 B 的划分，都存在一个无限子集 $X\subseteq G$，使得其有限和的集合

$$\mathrm{FS}(X):=\{x_1+\cdots+x_n\mid x_1,\ldots,x_n \text{ are distinct elements of } X \ \&\ n\in\mathbb{N}\setminus 2\}$$

完全包含在 A 中，或完全包含在 B中。等价地，对于每个着色 $c\colon G\to 2$，都存在一个无限的 $X\subseteq G$，使得 $c\restriction\mathrm{FS}(X)$ 是单色的。

欣德曼定理不能推广到不可数情形，因为由 Milliken 的一个定理（见 [Mil78, Theorem 9]）可知，以下断言与集合论的通常公理相容：对于任意大小为正则不可数基数的群 $(G,*)$（不一定是阿贝尔群），存在一种着色 $c\colon G\to G$，使得对于每个基数为 $|G|$ 的 $X\subseteq G$，$c\restriction\mathrm{FS}_2(X)$ 都是映到 G 上的满射；这一次，

$$\mathrm{FS}_n(X):=\{x_1*\cdots*x_n\mid x_1,\ldots,x_n \text{ are distinct elements of } X\}.$$

几年前，从 Hindman、Leader 和 Strauss 的一篇论文 [HLS17]，开始，对欣德曼定理高阶类似结果的研究重新受到关注。我们仅提及与本文相关的几个结果：

(1) 改进了 [HLS17]，Komj´ath [Kom16]，的一条定理后，Soukup 和 Weiss [SW16]，独立证明了，存在一个着色$c\colon\ \mathbb{R}\to 2$，使得对于每个不可数的 $X\subseteq\mathbb{R}$ 和每个 $i\in\{0,1\}$，都有 $x\neq y$ 属于 X，满足 $c(x+y)=i$。(2) 为解决 Weiss 提出的问题，Komj´ath [Kom20] 证明了，存在一个着色 $c\colon\ \mathbb{R}\to 2$，使得对于每个不可数的 $X\subseteq\mathbb{R}$ 和每个$i\in\{0,1\}$，都有 $x\neq y$ 属于 X，满足 $c(|x-y|)=i$。至于维数$d>1$，假设连续统假设成立，则存在一个着色 $c\colon\ \mathbb{R}\to 2$，使得对于每个不可数的 $X\subseteq\mathbb{R}^d$ 和每个 $i\in\{0,1\}$，都有$x\neq y$ 属于 X，满足 $c(\|x-y\|)=i$。(3) 在 [FBR17]，Fern´andez-Bret´on 和 Rinot 证明了，存在一个着色$c\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{N}$，使得对于每个基数为 $|\mathbb{R}|$ 的 $X\subseteq\mathbb{R}$ 和每个 $i\in\mathbb{N}$，都有 $x\neq y$ 属于 X，满足 $c(x+y)=i$。

Date：预印本，日期为2023年1月4日。最新版本请访问 http://p.assafrinot.com/57。
2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：03E02；次要分类：03E75、03E35、05A17。

(4) 根据 [FBR17], , 对于真类中的基数 κ （包括每个正整数 n 对应的 $\kappa = \aleph_n$ ），对于每个基数为 κ 的交换消去半群 G ，都存在一个着色 $c\colon\ G \to G$ ，使得对于所有基数为 κ 的 X、$Y \subseteq G$ 以及每个$g \in G$，都有 $x \in X$ 和 $y \in Y$，满足 $c(x + y) = g$。[1](5) 根据 [FBR17], , 对于每个交换消去半群 G，都存在一个着色 $c\colon\ G \to \mathbb{N}$ ，使得对于每个不可数的$X \subseteq G$，FS(X) 满射到 $\mathbb{N}$ 。此外，在一致性意义下，将 $\mathbb{N}$ 替换为 $\mathbb{R}$ 后，同样的结论也成立。

请注意，在 (1)、(2) 和 (5) 中列出的结果里，触发集合 X 的基数可能小于 G 的基数；而在 (3) 和 (4) 中， $|X|$ 与 $|G|$ 相同。另一个重要区别是，与 (1)–(4) 的结果不同，(5) 并未对生成所有无限颜色所需的和的长度作出任何上界断言。这引出了一个自然问题，其最简单的情形如下。

问题。设 $(G, +)$ 是一个基数为 $\aleph_2$ 的阿贝尔群。

是否必定存在一个正整数 n 和一个着色 $c\colon\ G \to \mathbb{N}$ ，使得对于每个不可数的 $X \subseteq G$， c |FS$_n$(X) 都映满 $\mathbb{N}$？

稍加思考便可看出，即使对某个特定群 G，若答案为肯定，也会立即推出经典基数分划关系研究中的关系 $\aleph_2 \nrightarrow [\aleph_1]^n_{\aleph_0}$ ，其中基数为 [EHR65]。根据 Erd˝os 和 Rado 的一个定理，上述关系可能对 $n = 2$ 不成立；而 Todor˘cevi´c [Tod94] 的一个重要定理则表明，它对 $n = 3$ 确实成立。本文的第一个主要结果给出了 Todor˘cevi´c 定理的一个一致性扩展。

定理 A. 如果连续统假设不成立，那么对于每个基数为 $\aleph_2$ 的阿贝尔群 $(G, +)$，都存在一种着色 $c\colon\ G \to \mathbb{N}$ ，使得对于每个不可数的 $X \subseteq G$ 和每个 $i \in \mathbb{N}$，都有三个互不相同的元素 x、y、z 属于 X，满足 $c(x + y + z) = i$。

定理 A 并不限于阿贝尔群。事实上，它适用于所有所谓的良性岩浆，具体如下。

定义. 岩浆是一种结构 $(G, *)$，其中 $*$ 是一个二元运算。我们称其性质良好，当且仅当存在一个映射 $\varphi\colon\ G \to [G]^{<\omega}$ ，使得：[2]

- G 是可数对一；
- 对于所有 $x \neq y$ 属于 G，$\varphi(x) \triangle \varphi(y) \subseteq \varphi(x * y) \subseteq \varphi(x) \cup \varphi(y)$。

每个无限交换消去半群（$G, +$）都是性质良好的（例如，参见 [FBR17，引理 2.2]）。此外，每个自由群（$G, *$）也都是性质良好的，这可由将单词映射到其字母集合的映射看出。第三个例子是上文结果（2）中出现的岩浆，即（$\mathbb{R}, d$），其中d（x, y）：$= |x - y|$。事实上，将 $\mathbb{R}$ 视为以某个 Hamel基B为基的 $\mathbb{Q}$-向量空间，任意一个 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 都可以唯一地表示为非零有理数 q_0、.....、 q_n与 B中元素的单射序列 $\langle v_i \mid i \leq n\rangle$所构成的线性组合 $\sum_{i\leq n} q_i v_i$。因此，$\varphi\colon\ \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{<\omega}$ 将 x 映射到唯一的 $\{v_i \mid i \leq n\}$ （并将 0 映射到空集）是可数对一的，并且对于所有 $x \neq y$, φ（x）$\triangle$ φ（y）$\subseteq \varphi(|x - y|) \subseteq \varphi(x) \cup \varphi(y)$。定理 A 的完整陈述如下。

定理 A′。对于每个满足 $\mu^{<\mu} < \mu^+ < 2^\mu$ 的无限基数 μ ，对于每个基数为 μ^{++} 的良性岩浆（$G, *$），都存在一种着色 $c\colon\ G \to \mathbb{N}$，使得

[1]还有更强的结论，参见 [FBR17，推论 4。5]。[2]这里， $[G]^{<\omega}$ 表示 G的所有有限子集构成的集合。

对于每个基数为 μ^+ 的 $X \subseteq G$ 以及每个 $i \in \mathbb{N}$，都存在 X 中三个互不相同的元素 x、y、z，使得 $c(x*y*z) = i$。[3]

尽管表述得不那么明确，通过良性岩浆来展开的方法已经出现在 [FBR17] 中。具体而言，结果 (4) 中的着色不仅在形如 $x+y$ 的取值上取得所有可能的颜色，而且在 x 和 y 的任意非平凡 $\mathbb{Q}$-组合上也取得所有可能的颜色，例如 $|x-y|$。这表明，有可能构造一种着色，同时见证结果 (1) 和结果 (2) 的前半部分。事实上，Komj´áth 的定理可由以下发现推出（使用 $\theta := \aleph_0$）：

定理 B. 对于每个满足 $2^{<\theta} = \theta$ 的无限基数 θ，对于每个满足$\theta < |G| \leq 2^\theta$的集合 G，以及每个映射 $\varphi\colon G \to [G]^{<\omega}$，都存在相应的着色$c\colon G \to 2$，满足以下条件。

对于 G 上的每个二元运算 $*$，若 φ 见证了 $(G,*)$ 性质良好，则对于每个基数为 θ^+ 的 $X \subseteq G$ 和每个 $i \in \{0,1\}$，存在 X 中的 $x \neq y$，使得 $c(x*y) = i$。

定理 A′ 和 B 的证明只需几个步骤即可得出。首先，我们考虑着色原理 $S_n(\kappa,\lambda,\theta)$，它足以推出：任何基数为 κ 的良性岩浆 $(G,*)$ 都存在一种着色 $c\colon G \to \theta$，使得对于每个基数为 λ的集合 $X \subseteq G$，在 $\mathrm{FS}_n(X)$ 上都能取遍所有可能的颜色。接下来，我们引入抽取原理 $\mathrm{Extract}_n(\kappa,\lambda,\ldots)$，它足以将 $S_n(\kappa,\lambda,\theta)$ 归约为经典分割关系 $\kappa \nrightarrow [\lambda]^n_\theta$的矩形型强化 $\kappa \overset{\text{上确界}}{\nrightarrow} [\lambda,\lambda]^n_\theta$。这样一来，我们就有两个相互独立的任务：证明 $\mathrm{Extract}_n(\kappa,\lambda,\ldots)$ 的若干实例，以及证明 $\kappa \overset{\text{上确界}}{\nrightarrow} [\lambda,\lambda]^n_\theta$ 的若干实例。后者更为困难，而本文的第二个主要结果是对 Todorˇcevi´c 定理 [Tod94] 的推广，该定理指出，张猜想不成立当且仅当 $\omega_2 \nrightarrow [\omega_1]^3_{\omega_1}$ 成立。这里，$\omega_2 \nrightarrow [\omega_1]^3_{\omega_1}$ 被加强为 $\omega_2 \overset{\text{上确界}}{\nrightarrow} [\omega_1,\omega_1]^3_{\omega_1}$。具体而言：

定理 C。以下各项等价：

(1) $(\aleph_2,\aleph_1) \twoheadrightarrow (\aleph_1,\aleph_0)$ 不成立；(2) 存在一个着色 $c\colon [\omega_2]^3 \to \omega_1$，满足：对于所有互不相交且序型为 ω_1 的 $A,B \subseteq \omega_2$，只要 $\sup(A) = \sup(B)$，对于每种颜色 $\tau < \omega_1$，都存在 $(\alpha,\beta,\gamma) \in [A\cup B]^3 \setminus ([A]^3 \cup [B]^3)$，使得 $c(\alpha,\beta,\gamma) = \tau$。

1.1. 本文结构。在第2节中，我们给出一些必要的预备知识。

在第3节中，我们回顾弱库雷帕树的定义，并研究相关对象，例如分支谱 $T(\mu,\theta)$。这将在得到 $\mathrm{Extract}_n(\kappa,\lambda,\ldots)$ 和 $\kappa \overset{\text{上确界}}{\nrightarrow} [\lambda,\lambda]^n_\theta$ 的实例时发挥作用。

在第4节中，我们证明 $S_n(\kappa,\lambda,\theta)$ 蕴含：任意基数为 κ 的良性岩浆 $(G,*)$ 都存在一种具有前文所述强性质的着色。我们证明，在特殊情形 $\lambda = \kappa$ 下，$S_2(\kappa,\lambda,\theta)$ 已可由 $\kappa \nrightarrow [\lambda$ 推出；$\lambda]^2_\theta$，而在一般情形下，$S_n(\kappa,\lambda,\theta)$ 可由 $\kappa \overset{\text{上确界}}{\nrightarrow} [\lambda,\lambda]^n_\theta$与 $\mathrm{Extract}_n(\kappa,\lambda,\omega,\omega)$ 一并推出。随后，我们运用树组合学，得出使 $\mathrm{Extract}_n(\kappa,\lambda,\ldots)$ 成立的充分条件。$\mathrm{Extract}_n(\kappa,\lambda,\theta,\chi)$ 和 $\kappa \overset{\text{上确界}}{\nrightarrow} [\lambda,\lambda]^n_\theta$ 的定义见本节中的定义4.17和4.20。

[3] 由于 $*$ 不假定满足结合律，因此声称对于 $x*y*z$ 的两种实现，我们都能得到 $c(x*y*z) = i$。

在第 5 节中，我们证明定理 C 的一般情形，其中 $\aleph_2$ 被替换为满足 $\mu^{<\mu}=\mu$ 的基数 μ 的二阶后继。证明稍长，因为分析过程总共分为六种情形及子情形。

在第6节中，我们验证了 Todor̆cevi´c 关于不稳定集与振荡之间对应关系的定理在矩形情形下仍然成立。接着，我们将其与第 5 节的结果结合，得到对于无限基数 $\mu=\mu^{<\mu}$ 的每个后继基数 $\lambda=\mu^+$，λ^+ 上确界$\nrightarrow [\lambda,\lambda]^3_\omega$ 均成立。

在第 7 节中，我们得到了加法 Ramsey 理论中的预期应用。定理 A′ 是第 4 节和第6节结果的推论，而定理 B 则是断言只要存在一棵具有 κ 多个分支的弱 μ-Kurepa 树，$S_2(\kappa,\mu^+,2)$ 就成立的定理的推论。

2. Preliminaries

在本节中，$\kappa,\lambda,\mu,\theta,\chi$ 表示非零基数，n 表示正整数。我们用 H_κ 表示所有遗传基数小于 κ 的集合构成的集族。记 $[\kappa]^\lambda:=\{A\subseteq\kappa\mid |A|=\lambda\}$ 和 $[\kappa]^{<\lambda}:=\{A\subseteq\kappa\mid |A|<\lambda\}$。令$E^\kappa_\chi:=\{\alpha<\kappa\mid \mathrm{cf}(\alpha)=\chi\}$，并类似地定义 $E^\kappa_{\leq\chi}$, $E^\kappa_{<\chi}$, $E^\kappa_{\geq\chi}$, $E^\kappa_{>\chi}$, $E^\kappa_{\neq\chi}$。对于两个不同的函数 $f,g\in{}^\theta\mu$，记 $f<_{\mathrm{lex}}g$，意为对于满足 $f(\delta)\neq g(\delta)$ 的最小 $\delta<\lambda$，有 $f(\delta)<g(\delta)$。对于函数 $f,g\in{}^{\leq\theta}\mu$，记 $f\sqsubseteq g$，意为 $\mathrm{dom}(f)\leq\mathrm{dom}(g)$ 且 $g\restriction\mathrm{dom}(f)=f$。

对于序数集 $A_1,\ldots,A_n$，我们定义

$$A_1\circledast\cdots\circledast A_n:=\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in A_1\times\cdots\times A_n\mid \alpha_1<\cdots<\alpha_n\}.$$

按照约定，每当我们写作 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in[A]^n$（而非 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\in[A]^n$）时，我们的意思是 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in A\circledast\cdots\circledast A$。

对于序数集 A，我们记 $\mathrm{ssup}(A):=\sup\{\alpha+1\mid\alpha\in A\}$，$\mathrm{acc}^+(A):=\{\alpha<\mathrm{ssup}(A)\mid \sup(a\cap\alpha)=\alpha>0\}$，以及 $\mathrm{acc}(A):=A\cap\mathrm{acc}^+(A)$。对于两个序数集 A 和 B，我们用 $A<B$ 表示 $A\times B$ 与 $A\circledast B$ 重合。

定义 2.1（正圆括号关系，[EHR65，§3]）。$\kappa\to(\lambda)^n_\theta$ 表示：对于任意着色 $c:[\kappa]^n\to\theta$，都存在一个序型为 λ 的 $A\subseteq\kappa$，使得 c 在 $[A]^n$ 上恒定。

定义 2.2（负方括号关系，[EHR65，§18]）。若一个着色 $c:[\kappa]^n\to\theta$ 满足以下条件，则称其为见证：

- $\kappa\not\to[\lambda]^n_\theta$ 当且仅当对每个 $A\in[\kappa]^\lambda$，都有 $c[[A]^n]=\theta$；
- $\kappa\not\to[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]^n_\theta$ 当且仅当对每个 $\langle A_i\mid 1\leq i\leq n\rangle\in\prod_{i=1}^n[\kappa]^{\lambda_i}$，都有 $c[A_1\times\cdots\times A_n]=\theta$；
- $\kappa\not\to[\lambda_1;\ldots;\lambda_n]^n_\theta$ 当且仅当对每个 $\langle A_i\mid 1\leq i\leq n\rangle\in\prod_{i=1}^n[\kappa]^{\lambda_i}$，都有 $c[A_1\circledast\cdots\circledast A_n]=\theta$。

注意，$(\kappa\not\to[\lambda;\ldots;\lambda]^n_\theta)\implies(\kappa\not\to[\lambda,\ldots,\lambda]^n_\theta)\implies(\kappa\not\to[\lambda]^n_\theta)$。

定义 2.3（纤维映射）。给定有序对的着色 $c:[\kappa]^2\to\theta$ 和某个 $\beta<\kappa$，我们有时将 c_β 记作 c 的 β^{th}-纤维映射，也就是说，它是满足对每个 $\alpha<\beta$ 都有 $c_\beta(\alpha)=c(\alpha,\beta)$ 的唯一映射 $c_\beta:\beta\to\theta$。

我们称 c 具有单射纤维，当且仅当 c_β 对每个 $\beta<\kappa$ 都是单射。

定义 2.4 ([LHR18])。$\mathrm{U}(\kappa,\mu,\theta,\chi)$ 断言存在一种着色 $c:[\kappa]^2\to\theta$，使得对于每个 $\sigma<\chi$，每个基数为 κ 的两两不交子族 $\mathcal{A}\subseteq[\kappa]^\sigma$，

对于每个 $\tau<\theta$，存在一个基数为 μ 的 $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$，使得对于来自 $\mathcal{B}$ 的所有 $a\neq b$，$\min(c[a\times b])>\tau$。

注 2.5. 特别值得关注的是 $\mathrm{U}(\kappa,\mu,\theta,\chi)$ 的见证 $c\colon[\kappa]^2\to\theta$，它们还满足次可加性，即对所有 $\alpha<\beta<\gamma<\kappa$，以下条件均成立：

- $c(\alpha,\gamma)\leq$最大值$\{c(\alpha,\beta)\ c(\beta,\gamma)\}$；
- $c(\alpha,\beta)\leq$最大$\{c(\alpha,\gamma)\ c(\beta,\gamma)\}$。

这些着色在 [LHR23]，中有所研究，并将在第 5 节中再次出现。

给定一个着色 $c\colon[\kappa]^2\to\theta$ 和一个序型为 λ 的子集 $X\subseteq\kappa$，如果对于保序双射 $\pi\colon\lambda\leftrightarrow X$，通过 $d(\alpha,\beta):=c(\pi(\alpha)\ \pi(\beta))$ 定义的着色 $d\colon[\lambda]^2\to\theta$ 是 $\mathrm{U}(\lambda,\mu,\theta,\chi)$ 的见证，我们就称“$c\restriction[X]^2$ 是 $\mathrm{U}(\lambda,\mu,\theta,\chi)$ 的见证”。为了能够表达这种情况在全局范围内成立，我们引入定义 2.4 中原理的以下五基数扩展。

定义 2.6。$\mathrm{U}(\kappa,\lambda,\mu,\theta,\chi)$ 断言存在一种着色 $c\colon[\kappa]^2\to\theta$，使得对于每个 $\sigma<\chi$、每个基数为 λ 的两两不相交子族 $\mathcal{A}\subseteq[\kappa]^\sigma$，以及每个$\tau<\theta$，都存在一个基数为 μ 的 $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$，使得对于所有来自 $\mathcal{B}$ 的 $a\neq b$，$\min(c[a\times b])>\tau$。

事实 2.7（[Tod07，引理 9.2.3]）。对于每个正则不可数基数 λ，若 $\mathrm{U}(\lambda^+,\lambda,2,\lambda,2)$ 成立，则存在一个 $\mathrm{U}(\lambda^+,\lambda,\lambda,\lambda,\omega)$ 的次可加见证。

最后，我们来到了本文的动机所在。

定义 2.8。对于岩浆 $(G,*)$，我们用 $G\nrightarrow[\lambda]^{\mathrm{FS}_n}_\theta$ 表示存在一种着色 $c\colon G\to\theta$，具有如下性质：对于每个基数为 λ 的子集 $A\subseteq G$ 以及每个指定颜色 $\tau<\theta$，都存在一个由 A 中元素构成的单射序列 $\langle a_i\mid 1\leq i\leq n\rangle$，使得对于 $a_1*\cdots*a_n$ 的所有实现，$c(a_1*\cdots*a_n)=\tau$。[4]

在 $n=2$, [FBR17 的特殊情形下，推论 4.5] 和 [RZ21 的推论 2.20] 给出了充分条件，使得对于 θ 的所有取值，$G\nrightarrow[\lambda]^{\mathrm{FS}_n}_\theta$ 都可由 $|G|\nrightarrow[\lambda]^n_\theta$ 推出。目前尚无法实现高维约化。

2.1. 序数上的游走。本小节简要介绍序数上的游走所需的基础知识。这些背景知识仅用于第6节，因此此处的阐述相当简洁。详尽的介绍可参见 [Tod07]。

在本小节余下部分，κ 表示一个正则不可数基数，并固定一个定义在 κ 上的 C-序列，即一个序列 $\vec{C}=\langle C_\beta\mid\beta<\kappa\rangle$，使得对于每个 $\beta<\kappa$，C_β 都是 β 的闭子集，且 $\sup(C_\beta)=\sup(\beta)$。

定义 2.9（Todorčević）。由 $\vec{C}$ 导出映射 $\mathrm{Tr}\colon[\kappa]^2\to{}^\omega\kappa$, $\rho_2\colon[\kappa]^2\to\omega$，以及 $\mathrm{tr}\colon[\kappa]^2\to{}^{<\omega}\kappa$，令对所有 $\alpha<\beta<\kappa$：

- $\mathrm{Tr}(\alpha,\beta):\omega\to\kappa$ is defined by recursion on $n<\omega$:

$$\mathrm{Tr}(\alpha,\beta)(n):=\begin{cases}\beta, & n=0\\ \min(C_{\mathrm{Tr}(\alpha,\beta)(n-1)}\setminus\alpha), & n>0\ \&\ \mathrm{Tr}(\alpha,\beta)(n-1)>\alpha\\ \alpha, & \text{otherwise}\end{cases}$$

- $\rho_2(\alpha,\beta):=\min\{l<\omega\mid\mathrm{Tr}(\alpha,\beta)(l)=\alpha\}$；
- $\mathrm{tr}(\alpha,\beta):=\mathrm{Tr}(\alpha,\beta)\restriction\rho_2(\alpha,\beta)$.

[4]实现方面的问题源于我们不假设 $*$ 满足结合律，例如，可能有 $(a_1*a_2)*a_3\neq a_1*(a_2*a_3)$。

解释如下：给定一对序数 $\alpha<\beta$ 小于 κ，我们希望从 β 向下游走到 α。这是通过递归完成的，令 $\beta_0:=\beta$，且 $\beta_{n+1}:=\min(C_{\beta_n}\setminus\alpha)$，由此得到一个序数 β_{n+1}，使得 $\alpha\leq\beta_{n+1}\leq\beta_n$。由于序数是良基的，必定存在某个整数 k，使得 $\beta_{k+1}=\alpha$，因此该游走是 $\beta=\beta_0>\beta_1>\cdots>\beta_{k+1}=\alpha$。此游走由 $\mathrm{Tr}(\alpha,\beta)$ 记录，因为对每个 $n\leq k$，都有 $\mathrm{Tr}(\alpha,\beta)(n)=\beta_n$；而对每个 $n>k$，都有 $\mathrm{Tr}(\alpha,\beta)(n)=\alpha$。游走的长度由正整数 $\rho_2(\alpha,\beta)$ 记录。现在，由于 $\mathrm{Tr}(\alpha,\beta)(n)$ 最终恒为 α，其非平凡部分是大于 α 的那些序数，即 $\beta_0>\beta_1>\cdots>\beta_k$；这由 $\mathrm{tr}(\alpha,\beta)$ 记录。

定义 2.10（[Rin14，定义 2.8]）。通过以下方式定义函数 $\lambda_2\colon [\kappa]^2\to\kappa$

$$\lambda_2(\alpha,\beta):=\sup(\alpha\cap\{\sup(C_\eta\cap\alpha)\mid\eta\in\mathrm{Im}(\mathrm{tr}(\alpha,\beta))\}).$$

注意，当 $0<\alpha<\beta<\kappa$ 时，$\lambda_2(\alpha,\beta)<\alpha$，因为 $\mathrm{tr}(\alpha,\beta)$ 是一个有限序列。

事实 2.11（[LHR18，引理 4.7]）。假设 $\lambda_2(\alpha,\beta)<\epsilon<\alpha<\beta<\kappa$。

那么，$\mathrm{tr}(\epsilon,\beta)$ 末端延拓 $\mathrm{tr}(\alpha,\beta)$，并且以下情形之一成立：

（1） $\alpha\in\mathrm{tr}(\epsilon,\beta)$ 的像；或（2） $\alpha\in\mathrm{acc}(C_\eth)$，其中 $\eth:=\min(\mathrm{tr}(\alpha,\beta)$ 的像)。

定义 2.12（[RZ21，定义 2.10]）。对于每个 $(\alpha,\beta)\in[\kappa]^2$，我们定义一个序数 $\eth_{\alpha,\beta}\in[\alpha,\beta]$ 如下：

$$\eth_{\alpha,\beta}:=\begin{cases}\min(\mathrm{Im}(\mathrm{tr}(\alpha,\beta))), & \alpha\in\mathrm{acc}(C_{\min(\mathrm{Im}(\mathrm{tr}(\alpha,\beta)))});\\ \alpha, & \text{otherwise;}\end{cases}$$

注 2.13。容易看出，对于所有 $\alpha<\beta<\kappa$，$\sup(C_{\eth_{\alpha,\beta}})=\sup(\alpha)$，并且由事实 2.11 可得

$$\mathrm{tr}(\epsilon,\beta)=\mathrm{tr}(\eth_{\alpha,\beta},\beta)^\frown\mathrm{tr}(\epsilon,\eth_{\alpha,\beta}),$$

只要 $\lambda_2(\alpha,\beta)<\epsilon<\alpha<\beta<\kappa$。

事实 2.14（Todor̆cevi´c，[Tod07，§9]）。如果对于正则基数 λ，$\kappa=\lambda^+$ 且对于所有 $\beta<\kappa$都有 $\mathrm{otp}(C_\beta)\leq\lambda$，那么存在一个次可加着色 $\rho\colon[\kappa]^2\to\lambda$，满足对于所有 $\alpha<\beta<\kappa$和 $\eta\in\mathrm{Im}(\mathrm{tr}(\alpha,\beta))$，$\rho(\alpha,\beta)\geq\mathrm{otp}(C_\eta\cap\alpha)$。

3. Weak Kurepa trees and the branch spectrum

在本节中，μ 表示一个基数，θ 表示一个序数。

定义 3.1. $\mathcal{T}(\mu,\theta)$ 表示所有满足以下两个条件的子集 $T\subseteq{}^{<\theta}\mu$ 的集合：

(1) T 向下封闭，即对每个 $t\in T$，$\{t\restriction\alpha\mid\alpha<\theta\}\subseteq T$；(2) 对每个 $\alpha<\theta$，集合 $T_\alpha:=T\cap{}^\alpha\mu$ 非空且基数为 $<\mu$。

若存在一个基数 μ，使得 $T\in\mathcal{T}(\mu,\theta)$，我们就称 T 是高度为 θ 的树。[5] 注意，θ 是唯一确定的。对于这样的树 T，我们称 T_α 为 T 的第 α^{th} 层，而所有经过 T 的分支构成的集合 $\{b\in{}^\theta\mu\mid\forall\alpha<\theta\,(b\restriction\alpha\in T_\alpha)\}$ 记作 $\mathcal{B}(T)$。此外，对所有 f，$g\in{}^{\leq\mu}\theta$，我们令

$$\Delta(f,g):=\begin{cases}\min\{\delta\in\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)\mid f(\delta)\neq g(\delta)\}, & \text{if } f\not\subseteq g\ \&\ g\not\subseteq f;\\ \min\{\mathrm{dom}(f),\mathrm{dom}(g)\}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

[5]这里不失一般性，参见 [BR21, 引理 2.5(2)]。

定义 3.2. 若对所有 $\alpha<\beta<\theta$ 和 $t\in T_\alpha$，都存在 $t'\in T_\beta$ 使得 $t\sqsubseteq t'$，则称 (μ,θ) 为正规。

定义 3.3. 给定一棵树 T 和一个子集 $B\subseteq\mathcal{B}(T)$，我们考虑如下子树：

$$T^{\rightsquigarrow B}:=\{t\in T\mid|\{b\in B\mid t\sqsubseteq b\}|=|B|\}.$$

引理 3.4. 假设 $T\in\mathcal{T}(\mu,\theta)$，且 λ 是一个无限正则基数。

(1) 若 $\lambda\geq\mu$，则对每个 $B\in[\mathcal{B}(T)]^\lambda$，$T^{\rightsquigarrow B}$ 属于 $\mathcal{T}(\mu,\theta)$且是正规的；(2) 若 $\lambda\geq\mathrm{max}\{\mu,|\theta|^+\}$，则对所有 $A,B\in[\mathcal{B}(T)]^\lambda$，存在 $s\in T$ 和 $i\neq i'$，使得 $s^\frown\langle i\rangle\in T^{\rightsquigarrow A}$ 且 $s^\frown\langle i'\rangle\in T^{\rightsquigarrow B}$。

证明. (1) 假设 $B\in[\mathcal{B}(T)]^\lambda$ 且 $\lambda\geq\mu$。显然，$\emptyset\in T^{\rightsquigarrow B}$。因此，为了证明 $T^{\rightsquigarrow B}$ 的高度为 θ 且是正规的，取 $\alpha<\beta<\theta$ 和 $t\in(T^{\rightsquigarrow B})_\alpha$，我们将证明存在 $t'\in(T^{\rightsquigarrow B})_\beta$，它扩展了 t。

根据 t, B' 的选择：$=\{b\in B\mid t\sqsubseteq b\}|$ 的基数为 λ。由于 $T\in\mathcal{T}(\mu,\theta)$，因此 $0<|T_\beta|<|B'|=\mathrm{cf}(|B'|)$成立，进而由鸽巢原理可得$t'\in T_\beta$，使得 $\{b\in B'\mid t'\sqsubseteq b\}$ 的基数为 λ。显然，t' 正是所求。

(2) 假设 $A,B\in[\mathcal{B}(T)]^\lambda$ 且 $\lambda\geq\mathrm{max}\{\mu,|\theta|^+\}$。必要时取 A 和 B中基数为λ的子集后，不妨设 $A\cap B=\emptyset$。令 $\langle a_j\mid j<\lambda\rangle$ 为 A的某个单射枚举，同样令 $\langle b_j\mid j<\lambda\rangle$ 为 B的某个单射枚举。对于每个 $j<\lambda$，由于 $a_j\neq b_j$，我们可以令 $\delta_j:=\Delta(a_j,b_j)+1$。由于 λ是一个大于 $|\theta|$的正则基数，我们可以固定某个 $J\in[\lambda]^\lambda$，使映射$j\mapsto\delta_j$ 在其上恒取某个值，记为 δ。由于 $T_{\delta+1}$ 的基数为 $<\mu\leq\lambda$，我们还可以假设映射 $j\mapsto((a_j\restriction\delta+1),(b_j\restriction\delta+1))$在 J上恒取某个值，记为$(s^\frown\langle i\rangle,s^\frown\langle i'\rangle)$。于是得证。□

推论 3.5. 假设 $T\in\mathcal{T}(\lambda,\theta)\cap\mathcal{P}(^{<\theta}2)$，其中 $\lambda=\mathrm{cf}(\lambda)>\mathrm{cf}(\theta)\geq\omega$。假设给定了 $i<2$ 和 $X\in[\mathcal{B}(T)]^\lambda$。那么，对于 λ-多个 $x\in X$，存在共终的多个 $\delta<\theta$，使得以下两条成立：

(1) $x(\delta)=i$;
(2) $\{y\in X\mid\Delta(x,y)=\delta\}$ *has size* λ.

证明. 假设结论不成立。特别地，所有满足条款 (1) 和 (2) 的 $\delta<\theta$ 只有有界多个的 $x\in X$ 所构成的集合 Y，其基数为 λ。因此，对每个$x\in Y$，以下序数小于 θ：

$$\epsilon_x:=\sup\{\delta<\theta\mid x(\delta)=i\ \&\ |\{y\in X\mid\Delta(x,y)=\delta\}|=\lambda\}.$$

由于 $|Y|=\mathrm{cf}(\lambda)>\mathrm{cf}(\theta)$，我们可以找到某个 $\epsilon<\theta$，使得 $Z:=\{x\in Y\mid\epsilon_x=\epsilon\}$ 的基数为 λ。由于 $|T_{\epsilon+1}|<\lambda$，我们也可以找到某个 $t\in T_{\epsilon+1}$，使得 $Z_t:=\{x\in Z\mid t\sqsubseteq x\}$ 的基数为 λ。现在，利用引理 3.4(2)，取 $\mu:=\lambda$、$A:=Z_t$ 和 $B:=Z_t$，我们可以找到 $s\in T$ 和 $j<2$，使得 $\hat{}A:=\{a\in A\mid s^\frown\langle j\rangle\sqsubseteq a\}$ 和 $\hat{}B:=\{b\in B\mid s^\frown\langle 1-j\rangle\sqsubseteq b\}$ 的基数均为 λ。由于 $A=B$，并且可能需要交换 A 和 B 的角色，我们不妨假设 $j=i$。记 $\delta:=\mathrm{dom}(s)$。$\hat{}\hat{}$对所有 $a\in A$ 和 $b\in B$，由于 a、$b\in Z_t$，$s^\frown\langle i\rangle$ 和 $s^\frown\langle 1-i\rangle$ 都与 t 相容，因此 $\delta=\mathrm{dom}(s)\geq\mathrm{dom}(t)>\epsilon$。现在，对每个 $x\in\hat{}A$，有 $\hat{}\hat{}x(\delta)=i$，且 $\{y\in X\mid\Delta(x,y)=\delta\}$ 覆盖 B，但 $|B|=\lambda$，因此我们得到了与 $\delta>\epsilon=\epsilon_x$ 这一事实矛盾的结论。□

引理 3.6. 假设 $T\in\mathcal{T}(\mu,\mu)$，且 μ 是正则不可数基数。另假设 $\langle b_\xi\mid\xi<\mu\rangle$ 是某个 $B\in[\mathcal{B}(T)]^\mu$ 的单射枚举。

对于每个 $\langle t_\alpha \mid \alpha<\mu\rangle \in \prod_{\alpha<\mu}(T^{\rightsquigarrow B}\cap {}^{\alpha}\mu)$，对闭无界集中的许多 $\alpha<\mu$，

$$\sup(\{\Delta(b_\beta,t_\alpha)\mid \beta<\alpha\}\cap\alpha)=\alpha.$$

特别地，对于闭无界多个 $\alpha<\mu$，

$$\sup\{\gamma<\mu\mid \alpha\in \mathrm{acc}^{+}(\{\Delta(b_\beta,b_\gamma)\mid\beta<\alpha\})\}=\mu.$$

证明。“特别地”部分由主张结合引理 3.4(1) 得出，使用 $\lambda:=\mu$。接下来，为证明主张，令 $\langle t_\alpha \mid \alpha<\mu\rangle \in \prod_{\alpha<\mu}(T^{\rightsquigarrow B}\cap {}^{\alpha}\mu)$。记 $\Gamma_\alpha:=\{\gamma<\mu\mid t_\alpha\sqsubseteq b_\gamma\}$。考虑闭无界集

$$C:=\{\alpha\in\mathrm{acc}(\mu)\mid \forall\bar\alpha<\alpha\,[\min(\Gamma_{\bar\alpha}\setminus\bar\alpha)<\alpha]\}.$$

注意，对于每个 $\alpha<\mu$, $D^\alpha:=\{\Delta(b_\beta,t_\alpha)\mid\beta\in\alpha\setminus\Gamma_\alpha\}$ 都是 α 的子集。

断言 3.6.1。以下集合覆盖 μ 中的一个闭无界集：

$$A:=\{\alpha<\mu\mid \sup(D^\alpha)=\alpha\}$$

证明。反设不然。固定一个序数 $\epsilon<\mu$，使得以下集合是平稳集：

$$S:=\{\alpha\in C\mid \sup(D^\alpha)=\epsilon\}.$$

需要考虑两种情况：

► 假设存在一个函数 $b:\mu\to\mu$，使得 $S_b:=\{\alpha\in S\mid b\restriction\alpha=t_\alpha\}$ 在 μ 中是共终的。取 $\bar\alpha\in S_b\setminus(\epsilon+1)$。由于 $\Gamma_{\bar\alpha}$ 不止一个元素，我们现在可以找到这样的 $\beta\in\Gamma_{\bar\alpha}$，使得 $b\neq b_\beta$。于是 $\epsilon<\bar\alpha\leq\Delta(b_\beta,b)<\mu$。取一个大于 $\max\{\Delta(b_\beta,b)\mid\beta\}$ 的 $\alpha\in S_b$。于是 $\epsilon<\Delta(b_\beta,t_\alpha)<\alpha$，这与 $\sup(D^\alpha)=\epsilon$ 这一事实矛盾。

► 假设第一种情况不成立。首先，由于 $|T_{\epsilon+1}|<\mu$，取一个节点 $t\in T_{\epsilon+1}$，使得 $S':=\{\alpha\in S\mid t_\alpha\restriction(\epsilon+1)=t\}$ 是平稳集。由于对于每个函数 $b:\mu\to\mu$，集合 $S_b:=\{\alpha\in S\mid b\restriction\alpha=t_\alpha\}$ 在 μ 中有界，我们现在可以取一对 $(\bar\alpha,\alpha)\in S'$，使得 $t_{\bar\alpha}\not\sqsubseteq t_\alpha$，从而 $\epsilon<\Delta(t_{\bar\alpha},t_\alpha)<\bar\alpha$。令 $\beta:=\min(\Gamma_{\bar\alpha}\setminus\bar\alpha)$。于是$b_\beta\restriction\bar\alpha=t_{\bar\alpha}$，因此 $\Delta(b_\beta,t_\alpha)=\Delta(t_{\bar\alpha},t_\alpha)$。也就是说，$\epsilon<\Delta(b_\beta,t_\alpha)<\bar\alpha\leq\beta<\alpha$，这与 $\sup(D^\alpha)=\epsilon$ 这一事实矛盾。□

令 $\alpha\in A$。回想一下，Γ_α 的基数为 μ，并注意，对于每个 $\gamma\in\Gamma_\alpha$，

$$\{\Delta(b_\beta,b_\gamma)\mid\beta<\alpha\}\cap\alpha=\{\Delta(b_\beta,t_\alpha)\mid\beta<\alpha\}\cap\alpha=D^\alpha,$$

因此证毕。 □

引理 3.7。设 $T\in\mathcal{T}(2^\mu,\mu)\cap\mathcal{P}({}^{<\mu}\mu)$，其中 μ 是一个无限正则基数。对于每个 $B\in[\mathcal{B}(T)]^\mu$，存在 $B'\in[B]^\mu$ 和 $\theta\leq\mu$ 使得：

(1) 对每个 $B''\in[B']^\mu$，$T^{\rightsquigarrow B''}$属于 $\mathcal{T}(\mu,\theta)$ 且是正规的；(2) 若 $\theta<\mu$，或若 T 不含 μ-阿隆佐恩子树，则对于每个 $B''\in[B']^\mu$，$|\mathcal{B}(T^{\rightsquigarrow B''})|=\mu$；(3) 若 $\theta<\mu$，则 $|\{b\in B'\mid \mathrm{ssup}\{\Delta(t,b\restriction\theta)\mid t\in T^{\rightsquigarrow B'}\ \&\ t\not\sqsubseteq b\}<\theta\}|<\mu$。

证明。设 $B\in[\mathcal{B}(T)]^\mu$。

断言 3.7.1. 如果 $T^{\rightsquigarrow B}\in\mathcal{T}(\mu,\mu)$，那么数对 $(B',\theta):=(B,\mu)$ 正是所求。

证明。假设 $T^{\rightsquigarrow B}$属于 $\mathcal{T}(\mu,\mu)$。对于每个 $B''\in[B]^\mu$, $T^{\rightsquigarrow B''}=(T^{\rightsquigarrow B})^{\rightsquigarrow B''}$，因此引理 3.4(1)表明 $T^{\rightsquigarrow B''}\in\mathcal{T}(\mu,\mu)$ 且为正规。此外，若存在某个 $B''\in[B]^\mu$ 使得 $|\mathcal{B}(T^{\rightsquigarrow B''})|<\mu$，那么考察 $B'''\coloneqq B''\setminus\mathcal{B}(T^{\rightsquigarrow B''})$，可得 $T^{\rightsquigarrow B'''}$是 T的一个 μ-阿朗佐恩子树。□

从现在起，假设 $T^{\rightsquigarrow B} \in \mathcal{T}(2^{\mu},\mu) \setminus \mathcal{T}(\mu,\mu)$。令 $\theta<\mu$ 为使得 $(T^{\rightsquigarrow B})_\theta$ 的基数为 $\geq\mu$的最小者。令 $\langle t_i \mid i<\mu\rangle$ 为 $(T^{\rightsquigarrow B})_\theta$中元素构成的一个单射序列。对于每个 $i<\mu$，选取 $b_i\in B$ 使得 $t_i\sqsubseteq b_i$，并令 $B':=\{b_i\mid i<\mu\}$。为证明有序对 (B',θ) 正如所需，令 $B''\in[B']^{\mu}$。

断言 3.7.2. $T^{\rightsquigarrow B''}$属于 $\mathcal{T}(\mu,\theta)$，且是正规的。

证明。对于每个 $\alpha\in[\theta,\mu)$，对于每个 $t\in(T^{\rightsquigarrow B''})_\alpha$，都存在唯一的 $i<\mu$ 使得 $t_i\sqsubseteq t$，因此 $\{b\in B''\mid t\sqsubseteq b\}\subseteq\{b_i\}$ 是有限的。所以，$(T^{\rightsquigarrow B''})_\alpha$ 为空。此外，由于 $B''\subseteq B'\subseteq B$，对于所有 $\alpha<\theta$，都有$|(T^{\rightsquigarrow B''})_\alpha|\leq|(T^{\rightsquigarrow B})_\alpha|<\mu$。

显然，$\emptyset\in T^{\rightsquigarrow B''}$。最后，令 $\alpha<\beta<\mu$ 满足 $t\in(T^{\rightsquigarrow B''})_\alpha$，我们将找到$t'\in(T^{\rightsquigarrow B''})_\beta$，使其扩张 t。根据 t的选取，$B^*:=\{b\in B''\mid t\sqsubseteq b\}$的基数为 μ。由 θ的极小性，映射 $b\mapsto b\restriction\beta$ 从 B^* 到 T_β 的像的基数不可能为 μ，因此存在 $B^{**}\in[B^*]^{\mu}$，使上述映射在其上为常值，取某个值，记为 t'。显然，t' 正是所求。□

断言 3.7.3. $|\mathcal{B}(T^{\rightsquigarrow B''})|=\mu$。

证明。假设不然。特别地，$I:=\{i<\mu\mid b_i\in B''\ \&\ t_i\notin\mathcal{B}(T^{\rightsquigarrow B''})\}$ 的基数为μ。由此可知，存在一个 $\alpha<\theta$，使得 $I_\alpha:=\{i\in I\mid(t_i\restriction\alpha)\notin T^{\rightsquigarrow B''}\}$的基数为 μ。然而，μ是一个大于 $|T_\alpha|\geq|(T^{\rightsquigarrow B''})_\alpha|$的正则基数，因此必定存在某个 $s\in(T^{\rightsquigarrow B''})_\alpha$，使得 $\{i\in I_\alpha\mid(t_i\restriction\alpha)=s\}$ 的基数为μ。这就产生了矛盾。□

命题 3.7.4. $|\{i<\mu\mid$上确界$\{\Delta(t,t_i)\mid t\in T^{\rightsquigarrow B'}\ \&\ t\not\sqsubseteq t_i\}<\theta\}|<\mu$。

证明。反设，并选取 $\epsilon<\theta$，使得以下集合的基数为 μ:

$$I:=\{i<\mu\mid \mathrm{ssup}\{\Delta(t,t_i)\mid t\in T^{\rightsquigarrow B'}\ \&\ t\not\sqsubseteq t_i\}=\epsilon\}.$$

然后选取 $s\in T_\epsilon$，使得 $\{i\in I\mid t_i\restriction\epsilon=s\}$ 的基数为 μ。最后，仿照引理 3.4(2) 的证明，我们可以找到某个 $s'\in T^{\rightsquigarrow B'}$，它扩张了 s 和 $j\neq j'$，并且 $\{i\in I\mid s'^\frown\langle j\rangle\sqsubseteq t_i\}$ 和 $\{i\in I\mid s'^\frown\langle j'\rangle\sqsubseteq t_i\}$ 的基数均为 μ。特别地，存在 $i\neq i'$ 属于 I，使得 $t_i\cap t_{i'}=s'$。因此 $\Delta(s'^\frown\langle i'\rangle,t_i)\geq\epsilon$，这与 $i\in I$ 的事实矛盾。□

证明至此完成。 □

定义 3.8。令 μ 表示一个无限基数。

(1) 弱 μ-Kurepa 树是一棵高度为 μ、基数为 μ，且满足 $|\mathcal{B}(T)|>\mu$ 的树 T；(2) μ-Kurepa 树是一棵高度为 μ 的树 T，其中 $\{\alpha<\mu\mid|T_\alpha|>|\alpha|\}$ 是非平稳集，并且 $|\mathcal{B}(T)|>\mu$。

注 3.9. 如 Kun80, §II 的习题 34 所示，如果存在一棵 μ-Kurepa 树（分别地，弱 μ-Kurepa 树），那么就存在一棵是 ${}^{<\mu}2$ 的子集的此类树。

定义 3.10（分支谱）。$T(\mu,\theta)$ 表示所有满足以下条件的基数的集合：存在 $T\in\mathcal{T}(\mu,\theta)$，且满足 $\kappa\leq|\mathcal{B}(T)|$。

命题 3.11. 设 μ 和 θ 表示无限基数。那么：

(1) $\sup(T(\mu,\theta))\leq\mu^\theta$; (2) 如果 θ 是满足 $\mu^\theta>\mu$ 的最小基数，那么 $\max(T(\mu^+,\theta))=(\mu^+)^\theta$; (3) 如果存在弱 μ-Kurepa 树，那么 $\mu^+\in T(\mu^+,\mu)$;

(4) 如果存在 μ-Kurepa 树，那么 $\mu^+ \in T(\mu,\mu)$; (5)

如果 μ 是强极限，那么 $2^\mu \in T(\mu, \mathrm{cf}(\mu))$.

证明。显然。 □

注记3.12. $T(\mu,\theta)$ 不一定有极大元。根据 [Po´o21], , 对于 $T(\omega_1,\omega_1)$，其上确界不属于该集合是相容的。 不过请注意，$\mathcal{T}(\mu,\theta)$ 对长度为 $<\mathrm{cf}(\mu)$ 的并集封闭，因此 $T(\mu,\theta)$ 是 $<\mathrm{cf}(\mu)$-闭的。

命题3.13. 对每个 $\kappa \in T(\mu,\theta)$，都存在一个着色 $c\colon [\kappa]^2 \to \theta$，它为每个正则基数 $\lambda \in [\mu,\kappa]$ 见证 $\mathrm{U}(\kappa,\lambda,\lambda,\theta,2)$。

证明。给定 $\kappa \in T(\mu,\theta)$，固定一个 $T \in \mathcal{T}(\mu,\theta)$，它容许一个单射序列 $\langle b_\xi \mid \xi<\kappa\rangle$，其元素均属于 $\mathcal{B}(T)$。定义 $c\colon [\kappa]^2 \to \theta$，使其通过 $c(\alpha,\beta) := \Delta(b_\alpha, b_\beta)$。现在，给定 $\tau<\theta$ 和正则基数 $\lambda \in [\mu,\kappa]$对应的 $A \in [\kappa]^\lambda$，由于 $|T_{\tau+1}|<\mu$，可以找到 $x \in T_{\tau+1}$，使得 $B := \{\alpha \in A \mid x \sqsubseteq b_\alpha\}$ 的基数为 λ。显然，对于来自 B 的所有 $\alpha \neq \beta$，$c(\alpha,\beta) > \tau$。□

4. 良性幺半群的着色

本节中，我们给出使 $G \nrightarrow [\lambda]^{\mathrm{FS}_n}_\theta$成立的充分条件。为方便读者，我们先讨论 $n=2$的特殊情形。接下来的引理4.2将此情形归结为以下简单的组合原理。

定义4.1. $S_2(\kappa,\lambda,\theta)$断言存在一种着色 $d\colon [\kappa]^{<\omega} \to \theta$，使得对于每个基数为 λ 的 $\mathcal{X} \subseteq [\kappa]^{<\omega}$ 以及每个指定颜色 $\tau<\theta$，都存在两个不同的 $x,y \in \mathcal{X}$，使得只要 $(x \triangle y) \subseteq z \subseteq (x \cup y)$，就有 $d(z)=\tau$。

引理4.2（[FBR17，定理4.7]）。设对于给定的基数 $\theta \leq \lambda \leq \kappa$，其中 λ 为正则不可数基数，$S_2(\kappa,\lambda,\theta)$成立。

那么，对于每个满足 $|G|=\kappa$ 的良性岩浆（G，$*$），$G \nrightarrow [\lambda]^{\mathrm{FS}_2}_\theta$都成立。

证明。设 d 是见证 $S_2(\kappa,\ \lambda,\ \theta)$ 的着色。假设（G，$*$）是满足 $|G|=\kappa$ 的性质良好的岩浆。通过将 $[G]^{<\omega}$ 与 $[\kappa]^{<\omega}$ 等同，我们可以固定一个映射 $\varphi\colon G \to [G]^{<\omega}$，使得：

- φ 是 $<\lambda$ 对一的；
- 对于所有 $x \neq y \in G$，$\varphi(x) \triangle \varphi(y) \subseteq \varphi(x*y) \subseteq \varphi(x) \cup \varphi(y)$。

定义着色 $c\colon G \to \theta$，令 $c := d \circ \varphi$。为证明 c 符合要求，取 $X \in [G]^\lambda$。由于 φ 是 $<\lambda$ 对一的，$\mathcal{X} := \{\varphi(x) \mid x \in X\}$ 的基数为 λ。因此，给定指定颜色 $\tau<\theta$，我们可以找到 x、$y \in X$，使得 $\varphi(x) \neq \varphi(y)$，并且当（$\varphi(x) \triangle \varphi(y)$）$\subseteq z \subseteq (\varphi(x) \cup \varphi(y))$ 时，$d(z)=\tau$。特别地，$x \neq y$ 且 $c(x*y) = d(\varphi(x*y)) = \tau$。□

问题随之而来：如何获得 $S_2(\ldots)$ 的实例？[FBR17, 引理 3.4] 的证明清楚地表明，以下结论成立：

事实 4.3. 设 λ 是一个正则不可数基数，且 θ 是一个无限基数。那么 $\mathrm{Pr}_1(\kappa,\lambda,\theta,\omega)$ 蕴含 $S_2(\kappa,\lambda,\theta)$。

注 4.4. 原理 $\mathrm{Pr}_1(\kappa,\lambda,\theta,\omega)$ 是对 $\kappa \nrightarrow [\lambda]^2_\theta$ 的一种特殊加强；$\lambda]^2_\theta$。由于它在本文中不会发挥作用，我们省略其定义，仅指出以下推论。根据 Fleissner 的定理 [Fle78, §5], , 对于每个正则不可数基数 κ，在添加 κ 个科恩实数的强迫扩张中，$\mathrm{Pr}_1(\kappa,\omega_1,\omega,\omega)$ 成立。因此，如果 κ 是正则基数 $\geq \mathfrak{c}$，那么添加 κ 个科恩实数后，$S_2(2^{\aleph_0},\aleph_1,\aleph_0)$ 成立。

在 $\lambda = \kappa$ 的情况下，我们现在可以如下改进事实 4.3。

定理 4.5。设 κ 是一个正则不可数基数，且 θ 是一个无限基数。那么 $\kappa \nrightarrow [\kappa;\ \kappa]^2_\theta$ 蕴含 $S_2(\kappa,\kappa,\theta)$。

证明。设 $c:\ [\kappa]^2 \to \theta$ 是见证 $\kappa \nrightarrow [\kappa;\ \kappa]^2_\theta$ 的着色。固定一个双射 $\pi:\ \theta \leftrightarrow \theta \times \omega$，然后找到 $c_0:\ [\kappa]^2 \to \theta$ 和 $c_1:\ [\kappa]^2 \to \omega$，使得对于每个 $(\alpha,\beta) \in [\kappa]^2$，$\pi(c(\alpha,\beta)) = (c_0(\alpha,\beta)\ c_1(\alpha,\beta))$。

定义一个着色 $d:\ [\kappa]^{<\omega} \to \theta$ 如下。对于 $z \in [\kappa]^{<2}$，令 $d(z):=0$ 即可。接下来，对于基数为 ≥ 2 的 $z \in [\kappa]^{<\omega}$，先令 $\langle \alpha_i \mid i < |z| \rangle$ 表示 z 的递增枚举，然后令 $d(z):=c_0(\alpha_{j_z},\alpha_{j_z+1})$，其中

$$j_z := \min\{j < |z|-1 \mid c_1(\alpha_j,\alpha_{j+1}) = \max\{c_1(\alpha_i,\alpha_{i+1}) \mid i < |z|-1\}\}.$$

为说明这一方法有效，假设给定一个大小为 κ 的族 $\mathcal{X} \subseteq [\kappa]^{<\omega}$，以及指定颜色 $\tau < \theta$。经稀疏化后，可假设 $\mathcal{X}$ 构成一个具有某个根 r 的头-尾-尾 Δ-系。进一步稀疏化后，可假设存在某个 $n < \omega$，使得 c_1“$[x]^2 \subseteq n$ 对所有 $x \in \mathcal{X}$ 都成立。将 $\mathcal{X}$ 分成两个大小为 κ 的集合 $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{X}_1$。令 $A := \{\min(x \setminus r) \mid x \in \mathcal{X}_0\}$，并令 $B := \{\max(x \setminus r) \mid x \in \mathcal{X}_1\}$。由于 c 是 $\kappa \nrightarrow [\kappa$ 的见证；$\kappa]^2_\theta$，固定 $(\alpha,\beta) \in A \circledast B$，使得 $c(\alpha,\beta) = \pi^{-1}(\tau,n)$。选取唯一的 $x,y \in \mathcal{X}$，使得 $\alpha = \min(x \setminus r)$ 且 $\beta = \max(x \setminus r)$。由于 $\mathcal{X}_0 \cap \mathcal{X}_1 = \emptyset$，$x \neq y$。因此，$x \setminus r < y \setminus r$。现在固定任意集合 z，使得 $(x \mathbin{\triangle} y) \subseteq z \subseteq (x \cup y)$。显然 $|z| \geq 2$。令 $\langle \alpha_i \mid i < |z| \rangle$ 表示 z 的递增枚举。对于每个 $i < |z|$，若 $\{\alpha_i,\alpha_{i+1}\} \subseteq x$，则 $c_1(\alpha_i,\alpha_{i+1}) < n$；同样，若 $\{\alpha_i,\alpha_{i+1}\} \subseteq y$，则 $c_1(\alpha_i,\alpha_{i+1}) < n$。由于 $x \setminus r < y \setminus r$ 且 $\{\alpha,\beta\} \subseteq z$，可知存在 $j < |z|$，使得 $a_j = \alpha$ 且 $\alpha_{j+1} = \beta$。对于这个 j，我们将有 $c_1(\alpha_j,\alpha_{j+1}) = c_1(\alpha,\beta) = n$。总而言之，$d(z) = c_0(\alpha,\beta) = \tau$，正如所求。□

至于一般情形（即 $\lambda \leq \kappa$），我们现在给出一个抽取原理，它足以从 $\kappa \nrightarrow [\lambda$ 推导出 $S_2(\kappa,\lambda,\theta);\ \lambda]^2_\theta$。粗略地说，下面的原理断言存在一个映射 $e:[\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^2$，在某些情形下，它能够从任意给定的集合 $z \in [\kappa]^{<\omega}$ 中抽取两个特殊点 $e(z)$。

定义 4.6. $\mathrm{Extract}_2(\kappa,\lambda,\theta,\chi)$ 断言存在一个映射 $e:\ [\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^2$，满足：对于 κ 的每个子集序列 $\langle x_\gamma \mid \gamma < \lambda \rangle$、每个 $r \in [\kappa]^{<\theta}$ 以及每个非零 $\sigma < \chi$，均有：

(1) 对于每个 $(\gamma,\gamma') \in [\lambda]^2$，$x_\gamma \cap x_{\gamma'} \subseteq r$；(2) 对于
每个 $\gamma < \lambda$，$y_\gamma := x_\gamma \setminus r$ 的序型为 σ，
存在 $j < \sigma$，以及 Γ_0、Γ_1 这两个互不相交的共尾子集，它们满足以下条件：

(a) 对每个 $(\gamma,\gamma') \in [\Gamma_0 \cup \Gamma_1]^2$，$y_\gamma(j) < y_{\gamma'}(j)$；(b) 对每个 $(\gamma,\gamma') \in (\Gamma_0 \circledast \Gamma_1) \cup (\Gamma_1 \circledast \Gamma_0)$，对于每个覆盖 $\{y_\gamma(j)\ y_{\gamma'}(j)\}$ 的 $z \in [x_\gamma \cup x_{\gamma'}]^{<\omega}$，我们有

$$e(z) = (y_\gamma(j), y_{\gamma'}(j)).$$

注 4.7. 不失一般性，我们可以假设，对于每个基数为 ≥ 2 的 $z \in [\kappa]^{<\omega}$，$e(z) \in [z]^2$。另请注意，$\mathrm{Extract}_2(\kappa,\kappa,\mathrm{cf}(\kappa),2)$ 是 ZFC 的一个定理。

引理 4.8. 假设 λ 是一个正则不可数基数，θ 是任意基数。如果 $\kappa \nrightarrow [\lambda;\ \lambda]^2_\theta$ 和 $\mathrm{Extract}_2(\kappa,\lambda,\omega,\omega)$ 均成立，那么 $S_2(\kappa,\lambda,\theta)$ 也成立。

证明. 假设 $c\colon [\kappa]^2\to\theta$ 是 $\kappa\nrightarrow[\lambda;\ \lambda]^2_\theta$的一个见证，并且 $e\colon [\kappa]^{<\omega}\to[\kappa]^2$ 是 $\mathrm{Extract}_2(\kappa,\lambda,\omega,\omega)$ 的一个见证。我们断言 $d:=c\circ e$ 是 $S_2(\kappa,\lambda,\theta)$ 的一个见证。为此，假设给定了一个基数为 λ 的子族 $\mathcal{X}\subseteq[\kappa]^{<\omega}$，以及一个指定颜色 $\tau<\theta$。由于 λ 是正则且不可数的，根据 Δ-系引理，我们可以找到一个由 $\mathcal{X}$ 中元素组成的序列 $\langle x_\gamma\mid\gamma<\lambda\rangle$、某个 $r\in[\kappa]^{<\omega}$，以及一个非零 $\sigma<\chi$，使得：

(1) for every $(\gamma,\gamma')\in[\lambda]^2$, $x_\gamma\cap x_{\gamma'}=r$;
(2) for every $\gamma<\lambda$, $y_\gamma:=x_\gamma\setminus r$ has order-type σ.

因此，根据 e 的选取，我们可以取某个整数 $j<\sigma$ 以及 λ 的共尾子集 Γ_0、Γ_1，使其满足以下条件：

(a) For every $(\gamma,\gamma')\in[\Gamma_0\cup\Gamma_1]^2$, $y_\gamma(j)<y_{\gamma'}(j)$;
(b) For every $(\gamma,\gamma')\in(\Gamma_0\circledast\Gamma_1)\cup(\Gamma_1\circledast\Gamma_0)$, for every $z\in[x_\gamma\cup x_{\gamma'}]^{<\omega}$ covering $\{y_\gamma(j),y_{\gamma'}(j)\}$, we have
$$e(z)=(y_\gamma(j),y_{\gamma'}(j)).$$

令 $A:=\{y_\gamma(j)\mid\gamma\in\Gamma_0\}$，并令 $B:=\{y_\gamma(j)\mid\gamma\in\Gamma_1\}$。根据 c 的选取，我们可以找到 $(\alpha,\beta)\in A\circledast B$，使得 $c(\alpha,\beta)=\tau$。取满足 $y_\gamma(j)=\alpha$ 的 $\gamma\in\Gamma_0$，并取满足 $y_{\gamma'}(j)=\beta$ 的 $\gamma'\in\Gamma_1$。由于 $\alpha<\beta$，条款 (a) 蕴含 $(\gamma,\gamma')\in(\Gamma_0\circledast\Gamma_1)$。由于 $x_\gamma\cap x_{\gamma'}=r$，我们推得 $\{\alpha,\beta\}\subseteq x_\gamma\mathbin{\triangle}x_{\gamma'}$。因此，对于每个满足 $(x_\gamma\mathbin{\triangle}x_{\gamma'})\subseteq z\subseteq(x_\gamma\cup x_{\gamma'})$ 的集合 z，我们有

$$d(z)=c(e(z))=c(\alpha,\beta)=\tau,$$

如所求。 □

受前述归约的启发，我们希望了解如何得到 $\mathrm{Extract}_2(\kappa,\lambda,\omega,\omega)$。下面的引理给出了一个充分条件。

引理 4.9. 假设 $\kappa\in T(\mu,\theta)$。那么，对每个满足 $\max\{\mu,\theta^+\}\leq\lambda\leq\kappa$ 的正则基数 λ，都存在一个映射 $e\colon[\kappa]^{<\omega}\to[\kappa]^2$，它见证 $\mathrm{Extract}_2(\kappa,\lambda,\mathrm{cf}(\theta),\omega)$。

证明。由于 $\kappa\in T(\mu,\theta)$，固定一个 $T\in\mathcal{T}(\mu,\theta)$，它具有一个由 $\mathcal{B}(T)$ 中元素构成的单射序列 $\langle b_\xi\mid\xi<\kappa\rangle$。为简化记号，我们将用 $\Delta(\alpha,\beta)$ 表示 $\Delta(b_\alpha,b_\beta)$。首先，对每个 $z\in[\kappa]^{<\omega}$，令：

- $M_z:=\{(\alpha,\beta)\in[z]^2\mid\Delta(\alpha,\beta)=\max(\Delta\text{“}[z]^2)\}$, and
- $M_z^*:=\{(\alpha,\beta)\in M_z\mid\alpha=\min\{\alpha'\mid(\alpha',\beta')\in M_z\}\}$.

然后，任取一个函数 $e\colon[\kappa]^{<\omega}\to[\kappa]^2$，使得对每个 $z\in[\kappa]^{<\omega}$：

- 对于每个基数为 ≥2 的 $z\in[\kappa]^{<\omega}$，$e(z)\in[z]^2$;
- 若 M_{z^*} 是单元素集，则 $e(z)$ 是其唯一元素。

要证明 e 是所求对象，设 λ 是满足 $\max\{\mu,\theta^+\}\leq\lambda\leq\kappa$ 的正则基数，并且给定如定义 4.6 中所述的 $\langle x_\gamma\mid\gamma<\lambda\rangle$、$r\in[\kappa]^{<\mathrm{cf}(\theta)}$ 和 $\sigma<\omega$。根据鸽巢原理和 Dushnik-Miller 定理，我们可以找到一个共尾子集 $\Gamma\subseteq\lambda$、一个序数 $\delta<\theta$，以及一个由节点组成的序列 $\langle t_j\mid j<\sigma\rangle$，其中节点属于 $T_{\delta+1}$，使得对于每个 $(\gamma,\gamma')\in[\Gamma]^2$：

(I) $\sup(\Delta\text{“}[r\cup y_\gamma]^2)=\delta$; (II) 对于每个 $j<\sigma$, $b_{y_\gamma(j)}\restriction(\delta+1)=t_j$; (III) 对于每个 $j<\sigma$, $y_\gamma(j)<y_{\gamma'}(j)$。

断言 4.9.1. 存在 Γ_0、$\Gamma_1\in[\Gamma]^\lambda$ 和一个三元组序列 $\langle(s_j,i_j,i'_j)\mid j<\sigma\rangle$，属于 $T\times\mu\times\mu$，使得对于每个 $j<\sigma$：

- 对于每个 $\gamma \in \Gamma_0$， $s_j{}^\frown\langle i_j\rangle \sqsubseteq b_{y_\gamma(j)}$，
- 对每个 $\gamma \in \Gamma_1$, $s_j{}^\frown\langle i'_j\rangle \sqsubseteq b_{y_\gamma(j)}$，以及
- $i_j \neq i'_j$。

证明。我们将通过递归定义一个有序对序列 $\langle (A_j, B_j) \mid j \leq \sigma\rangle$，使得对于所有 $j < \sigma$, $A_{j+1} \in [A_j \cap \Gamma]^\lambda$ 以及 $B_{j+1} \in [B_j \cap \Gamma]^\lambda$。

首先令 A_0 和 B_0 均为 Γ。现在，对于每个 $j < \sigma$，若有序对 (A_j, B_j) 已经定义，就进行如下操作。令 $A^j := \{y_\gamma(j) \restriction \gamma \in A_j\}$，并令 $B^j := \{y_\gamma(j) \mid \gamma \in B_j\}$。根据子句（III），$A^j$ 和 B^j 的基数均为 λ。因此，根据引理 3.4(2)，我们可以找到 $s_j \in T$ 和 $i_j \neq i'_j$，使得 $\{\alpha \in A^j \mid s_j{}^\frown\langle i_j\rangle \sqsubseteq b_\alpha\}$和 $\{\beta \in B^j \mid s_j{}^\frown\langle i'_j\rangle \sqsubseteq b_\beta\}$ 的基数都为 λ。然后令 $A_{j+1} := \{\gamma \in A_j \restriction s_j{}^\frown\langle i_j\rangle \subseteq b_{y_\gamma(j)}\}$，并令 $B_{j+1} := \{\gamma \in B_j \mid s_j{}^\frown\langle 1 - i_j\rangle \subseteq b_{y_\gamma(j)}\}$。

显然， $\Gamma_0 := A_\sigma$ 和 $\Gamma_1 := B_\sigma$ 正是所求。 □

设 Γ_0, Γ_1 和 $\langle (s_j, i_j, i'_j) \mid j < \sigma\rangle$ 由前面的断言给出。注意，Γ_0 与 Γ_1不相交。令 $\delta^* := \sup\{\mathrm{dom}(s_j) \mid j < \sigma\}$，并令 $j^* := \min\{j < \sigma \restriction \mathrm{dom}(s_j) = \delta^*\}$。

断言 4.9.2. 设 $(\gamma, \gamma') \in (\Gamma_0 \circledast \Gamma_1) \cup (\Gamma_1 \circledast \Gamma_0)$。设 $z \in [x_\gamma \cup x_{\gamma'}]^{<\omega}$ 满足$\{y_\gamma(j^*), y_{\gamma'}(j^*)\} \subseteq z$。则 $e(z) = (y_\gamma(j^*), y_{\gamma'}(j^*))$。

证明。显然， $2 \leq \mathrm{otp}(z) < \omega$，因此 M_z 非空。令 $(\alpha, \beta) \in [z]^2$。根据 z 的选取，我们必须分析以下几种情况：

(1) 假设 $\alpha \in r$。由于 $\beta \in r \cup y_\gamma \cup y_{\gamma'}$，根据子句（I）可得 $\Delta(\alpha, \beta) \leq \delta$。

(2) 假设 $\alpha \in y_\gamma$。(a) 若 $\beta \in r \cup y_\gamma$，则根据子句（I）可得 $\Delta(\alpha, \beta) \leq \delta$；(b) 若 $\beta \in y_{\gamma'}$，则令 $j_\alpha, j_\beta < \sigma$ 满足 $\alpha = y_\gamma(j_\alpha)$ 且 $\beta = y_{\gamma'}(j_\beta)$。有两种可能：(i) 若 $j_\alpha = j_\beta = j$，则根据子句（II），$f_\alpha \restriction (\delta + 1) = t_j = f_\beta \restriction (\delta + 1)$。因此 $\Delta(\alpha, \beta) > \delta$。(ii) 若 $j_\alpha \neq j_\beta$，则根据子句（I）和子句（II），$\Delta(y_{\gamma'}(j_\alpha), \beta) \leq \delta < \Delta(\alpha, y_{\gamma'}(j_\alpha))$，因此 $\Delta(\alpha, \beta) = \Delta(y_{\gamma'}(j_\alpha), \beta) \leq \delta$。

(3) 如果 $\alpha \in y_{\gamma'}$，则分析与 (2) 类似。

综上，到目前为止我们已经证明：

$$\emptyset \subsetneq M_z \subseteq \{(y_\gamma(j), y_{\gamma'}(j)) \mid j < \sigma\}.$$

回想一下，$(\gamma, \gamma') \in (\Gamma_0 \circledast \Gamma_1) \cup (\Gamma_1 \circledast \Gamma_0)$，由 δ^* 的选取可推得：

$$\emptyset \subsetneq M_z \subseteq \{(y_\gamma(j), y_{\gamma'}(j)) \mid j < \sigma, \mathrm{dom}(s_j) = \delta^*\}.$$

因此，由于 $\{y_\gamma(j^*), y_{\gamma'}(j^*)\} \subseteq z$，可知 $M_z^* = \{(y_\gamma(j^*), y_{\gamma'}(j^*))\}$。特别地， $e(z) = (y_\gamma(j^*), y_{\gamma'}(j^*))$，正如所求。□

证明至此完成。 □

推论 4.10. 设 λ 是一个无限正则基数，且 $\nu < \lambda$。

如果存在一个基数 $\theta < \lambda$ 使得 $\nu^\theta \geq \lambda$，那么对最小的此类 θ，$\mathrm{Extract}_2(\nu^\theta, \lambda$, 共尾性$(\theta)$ $\omega)$ 成立。

证明。令 θ 表示满足 $\nu^\theta \geq \lambda$ 的最小基数。于是 $T := {}^{<\theta}\nu$ 属于 $\mathcal{T}(\theta,\lambda)$，因此 $\nu^\theta = |\mathcal{B}(T)|$ 属于 $T(\theta,\lambda)$。现在，将引理 4.9 应用于 $(\kappa,\mu) := (\nu^\theta,\lambda)$。□

推论 4.11. 对每个非强极限的正则不可数基数 κ，$\mathrm{Extract}_2(\kappa,\kappa,\omega,\omega)$ 成立。□

命题 4.12. 假设 λ 是一个正则不可数基数。

对每个基数 $\kappa > 2^{<\lambda}$，$\mathrm{Extract}_2(\kappa,\lambda,2,2)$ 均不成立。

证明. 令 $\nu := 2^{<\lambda}$，并注意到对每个 $\theta<\lambda$，都有 $\nu^\theta=\nu$。反设 $e\colon [\kappa]^{<\omega}\to[\kappa]^2$ 是一个见证 $\mathrm{Extract}_2(\kappa,\lambda,2,2)$ 的映射，但 $\kappa>\nu$。不失一般性，我们可以假设对每个 $z\in[\kappa]^3$，都有 $e(z)\in[z]^2$。

断言 4.12.1. 对每个 $\delta<\kappa$，不存在序型为 λ 的子集 $A\subseteq\delta$，使得对每个 $(\alpha,\beta)\in[A]^2$，都有 $\delta\in e(\{\alpha,\beta,\delta\})$。

证明。否则，固定一个反例 δ 和一个见证 $A\subseteq\delta$。令 $\langle\alpha_\gamma\mid\gamma<\lambda\rangle$ 为 A 的递增枚举。现在令 $r:=\{\delta\}$，并对每个 $\gamma<\lambda$，设 $x_\gamma := y_\gamma\uplus r$，其中 $y_\gamma := \{\alpha_\gamma\}$。那么，对于每个 $(\gamma,\gamma')\in[\lambda]^2$，令 $z := x_\gamma\cup x_{\gamma'}$，可得 $r\cap e(z)\neq\emptyset$。这就产生了矛盾。□

记 $\varkappa := \nu^+$。由该断言可知，对于每个 $\delta\in E^\varkappa_\lambda$，我们可以固定某个 $A_\delta\in[\delta]^{<\lambda}$，使得对于每个满足 $\sup(A_\delta)<\beta<\delta$ 的序数 β，都存在 $\alpha\in A_\delta$，使得 $e(\{\alpha,\beta,\delta\})=(\alpha,\beta)$。现在，利用福多尔引理，我们可以找到 $\varepsilon<\varkappa$ 和 $\theta<\lambda$，使得 $\{\delta\in E^\varkappa_\lambda\mid \mathrm{sup}(A_\delta)=\varepsilon \ \&\ |A_\delta|=\theta\}$ 是平稳集。回想 $\nu^\theta=\nu<\varkappa$，于是我们可以找到某个 $A\in[\varepsilon]^\theta$，使得 $S := \{\delta\in E^\varkappa_\lambda\mid A_\delta=A\}$ 是平稳集。定义一个着色 $c\colon [S]^2\to A$，令每个 $(\beta,\delta)\in[S]^2$：

$$c(\beta,\delta) := \min\{\alpha\in A\mid e(\{\alpha,\beta,\delta\})=(\alpha,\beta)\}.$$

根据 Erd˝os-Rado 定理，$\varkappa\to(\lambda)^2_\theta$ 成立，因此我们可以选取一个序型为 λ 的 $B\subseteq S$，它是 c-齐次的，取值为 α。令 $\langle\beta_\gamma\mid\gamma<\lambda\rangle$ 为 B 的递增枚举。最后，令 $r:=\{\alpha\}$，并对每个 $\gamma<\lambda$，设 $x_\gamma := y_\gamma\uplus r$，其中 $y_\gamma := \{\beta_\gamma\}$。于是，对每个 $(\gamma,\gamma')\in[\lambda]^2$，令 $z := x_\gamma\cup x_{\gamma'}$，可得 $r\cap e(z)\neq\emptyset$。这就产生了矛盾。□

推论 4.13. 若 κ 是强极限基数，则对每个无限基数 $\lambda<\kappa$，$\mathrm{Extract}_2(\kappa,\lambda,2,2)$ 均不成立。□

推论 4.14. $\mathrm{Extract}_2(\aleph_2,\aleph_1,\aleph_0,\aleph_0)$ 成立，当且仅当连续统假设不成立。

证明。根据推论 4.10 和命题 4.12。□

从 $n=2$ 的情形转向一般情形，我们考虑以下两个定义。

定义 4.15。$S_n(\kappa,\lambda,\theta)$ 断言存在一种着色 $d\colon[\kappa]^{<\omega}\to\theta$，使得对于每个基数为 λ 的 $\mathcal{X}\subseteq[\kappa]^{<\omega}$ 以及每个指定颜色 $\tau<\theta$，都存在 $\{a_j\mid j<n\}\in[\mathcal{X}]^n$，使得对于满足以下条件的每个 z，$d(z)=\tau$

$$a_0\mathbin{\triangle}\left(\bigcup\nolimits_{0<j<n}a_j\right)\subseteq z\subseteq\bigcup\nolimits_{j<n}a_j.$$

命题 4.16（单调性）。假设：

(1) $2\leq n\leq n'<\omega$;

(2) $\omega \le \lambda \le \lambda'$; (3) $\theta \le \theta'$。
那么 $S_n(\kappa,\lambda,\theta')$ 蕴含 $S_{n'}(\kappa,\lambda',\theta)$。

证明。这里大部分内容显而易见，因此我们只需证明：若对于某个整数 $n \ge 2$， $d\colon [\kappa]^{<\omega} \to \theta$ 见证$S_n(\kappa,\lambda,\theta)$，那么它也见证 $S_{n+1}(\kappa,\lambda,\theta)$。

为此，设 $\mathcal{X} \subseteq [\kappa]^{<\omega}$ 是一个基数为 λ的给定族。取 $x \in \mathcal{X}$，并注意到$\mathcal{X}' := \{a \cup x \mid a \in \mathcal{X} \setminus \{x\}\}$ 是 $[\kappa]^{<\omega}$的一个基数为 λ的子集。现在，给定一个指定颜色 $\tau < \theta$，取 $\{a'_j \mid j < n\} \in [\mathcal{X}']^n$，使得对于每个满足以下条件的 z，都有 $d(z) = \tau$

$$a'_0 \mathbin{\triangle} \left(\bigcup_{0<j<n} a'_j\right) \subseteq z \subseteq \bigcup_{j<n} a'_j.$$

对于每个 $j < n$，取 $a_j \in \mathcal{X}\setminus\{x\}$，使得 $a'_j = a_j \cup x$。由于 $\langle a'_j \mid j < n\rangle$ 是一个单射序列，$\langle a_j \mid j < n\rangle$也如此。令 $a_n := x$。总而言之，$\{a_j \mid j < n+1\} \in [\mathcal{X}]^{n+1}$。显然，$\bigcup_{j<n} a'_j = \bigcup_{j<n+1} a_j$。此外，

$$\begin{array}{rcll} a'_0 \mathbin{\triangle} \left(\bigcup_{0<j<n} a'_j\right) & = & (a'_0 \setminus \left(\bigcup_{0<j<n} a'_j\right)) & \cup \ \left(\left(\bigcup_{0<j<n} a'_j\right) \setminus a'_0\right) \\ & \subseteq & (a_0 \setminus \left(\bigcup_{0<j<n} a_j\right)) & \cup \ \left(\left(\bigcup_{0<j<n} a_j\right) \setminus a_0\right) \\ & \subseteq & (a_0 \setminus \left(\bigcup_{0<j<n+1} a_j\right)) & \cup \ \left(\left(\bigcup_{0<j<n+1} a_j\right) \setminus a_0\right) \\ & = & a_0 \mathbin{\triangle} \left(\bigcup_{0<j<n+1} a_j\right). & \end{array}$$

因此，对于每个满足 $a_0 \mathbin{\triangle} \left(\bigcup_{0<j<n+1} a_j\right) \subseteq z \subseteq \bigcup_{j<n+1} a_j$ 的集合 z，都有 $d(z) = \tau$。 □

定义 4.17。Extract$_n(\kappa,\lambda,\theta,\chi)$ 断言存在一个映射 $e\colon [\kappa]^{<\omega} \to {}^n\kappa$，使得对于 κ 的每个子集序列 $\langle x_\gamma \mid \gamma < \lambda\rangle$、每个 $r \in [\kappa]^{<\theta}$，以及每个满足以下条件的非零 $\sigma < \chi$：

(1) 对于每个 $(\gamma,\gamma') \in [\lambda]^2$， $x_\gamma \cap x_{\gamma'} \subseteq r$; (2) 对于每个 $\gamma < \lambda$， $y_\gamma := x_\gamma \setminus r$ 的序型为 σ，

存在 $j < \sigma$ 和 λ 的互不相交的共尾子集 Γ_0、Γ_1，满足以下条件：

(a) 对于每个 $(\gamma,\gamma') \in [\Gamma_0 \cup \Gamma_1]^2$， $y_\gamma(j) < y_{\gamma'}(j)$; (b) 对于每个来自 $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ 的、满足 $\{\gamma_i \mid i < n\} \notin ([\Gamma_0]^n \cup [\Gamma_1]^n)$ 的严格递增序数序列 $\langle \gamma_i \mid i < n\rangle$，对于每个覆盖 $\{y_{\gamma_i}(j) \mid i < n\}$ 的 $z \in [\bigcup_{i<n} x_{\gamma_i}]^{<\omega}$，我们有

$$e(z) = \langle y_{\gamma_i}(j) \mid i < n\rangle.$$

注 4.18. 不失一般性，我们可以假设，对于每个大小为 $\ge n$ 的 $z \in [\kappa]^{<\omega}$， $e(z)$ 都由来自 z 的序数组成。

[FBR17 定理 4.7] 的证明表明，以下结论成立。

命题 4.19. 假设给定的基数 $\theta \le \lambda \le \kappa$ 满足 λ 正则且不可数时， $S_n(\kappa,\lambda,\theta)$ 成立。对于每个为 $<\lambda$-对一映射的映射 $\varphi\colon G \to [G]^{<\omega}$，都存在相应的着色 $c\colon G \to \theta$，满足以下条件。

对于 G 上的每个二元运算 $*$，若对所有属于 G 的 $x \ne y$，

$$\varphi(x) \mathbin{\triangle} \varphi(y) \subseteq \varphi(x*y) \subseteq \varphi(x) \cup \varphi(y),$$

对于每个 $X \in [G]^\lambda$ 和每个 $\tau < \theta$，都存在一个由 X 中元素构成的单射序列 $\langle x_j \mid 1 \le j \le n\rangle$，使得 $c(x_1 * \cdots * x_n) = \tau$.[6] □

为了推广引理 4.8，我们现在引入关系 $\kappa \overset{\text{上确界}}{\nrightarrow} [\lambda,\lambda]^n_\theta$。它是 $\kappa \nrightarrow [\lambda]^n_\theta$ 的加强，也是 $\kappa \nrightarrow [\lambda,\ldots,\lambda]^n_\theta$ 的弱化。

[6]一如既往，我们指这对 $x_1 * \cdots * x_n$ 的所有实现都成立。

定义 4.20。 κ 上确界$\nrightarrow$ $[\lambda,\lambda]^n_\theta$ 断言存在一种着色 $c\colon [\kappa]^n\to\theta$，使得对于所有 $\tau<\theta$ 以及互不相交的 A、$B\in\mathcal{P}(\kappa)$，满足以下两点：

(i) $\mathrm{otp}(A)=\mathrm{otp}(B)=\lambda$,

(ii) 上确界 $(A)\neq$ 上确界 (B),

存在 $\vec{x}\in[A\cup B]^n\setminus([A]^n\cup[B]^n)$，使得 $c(\vec{x})=\tau$。

注记 4.21. 在 $\lambda=\kappa$, κ 上确界$\nrightarrow$ $[\lambda,\lambda]^2_\theta$ 的特殊情形下，它与经典关系 $\kappa\nrightarrow[\lambda,\lambda]^2_\theta$ 重合。

引理 4.22. 假设：

- $2\leq n<\omega$;
- $\theta\leq\lambda\leq\kappa$ 是基数，且 λ 正则且不可数;
- κ 上确界$\nrightarrow$ $[\lambda,\lambda]^n_\theta$ 成立;
- $\mathrm{Extract}_n(\kappa,\lambda,\omega,\omega)$ 成立。

那么 $S_n(\kappa,\lambda,\theta)$ 成立。

证明。证明与引理 4.8 的证明类似，因此这里只给出证明概要。固定一个映射 $c\colon [\kappa]^n\to\theta$，使其见证 κ 上确界$\nrightarrow$ $[\lambda,\lambda]^n_\theta$，再固定一个映射 $e\colon [\kappa]^{<\omega}\to{}^n\kappa$，使其见证 $\mathrm{Extract}_n(\kappa,\lambda,\omega,\omega)$。我们声称，$d:=c\circ e$ 是 $S_n(\kappa,\lambda,\theta)$ 的一个见证。为此，设给定一个基数为 λ 的子族 $\mathcal{X}\subseteq[\kappa]^{<\omega}$，以及一个指定颜色 $\tau<\theta$。由 Δ-系统引理，找出一个序列 $\langle x_\gamma\mid\gamma<\lambda\rangle$，它由 $\mathcal{X}$ 的元素、某个 $r\in[\kappa]^{<\omega}$ 和一个非零 $\sigma<\chi$ 组成，使得：

(1) for every $(\gamma,\gamma')\in[\lambda]^2$, $x_\gamma\cap x_{\gamma'}=r$;
(2) for every $\gamma<\lambda$, $y_\gamma:=x_\gamma\setminus r$ has order-type σ.

现在，给定互不相交的共尾子集 Γ_0,Γ_1 和 λ，如定义 4.17 中所述。令 $A:=\{y_\gamma(j)\mid\gamma\in\Gamma_0\}$ 和 $B:=\{y_\gamma(j)\mid\gamma\in\Gamma_1\}$。根据 c的选取，取 $\vec{x}\in[A\cup B]^n\setminus([A]^n\cup[B]^n)$ 使得 $c(\vec{x})=\tau$。找一个由 $\Gamma_0\cup\Gamma_1$ 中的序数组成的序列 $\vec{\gamma}=\langle\gamma_i\mid i<n\rangle$，使得 $\vec{x}=\langle y_{\gamma_i}(j)\mid i<n\rangle$。显然，$\vec{\gamma}$严格递增，$\{\gamma_i\mid i<n\}\not\subseteq\Gamma_0$ 且 $\{\gamma_i\mid i<n\}\not\subseteq\Gamma_1$。因此，对于每个关注的集合 z，

$$d(z)=c(e(z))=c(\vec{x})=\tau,$$

正如所要求的。 □

引理 4.23. 假设 $\kappa\in T(\mu,\theta)$。那么存在一个映射 $e\colon[\kappa]^{<\omega}\to{}^3\kappa$，它为每个满足 $\max\{\mu,\theta^+\}\leq\lambda\leq\kappa$ 的正则基数 λ 见证 $\mathrm{Extract}_3(\kappa,\lambda,$共尾性$(\theta)\ \omega)$。

证明。由于 $\kappa\in T(\mu,\theta)$，我们固定一个 $T\in\mathcal{T}(\mu,\theta)$，它包含一个由 $\mathcal{B}(T)$ 中的元素构成的单射序列$\langle b_\xi\mid\xi<\kappa\rangle$。为简化记号，我们将 $\Delta(b_\alpha,b_\beta)$ 记作 $\Delta(\alpha,\beta)$。对于任意三元组 $w\in[\kappa]^3$，令 $\Delta_2(w):=\min\{\Delta(\alpha,\beta)\mid(\alpha,\beta)\in[w]^2\}$。首先，给定 $z\in[\kappa]^{<\omega}$，令：

- $M_z:=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in[z]^3\mid\Delta_2(\{\alpha,\beta,\gamma\})=\max\{\Delta_2(w)\mid w\in[z]^3\}\}$, and
- $M^*_z:=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in M_z\mid\alpha=\min\{\alpha'\mid(\alpha',\beta',\gamma')\in M_z\}\}$.

然后，任取一个函数 $e\colon[\kappa]^{<\omega}\to{}^3\kappa$，使得对每个 $z\in[\kappa]^{<\omega}$:

- 对每个 $z\in[\kappa]^{<\omega}$，$e(z)$ 都是 κ 中的严格递增序数序列。如果 $|z|\geq3$，则 $e(z)$ 由来自 z 的序数组成;
- 如果 M_{z^*} 是单元素集，那么 $e(z)$ 就是它唯一的元素。

为证明 e 符合要求，设 λ 是满足 $\max\{\mu,\theta^+\}\leq\lambda\leq\kappa$ 的正则基数，并且给定了定义 4.17 中的 $\langle x_\gamma\mid\gamma<\lambda\rangle$、$r\in[\kappa]^{<\mathrm{cf}(\theta)}$ 和 $\sigma<\omega$。与引理 4.9 的证明一样，我们可以找到一个共尾子集 $\Gamma\subseteq\lambda$、一个序数 $\delta<\theta$，以及 $T_{\delta+1}$ 中由节点组成的序列 $\langle t_j\mid j<\sigma\rangle$，使得对每个 $(\gamma,\gamma')\in[\Gamma]^2$：

(I) $\Delta(\text{“}[r\cup y_\gamma]^2\text{”的上确界为 }=\delta$；(II) 对于每个 $j<\sigma$、$b_{y_\gamma(j)}\restriction(\delta+1)=t_j$；(III) 对于每个 $j<\sigma$、$y_\gamma(j)<y_{\gamma'}(j)$。

此外，我们可以固定 Γ_0、$\Gamma_1\in[\Gamma]^{\lambda^+}$ 以及阿贝尔群 $T\times\mu\times\mu$ 中的一个三元组序列 $\langle(s_j,i_j,i'_j)\mid j<m\rangle$，使得对于每个 $j<\sigma$：

- 对于每个 $\gamma\in\Gamma_0$、$s_j{}^\frown\langle i_j\rangle\sqsubseteq b_{y_\gamma(j)}$，
- 对于每个 $\gamma\in\Gamma_1$、$s_j{}^\frown\langle i'_j\rangle\sqsubseteq b_{y_\gamma(j)}$，并且
- $i_j\neq i'_j$。

经过适当选取共尾子集，我们可以假设 $\Gamma_0\cap\Gamma_1=\emptyset$。令$\delta^*:=\max\{\mathrm{dom}(s_j)\mid j<\sigma\}$，并令 $j^*:=\min\{j<\sigma\mid\mathrm{dom}(s_j)=\delta^*\}$。

断言 4.23.1. 设 $(\gamma,\gamma',\gamma'')\in[\Gamma_0\cup\Gamma_1]^3\setminus([\Gamma_0]^3\cup[\Gamma_1]^3)$。设 $z\in[x_\gamma\cup x_{\gamma'}\cup x_{\gamma''}]^{<\omega}$ 满足 $\{y_\gamma(j^*),y_{\gamma'}(j^*),y_{\gamma''}(j^*)\}\subseteq z$。那么 $e(z)=(y_\gamma(j^*),y_{\gamma'}(j^*),y_{\gamma''}(j^*))$。

证明。正如断言 4.9.2 的证明所阐明的，对每个 $(\xi,\zeta)\in[\{\gamma,\gamma',\gamma''\}]^2$，以及每个 $\alpha\in r\cup a_\xi$ 和 $\beta\in r\cup y_\zeta$，$\Delta(\alpha,\beta)>\delta$ 当且仅当存在一个 $j<\sigma$ 使得$\alpha=y_\xi(j)$ 且 $\beta=y_\zeta(j)$。此外，若 $\{\xi,\zeta\}\not\subseteq\Gamma_0$ 且 $\{\xi,\zeta\}\not\subseteq\Gamma_1$，则对每个$j<m$，$\Delta(y_\xi(j),y_\zeta(j))=\mathrm{dom}(s_j)$。因此，在此情形下，

$$\begin{aligned}&\{(\alpha,\beta)\in[r\cup y_\xi\cup y_\zeta]^2\mid\Delta(\alpha,\beta)=\max(\Delta\text{“}[r\cup y_\xi\cup y_\zeta]^2)\}\\&=\{(y_\xi(j),y_\zeta(j))\mid\mathrm{dom}(s_j)=\delta^*\}.\end{aligned}$$

现在，由于 $\{\gamma,\gamma',\gamma''\}\not\subseteq\Gamma_0$和 $\{\gamma,\gamma',\gamma''\}\not\subseteq\Gamma_1$，可得

$$\Delta_2(y_\gamma(j^*),y_{\gamma'}(j^*),y_{\gamma''}(j^*))=\delta^*.$$

因此，

$$\emptyset\subsetneq M_z=\{(y_\gamma(j),y_{\gamma'}(j),y_{\gamma''}(j))\mid\mathrm{dom}(s_j)=\delta^*\}.$$

所以，根据子句（III），

$$e(z)=(y_\gamma(j^*),y_{\gamma'}(j^*),y_{\gamma''}(j^*)),$$

如所求。□

证明至此完成。□

命题 4.24. 设 $\lambda\leq\kappa$ 是一对无限基数。

若 $\mathrm{Extract}_2(\kappa,\lambda,3,3)$成立，则 $\kappa\overset{\text{上确界}}{\nrightarrow}[\lambda,\lambda]^4_2$也成立。

证明。假设 $\kappa\overset{\text{上确界}}{\nrightarrow}[\lambda,\lambda]^4_2$不成立，我们将证明 $\mathrm{Extract}_2(\kappa,\lambda,3,3)$也不成立。为此，取 $e:[\kappa]^{<\omega}\to[\kappa]^2$。定义一个着色 $c:[\kappa]^4\to2$，使得对所有 $\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\kappa$：

$$c(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3):=1\text{ iff }e(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_2,\alpha_3).$$

现在，由于 $\kappa\overset{\text{上确界}}{\longrightarrow}[\lambda,\lambda]^4_2$成立，我们可以找到 $\tau<2$ 以及互不相交的 A，$B\in\mathcal{P}(\kappa)$，使其满足以下所有条件：

(i) $\mathrm{otp}(A)=\mathrm{otp}(B)=\lambda$，

(ii) A 的上确界 $=\sup(B)$，

(iii) 对每个 $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in[A\cup B]^4\setminus([A]^4\cup[B]^4)$,

$$c(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\neq\tau.$$

利用子句（i）和（ii），固定一个由 $A\times B$ 中的有序对构成的序列 $\langle(\alpha_i,\beta_i)\mid i<\lambda\rangle$，使得对所有 $i<j<\lambda$, $\alpha_i<\beta_i<\alpha_j$。

▶ 若 $\tau=1$，则令 $r:=\{\alpha_0,\alpha_1\}$，并且对每个 $\gamma<\lambda$，令 $x_\gamma:=r\uplus y_\gamma$，其中$y_\gamma:=\{\beta_{\gamma+1}\}$。现在，对每个 $(\gamma,\gamma')\in[\lambda]^2$，由于 $z:=x_\gamma\cup x_{\gamma'}$ 属于 $[A\cup B]^4\setminus([A]^4\cup[B]^4)$，$c(z)=0$，因此 $e(z)$ 与 r 不相交。

▶ 若 $\tau=0$，则令 $r:=\emptyset$，并且对每个 $\gamma<\lambda$，令 $x_\gamma:=r\uplus y_\gamma$，其中 $y_\gamma:=\{\alpha_\gamma,\beta_\gamma\}$。现在，对每个 $(\gamma,\gamma')\in[\lambda]^2$，由于 $z:=x_\gamma\cup x_{\gamma'}$ 属于 $[A\cup B]^4\setminus([A]^4\cup[B]^4)$，$c(z)=1$，因此 $e(z)=y_{\gamma'}$ 与 y_γ 不相交。□

推论 4.25. 如果 $\lambda=\aleph_0$ 或 λ 是弱紧的，那么对于每个基数 $\kappa\geq\lambda$，$\mathrm{Extract}_2(\kappa,\lambda,3,3)$ 都不成立。□

5. Maximal number of colors

本节专门用于证明定理 C。本节的主要推论如下：

推论 5.1. 设 $\lambda=\mu^+$，其中 $\mu=\mu^{<\mu}$ 是无限基数。

那么以下各项等价：

(1) $(\lambda^+,\lambda)\nrightarrow(\mu^+,\mu)$ 不成立；

(2) $\lambda^+\overset{\text{上确界}}{\longrightarrow}[\lambda,\lambda]^3_\lambda$ 成立。

证明。我们着重讨论非平凡的（即正向）蕴含。根据 $\lambda=\mu^+$，由[Tod07，引理 9.2，3]，$(\lambda^+,\lambda)\nrightarrow(\mu^+,\mu)$ 不成立等价于存在一个次可加着色 $\varrho:[\lambda^+]^2\to\lambda$ 见证 $\mathrm{U}(\lambda^+,\lambda,\lambda,\lambda,\omega)$。特别地，$\varrho\restriction[X]^2$ $X\subseteq\lambda^+$ 个序型为 λ 的集合中，每个集合都见证 $\mathrm{U}(\lambda,\lambda,\lambda,3)$。现在需要考虑两种情况：

▶ 若 $2^\mu>\mu^+$，则由于 $\mu^{<\mu}=\mu$，$T:={}^{<\mu}\mu$ 是一棵弱 μ-Kurepa 树，具有λ^+多个分支。此外，$\mu^{<\mu}=\mu$ 蕴含 μ 是正则的，因此 E^λ_μ 是一个非反射平稳集。接下来利用 $\kappa:=\lambda^+$，即可由后文的定理 5.2 得到结论。

▶ 如果 $2^\mu=\mu^+$，则 $\lambda\nrightarrow[\mu;\lambda]^2_\lambda$ 由 Sierpi´nski 的一个定理可得（见 [IR23，引理 8.3]）。现在结论由下述定理 5.3 得出。□

阅读下面定理的假设时，值得记住的是：如果对于无限正则基数 μ有 $\lambda=\mu^+$，则 E^λ_μ 是一个非反射平稳集；如果 $\kappa=\lambda^+$，则事实 2.14 提供了一个次可加映射 $\rho:[\kappa]^2\to\lambda$。该定理的结论是 $\kappa\overset{\text{上确界}}{\longrightarrow}[\lambda,\lambda]^3_\lambda$ 的一种条件形式，其中在定义 4.20 中增加了第三个条款。

定理 5.2。假设：

- $\mu<\lambda<\kappa$ 是无限正则基数；
- E^λ_μ 含有一个非反射平稳集；
- $\varrho:[\kappa]^2\to\lambda$ 是对有序对的次可加着色；
- 存在一棵弱 μ-Kurepa 树，其分支至少有 κ那么多。

那么存在相应的三元组的着色 $c:[\kappa]^3\to\lambda$ 使得，对于所有满足以下三个条件的 $\tau<\lambda$ 和互不相交的 $A,B\in\mathcal{P}(\kappa)$：

(i) $\mathrm{otp}(A)=\mathrm{otp}(B)=\lambda$,

(ii) $\sup(A) = \sup(B)$, (iii) $\varrho \restriction [A \cup B]^2$ 是 U$(\lambda, \lambda, \lambda, 3)$ 的见证，存在 $(\alpha, \beta, \gamma) \in [A \cup B]^3 \setminus ([A]^3 \cup [B]^3)$，使得 $c(\alpha, \beta, \gamma) = \tau$。

证明。设 $T \subseteq {}^{<\mu}2$ 是一棵弱 μ-Kurepa 树，且至少有 κ 条分支；设 $\vec{b} = \langle b_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ 是由 $\mathcal{B}(T)$ 的元素组成的单射序列。对于所有来自 κ 的 $\alpha \neq \beta$，我们将 $\Delta(b_\alpha, b_\beta)$ 记作 $\Delta(\alpha, \beta)$。对于所有 $B \subseteq \kappa$ 和 $t \in T$，记 $B_t := \{\beta \in B \mid t \sqsubseteq b_\beta\}$。由于 E^λ_μ 有一个非反射平稳集，根据 [LHR23，引理 3.31]，，我们可以固定一个着色 $e : [\lambda]^2 \to \mu$，使得以下集合是平稳的：

$$\partial(e) := \{\sigma \in E^\lambda_\mu \mid \forall \epsilon \in \lambda \setminus \sigma \, \forall \delta < \mu \, [\sup\{\zeta < \sigma \mid e(\zeta, \epsilon) \leq \delta\} < \sigma]\}.$$

设 $h : \lambda \to \lambda$ 是一个满射，使得对于每个 $\tau < \lambda$，$S_\tau := \{\sigma \in \partial(e) \mid h(\sigma) = \tau\}$ 都是平稳的。

对于每个 $(\alpha, \beta, \gamma) \in \kappa \times \kappa \times \kappa$，令

$$Z_{(\alpha,\beta,\gamma)} := \{\zeta \in \lambda \setminus \varrho(\{\alpha, \beta\}) \mid \max(\Delta``\{\alpha, \beta, \gamma\}^2) \geq e(\zeta, \varrho(\{\beta, \gamma\}))\}.$$

现在，通过如下方式导出一个着色 $c : [\kappa]^3 \to \lambda$：

$$c(\{\alpha, \beta, \gamma\}) := \begin{cases} h(\min(Z_{(\beta,\alpha,\gamma)})), & \text{if } \gamma = \max\{\alpha, \beta, \gamma\} \ \&\ b_\alpha <_{\rm lex} b_\beta <_{\rm lex} b_\gamma; \\ h(\min(Z_{(\alpha,\beta,\gamma)})), & \text{if } \gamma = \max\{\alpha, \beta, \gamma\} \ \&\ b_\gamma <_{\rm lex} b_\alpha <_{\rm lex} b_\beta; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

设 $A, B \in \mathcal{P}(\kappa)$ 是满足上述条件 (i)–(iii) 的不相交集合。回顾引理 3.4(2)，通过可能缩小 A 和 B，我们可以假设存在某个 $\chi < \mu$，使得 $\Delta[A \times B] = \{\chi\}$。通过可能交换 A 和 B 的角色，我们还可以假设如下：

(iv) 对每个 $(\alpha, \beta) \in A \times B$，$b_\alpha <_{\rm lex} b_\beta$。

注意到 $|T| = \mu < \lambda < \kappa \leq 2^\mu$。现在，给定一个指定颜色 $\tau < \lambda$，令 M 为 $\mathcal{H}_{(2^\mu)^+}$ 的一个初等子模型，其中包含 $\{A, B, \varrho, \vec{b}, T\}$，并满足 $\sigma := M \cap \lambda$ 属于 S_τ。特别地，$|M| \geq$ 共尾性 $(\sigma) = \mu$。记 $\upsilon :=$ 为 $\sup(A)$，并记 $\upsilon_M :=$ 为 $\sup(M \cap \upsilon)$。证明分为两种情况：

情形 1：对于每个 $\beta \in B$，$\sup(\varrho_\beta``A) < \lambda$。根据条件 (iii)，找出 $A' \in [A]^\lambda$ 和 $B' \in [B]^\lambda$，使得 $\min(\varrho[A' \circledast B']) > \sigma$。任意固定 $\alpha \in A' \setminus \upsilon_M$。应用推论 3.5，令 $X := B'$ 和 $i := 1$，选取 $\gamma \in B' \setminus (\alpha + 1)$，使得对于共终多个 $\delta < \mu$，以下两项成立：

(1) $b_\gamma(\delta) = 1$，且 (2) $\{\beta \in B' \mid \Delta(\beta, \gamma) = \delta\}$ 的基数为 λ。

记 $D := \{\delta < \mu \mid$，使子句 (1) 和 (2) 均成立$\}$。

由于 $(\alpha, \gamma) \in A' \circledast B'$，序数 $\epsilon := \varrho(\alpha, \gamma)$ 大于 σ。取大于 $\max\{\chi, e(\sigma, \epsilon)\}$的 $\delta \in D$。由于 $\sigma \in \partial(e)$，以下集合有下界 σ：

$$Z := \{\zeta < \sigma \mid e(\zeta, \epsilon) \leq \delta\}.$$

设 $t := (b_\gamma \restriction \delta)^\frown \langle 0 \rangle$。由 $\delta \in D$ 可推得 $(B')_t$ 的基数为 λ。由于 $t \in T \subseteq M$，特别地，B_t 是一个基数为 λ 且属于 M的集合。由条件 (iii)以及 M 的初等性，可在 $B_t \cap M$ 中找到 $\beta_0 \neq \beta_1$，使得 $\varrho(\beta_0, \beta_1) > \sup(Z)$。由于 ϱ 是次可加的，我们现在可以找到 $\beta \in \{\beta_0, \beta_1\}$，使得 $\varrho(\beta, \alpha) > \sup(Z)$。由于 $\beta \in B$，$\sup(\varrho_\beta``A) < \lambda$。由于 $\{\varrho, A\} \in M$，可得 $\sup(\varrho_\beta``A) \in M$。特别地，$\varrho(\beta, \alpha) < \sigma$。

断言 5.2.1。以下各项均成立：

(1) $(\beta,\alpha,\gamma)\in B\circledast A\circledast B$; (

2) $b_\alpha<_{\rm lex}b_\beta<_{\rm lex}b_\gamma$; (3)

$\max(\Delta``\{\alpha,\beta,\gamma\}^2)=\delta$; (4)

$\min(Z_{(\beta,\alpha,\gamma)})=\sigma$.

证明。(1) γ被选为属于 $B\setminus(\alpha+1)$。此外， $\alpha\in A\setminus\upsilon_M$，而$\beta\in M\cap B$。

(2) 由于 $\alpha\in A$ 和 $\beta\in B$，条件 (iv) 意味着 $b_\alpha<_{\rm lex}b_\beta$。此外，由于 $b_\beta\restriction(\delta+1)=t=(b_\gamma\restriction\delta)^\frown\langle 0\rangle$ 和 $b_\gamma(\delta)=1$，我们得到 $b_\beta<_{\rm lex}b_\gamma$。(3) 根据前面的分析， $\Delta(\beta,\gamma)=\delta$。此外， $\Delta(\alpha,\gamma)=\chi<\delta$。回想起 $|\Delta``\{\alpha,\beta,\gamma\}^2|=2$，结论成立。(4) 根据子条款 (3) 以及 $\varrho(\alpha,\gamma)=\epsilon$这一事实，我们推得 $Z_{(\beta,\alpha,\gamma)}=\{\zeta\in\lambda\setminus\varrho(\beta,\alpha)\mid\delta\geq e(\zeta,\epsilon)\}$。特别地， $\sigma\in Z_{(\beta,\alpha,\gamma)}$。现在，若 $\zeta:=\min(Z_{(\beta,\alpha,\gamma)})$ 为 $<\sigma$，那么 $\zeta\in Z$，这与 $\varrho(\beta,\alpha)>$上确界(Z)这一事实矛盾。□

由前面的断言及 c 的定义，

$$c(\{\alpha,\beta,\gamma\})=h(\min(Z_{(\beta,\alpha,\gamma)}))=h(\sigma)=\tau,$$

正如所需。

情形 2：存在 $\beta\in B$，使得 $\sup(\varrho_\beta``A)=\lambda$。由于 $\{\varrho,A\}\in M$，我们可以选取 $\beta\in B\cap M$，使得 $\sup(\varrho_\beta``A)=\lambda$。显然， $|\varrho_\beta``A|=\lambda$。定义函数$f$： $\varrho_\beta``A\to A$，如下

$$f(\xi):=\min\{\alpha\in A\mid\varrho(\beta,\alpha)=\xi\}.$$

由于 $\{\beta,A,\varrho\}\in M$，我们推知 $\varrho_\beta``A$、 f 和 $\mathrm{Im}(f)$ 都属于 M。注意到 f 是单射，因此 $|\mathrm{Im}(f)|=\lambda$。还可推出

$$\Gamma:=\{\gamma\in\mathrm{Im}(f)\setminus(\beta+1)\mid\varrho(\beta,\gamma)\leq\sigma\}$$

在 $\mathrm{Im}(f)$ 中有界。

利用推论 3.5，取 $X:=\mathrm{Im}(f)\setminus(\beta+1)$ 和 $i:=0$，选取 $\gamma\in X\setminus(\Gamma\cup\upsilon_M)$，使得对共终的许多 $\delta<\mu$，以下两项成立：

(1) $b_\gamma(\delta)=0$，以及 (2) $\{\alpha\in X\mid\Delta(\alpha,\gamma)=\delta\}$ 的基数为 λ。

记 $D:=\{\delta<\mu\mid$ 条款 (1) 和 (2) 均成立$\}$。

由于 $\gamma\notin\Gamma$, $\epsilon:=\varrho(\beta,\gamma)$ 大于 σ。取 $\delta\in D$ 大于 $\max\{\chi,e(\sigma,\epsilon)\}$。由于$\sigma\in\partial(e)$，以下集合有下界 σ：

$$Z:=\{\zeta<\sigma\mid e(\zeta,\epsilon)\leq\delta\}.$$

令 $t:=(b_\gamma\restriction\delta)^\frown\langle 1\rangle$。由 $\delta\in D$ 我们推得， X_t 是一个基数为 λ 的集合。由于 $t\in T\subseteq M$且 $X\in M$， X_t属于 M。由于 $\alpha\mapsto\varrho(\beta,\alpha)$ 在 X 上是单射，我们可以找到一个 $\alpha\in X_t\cap M$，使得 $\varrho(\beta,\alpha)>\sup(Z)$。鉴于$\{\beta,\alpha\}\in M$，我们总共得到 $\sup(Z)<\varrho(\beta,\alpha)<\sigma$。

断言 5.2.2。以下各项均成立：

(1)（β， α， γ）$\in B\circledast A\circledast A$;

(2) $b_\gamma<_{\rm lex}b_\alpha<_{\rm lex}b_\beta$; (3)

$\max(\Delta``\{\alpha,\beta,\gamma\}^2)=\delta$; (4)

$\min(Z_{(\alpha,\beta,\gamma)})=\sigma$。

证明。(1) β被选为属于 $B\cap M$， γ被选为属于 $A\setminus \upsilon_M$，而$\alpha\in M\cap A$ 满足 $\alpha>\beta$。

(2) 由于 $\alpha\in A$ 和 $\beta\in B$，条件 (iv)意味着 $b_\alpha <_{\mathrm{lex}} b_\beta$。此外，$b_\alpha\restriction(\delta+1)$ $=t=(b_\gamma\restriction\delta)^\frown\langle 1\rangle$ 且 $b_\gamma(\delta)=0$，因此 $b_\gamma <_{\mathrm{lex}} b_\alpha$。(3) 根据前面的分析， $\Delta(\alpha,\gamma)$ $=\delta$。此外， $\Delta(\alpha,\beta)=\chi<\delta$。回想一下， $|\Delta\text{“}\{\alpha,\beta,\gamma\}^2|=2$，我们就完成了。(4) 根据子条款 (3)以及 $\varrho(\beta,\gamma)=\epsilon$这一事实，我们推断 $Z_{(\alpha,\beta,\gamma)}=\{\zeta\in\lambda\setminus\varrho(\beta,\alpha)$ $\mid \delta\geq e(\zeta,\epsilon)\}$。特别地， $\sigma\in Z_{(\alpha,\beta,\gamma)}$。现在，若 $\zeta:=\min(Z_{(\alpha,\beta,\gamma)})$ 是 $<\sigma$，那么 $\zeta\in Z$，这与 $\varrho(\beta,\alpha)>\sup(Z)$这一事实矛盾。□

根据前述断言以及 c 的定义，

$$c(\{\alpha,\beta,\gamma\})=h(\min(Z_{(\alpha,\beta,\gamma)}))=h(\sigma)=\tau,$$

如所要求。 □

定理 5.3. 设：

- $\mu=\mu^{<\mu}$ 是一个无限基数， $\lambda=\mu^+$ 且 $\kappa=\lambda^+$；
- $\varrho:\ [\kappa]^2\to\lambda$ 是对的次可加着色；
- $\lambda\nrightarrow[\mu;\ \lambda]^2_\lambda$ 成立。

于是，存在相应的三元组着色 $c:\ [\kappa]^3\to\lambda$ 使得，对于所有满足以下三条的 $\tau<\lambda$ 和不相交的 A、 $B\in\mathcal{P}$ （κ）：

（i） $\mathrm{otp}(A)=\mathrm{otp}(B)=\lambda$， （ii） $\sup(A)$ $=\sup(B)$， （iii） $\varrho\restriction[A\cup B]^2$ 见证 $\mathrm{U}(\lambda,\lambda,\lambda,3)$，

存在 $(\alpha,\beta,\gamma)\in[A\cup B]^3\setminus([A]^3\cup[B]^3)$，使得 $c(\alpha,\beta,\gamma)=\tau$。

证明。令 $d:\ [\kappa]^2\to\lambda$ 为见证 $\lambda\nrightarrow[\mu;\ \lambda]^2_\lambda$ 的着色。令 $T:=\ {}^{<\lambda}2$。令 $b=\langle b_\xi\mid\xi<\kappa\rangle$ 为 $\mathcal{B}(T)$ 中元素的单射枚举。对于从 κ 中取的 $\alpha\neq\beta$，记 $\Delta(b_\alpha,b_\beta)$ 为 $\Delta(\alpha,\beta)$。同样，对于 $B\subseteq\kappa$，记 $T^{\rightsquigarrow\{b_\beta\mid\beta\in B\}}$ 为 $T^{\rightsquigarrow B}$。

对于所有 $B\subseteq\kappa$ 和 $t\in T$，记 $B_t:=\{\beta\in B\mid t\sqsubseteq b_\beta\}$。令 $e:\ [\lambda]^2\to\mu$ 为一个具有单射纤维的映射。令 $h:\ \lambda\to\lambda$ 为一个满射，使得对于每个 $\tau<\lambda$， $S_\tau:=\{\sigma\in E^\lambda_\mu\mid h(\sigma)=\tau\}$ 都是平稳集。对于每个 $(\alpha,\beta,\gamma)\in\kappa\circledast\kappa\circledast\kappa$，定义：

$$Z_{(\alpha,\beta,\gamma)}:=\{\zeta\in\lambda\setminus\varrho(\alpha,\gamma)\mid e(\Delta(\alpha,\beta),\varrho(\beta,\gamma))\geq e(\zeta,\varrho(\beta,\gamma))\}.$$

我们定义着色 $c:\ [\kappa]^3\to\lambda$，规定对所有 $\alpha<\beta<\gamma<\kappa$：

$$c(\alpha,\beta,\gamma):=\begin{cases}d(\Delta(\alpha,\gamma),\Delta(\beta,\gamma)), & \text{if } \Delta(\alpha,\beta)<\Delta(\beta,\gamma);\\ d(\Delta(\alpha,\gamma),\varrho(\beta,\gamma)), & \text{if } \Delta(\alpha,\beta)=\Delta(\beta,\gamma);\\ d(\Delta(\alpha,\beta),\varrho(\alpha,\gamma)), & \text{if } \Delta(\alpha,\beta)>\Delta(\beta,\gamma)\ \&\ b_\alpha<_{\mathrm{lex}}b_\beta;\\ h(\min(Z_{(\alpha,\beta,\gamma)})), & \text{if } \Delta(\alpha,\beta)>\Delta(\beta,\gamma)\ \&\ b_\beta<_{\mathrm{lex}}b_\alpha.\end{cases}$$

假设 $A,B\in\mathcal{P}(\kappa)$ 是满足上述条件 (i)–(iii) 的不相交集合，并令 $\tau<\lambda$ 为指定颜色。通过将 A 替换为一个共尾子集，我们可以假设 $A=A'$，其意义见引理 3.7。特别地，我们可以假设存在 $\theta_A\leq\lambda$，使得 $T^{\rightsquigarrow A}\in\mathcal{T}(\lambda,\theta_A)$；此外，若 $\theta_A<\lambda$，则 $|\mathcal{B}(T^{\rightsquigarrow A})|=\lambda$。由于 $\mu^{<\mu}<\mu^+=\lambda$，这意味着若 $\theta_A<\lambda$，则 $\theta_A\in E^\lambda_\mu$。同样，我们可以假设存在 $\theta_B\in E^\lambda_\mu\cup\{\lambda\}$，使得 $T^{\rightsquigarrow B}\in\mathcal{T}(\lambda,\theta_B)$。不失一般性，我们还可以假设 $\theta_A\leq\theta_B$。证明现在分为两个主要情形。

情形 1： $\theta_A=\theta_B=\lambda$。在这种情况下，我们需要以下断言。

断言 5.3.1. 存在满足以下所有条件的 $t \in T^{\rightsquigarrow B}$：

- 若 $t \notin T^{\rightsquigarrow A}$，则 $D := \{\Delta(b_\beta, t) \mid \beta \in B\}$ 的基数为 μ，并且存在$t' \in T^{\rightsquigarrow A}$与 t 不相容，使得 $\sup(D) > \Delta(t, t')$；
- 若 $t \in T^{\rightsquigarrow A}$，则 $D := \{\Delta(b_\alpha, t) \mid \alpha \in A\}$ 的基数为 μ。

证明。有两种情况需要考虑：

►假设存在 $\epsilon < \lambda$使得 $T^{\rightsquigarrow A} \cap T^{\rightsquigarrow B} \cap {}^{\epsilon}2 = \emptyset$。取$t' \in T^{\rightsquigarrow A} \cap {}^{\epsilon}2$。对每个 $\alpha < \lambda$，取 $t_\alpha \in T^{\rightsquigarrow B} \cap {}^{\alpha}2$。于是，根据引理 3.6，存在 $\alpha \in E^\lambda_\mu$位于 ϵ之上，使得 $D := \{\Delta(b_\beta, t_\alpha)$在 α中共终。为说明 $t := t_\alpha$ 正是所求，注意到由于 $t \restriction \epsilon \notin T^{\rightsquigarrow A}$，必定有$\Delta(t, t') < \epsilon$。

► 否则。因此，对每个 $\alpha < \lambda$，我们都可以选取 $t_\alpha \in T^{\rightsquigarrow A} \cap T^{\rightsquigarrow B} \cap {}^{\alpha}2$。由于 $\langle t_\alpha \mid \alpha < \lambda\rangle \in \prod_{\alpha<\lambda} T^{\rightsquigarrow A} \cap {}^{\alpha}2$，引理 3.6 保证存在一个 $\alpha \in E^\lambda_\mu$，使得$D := \{\Delta(b_\beta, t_\alpha) \mid \beta \in A\} \cap \alpha$ 在 α 中共终。因此，$t := t_\alpha$ 正是所求。□

令 $t \in T^{\rightsquigarrow B}$ 及相应的 D 如断言中所述。需要考虑两种子情形：

子情形 1.1：$t \in T^{\rightsquigarrow A}$。选取 $\bar{A} \in [A]^\mu$，使得 $\bar{D} := \{\Delta(b_\alpha, t) \mid \alpha \in \bar{A}\}$ 是 $D \cap \mathrm{dom}(t)$ 的一个基数为 μ 的子集。显然，$B' := B_t \setminus \sup(A)$ 是一个基数为 λ 的集合。由于$T^{\rightsquigarrow B'} \in \mathcal{T}(\lambda, \lambda)$，$E := \Delta[B' \circledast B']$ 的基数也为 λ。根据 d 的选取，现在我们可以找到 $(\delta, \epsilon) \in D \circledast E$，使得 $d(\delta, \epsilon) = \tau$。选取 $\alpha \in A$，使得 $\Delta(b_\alpha, t) = \delta$。最后，找到 $(\beta, \gamma) \in B' \circledast B'$，使得 $\Delta(\beta, \gamma) = \epsilon$。于是

$$\Delta(\beta, \gamma) = \epsilon > \delta = \Delta(b_\alpha, t) = \Delta(\alpha, \gamma),$$

因此 $\Delta(\alpha, \beta) = \Delta(\alpha, \gamma) < \Delta(\beta, \gamma)$。总之，$(\alpha, \beta, \gamma) \in A \circledast B \circledast B$，并且

$$c(\alpha, \beta, \gamma) = d(\Delta(\alpha, \gamma), \Delta(\beta, \gamma)) = d(\delta, \epsilon) = \tau.$$

子情形 1.2：$t \notin T^{\rightsquigarrow A}$。取与 t 不相容的 $t' \in T^{\rightsquigarrow A}$，使得 $\sup(D) > \Delta(t, t')$。由于 $\mathrm{cf}(\theta_B) = \mu$，现在我们可以取 $B \in [B]^\mu$，使得 $D := \{\Delta(b_\beta, t) \mid \beta \in B\}$ 是 μ 基数的 D 子集，且 $\min(D) > \Delta(t, t')$。

由于 $t' \in T^{\rightsquigarrow A}$, $A_{t'}$ 的基数为 λ，$A' := A_{t'} \setminus \sup(\bar{B})$ 的基数也如此。由于 $t \in T^{\rightsquigarrow B}$, B_t 的基数为 λ，因此既然 $\varrho \restriction [A \cup B]^2$ 是 $\mathrm{U}(\lambda, 2, \lambda, 3)$ 的见证，集合 $E := \varrho[A' \circledast B_t]$ 的基数也为 λ。根据 d 的选取，找到 $(\delta, \epsilon) \in D \circledast E$，使得 $d(\delta, \epsilon) = \tau$。找到 $\alpha \in B$，使得 $\Delta(b_\alpha, t) = \delta$。找到 $(\beta, \gamma) \in A' \circledast B_t$，使得 $\varrho(\beta, \gamma) = \epsilon$。由于 $(\beta, \gamma) \in A_{t'} \circledast B_t$,

$$\Delta(\beta, \gamma) = \Delta(t', t) < \min(\bar{D}) \leq \delta = \Delta(b_\alpha, t) = \Delta(\alpha, \gamma),$$

因此 $\Delta(\alpha, \beta) = \Delta(\beta, \gamma)$。总而言之，$(\alpha, \beta, \gamma) \in B \circledast A \circledast B$，并且

$$c(\alpha, \beta, \gamma) = d(\Delta(\alpha, \gamma), \varrho(\beta, \gamma)) = d(\delta, \epsilon) = \tau.$$

情形 2：$\theta_A < \lambda$。令 $\theta := \theta_A$。我们需要以下断言。

断言 5.3.2。存在 $\chi < \theta$、$A' \in [A]^\lambda$ 和 $B' \in [B]^\lambda$，使得 $\Delta[A' \times B'] = \{\chi\}$。

证明。记 $\bar{A} := \mathcal{B}(T^{\rightsquigarrow A})$ 和 $\bar{B} := \mathcal{B}(T^{\rightsquigarrow B})$。回顾一下，根据我们对 $\bar{}$ 引理 3.7 $|A| = \lambda$的应用，且若 $\theta_B < \lambda$，则 $|B| = \lambda$ 也成立。我们将证明该断言，方法是证明存在 $\chi < \theta$和一对 $(t, t') \in (T^{\rightsquigarrow A})_{\chi+1} \times (T^{\rightsquigarrow B})_{\chi+1}$，使得 $\Delta(t, t') = \chi$。事实上，一旦有了这样一对 (t, t')，集合 $A' := A_t$和$B' := B_{t'}$ 便符合要求。

需要考虑两种情况:

► 若 $\theta_B = \theta$, 则令 $\bar{T} := T \cap {}^{<\theta}2$。在此情况下, $\bar{B}$ 和 $\bar{A}$ 是 λ基数的子集 $\bar{}$, 属于 $\mathcal{B}\ T$ 342 $s \in T$ $i \neq i'$ $s^\frown\langle i\rangle \in ()$。因此, 引理 .() 给出一个 , 并 $\bar{T}^{\rightsquigarrow \bar{A}} \subseteq T^{\rightsquigarrow A}$ $s^\frown\langle i'\rangle \in \bar{T}^{\rightsquigarrow \bar{B}} \subseteq T^{\rightsquigarrow B}$ $\chi =$ s $t = s^\frown\langle i\rangle$ 且存在满足 和 的 。显然, : dom( )、: 以及$t' := s^\frown\langle i'\rangle$ 均符合要求。

►若 $\theta_B > \theta$, 则选取 $r \in (T^{\rightsquigarrow B})_\theta$。对于每个 $a \in \bar{A} \setminus \{r\}$, $\chi_a := \Delta(a, r)$ 都比 θ小 $\bar{}$。由于 $|A| = \lambda$, 我们可以找到 $\chi < \theta$, 使得 $A\setminus\{r\}$ 中有 λ 个 a 满足$\chi_a = \chi$。由于 $T^{\rightsquigarrow A}$ 的 χ^{th} 层的基数为 $< \lambda$, 接着我们可以找到 $t \in (T^{\rightsquigarrow A})_{\chi+1}$, 使得 $A \setminus \{r\}$ 中有 λ 个 a 满足 $\chi_a = \chi$, 且 $a \restriction (\chi + 1) = t$。显然, χ、 t 以及 $t' := r \restriction (\chi + 1)$ 符合要求。□

由断言可知, 给定 χ 。为简化记号, 我们假设$\Delta[A \times B] = \{\chi\}$。令 M 为包含 $\{\chi, A, B, T^{\rightsquigarrow A}, T^{\rightsquigarrow B}, \varrho, d\}$ 的 $\mathcal{H}_{(2^\lambda)^+}$ 的初等子模型, 使得 $\sigma := M \cap \lambda$ 属于 S_τ。特别地, $|M| = \mu$。记$\upsilon :=$ 为 A 的上确界, 并记 $\upsilon_M :=$ 为 $M \cap \upsilon$ 的上确界。注意, 由于 $T^{\rightsquigarrow A} \in \mathcal{T}(\lambda, \theta)$ 且 $\lambda = \mu^+ > |\theta|$, 可知 $T^{\rightsquigarrow A}$ 的基数为 $\leq \mu$。因此, $T^{\rightsquigarrow A} \subseteq M$。

考虑以下集合:

- $A^0 := \{\alpha \in A \mid |\varrho_\alpha[B]| = \lambda\}$,
- $A^1 := \{\alpha \in A \mid |\varrho_\alpha[B]| \leq \mu\}$.

注意到 $A^0, A^1 \in M$。我们考察两个子情形。

子情形 2.1: A^0 的基数为 λ。应用推论 3.5, 取 $X := A^0$ 和 $i := 0$, 从而选出 $\alpha \in A^0$, 使得对于共终多个 $\delta < \theta$, 以下两条成立:

(1) $b_\alpha(\delta) = 0$, 且 (2) $\{\beta \in A \mid \Delta(\alpha, \beta) = \delta\}$ 的基数为 λ。

由于 $\theta \in E^\lambda_\mu$, $D := \{\delta < \theta \mid$ 条款 (1) 和 (2) 都成立, $\}$ 的基数为 μ。对于每个$\delta \in D$, 使用条款 (2) 固定一个 $\beta_\delta \in A$, 使其大于 α, 且满足 $\Delta(\alpha, \beta_\delta) = \delta$。

考虑 $\varsigma :=$ 上确界$\{\beta_\delta \mid \delta < \mu\}$。由于 $|B \cap \varsigma| \leq \mu$, 事实 $\alpha \in A^0$ 意味着$E := \varrho_\alpha[B \setminus \varsigma]$ 的基数为 λ。因此, 根据 d的选取, 我们可以选取 $\delta \in D \setminus (\chi + 1)$, 以及一个大于 δ 的$\epsilon \in E$, 使得 $d(\delta, \epsilon) = \tau$。选取 $\gamma \in B \setminus \varsigma$使得 $\epsilon = \varrho(\alpha, \gamma)$。显然, $\alpha < \beta_\delta < \gamma$。

回想一下, $\Delta(\alpha, \beta_\delta) = \delta > \chi = \Delta(\beta_\delta, \gamma)$。由于 $b_\alpha(\delta) = 0$, 我们得出$b_{\beta_\delta}(\delta) = 1$且 $b_\alpha <_{\text{lex}} b_{\beta_\delta}$。总而言之, $(\alpha, \beta_\delta, \gamma) \in A \circledast A \circledast B$, 并且

$$c(\alpha, \beta_\delta, \gamma) = d(\Delta(\alpha, \beta_\delta), \varrho(\alpha, \gamma)) = d(\delta, \epsilon) = \tau,$$

正如所求。

子情形 2.2: A^1 的基数为 λ。由条件 (iii), 取 $A' \in [A^1]^\lambda$ 和 $B' \in [B]^\lambda$, 使得 $\min(\varrho[A' \circledast B']) > \sigma$。应用推论 3.5, 令 $X := A'$ 和 $i := 0$, 从而选取 $\beta \in A' \setminus \upsilon_M$, 使得对共终多个 $\delta < \theta$, 以下两条成立:

(1) $b_\beta(\delta) = 0$, 以及 (2) $\{\alpha \in A' \mid \Delta(\alpha, \beta) = \delta\}$ 的基数为 λ。

由于 $\theta \in E^\lambda_\mu$, $D := \{\delta < \theta \mid$ 条款 (1) 和 (2) 均成立$\}$ 的基数为 μ。

任意选取 $\gamma \in B' \setminus (\beta + 1)$。由于 $(\beta, \gamma) \in A' \circledast B'$, 序数 $\epsilon := \varrho(\beta, \gamma)$ 大于 σ。由于 e_ϵ 是到 $\mu = |D|$的单射, 我们可以选取 $\delta \in D$, 使得 $e(\delta, \epsilon) > \max\{e(\chi, \epsilon)\ e(\sigma, \epsilon)\}$。此外, 由于 $\mu = \text{cf}(\sigma)$, 以下集合有下界 σ:

$$Z := \{\zeta < \sigma \mid e(\zeta, \epsilon) \leq e(\delta, \epsilon)\}.$$

令 $t:=(b_\beta\restriction\delta)^\frown\langle 1\rangle$。由 $\delta\in D$可推知，$(A')_t$的基数为 λ。由于 $t\in T^{\rightsquigarrow A}\subseteq M$，特别是，$(A^1)_t$是一个基数为 λ且包含于 M的集合。根据条件(iii)和 M的初等性，可以找到 $\alpha_0\neq\alpha_1$，属于$(A^1)_t\cap M$，使得 $\varrho(\alpha_0,\alpha_1)>\sup(Z)$。由于 ϱ是次可加的，现在可以找到 $\alpha\in\{\alpha_0,\alpha_1\}$，使得 $\varrho(\alpha,\gamma)>\sup(Z)$。注意，由于 $\{\alpha,B,\varrho\}\in M$，并且由于 $\alpha\in A^1$，$\varrho_\alpha[B]$是一个基数不超过 μ且包含于 M的集合，因此$\sup(\varrho_\alpha[B])\in M$。特别地，$\varrho(\alpha,\gamma)<\sigma$。

断言 5.3.3。以下各项均成立：

(1) $(\alpha,\beta,\gamma)\in A\circledast A\circledast B$;
(2) $\Delta(\alpha,\beta)>\Delta(\beta,\gamma)$; (3) $b_\beta<_{\rm lex}b_\alpha$; (4) $\min(Z_{(\alpha,\beta,\gamma)})=\sigma$.

证明。(1) γ被选为属于 $B\setminus(\beta+1)$。此外，$\beta\in A'\setminus\upsilon_M$，而$\alpha\in M\cap A$。

(2) 由于 $\Delta(\alpha,\beta)=\Delta(t,b_\beta)=\delta>\chi=\Delta(\beta,\gamma)$。(3) 根据 t 的定义，且由于 $\delta\in D$。(4) 由于 $\delta=\Delta(\alpha,\beta)$和 $\varrho(\beta,\gamma)=\epsilon$，我们推得 $Z_{(\alpha,\beta,\gamma)}=\{\zeta\in\lambda\setminus\varrho(\alpha,\gamma)\mid e(\delta,\epsilon)\geq e(\zeta,\epsilon)\}$。特别地，$\sigma\in Z_{(\alpha,\beta,\gamma)}$。现在，若 $\zeta:=\min(Z_{(\alpha,\beta,\gamma)})$小于 σ，则 $\zeta\in Z$，这与 $\varrho(\alpha,\gamma)>\sup(Z)$这一事实矛盾。□

根据前面的断言和 c 的定义，

$$c(\alpha,\beta,\gamma)=h(\min(Z_{(\alpha,\beta,\gamma)})=h(\sigma)=\tau,$$

正如所求。□

6. Countably many colors

本节的主要结果断言

$$\lambda^+\overset{\sup}{\nrightarrow}[\lambda,\lambda]^3_\omega$$

对于无限基数 $\mu=\mu^{<\mu}$，只要 $\lambda=\mu^+$，便有此结论。证明思路是在定理 5.2 和 5.3 给出的着色 $c\colon[\lambda^+]^3\to\lambda$ 的基础上，结合事实 2.14 给出的次可加着色 $\rho\colon[\lambda^+]^2\to\lambda$。根据这些定理的子句（III），我们必须处理这样一个棘手情形：定义 4.20 中的两个集合 A,B 不满足 $\rho\restriction[A\cup B]^2$ 见证 U(λ, λ, λ, 3)。熟悉 Tod07, §10] 的人或许会建议在这个棘手情形中使用 Tod07, §8] 的振荡，而这确实有效。遗憾的是，为了验证这在矩形情形下也有效，我们不得不重新审视并调整证明。专家或许可以直接跳到推论 6.17。新手则可能会受益于这种模块化阐述。

设定 6.1。对于本节余下部分，κ 表示一个正则不可数基数，Υ 是一个足够大的正则基数（例如，$(2^\kappa)^+$），并且我们固定某个 C-序列$\vec{C}=\langle C_\beta\mid\beta<\kappa\rangle$。我们还假设，对于所有 $\beta<\kappa$，都有 $\mathrm{otp}(C_\beta)=\mathrm{cf}(\beta)$，不过这只会在下文引理 6.16 的证明中起作用。

下一个定义中的各项分别对应于 [Tod07], 中的定义 8.1.4、6.3.1 和 8.1.1，其中最后一项是对最后一个定义的非本质加强。

定义 6.2. 一个子集 $\Gamma\subseteq\kappa$，若 $\mathrm{cf}(\mathrm{otp}(\Gamma))>\omega$，则称为：

- *$\vec{C}$-stationary* iff $\bigcup_{\beta\in\Gamma}(\mathrm{acc}(C_\beta)\cup\{\beta\})$ is stationary in $\sup(\Gamma)$;

- $\vec{C}$-非平凡，当且仅当对每个闭无界集 $D \subseteq \sup(\Gamma)$，都存在 $\alpha \in \Gamma$ 使得 $D \cap \alpha \not\subseteq C_\beta$ 对所有 $\beta \in \Gamma$;
- $\vec{C}$-振荡当且仅当对于每个闭无界集 $D \subseteq \sup(\Gamma)$，存在 $\beta \in \Gamma$ 以及 $D \setminus C_\beta$ 中序数的一个递增序列 $\langle \delta_j \mid j < \omega \rangle$，使得对所有 $j < \omega$，$(\delta_j, \delta_{j+1}) \cap C_\beta \neq \emptyset$。

引理 6.3. 假设 $\Gamma \subseteq \kappa$ 满足 $\mathrm{cf}(\mathrm{otp}(\Gamma)) > \omega$.
若 Γ 是 C-非平凡且 C-平稳的，则 Γ 是 C-振荡的。

证明。假设 Γ 是 C-非平凡且 C-平稳的。由后者可知，$\Delta := \bigcup_{\beta\in\Gamma}(\mathrm{acc}(C_\beta) \cup \{\beta\})$ 是 θ 的平稳子集。对于每个 $\delta \in \Delta$，选取 $\beta_\delta \in \Gamma$，使得 $\sup(C_{\beta_\delta} \cap \delta) = \delta$。

接下来，为验证 Γ 是 $\vec{C}$-振荡的，设 $D \subseteq \sup(\Gamma)$ 是给定的一个闭无界集。

断言 6.3.1. 存在 $\delta \in \Delta$，使得 $\sup(D \cap \delta \setminus C_{\beta_\delta}) = \delta$。

证明。反设不然。那么，对每个 $\delta \in \Delta$，$\epsilon_\delta := \sup(D \cap \delta \setminus C_{\beta_\delta})$ 都小于 δ。固定一个 $\epsilon < \sup(\Gamma)$，使得 $S := \{\delta \in \Delta \mid \epsilon_\delta < \epsilon < \delta\}$ 是平稳集。现在，考虑闭无界集 $D' := D \setminus \epsilon$。那么，对每个 $\alpha \in \Gamma$，令 $\delta := \min(S \setminus \alpha)$，则有 $D' \cap \alpha \subseteq D \cap [\epsilon, \delta) \subseteq C_{\beta_\delta}$。这与 Γ 是 $\vec{C}$-非平凡的事实矛盾。□

设 δ 由该断言给出。由于 $\sup(D \cap \delta \setminus C_{\beta_\delta}) = \delta = \sup(C_{\beta_\delta} \cap \delta)$，递归地构造一个由 $D \cap \delta \setminus C_{\beta_\delta}$ 中的序数组成的递增序列 $\langle \delta_j \mid j < \omega \rangle$，使得对所有 $j < \omega$，都有 $(\delta_j, \delta_{j+1}) \cap C_{\beta_\delta} \neq \emptyset$。□

定义 6.4. 对于两个不相交的序数集 y 和 z，若以下情况之一成立，则称 P 是 z 的一个 y-凸子集:

- $P = \{\zeta \in z \mid \zeta < \alpha\}$ 和 $\alpha = \min(y)$;
- $P = \{\zeta \in z \mid \beta < \zeta\}$ 和 $\beta = \max(y)$;
- $P = \{\zeta \in z \mid \alpha < \zeta < \beta\}$ 和 $\alpha < \beta$ 是 y的两个相邻元素。

注意，若 P和 Q 是 z的非空 y-凸子集，则 $P < Q$ 或$Q < P$。

定义 6.5（Todorčević，[Tod07，§8]）。对于一个序数 $\varepsilon < \kappa$，定义函数 $\mathrm{Osc}_\varepsilon : [\mathcal{P}(\kappa)]^2 \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\kappa))$，如下:

$$\mathrm{Osc}_\varepsilon(x, y) := \begin{cases} \{P \mid P \text{ is a nonempty } y\text{-convex subset of } x \setminus \varepsilon\}, & \text{if } y \cap x \subseteq \varepsilon; \\ \emptyset, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

于是，振荡映射 $\mathrm{osc}_\varepsilon : [\mathcal{P}(\kappa)]^2 \to \mathrm{CARD}(\kappa + 1)$ 定义如下：$\mathrm{osc}_\varepsilon(x, y) := |\mathrm{Osc}_\varepsilon(x, y)|$。

注 6.6。(1) 若省略下标 ε，则 $\mathrm{Osc}(x, y)$ 和 $\mathrm{osc}(x, y)$ 分别理解为 $\mathrm{Osc}_\varepsilon(x, y)$ 和 $\mathrm{osc}_\varepsilon(x, y)$，其中 $\varepsilon := \mathrm{ssup}(x \cap y)$。(2) 对所有满足 $C_\alpha \cap C_\beta \subseteq \varepsilon$、$C_\alpha \setminus \varepsilon$ 和 C_β 没有公共聚点的 $\varepsilon < \alpha < \beta < \kappa$，$\mathrm{Osc}_\varepsilon(C_\alpha, C_\beta)$ 都是有限的。在这种情况下，我们将 $\mathrm{Osc}_\varepsilon(C_\alpha, C_\beta)$ 与其递增枚举 $\langle P_0, \ldots, P_n \rangle$ 等同。

下一个引理明确阐述了 [Tod07，引理 8.1 的证明中包含的一些特征2]。

引理 6.7（Todorčević）。设 Γ 是某个具有不可数共尾性 的 $\theta \leq \kappa$ 的共尾子集，且 Γ 是 C-振荡的。对于每个共尾 $E \subseteq \theta$,

存在 $\beta\in\Gamma$，使得对于每个正整数 n，存在 $\alpha\in\Gamma\cap\beta$ 和 $\varepsilon\in E\cap\alpha$，使以下所有条件均成立：

- 振荡$_\varepsilon(C_\alpha,C_\beta)=n$；
- 对于每个 $j<n$，都存在一对 $\epsilon<\epsilon'$ 属于 $E\setminus C_\alpha$ 的序数，使得
$$\mathrm{Osc}_\varepsilon(C_\alpha,C_\beta)(j)=C_\alpha\cap(\epsilon,\epsilon').$$

证明。令 $\mu:=\mathrm{cf}(\theta)$，并固定一个映射 $\psi:\mu\to\theta$，其像在 θ中共终。令 $\mathcal{M}$为一个长度为 μ、由初等子模型 $M\prec H_\Upsilon$构成的连续 $\in$-链，且满足 $M\cap\mu\in\mu$和 $\{\psi,\vec{C},\Gamma,E\}\in M$。由此可知，$D:=\{\sup(M\cap\theta)\mid M\in\mathcal{M}\}$构成 θ中的一个闭无界集。回想一下，Γ 是 C-振荡的，取 $\beta\in\Gamma$ 以及 $D\setminus C_\beta$中的一个递增序列 $\langle\delta_j\mid j<\omega\rangle$，使得对所有 $j<\omega$，都有 $(\delta_j,\delta_{j+1})\cap C_\beta\neq\emptyset$。可以将 δ_j 替换为 δ_{j+1}，从而不失一般性地假设 $C_\beta\cap\delta_0$非空。对于每个 $j<\omega$，由于 $\delta_j\in D\setminus C_\beta$，取 $M_j\in\mathcal{M}$ 使得 $\sup(M_j\cap\theta)=\delta_j$，并注意到 $\gamma_j:=\sup(C_\beta\cap\delta_j)$ 和 $\Omega_j:=\min(M_j\cap\theta\setminus\gamma_j)$ 均小于 δ_j。因此，对于每个 $j<\omega$：
$$0<\sup(C_\beta\cap\delta_j)=\gamma_j\leq\Omega_j<\delta_j<\gamma_{j+1}<\beta.$$

对于每个 $k<\omega$，令 $\mathcal{I}_k$ 表示 $\vec{I}=\langle I_j\mid j\leq k\rangle$ 中所有 θ 的闭区间递增序列所组成的集合。现在，令 n 为一个正整数，我们将按照引理结论中的方式找出 $\alpha\in\Gamma\cap\beta$ 和 $\varepsilon\in E\cap\alpha$。

通过对 $i\leq n$ 进行递归，定义一个集合族序列 $\langle\mathcal{F}_{n-i}\mid i\leq n\rangle$，如下所示：

▶ 对于 $i=0$，令 $\mathcal{F}_n$ 为所有满足以下两条条件的 $\langle I_j\mid j\leq n\rangle\in\mathcal{I}_n$ 所组成的集合：

（1） $I_0=[0,\Omega_0]$；（2）对于每个 $j\leq n$，$\alpha:=\max(I_n)$ 属于 Γ、$C_\alpha\subseteq I_0\cup\cdots\cup I_n$，并且 $C_\alpha\cap I_j\neq\emptyset$。

▶ 对于每个满足 $\mathcal{F}_{n-i}$ 已经定义的 $i<n$，令 $\mathcal{F}_{n-i-1}$ 为所有具有以下性质的 $I\in\mathcal{I}_{n-i-1}$ 所组成的集合：对于每个 $\epsilon<\theta$，存在一个闭区间 $I\subseteq(\epsilon,\theta)$，使得 $\vec{I}^\frown\langle I\rangle\in\mathcal{F}_{n-i}$。

命题 6.7.1. $\langle[0,\Omega_0]\rangle\in\mathcal{F}_0$。

证明。对每个 $j\leq n$，定义：
$$I_j:=\begin{cases}[0,\Omega_0], & \text{if } j=0;\\ [\delta_{j-1},\Omega_j], & \text{if } 0<j<n;\\ [\delta_{n-1},\beta], & \text{otherwise.}\end{cases}$$

我们将对 $i\leq n$ 使用归纳法证明 $\langle I_j\mid j\leq n-i\rangle\in\mathcal{F}_{n-i}$。基例显然成立，因为 $\langle I_j\mid j\leq n\rangle$ 满足要求 (1) 和 (2)，其中 β 起到 α的作用。

接下来，假设给定了一个 $i<n$，且已证明 $\langle I_j\mid j\leq n-i\rangle\in\mathcal{F}_{n-i}$。注意：

- $\langle\mathcal{F}_k\mid k\leq n\rangle\in M_0\subseteq M_{n-i-1}$；
- $\langle I_j\mid j\leq n-i-1\rangle\in M_{n-i-1}\cap\mathcal{F}_{n-i}$；
- $I_{n-i}\in M_{n-i}\setminus M_{n-i-1}$。

因此，根据 M_{n-i-1}的初等性，$\langle I_j\mid j\leq n-i-1\rangle\in\mathcal{F}_{n-i-1}$。 □

由此可知，我们可以递归地构造一个序列 $\langle I_j\mid j\leq n\rangle$，使得：

(3) $I_0=[0,\Omega_0]$, 使得 $\langle I_0\rangle\in\mathcal{F}_0\cap M_0$；

(4) $\langle I_j \mid j \le k+1\rangle \in \mathcal{F}_{k+1} \cap M_k$ 对于每个 $k < n$;

(5) $I_{j+1} \subseteq (\min(E \setminus \Omega_j + 1)\ \theta)$ 对于每个 $j < n$。

对于每个 $j < n$，记 $\epsilon_j := \min(E \setminus \Omega_j + 1)$，并注意到，由于 I_{j+1} 和 E 属于 M_j，$\epsilon'_j := \min(E \setminus \max(I_{j+1}) + 1)$ 是 $< \delta_j$。记 $\gamma'_j := \min(C_\beta \setminus \gamma_j + 1)$，使得 $\gamma_j < \gamma'_j$ 是 C_β 中相邻的两个元素。由于 $\sup(C_\beta \cap \delta_j) = \gamma_j$，综上，

$$I_{j+1} \subseteq (\epsilon_j, \epsilon'_j) \subseteq (\Omega_j, \delta_j) \subseteq (\gamma_j, \gamma'_j) \subseteq (\gamma_j, \gamma_{j+1}).$$

现在，令 $\alpha := \max(I_n)$。那么对于每个 $j \le n$，都有 $\alpha \in \Gamma \cap \delta_{n-1} \subseteq \Gamma \cap \beta$、$C_\alpha \subseteq I_0 \cup \cdots \cup I_n$ 和 $C_\alpha \cap I_j \neq \emptyset$。因此，$(C_\alpha \setminus I_0) \subseteq \bigcup_{j<n}(\Omega_j, \delta_j)$。另一方面，$(C_\beta \setminus I_0) \cap (\bigcup_{j<n}(\Omega_j, \delta_j)) = \emptyset$。因此，对于 $\varepsilon := \epsilon_0$，我们得到

$$C_\alpha \cap C_\beta \subseteq (\Omega_0 + 1) \subseteq \varepsilon.$$

断言 6.7.2. $\{\epsilon_j, \epsilon'_j \mid j < n\} \cap C_\alpha = \emptyset$.

证明. 反设，并固定 $j < n$ 使得 $\{\epsilon_j, \epsilon'_j\} \cap C_\alpha \neq \emptyset$。由于 $\max(I_0) = \Omega_0 \le \Omega_j < \epsilon_j < \epsilon'_j$，我们可以固定某个 $i < n$ 使得 $\{\epsilon_j, \epsilon'_j\} \cap I_{i+1} \neq \emptyset$。回想 $I_{j+1} \subseteq (\epsilon_j, \epsilon'_j)$，必有 $i \neq j$。注意：

▶ 若 $i < j$，则 $\gamma_{i+1} \le \Omega_{i+1} \le \Omega_j < \epsilon_j < \epsilon'_j$。▶ 若 $i > j$，则 $\epsilon_j < \epsilon'_j < \delta_j < \gamma_{j+1} \le \gamma_i$。因此，这两种情况都与 $I_{i+1} \subseteq (\gamma_i, \gamma_{i+1})$ 矛盾。 □

根据条款（2），对于每个 $j \le n$、$C_\alpha \cap I_{j+1} \neq \emptyset$。总而言之，对于每个 $\varsigma \in (\Omega_0, \varepsilon]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Osc}_\varsigma(C_\alpha, C_\beta) &= \langle C_\alpha \cap I_{j+1} \mid j < n\rangle \\ &= \langle C_\alpha \cap (\gamma_j, \gamma'_j) \mid j < n\rangle \\ &= \langle C_\alpha \cap (\epsilon_j, \epsilon'_j) \mid j < n\rangle.\end{aligned}$$

特别地，$\mathrm{osc}_\varepsilon(C_\alpha, C_\beta) = n$。 □

注记 6.8。在前面的证明中，在 $\kappa = \theta$ 或 $\kappa = (\text{共尾性}(\theta))^+$ 的特殊情形下，可以确保 Ω_0 等于 γ_0。因此，在这种情况下，我们将得到 $\max(C_\alpha \cap C_\beta) = \Omega_0$，，这意味着该引理的结论在省略下标 ε 后仍然成立。

定义 6.9。定义 $\chi : [\kappa]^3 \to \omega$，令对所有 $\alpha < \beta < \kappa$:

$$\chi(\alpha, \beta, \gamma) := \max\{k < \omega \mid \mathrm{Tr}(\alpha, \gamma)(k) = \mathrm{Tr}(\beta, \gamma)(k)\}.$$

定义 6.10（[Tod07，定义 10.3.1]）。如果子集 $A \subseteq \kappa$ 满足 χ“$[A]^3$ 为有限集，则称其为稳定的。否则，我们称 A 为不稳定的。

类似于 [Tod07，定义 10.3。3],我们使用 χ 来推导二维振荡的以下提升。

定义 6.11。三维振荡映射 osc: $[\kappa]^3 \to \omega$ 基于定义 6.5 中定义的二维振荡，通过以下方式定义:

$$\overline{\mathrm{osc}}(\alpha, \beta, \gamma) := \mathrm{osc}_\alpha(C_{\mathrm{Tr}(\alpha,\beta)(\chi(\alpha,\beta,\gamma))}, C_{\mathrm{Tr}(\alpha,\gamma)(\chi(\alpha,\beta,\gamma))}).$$

现在我们验证 [Tod07，引理 10.3.4] 的一个矩形版本:

引理 6.12（Todor̆cevi´c）。设 B 是某个具有不可数共尾性的 $\theta \le \kappa$ 的共尾子集，并且 B 的每个共尾子集都是不稳定的。

于是，对于每个共终的 $A \subseteq \theta$ 以及每个正整数 n，都存在 $(\alpha, \beta, \gamma) \in A \circledast B \circledast B$，使得 $\overline{\mathrm{osc}}(\alpha, \beta, \gamma) = n$。

证明。对每个 $\delta<\theta$，令 $\beta_\delta:=\min(B\setminus(\delta+1))$ 且 $\Lambda_\delta:=\lambda_2(\delta,\beta_\delta)$。由福多尔引理，取定 $\Lambda<\theta$, $k<\omega$ 以及一个平稳集 $S\subseteq\mathrm{acc}(\theta)$，使得对所有 $\delta\in S$：

(1) $\Lambda_\delta\leq\Lambda$；(2) $\rho_2(\eth_{\delta,\ \beta_\delta},\beta_\delta)$ $=k$；(3) 对每个 $\delta<\delta$，$\beta_{\bar\delta}<\delta$。

断言 6.12.1. 对每个 $\delta\in S$ 以及每个满足 $\Lambda<\alpha<\eth_{\delta,\ \beta_\delta}$ 的序数 α：

- $\mathrm{Tr}(\alpha,\beta_\delta)\restriction(k+1)=\mathrm{Tr}(\delta,\beta_\delta)\restriction(k+1)$，并且
- $\mathrm{Tr}(\alpha,\beta_\delta)(k)=\eth_{\delta,\beta_\delta}$.

证明。由注 2.13 得。□

设 $\Gamma:=\{\eth_{\delta,\beta_\delta}\mid\delta\in S\}$。对于每个 $\xi\in\Gamma$，选取 $\delta(\xi)\in S$ 使得 $\xi=\eth_{\delta(\xi),\ \beta_{\delta(\xi)}}$。注意，$\delta(\xi)\leq\xi\leq\beta_{\delta(\xi)}$。

断言 6.12.2。$\vec{\Gamma}$是 C-振荡的。

证明。由于对于每个 $\delta\in S$，都有 $\delta\in\mathrm{acc}(\eth_{\delta,\ \beta_\delta})\cup\{\eth_{\delta,\beta_\delta}\}$，因此我们有 $S\subseteq\bigcup_{\xi\in\Gamma}\mathrm{acc}(C_\xi)\cup\{\xi\}$。所以 $\vec{\Gamma}$ 是 C-平稳的。由引理 6.3，只需证明 Γ 是 C-非平凡的。为导出矛盾，假设并非如此，并固定一个闭无界集 $D\subseteq\theta$，使得对于每个 $\alpha\in\Gamma$，都存在 $\beta\in\Gamma$ 满足 $D\cap\alpha\subseteq C_\beta$。由于 $\sup(\Gamma)=\theta$，我们便可以递归地构造一个足够稀疏的共尾子集 $X\subseteq\Gamma$，使得对于来自 X的任意一对序数 $\xi<\xi'$，以下条件全部成立：

- $\Lambda<\delta(\xi)$；
- $D\cap(\beta_{\delta(\xi)}\delta(\xi'))\neq\emptyset$；
- $D\cap\beta_{\delta(\xi)}\subseteq C_{\xi'}$。

由于 $B':=\{\beta_{\delta(\xi)}\mid\xi\in X\}$ 是 B 的共尾子集，因此它必定是不稳定的。我们将通过证明 χ“$[B']^3=\{k\}$ 来导出矛盾。为此，设 $\alpha<\beta<\gamma$ 是来自 B' 的序数三元组。固定一个来自 X 的序数三元组 $\xi<\xi'<\xi''$，使得 $\alpha=\beta_{\delta(\xi)}$、$\beta=\beta_{\delta(\xi')}$，且 $\gamma=\beta_{\delta(\xi'')}$。于是：

- $\Lambda<\delta(\xi)<\alpha<\delta(\xi')<\beta<\delta(\xi'')\leq\xi''\leq\gamma$；
- $D\cap(\alpha,\delta(\xi'))\neq\emptyset$；
- $D\cap\beta\subseteq C_{\xi''}$。

选取 $\iota\in D\cap(\alpha,\delta(\xi'))\neq\emptyset$，使得 $\iota\in D\cap(\alpha,\beta)\subseteq C_{\xi''}$。根据 $\delta'':=\delta(\xi'')$ 应用断言 6.12.1，我们推得：

- $\mathrm{Tr}(\alpha,\gamma)\restriction(k+1)=\mathrm{Tr}(\delta'',\gamma)\restriction(k+1)=\mathrm{Tr}(\beta,\gamma)\restriction(k+1)$, and
- $\mathrm{Tr}(\alpha,\gamma)(k)=\xi''=\mathrm{Tr}(\beta,\gamma)(k)$.

因此

$$\mathrm{Tr}(\alpha,\gamma)(k+1)=\min(C_{\xi''}\setminus\alpha)\leq\iota<\beta\leq\min(C_{\xi''}\setminus\beta)=\mathrm{Tr}(\beta,\xi)(k+1).$$

回顾定义 6.9，这确实意味着 $\chi(\alpha,\beta,\gamma)=k$。□

现在，给定一个共终的 $A\subseteq\theta$ 和一个正整数 n，对$E:=\mathrm{acc}^+(A\setminus\Lambda)$ 应用引理 6.7，可找到一对 $(\xi,\zeta)\in\Gamma\circledast\Gamma$ 以及一个序数 $\varepsilon\in E\cap\xi$，使得：

- $\mathrm{osc}_\varepsilon(C_\xi,C_\zeta)=n+1$，并且
- 对于每个 $j<n+1$，都存在一对 $\epsilon<\epsilon'$序数，属于 $E\setminus C_\xi$，使得

$$\mathrm{Osc}_\varepsilon(C_\xi,C_\zeta)(j)=C_\xi\cap(\epsilon,\epsilon').$$

设 $\epsilon < \epsilon'$ 是一对序数，它们见证了前述情况中的 $j = 0$ 情形。显然，

$$\mathrm{Osc}_\varepsilon(C_\xi, C_\zeta)(0) = C_\xi \cap [\epsilon, \epsilon'].$$

由于 $\mathrm{osc}(C_\xi, C_\zeta) > 1$ 且 $\xi < \zeta$，我们可以固定 C_ζ 中相邻的两个元素 $\bar{\alpha} < \beta$，使得

$$\mathrm{Osc}_\varepsilon(C_\xi, C_\zeta)(1) = C_\xi \cap (\bar{\alpha}, \bar{\beta}).$$

因此，$\epsilon < \epsilon' \leq \bar{\alpha} < \xi$。

由于 C_ξ 是 ξ 的闭子集，且 $\epsilon' \in \mathrm{acc}^+(A \setminus \Lambda) \cap (\xi \setminus C_\xi)$，我们可以选取一个足够大的 $\alpha \in A \cap (\Lambda, \epsilon')$，使得

$$\mathrm{Osc}_\varepsilon(C_\xi, C_\zeta)(0) \subseteq (\epsilon, \alpha).$$

特别地，$C_\xi \cap C_\zeta \subseteq \varepsilon \subseteq \alpha$，并且

$$\mathrm{osc}_\alpha(C_\xi, C_\zeta) = \mathrm{osc}_\varepsilon(C_\xi, C_\zeta) - 1 = n.$$

记 $\bar{\delta} := \delta(\xi)$，并记 $\delta := \delta(\zeta)$。则 $(\bar{\delta}, \delta) \in [S]^2$，$\xi = \eth_{\bar{\delta},\beta_{\bar{\delta}}}$ 且 $\zeta = \eth_{\delta,\beta_\delta}$。令 $\beta := \beta_{\bar{\delta}}$ 且 $\gamma := \beta_\delta$，使得 $(\beta, \gamma) \in [B]^2$。注意

$$\Lambda < \alpha < \epsilon' \leq \bar{\alpha} < \xi \leq \beta < \delta \leq \zeta \leq \gamma.$$

由断言 6.12.1，得：

- $\mathrm{Tr}(\alpha, \gamma) \restriction (k+1) = \mathrm{Tr}(\delta, \gamma) \restriction (k+1) = \mathrm{Tr}(\beta, \gamma) \restriction (k+1)$;
- $\mathrm{Tr}(\alpha, \gamma)(k) = \zeta = \mathrm{Tr}(\beta, \gamma)(k)$;
- $\mathrm{Tr}(\alpha, \beta)(k) = \xi$.

因此，

$$\mathrm{Tr}(\alpha, \gamma)(k+1) = \min(C_\zeta \setminus \alpha) \leq \bar{\alpha} < \beta \leq \min(C_\zeta \setminus \beta) = \mathrm{Tr}(\beta, \gamma)(k+1),$$

并且 $\chi(\alpha, \beta, \gamma) = k$。

综上，$(\alpha, \beta, \gamma) \in A \circledast B \circledast B$，且

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{osc}}(\alpha, \beta, \gamma) &= \mathrm{osc}_\alpha(C_{\mathrm{Tr}(\alpha,\beta)(\chi(\alpha,\beta,\gamma))}, C_{\mathrm{Tr}(\alpha,\gamma)(\chi(\alpha,\beta,\gamma))}) \\ &= \mathrm{osc}_\alpha(C_{\mathrm{Tr}(\alpha,\beta)(k)}, C_{\mathrm{Tr}(\alpha,\gamma)(k)}) \\ &= \mathrm{osc}_\alpha(C_\xi, C_\zeta) = n, \end{aligned}$$

这正是所求。 □

断言 6.12.2 的证明结尾清楚地表明，以下结论成立。

观察 6.13. 假设：

- $\lambda_2(\delta, \gamma) < \alpha < \beta < \delta < \gamma < \kappa$;
- $C_{\eth_{\delta,\ \gamma}} \cap [\alpha, \beta)$ 非空。则

$\chi(\alpha, \beta, \gamma) = \rho_2(\eth_{\delta,\ \gamma}, \gamma)$。 □

下一个引理提取了证明 [Tod07，引理 10.3.2] 中的特征。

引理 6.14. 假设 X 是某个具有不可数共尾性的 $\theta \leq \kappa$ 的稳定共尾子集。那么存在一个共尾 $X' \subseteq X$、一个闭无界集 $D \subseteq \theta$ 和一个正整数 k，满足以下所有条件：

(1) 对每个 $(\delta, \gamma) \in D \circledast X'$，$D \cap \delta \subseteq C_{\eth_{\delta,\ \gamma}}$；(2) 对每个 $(\delta, \alpha, \delta', \beta, \delta'', \gamma) \in D \circledast \theta \circledast D \circledast \theta \circledast D \circledast X'$：

- $\chi(\alpha, \beta, \gamma) = k$，并且
- $D \cap \delta'' \subseteq C_{\mathrm{Tr}(\alpha,\gamma)(k)}$。

证明。令 $\mu := \mathrm{cf}(\theta)$，并固定一个映射 $\psi\colon \mu \to \theta$，其像在 θ 中共终。设 $\mathcal{M}$ 是一个长度为 μ 的连续 $\in$-链，由初等子模型 $M \prec H_\Upsilon$ 组成，且满足 $M \cap \mu \in \mu$ 和 $\{\psi, \vec{C}, X\} \in M$。对每个 $M \in \mathcal{M}$，记 $\theta_M := \sup(M \cap \theta)$，于是 $E := \{\theta_M \mid M \in \mathcal{M}\}$ 是 θ 中的一个闭无界集。

断言 6.14.1. 设 $N \prec \mathcal{H}_\Upsilon$ 满足 $\{\psi, \vec{C}, X, \mathcal{M}\} \in N$ 和 $N \cap \mu \in \mu$。记 $\theta_N := \sup(N \cap \theta)$，并令 $\gamma \in X \setminus (\theta_N + 1)$。[7]

若 $\sup(E \cap \theta_N \setminus C_{\eth_{\theta_N,\ \gamma}}) = \theta_N$，则存在 $\gamma' \in X \setminus (\theta_N + 1)$，使得 $\rho_2(\eth_{\theta_N,\ \gamma}, \gamma') > \rho_2(\eth_{\theta_N,\ \gamma}, \gamma)$。

证明。记 $\bar{\gamma} := \eth_{\theta_N,\ \gamma}$，$n := \rho_2(\bar{\gamma}, \gamma)$，并且

$$\mathcal{M}^\gamma := \{M \in \mathcal{M} \cap N \mid \theta_M \notin C_{\bar{\gamma}}\}.$$

现在，假设 $\sup(E \cap \theta_N \setminus C_{\bar{\gamma}}) = \theta_N$，我们可推得

$$\sup\{\theta_M \mid M \in \mathcal{M}^\gamma\} = \theta_N.$$

取 $M \in \mathcal{M}^\gamma$，使得 $\theta_M > \lambda_2(\theta_N, \gamma)$。由于 $\theta_M \notin C_{\bar{\gamma}}$，可知 $\rho_2(\theta_M, \bar{\gamma}) > 1$。因此，由注 2.13，

$$\mathrm{tr}(\theta_M, \gamma) = \mathrm{tr}(\bar{\gamma}, \gamma)^\frown \mathrm{tr}(\theta_M, \bar{\gamma}),$$

and

$$\rho_2(\theta_M, \gamma) > \rho_2(\bar{\gamma}, \gamma) + 1.$$

因此，像 $\mathrm{tr}(\theta_M, \gamma)$ 不仅包含像 $\mathrm{tr}(\bar{\gamma}, \gamma)$，还包含严格大于 θ_M 的 $\min(C_{\bar{\gamma}} \setminus \theta_M)$，所以 $\rho_2(\eth_{\theta_M,\ \gamma}, \gamma) > n$。取大于 $\lambda_2(\eth_{\theta_M,\ \gamma}, \gamma)$ 的 $\Lambda \in M \cap \theta$。于是，以下集合属于 M，而 γ 是其包含 θ_M 作为元素的见证：

$$S := \{\delta < \theta \mid \exists \gamma' \in X \setminus (\theta + 1)\, [\rho_2(\eth_{\delta,\gamma'}, \gamma') > n \ \&\ \lambda_2(\delta, \gamma') \leq \Lambda]\},$$

从而 S 是 θ 中的平稳集。取大于 θ_N 的 $\delta \in S$，并取一个见证 γ'。由于 $\lambda_2(\delta, \gamma') \leq \Lambda < \theta_M < \theta_N < \delta$，由注 2.13 可得

$$\mathrm{tr}(\theta_N, \gamma') = \mathrm{tr}(\eth_{\delta,\gamma'}, \gamma')^\frown \mathrm{tr}(\theta_N, \eth_{\delta,\gamma'}),$$

因此 $\rho_2(\theta_N, \gamma') \geq \rho_2(\eth_{\delta,\ \gamma'}, \gamma') + 1 > n + 1$。因此，$\rho_2(\eth_{\theta_N,\ \gamma'}, \gamma') > n$，正如所求。□

断言 6.14.2. $\Delta := \{\delta < \theta \mid \exists \gamma \in X \setminus (\delta + 1)\ [E \cap \delta \subseteq^* C_{\eth_{\delta,\gamma}}]\}$ 在 θ中覆盖一个闭无界集。

证明。设 S 是 θ的一个平稳子集，我们将证明 $S \cap \Delta \neq \emptyset$。设$N \prec \mathcal{H}_\Upsilon$ 满足 $\{\psi, \vec{C}, X, \mathcal{M}\} \in N$，$N \cap \mu \in \mu$，其中 $\theta_N :=$在 S中的$N \cap \theta$的上确界。利用 X 是稳定的这一事实，固定 $m < \omega$ 使得 χ“$[X]^3 \subseteq m$。现在，若 $\theta_N \notin \Delta$，则通过有限次迭代断言 6.14.1，我们可以找到一个$\gamma \in X \setminus (\theta_N + 1)$，使得 $\rho_2(\eth_{\theta_N,\gamma}, \gamma) > m$。取 α，$\beta \in X$，使得 $\lambda_2(\theta_N, \gamma) < \alpha < \beta < \theta_N$，且满足$C_{\eth_{\theta_N,\gamma}} \cap (\alpha, \beta) \neq \emptyset$。根据观察 6.13，$\chi(\alpha, \beta, \gamma) > m$。这就产生了矛盾。□

对每个 $\delta \in \Delta$，固定 $\gamma_\delta \in X \setminus (\delta + 1)$、$\epsilon_\delta < \delta$ 和 $k_\delta < \omega$，使得：

- $E \cap \delta \setminus \epsilon_\delta \subseteq C_{\eth_{\delta,\ \gamma_\delta,\ \gamma_\delta}}$；
- $\lambda_2(\delta, \gamma_\delta) \leq \epsilon_\delta$；
- $\rho_2(\eth_{\delta,\ \gamma_\delta}, \gamma_\delta) = k_\delta$。

[7]由于 $\mathrm{cf}(\theta) = \mu > |N|$，$X \setminus \theta_N$ 在 X 中是余有界的。

求出使下列集合成为平稳集的 $\epsilon<\theta$ 和 $k<\omega$：

$$S:=\{\delta\in\Delta\mid \epsilon_\delta=\epsilon\ \&\ k_\delta=k\}.$$

¯考虑闭无界集 $D:=\{\delta\in \mathrm{acc}(E\setminus\epsilon)\mid \forall\delta\in\Delta\cap\delta(\gamma_{\bar\delta}<\delta)\}$，以及集合$X'$：$=\{\gamma_\delta\mid\delta\in S\cap D\}$。我们将验证 X'、D 和 k 满足两个子句的要求。

(1) 令 $\delta\in D$ 和 $\gamma\in X'\setminus(\delta+1)$。选取 $\delta^*\in D$ 使得 $\gamma=\gamma_{\delta^*}$。若 $\delta^*=\delta$，则 $D\cap\delta^*\subseteq E\cap\delta\setminus\epsilon\subseteq C_{\mathfrak{d}_{\delta^*,\gamma}}$。否则，$\lambda_2(\delta^*,\gamma)\leq\epsilon<\delta<\delta^*<\gamma=\gamma_{\delta^*}$。因此，根据注 2.13，

$$\mathrm{tr}(\delta,\gamma)=\mathrm{tr}(\mathfrak{d}_{\delta^*,\gamma},\gamma)^\frown\mathrm{tr}(\delta,\mathfrak{d}_{\delta^*,\gamma}),$$

其中 $E\cap\delta^*\setminus\epsilon\subseteq C_{\mathfrak{d}_{\delta^*,\gamma}}$。由于 $\delta\in\mathrm{acc}(E)\cap(\epsilon,\delta^*)$，因此 $\delta\in\mathrm{acc}(C_{\mathfrak{d}_{\delta^*,\gamma}})$。综上，

$$\mathrm{tr}(\mathfrak{d}_{\delta,\gamma},\gamma)=\mathrm{tr}(\mathfrak{d}_{\delta^*,\gamma},\gamma).$$

特别地，$D\cap\delta\subseteq E\cap(\epsilon,\delta^*)\subseteq C_{\mathfrak{d}_{\delta^*,\ \gamma}}$。

(2) 设 $(\delta,\alpha,\delta',\beta,\delta'',\gamma)\in D\circledast\theta\circledast D\circledast\theta\circledast D\circledast X'$。固定 $\delta^*\in S\cap D$，使得$\gamma=\gamma_{\delta^*}$。由于 $\delta^*\in\Delta$，且对于每个 $\delta\in\Delta\cap\delta''$都有 $\gamma_{\bar\delta}<\delta''<\gamma$，必然有$\delta^*\geq\delta''$。因此 $\lambda_2(\delta^*,\gamma)\leq\epsilon<\alpha<\beta<\delta^*<\gamma$，并且 $\delta'\in D\cap(\alpha,\beta)\subseteq C_{\mathfrak{d}_{\delta^*,\ \gamma}}\cap(\alpha,\beta)$。那么，观察 6.13 表明 $\chi(\alpha,\beta,\gamma)=\rho_2(\mathfrak{d}_{\delta^*,\ \gamma},\gamma)=k$。□

注 6.15。虽然我们不需要这一事实，但我们指出，引理 6.12 和引理 6.14 的证明共同表明：对于每个 $\theta\leq\kappa$ 具有不可数共尾性的，以及每个共尾子集 $X\subseteq\theta$，以下命题等价：

- X 的每个共尾子集都是不稳定的；
- 对于每个平稳集 $S\subseteq\theta$ 以及 $\prod_{\delta\in S}(X\setminus(\delta+1))$ 中的每个 $\langle\beta_\delta\mid\delta\in S\rangle$，集合 $\Gamma:=\{\mathfrak{d}_{\delta,\beta_\delta}\mid\delta\in S\}$ 都是 $\vec{C}$-非平凡的。

下面是对 [Tod07，引理 10.32] 的一个简单加强：

引理 6.16（Todor̆cevi´c）。设 $\kappa=\lambda^+$ 对某个正则不可数基数 λ 成立，并令 $\rho:[\kappa]^2\to\lambda$ 为由事实 2.14 给出的相应映射。

再假设 X 是 κ 的一个序型为 λ 的稳定子集。那么存在一个共尾子集 $X'\subseteq X$，使得 $\rho\restriction[X']^2$ 见证 $\mathrm{U}(\lambda,\lambda,\lambda,\omega)$。

证明。记 $\theta:=\sup(X)$。令 $X'\subseteq X$ 和 $D\subseteq\theta$ 由引理 6.14 给出。为证明 $\rho\restriction[X']^2$ 见证 $\mathrm{U}(\lambda,\lambda,\lambda,\omega)$，取某个大小为 λ 的两两不交的 $\mathcal{A}\in[X']^\sigma$，其中 $\sigma<\omega$，并令 $\tau<\lambda$。

由于 $\mathcal{A}$ 由 λ 个 X' 的两两不交子集组成，且 $\mathrm{otp}(X')=\lambda$，对每个 $\delta\in D$，我们可以选取 $b_\delta\in\mathcal{A}$，使得 $\min(b_\delta)>\delta$。然后令 $\Lambda_\delta:=\max\{\lambda_2(\delta,\beta)\mid\beta\in b_\delta\}$。回想一下，$X'$ 和 D 由引理 6.14 给出，对所有 $\delta\in D$ 和 $\beta\in b_\delta$，

$$D\cap\delta\subseteq C_{\mathfrak{d}_{\delta,\beta}}.$$

接下来，固定某个 $\Lambda<\theta$ 和一个平稳集 $S\subseteq D$，使得对每个 $\delta\in S$：

(1) $\Lambda_\delta\leq\Lambda<\delta$，(2) $\mathrm{otp}(D\cap\delta)>\tau$，

以及 (3) 对每个 $\gamma\in D\cap\delta$，$\sup(b_\gamma)<\delta$。

显然，$\mathcal{B}:=\{b_\delta\mid\delta\in S\}$ 是 $\mathcal{A}$的一个基数为 λ的子集。现在，给定 $a\neq b\in\mathcal{B}$，我们可以找到一对来自 S 的序数 $\gamma\neq\delta$，使得 $a=b_\gamma$ 且 $b=b_\delta$。不失一般性，$\gamma<\delta$。令（α,β）$\in a\times b$。于是

$$\Lambda_\delta<\gamma<\alpha<\delta<\beta,$$

因此根据注 2.13，$\eth_{\delta,\ \beta} \in$ 像(tr(α,β))。由于映射 ρ 由事实 2.14给出，

$$\rho(\alpha,\beta) \geq \mathrm{otp}(C_{\eth_{\delta,\beta}} \cap \alpha) \geq \mathrm{otp}(C_{\eth_{\delta,\beta}} \cap \gamma) \geq \mathrm{otp}(D \cap \gamma) > \tau,$$

正如所求。 □

显然，稳定集的每个子集都是稳定的。下一个推论讨论并集下的闭合性问题。

推论 6.17. 假设 A, B 是某个具有不可数共尾性的 $\theta \leq \kappa$ 的共尾稳定子集。那么，存在共尾子集 $A' \subseteq A$ 和 $B' \subseteq B$，使得：

- $A' \cup B'$ *is stable, and*
- *for every* $(\alpha,\beta,\gamma) \in [A' \cup B']^3$, *if* $(\beta,\gamma) \in [A']^2 \cup [B']^2$, *then* $\overline{\mathrm{osc}}(\alpha,\beta,\gamma) = 0$.

证明。对 A 应用引理 6.14，得到一个共尾的 $A' \subseteq A$、一个闭无界集 $D_1 \subseteq \theta$ 和一个整数 k_1。同理，对 B 应用引理 6.14，得到一个共尾的 $B' \subseteq B$、一个闭无界集 $D_2 \subseteq \theta$ 和一个整数 k_2。考虑闭无界集 $D := D_1 \cap D_2$。选取足够稀疏的共尾子集 $A'' \subseteq A'$ 和 $B'' \subseteq B'$，令 $X := A'' \cup B''$，则对每个 $(\alpha,\beta) \in [X]^2$，都存在 $\iota < \theta$ 和 $\delta, \delta', \delta'' \in D$，使得 $\delta < \alpha < \delta' < \iota < \delta'' < \beta$。

断言 6.17.1. X 是稳定的。此外，max(χ"$[X]^3$) $= k_2$。

证明。设 $(\alpha,\beta,\gamma) \in [X]^3$。取 $\delta, \delta', \delta''$ 使得

$$(\delta, \alpha, \delta', \beta, \delta'', \gamma) \in D \circledast X \circledast D \circledast X \circledast D \circledast X.$$

那么，如果 $\gamma \in A'$，则 $\chi(\alpha,\beta,\gamma) = k_1$；否则，$\chi(\alpha,\beta,\gamma) = k_2$。 □

断言 6.17.2. 设 $Y \in \{A'', B''\}$ 且 $(\alpha,\beta,\gamma) \in X \circledast Y \circledast Y$。那么 osc($\overline{\alpha,\beta}, \gamma$) $= 0$。

证明。如果 $Y = A''$，则记 $k := k_1$。否则，记 $k := k_2$。现在，取$\iota, \delta, \delta', \delta'', \delta'''$ 使得

$$(\delta, \alpha, \delta', \iota, \delta'', \beta, \delta''', \gamma) \in D \circledast X \circledast D \circledast \theta \circledast D \circledast Y \circledast D \circledast Y.$$

特别是，

$$\{(\delta, \alpha, \delta', \iota, \delta'', \beta), (\delta, \alpha, \delta'', \beta, \delta''', \gamma)\} \subseteq D \circledast \theta \circledast D \circledast \theta \circledast D \circledast X.$$

于是 $D \cap \delta'' \subseteq C_{\mathrm{Tr}(\alpha,\beta)(k)}$ 和 $D \cap \delta''' \subseteq C_{\mathrm{Tr}(\alpha,\gamma)(k)}$。此外，$\chi(\alpha,\beta,\gamma) = k$，因此

$$\delta' \in D \cap (\alpha, \delta'') \subseteq C_{\mathrm{Tr}(\alpha,\beta)(\chi(\alpha,\beta,\gamma))} \cap C_{\mathrm{Tr}(\alpha,\gamma)(\chi(\alpha,\beta,\gamma))}.$$

回顾定义 6.5，这意味着

$$\mathrm{Osc}_\alpha(C_{\mathrm{Tr}(\alpha,\beta)(\chi(\alpha,\beta,\gamma))}, C_{\mathrm{Tr}(\alpha,\gamma)(\chi(\alpha,\beta,\gamma))}) = \emptyset,$$

因此 osc($\overline{\alpha,\beta}, \gamma$) $= 0$。 □

所以 A'' 和 B'' 正是所求。 □

推论 6.18。假设：

(1) $\mu < \lambda < \lambda^+ = \kappa$ 是无限正则基数；(2) E^λ_μ 存在一个非反射平稳集；(3) 存在一棵弱 μ-Kurepa 树，其分支数至少为 κ。

那么 $\kappa \overset{\text{上确界}}{\longrightarrow} [\lambda,\lambda]^3_\omega$ 成立。

证明。令 $c\colon [\kappa]^3 \to \lambda$ 为定理 5.2 中关于事实 2.14 的次可加着色 $\rho\colon [\kappa]^2 \to \lambda$ 所给出的映射。通过以下方式定义 $c_\omega\colon [\kappa]^3 \to \omega$

$$c_\omega(\alpha,\beta,\gamma) := \begin{cases} c(\alpha,\beta,\gamma), & \text{if } c(\alpha,\beta,\gamma) < \omega; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

设 $T \subseteq {}^{<\mu}2$ 是一个弱 μ-库雷帕树，且至少有 κ多个分支，并设$\langle b_\xi \mid \xi < \kappa\rangle$ 是一个由 $\mathcal{B}(T)$ 中的元素组成的单射序列。为简化记号，我们将 $\Delta(\alpha,\beta)$ 记作 $\Delta(b_\alpha, b_\beta)$。定义着色 $d\colon [\kappa]^3 \to \omega$，使得对所有 $\alpha<\beta<\gamma<\kappa$:

$$d(\alpha,\beta,\gamma) := \begin{cases} \overline{\mathrm{osc}}(\alpha,\beta,\gamma) - 1, & \text{if } \overline{\mathrm{osc}}(\alpha,\beta,\gamma) > 0 \text{ and } \Delta(\alpha,\beta) < \Delta(\beta,\gamma); \\ c_\omega(\alpha,\beta,\gamma), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

为证明 d是 κ 上确界$\nrightarrow$ $[\lambda,\lambda]^3_\omega$ 的见证，取 A, B 为 κ 的两个不相交子集，它们的序型均为 λ，且 $\mathrm{sup}(A) = \mathrm{sup}(B)$，并令 $n<\omega$。利用引理 3.4，并在必要时取共尾子集，我们可以假设存在 $s\in T$ 和 $i\neq i'$，使得对所有 $\alpha\in A$，$s^\frown\langle i\rangle \sqsubseteq b_\alpha$，且对所有 $\beta\in B$，$s^\frown\langle i'\rangle \sqsubseteq b_\beta$。

断言 6.18.1. 设 $(\alpha,\beta,\gamma) \in [A\cup B]^3 \setminus ([A]^3\cup[B]^3)$。则 $(\beta,\gamma) \in ([A]^2\cup[B]^2)$ 当且仅当 $\Delta(\alpha,\beta) < \Delta(\beta,\gamma)$。

证明. 对每个 $(\epsilon,\delta) \in (A\circledast B)\cup(B\circledast A)$，$\Delta(\epsilon,\delta) = \Delta(s^\frown\langle i\rangle, s^\frown\langle i'\rangle) = \mathrm{dom}(s)$。对每个 $(\epsilon,\delta) \in (A\circledast A)\cup(B\circledast B)$，$\Delta(\epsilon,\delta) \geq \mathrm{dom}(s+1) > \mathrm{dom}(s)$。

根据关于 (α,β,γ) 的假设，需要考虑三种情况：▶若 $(\alpha,\beta,\gamma) \in A\circledast B\circledast B$，则 $\Delta(\alpha,\beta) = \mathrm{dom}(s) < \Delta(\beta,\gamma)$。▶ 若 $(\alpha,\beta,\gamma) \in B\circledast A\circledast A$，则 $\Delta(\alpha,\beta) = \mathrm{dom}(s) < \Delta(\beta,\gamma)$。▶若 $(\beta,\gamma) \in (A\circledast B)\cup(B\circledast A)$，则 $\Delta(\beta,\gamma) = \mathrm{dom}(s) \leq \Delta(\alpha,\beta)$。 □

需要考虑三种情况：

▶ 假设存在 $A'\in[A]^\lambda$ 和 $B'\in[B]^\lambda$，使得 A' 和 B' 稳定。那么，根据推论 6.17，我们还可以假设 $A'\cup B'$ 稳定，并且对于每个 $(\alpha,\beta,\gamma)\in[A'\cup B']^3$，若 $(\beta,\gamma)\in[A']^2\cup[B']^2$，则 $\mathrm{osc}(\alpha,\beta,\gamma) = 0$。于是，根据引理 6.16，$\rho\restriction[A'\cup B']^2$ 是 $\mathrm{U}(\lambda,\lambda,\lambda,3)$ 的见证。由于 $c\colon [\kappa]^3\to\lambda$ 由定理 5.2 给出，我们可以找到 $(\alpha,\beta,\gamma)\in[A'\cup B']^3\setminus([A']^3\cup[B']^3)$，使得 $c(\alpha,\beta,\gamma) = n$。现在，若 $(\beta,\gamma)\in[A']^2\cup[B']^2$，则 $\mathrm{osc}(\alpha,\beta,\gamma) = 0$；若 $(\beta,\gamma)\notin[A']^2\cup[B']^2$，则 $\Delta(\alpha,\beta)\geq\Delta(\beta,\gamma)$。因此可得 $d(\alpha,\beta,\gamma) = c_\omega(\alpha,\beta,\gamma) = c(\alpha,\beta,\gamma) = n$，正如所求。▶假设 B 的每个共尾子集都不稳定。利用引理 6.12，并取 A 和 B，我们可以找到 $(\alpha,\beta,\gamma)\in A\circledast B\circledast B$，使得 $\mathrm{osc}(\alpha,\beta,\gamma) = n+1$。由于 $(\beta,\gamma)\in[B]^2$，因此 $\Delta(\alpha,\beta) < \Delta(\beta,\gamma)$。所以$d(\alpha,\beta,\gamma) = \mathrm{osc}(\alpha,\beta,\gamma) - 1 = n$。▶ 否则。于是，$A$ 的每个共尾子集都不稳定，论证与前一种情况类似。□

现在我们终于具备条件证明 [Tod07 的矩形扩展定理 10.3.6]。

推论 6.19. 假设对于一个无限基数 $\mu = \mu^{<\mu}$，$\lambda = \mu^+$ 成立。那么 λ^+ 上确界$\nrightarrow$ $[\lambda,\lambda]^3_\omega$ 成立。

证明. 记 $\kappa := \lambda^+$。若 $2^\mu > \mu^+$，则由于 $\mu^{<\mu} = \mu$，存在一棵有 κ 条分支的弱 μ-Kurepa 树，且 E^λ_μ 构成一个非反射平稳集。因此，根据推论 6.18，我们可以在此假设 $2^\mu = \mu^+$。特别地，$\lambda \nrightarrow [\mu;\ \lambda]^2_\lambda$ 由 Sierpi´nski 的一个定理得出。令 $c\colon [\kappa]^3 \to \lambda$ 为定理 5.3 中关于事实 2.14 的次可加着色 $\rho\colon [\kappa]^2 \to \lambda$ 所给出的映射。按照定理 6.18 的证明，从c 导出 c_ω。另外，记 $T := {}^{<\lambda}2$，并令 $\langle b_\xi \mid \xi < \kappa\rangle$为定理 5.3 的证明中用于定义着色 c的、取自 $\mathcal{B}(T)$ 的元素的单射序列。为简化记号，我们将 $\Delta(b_\alpha, b_\beta)$ 记作 $\Delta(\alpha,\beta)$。同样，对于 $B \subseteq \kappa$，我们将 $T^{\rightsquigarrow\{b_\beta\mid\beta\in B\}}$ 记作 $T^{\rightsquigarrow B}$。

最后，定义一个着色 $d\colon [\kappa]^3 \to \omega$，令对所有 $\alpha<\beta<\gamma<\kappa$:[8]

$$d(\alpha,\beta,\gamma) := \begin{cases} \overline{\mathrm{osc}}(\alpha,\beta,\gamma)-1, & \text{if } \overline{\mathrm{osc}}(\alpha,\beta,\gamma)>0 \text{ and } \Delta(\alpha,\beta)<\Delta(\beta,\gamma);\\ c_\omega(\alpha,\beta,\gamma), & \text{otherwise.}\end{cases}$$

为看出 d是 κ 上确界$\nrightarrow$ $[\lambda,\lambda]^3_\omega$ 的见证，设 A, B 是 κ 中两个不相交的、序型为 λ 的子集，且 $\sup(A) = \sup(B)$，并令 $n<\omega$。利用推论 6.17，并视情况取共尾子集后，不妨设以下情形之一成立:

(I) $A\cup B$ 是稳定的，并且对于每个满足 $(\alpha,\beta,\gamma) \in [A\cup B]^3$ 且 $(\beta,\gamma) \in [A]^{\overline{2}}\cup[B]^2$ 的情形，$\mathrm{osc}(\alpha,\beta,\gamma) = 0$；(II) B 的每个共尾子集都是不稳定的；(III) A 的每个共尾子集都是不稳定的。

我们先立即处理情形 (I)。在这种情况下，根据引理 6.16，$\rho\restriction [A\cup B]^2$ 是 $\mathrm{U}(\lambda,\lambda,\lambda,3)$ 的见证。因此，根据 c 的选取，我们可以找到 $(\alpha,\beta,\gamma) \in [A\cup B]^3 \setminus([A]^3\cup[B]^3)$，使得 $c(\alpha,\beta,\gamma) = n$。考察定理 5.3 证明中的分类讨论可知，除子情形 1.1 外，在所有子情形中都有 $\Delta(\alpha,\beta) \geq \Delta(\beta,\gamma)$。因此，在上述所有情形中，$d(\alpha,\beta,\gamma) = c_\omega(\alpha,\beta,\gamma) = c(\alpha,\beta,\gamma) = n$。最后，考察子情形 1.1 可知，所给出的三元组 (α,β,γ) 属于 $A\circledast B\circledast B$（或者在还原最初“不失一般性”的假设后，属于 $B\circledast A\circledast A$）。因此，$(\beta,\gamma) \in [A]^2\cup[B]^2$，从而 $\mathrm{osc}(\alpha,\beta,\gamma) = 0$。因此，同样有 $d(\alpha,\beta,\gamma) = c_\omega(\alpha,\beta,\gamma) = n$。

接下来处理情况（II）和（III），我们需要以下断言。

断言 6.19.1. 存在共尾子集 $A'\subseteq A$ 和 $B'\subseteq B$，使得对于每个 $(\alpha,\beta,\gamma) \in (A\circledast B\circledast B)\cup(B\circledast A\circledast A)$，都有 $\Delta(\alpha,\beta) < \Delta(\beta,\gamma)$。

证明。可能需要取 B 的一个共尾子集，据此我们可以假设 $B = B'$ 符合引理 3.7 的意义。于是，取 $\theta_B \leq \lambda$，使得对于每个 $B'\in[B]^\lambda$，$T^{\rightsquigarrow B'}$ 都是 $\mathcal{T}(\lambda,\theta_B)$ 中的一棵正规树。同样，我们可以假设 $A = A'$ 符合引理 3.7 的意义，并取 $\theta_A \leq \lambda$，使得对于每个 $A'\in[A]^\lambda$，$T^{\rightsquigarrow A'}$ 都是 $\mathcal{T}(\lambda,\theta_A)$ 中的一棵正规树。

若 $\min\{\theta_A,\theta_B\} < \lambda$，则断言 5.3.2 的证明给出了 $\chi<\min\{\theta_A,\theta_B\}$ 以及一对 $(t,t') \in (T^{\rightsquigarrow A})_{\chi+1}\times(T^{\rightsquigarrow B})_{\chi+1}$，使得 $\Delta(t,t') = \chi$。因此，令 $A' := A_t$且 $B' := B_{t'}$，我们看到，只要 $(\alpha,\beta) \in (A'\circledast B')\cup(B'\circledast A')$，就有 $\Delta(\alpha,\beta) = \chi$；只要 $(\alpha,\beta) \in (A'\circledast A')\cup(B'\circledast B')$，就有 $\Delta(\alpha,\beta) > \chi$。因此，我们可以假设 $\theta_A = \theta_B = \lambda$，从而 $T^{\rightsquigarrow A}, T^{\rightsquigarrow B} \in \mathcal{T}(\lambda,\lambda)$。现在，若 $(T^{\rightsquigarrow A}) \not\subseteq (T^{\rightsquigarrow B})$ 且 $(T^{\rightsquigarrow A}) \not\subseteq (T^{\rightsquigarrow B})$，则由这两棵树的正规性，必存在 $\chi<\lambda$，

[8]这看起来可能与推论 6.18 的证明中所用的映射相同。不过请注意，在那里，Δ 是一个从 $[\kappa]^2$ 到 μ的映射，而这里，Δ 是一个从 $[\kappa]^2$ 到 λ的映射。

$t \in (T^{\rightsquigarrow A})_\chi \setminus (T^{\rightsquigarrow B})_\chi$ 以及 $t' \in (T^{\rightsquigarrow B})_\chi \setminus (T^{\rightsquigarrow A})_\chi$。显然， $A' := A_t$ 和 $B' := B_{t'}$ 正是所需的。

因此，唯一的非平凡情形是 $\theta_A = \theta_B = \lambda$ 且 $T^{\rightsquigarrow A} \subseteq T^{\rightsquigarrow B}$ 或 $T^{\rightsquigarrow A} \subseteq T^{\rightsquigarrow B}$。不失一般性，假设 $T^{\rightsquigarrow A} \subseteq T^{\rightsquigarrow B}$。现在有两种可能：

▶ 如果 $\mathcal{B}(T^{\rightsquigarrow A})$ 非空，那么存在 $b : \lambda \to 2$，它同时构成经过 $T^{\rightsquigarrow A}$ 和 $T^{\rightsquigarrow B}$ 的一个分支。在这种情况下，可以很容易地递归地同时构造共尾子集 $A' \subseteq A$ 和 $B' \subseteq B$，使得对于来自 $A' \cup B'$ 的任意序数三元组 $\alpha < \beta < \gamma$，都有 $\Delta(\alpha, \beta) < \Delta(\beta, \gamma)$。

▶ 否则， $T^{\rightsquigarrow A}$ 是一个 λ-阿龙沙因树。特别地，我们可以在 $(T^{\rightsquigarrow A})_\chi$ 中找到 $\chi < \lambda$ 和 $t \neq t'$。总之， $t \in (T^{\rightsquigarrow A})_\chi$， $t' \in (T^{\rightsquigarrow B})_\chi$ 且 $\Delta(t, t') < \chi$。于是， $A' := A_t$ 和 $B' := B_{t'}$ 正是所求。□

此时，证明与定理 6.18 的证明类似。简言之，在情形（II）中，我们对 A 和 B 应用引理 6.12，从而找到 $(\alpha, \beta, \gamma) \in A \circledast B \circledast B$，使得振荡$(\alpha, \beta, \gamma) = n+1$。根据前面的断言，有 $\Delta(\alpha, \beta) <\Delta(\beta, \gamma)$。因此， $d(\alpha, \beta, \gamma) =$振荡$(\alpha, \beta, \gamma) - 1 = n$。情形（III）的处理方式类似。□

7. Connecting the dots

下一个结果推出定理 A′。

定理 7.1. 对每个满足 $\mu^{<\mu} < \mu^+ < 2^\mu$ 的无限基数 μ：

(1) $S_3(\mu^{++}, \mu^+, \omega)$ 成立；(2) 对每个基数为 μ^{++} 的阿贝尔群 $(G, +)$，$G \nrightarrow [\mu^+]^{\mathrm{FS}_3}_\omega$ 成立。

证明。假设 μ 是满足 $\mu^{<\mu} < \mu^+ < 2^\mu$ 的无限基数。记 $\lambda := \mu^+$，且 $\kappa := \lambda^+$。那么， $T := {}^{<\mu}2$ 是一棵弱 μ-Kurepa 树，且至少有 κ 个分支。因此，根据推论 6.18， $\kappa \overset{\text{上确界}}{\nrightarrow} [\lambda, \lambda]^3_\omega$ 成立。由于 T 见证了 $\kappa \in T(\lambda, \mu)$，根据引理 4.23，$\mathrm{Extract}_3(\kappa, \lambda, \mu, \omega)$ 也成立。结合引理 4.22，即可得到条款（1）。然后，根据命题 4.19 以及这一事实（见 [FBR17，引理 2.2]），即每个阿贝尔群都是性质良好的岩浆，可推出条款（2）。□

根据 [FBR17，定理 3.8],，对于每个无限基数 $\mu = 2^{<\mu}$， $S_2(2^\mu, 2^\mu, \omega)$ 成立。根据即将给出的推论，对于每个无限基数 $\mu = 2^{<\mu}$， $S_2(2^\mu, \mu^+, 2)$ 成立。虽然从 $2^\mu = \mu^+$ 很容易得到 $S_2(2^\mu, \mu^+, \mu)$，但注 4.4 表明， $S_2(2^\mu, \mu^+, \mu)$ 也与 $2^\mu > \mu^+$ 相容。然而请注意，根据 Shelah 的一个定理 [She88，定理 2.1],，在 ZFC 中无法证明 $S_2(2^\mu, \mu^+, 3)$。因此，鉴于颜色的数量，以下推论是最优的。

推论 7.2. 对每个无限基数 μ, $S_2(\mu^\theta, \mu^+, 2)$ 都成立，其中 $\theta := \log_\mu(\mu^+)$. 特别地，对于每个强极限基数 μ， $S_2(2^\mu, \mu^+, 2)$ 都成立。

证明. 应用下一个定理，其中 $\lambda := \mu^+$ 且 $\kappa := \mu^\theta$。 □

引理 7.3. 假设 $\theta < \lambda \leq \kappa$ 是无限基数，且 λ 为正则基数。若 $\kappa \in T(\lambda, \theta)$，则：

(1) $\kappa \overset{\text{上确界}}{\nrightarrow} [\lambda, \lambda]^2_2$ 成立；(2) $S_2(\kappa, \lambda, 2)$ 成立。

证明。假设 $\kappa \in T(\lambda,\theta)$，并固定一个 $T \in \mathcal{T}(\lambda,\theta)$，它有一个由 $\mathcal{B}(T)$ 中元素组成的单射序列 $\langle b_\xi \mid \xi<\kappa\rangle$。

(1) 考虑 Sierpi´nski 映射 $c\colon [\kappa]^2 \to 2$ 定义如下：对所有 $\alpha<\beta<\kappa$：

$$c(\alpha,\beta) := 1 \text{ iff } b_\alpha <_{\rm lex} b_\beta.$$

命题 7.3.1. c 见证 $\kappa \overset{\text{上确界}}{\nrightarrow} [\lambda,\lambda]^2_2$。

证明。设给定 κ 的两个不相交子集 A,B，满足 $\mathrm{otp}(A)=\mathrm{otp}(B)=\lambda$ 且 $\sup(A)=\sup(B)$。根据引理 3.4(2)（使用 $\mu:=\lambda$），我们可以找到$s\in T$ 和 $i\neq i'$，使得 $A':=\{\alpha\in A\mid s^\frown\langle i\rangle \sqsubseteq b_\alpha\}$ 和 $B':=\{\beta\in B\mid s^\frown\langle i'\rangle \sqsubseteq b_\beta\}$ 的基数都为 λ。由于 $\sup(A')=\sup(B')$，现在可以固定 $(\alpha,\beta,\gamma)\in A'\circledast B'\circledast A'$。为了证明 $\{c(\alpha,\beta)\ c(\beta,\gamma)\}=2$，考虑以下几种情况：

►若 $i<i'$，则 $b_\alpha,b_\gamma <_{\rm lex} b_\beta$，因此 $c(\alpha,\beta)=1>0=c(\beta,\gamma)$；►若 $i'<i$，则 $b_\beta<b_\alpha,b_\gamma$，因此 $c(\alpha,\beta)=0<1=c(\beta,\gamma)$。 □

(2) 根据引理 4.9（再次使用 $\mu:=\lambda$），特别地，$\mathrm{Extract}_2(\kappa,\lambda,\omega,\omega)$ 成立。因此，由引理 4.22，条款（1）推出条款（2）。□

推论 7.4. 若存在一棵具有 κ 多个分支的弱 μ-库珀树，则$S_2(\kappa,\mu^+,2)$ 成立。□

定理 B 现在可得（使用 $\mu:=2$）：

推论 7.5. 对于每个无限集 G、每个映射 $\varphi\colon G\to[G]^{<\omega}$，以及满足 $\mu^{<\theta}<|G|\leq\mu^\theta$ 的每对基数 μ,θ，都存在相应的着色 $c\colon G\to 2$，满足以下条件。

对于每个 $*$ 上的二元运算 G，如果 φ 见证了（$G,*$）性质良好，那么对于每个基数为（$\mu^{<\theta}$）的 $X\subseteq G$ 以及每个 $i\in\{0,1\}$，都存在 $x\neq y$ 属于 X，使得 $c(x*y)=i$。

证明。给定上述的 G、φ、μ 和 θ，记 $\kappa:=|G|$，并记 $\lambda:=(\mu^{<\theta})^+$，于是$\lambda\leq\kappa\leq\mu^\theta$。显然，$T:={}^{<\theta}\mu$ 见证了 $\kappa\in T(\lambda,\theta)$，因此由引理 7.3，$S_2(\kappa,\lambda,2)$ 成立。现在，应用命题 4.19。□

8. 致谢

本文的研究结果源自第一作者在第二作者指导下于巴伊兰大学撰写的理学硕士论文，并得到以色列科学基金会的资助（资助协议 2066/18）。

第一作者的研究部分得到以色列科学基金会（资助协议编号：203/22）的支持。第二作者的研究部分得到以色列科学基金会（资助协议编号：203/22）和欧洲研究委员会（资助协议编号：ERC-2018年-StG 802756）的支持。

References

[BR21] Ari Meir Brodsky 和 Assaf Rinot。《苏斯林树构造的微观方法》第二部分。 *Ann. Pure Appl. Logic*, 172(5)：论文编号 102904，65 页，2021年。[EHR65] P. Erd
˝ *Acta Math.* os、A. Hajnal 和 *Acad. Sci. Hungar.* 16 93 196, 1965
R. Rado。基数的分割关系。，：–。[FBR17] David Fernandez-Breton 和 Assaf Rinot。欣德曼定理高阶类似命题的强失败。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，369(12)：8939–8966，2017年。[Fle78] William G. Fleissner。与 Erd˝os-Rado 定理所证明的拓扑不等式相关的一些空间。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，71(2)：313–320，1978年。

[HLS17] Neil Hindman、Imre Leader 和 Dona Strauss。实数集着色中的两两和。*Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*，87(2)：275–287，2017年。[HS12] Neil Hindman 和 Dona Strauss。 *Algebra in the Stone-Čech compactification*。de Gruyter 教科书。Walter de Gruyter & Co.，柏林，2012年。关于独立性证明的导论。[IR23] Tanmay Inamdar 和 Assaf Rinot。Ulam 是对的吗？I：基础理论与次正规理想。 *Topology Appl.*，323(C)：论文编号 108287，53 页，2023年。[Kom16] P ´ ´ 2 41 1 227 231, eter Komjath。实数集的一种特定 -着色。 *Real Anal. Exchange*，( )：–。[Kom20] P ´eter Komj ´ath。Weiss 的问题。 *Mathematika*，66(4)：954–958，2020年。[Kun80] Kenneth Kunen。 *Set theory* 102 *Studies in Logic and the Foundations of* ，第 卷，属于 。 *Mathematics* 1980 North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，。独立性证明导论。[LHR18] Chris Lambie-Hanson 和 Assaf Rinot。Knaster 与朋友们 I：闭着色与预校准数。 *Algebra Universalis*，79(4)：第 90 号文章，39 页，2018年。[LHR23] Chris Lambie-Hanson 和 Assaf Rinot。Knaster 与朋友们 III：次可加着色。*J. Symbolic Logic*，51 页，预计于 2023 年出版。 https://doi.org/10.1017/jsl.2022.50。[Mil78] Keith R. Milliken。欣德曼定理与群。 *J. Combin. Theory Ser. A*，25(2)：174–180，1978年。[Po ´o21] M ´ ´ *Arch. Math.* ark Poor。Kurepa 树分支 *Logic* 60 7 8 927 966, 2021 的基数谱。 ，(-)：–。[Rin14] Assaf Rinot。积的链条件与弱紧基数。 *Bull. Symb.* ，( )：–。[RZ21] Assaf *Log.* 20 3 293 314, 2014 Rinot 和 Jing Zhang。超限平面的变换。 *Forum Math.* ，(e)：–。[She88] *Sigma* 9 16 1 25, 2021 Saharon Shelah。Sierpi ´nski 是对的吗？I。 *Israel J. Math.*，62(3)：355–380，1988年。[SW16] Daniel Soukup 和 William Weiss。实数集着色中的两两和。未发表笔记，2016年。 https://danieltsoukup.github.io/academic/finset_colouring.pdf。[Tod94] Stevo Todorcevic。三维组合立方体的一些划分。 *J. Combin.* ，( )：–。[*Theory Ser. A* 68 2 410 437, 1994 Tod07] Stevo Todorcevic。 *Walks on ordinals and their characteristics* 263 *Progress* ，第 卷，属于 。 *in Mathematics* ¨ 2007 Birkhauser Verlag，巴塞尔，。

Department of Mathematics, Bar-Ilan University, Ramat-Gan 5290002, Israel.

Department of Mathematics, Bar-Ilan University, Ramat-Gan 5290002, Israel*URL*: http://www.assafrinot.com