arXiv:2301.01672v2 [math.FA] 9 Sep 2023

局部紧阿贝尔群上的几乎收敛

RYOICHI KUNISADA

Abstract. 我们研究一种称为几乎收敛的求和方法，它适用于定义在局部紧阿贝尔群上的有界可测函数。我们利用拓扑不变均值定义几乎收敛，并给出判断给定函数几乎收敛的两类不同的充要条件，一类是解析的，另一类是泛函分析的。作为应用，我们证明了整数群和实数群上关于几乎收敛的复陶伯定理。这些结果与维纳-池原定理、卡茨内尔森-齐弗里定理等经典陶伯定理密切相关。

1. 引言

设 G为局部紧阿贝尔群，令 $L^1(G)$表示 G 的群代数，$L^\infty(G)$表示 G上所有本质有界可测函数的集合。令 $C_{bu}(G)$表示 G上所有有界一致连续函数的集合。G 的 $\mathcal{U}$ 一致结构是 G^2 的所有满足以下条件的子集组成的集合：

$$\{(x,y)\in G^2 : x-y\in U\},$$

其中 U 是 0 的一个邻域。注意，空间 $L^\infty(G)$ 和 $C_{bu}(G)$ 关于上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$ 都是巴拿赫空间。这里通常考虑复值函数，并用 $L^\infty_R(G)$ 表示实值本质有界可测函数空间。

$L^1(G)$ 的一般元素记作 f（必要时也使用 g、h），而 $L^\infty(G)$ 的一般元素记作 ψ。对于每个 $s\in\mathbb{R}$，我们分别用符号 $f_s(x):=f(x+s)$ 和 $\psi_s(x):=\psi(x+s)$ 表示 f 和 ψ 经 s 平移后的函数。

$L^\infty(G)^*$ 和 $C_{bu}(G)^*$ 分别是 $L^\infty(G)$ 和 $C_{bu}(G)$的对偶空间。若 φ 是 $L^\infty(G)^*$ ($C_{bu}(G)^*$)的一个元素，并且满足：(1) $\varphi\geq 0$ （即 $\varphi(\psi)\geq 0$，对每个正的 $\psi\in L^\infty(G)$ ($C_{bu}(G)$)均成立）；(2) $\varphi(1)=1$，其中 1 是处处取值为 1 的常函数，则称其为 $L^\infty(G)$（$C_{bu}(G)$）上的一个均值。此外，若 φ 是一个均值，且满足：(3) 对每个 $\psi\in L^\infty(G)$（$C_{bu}(G)$）和 $s\in G$，均有 $\varphi(\psi_s)=\varphi(\psi)$，则称 φ 为 $L^\infty(G)$（$C_{bu}(G)$）上的不变均值。我们用 $\mathcal{I}(G)$（$\mathcal{I}_0(G)$）表示 $L^\infty(G)$（$C_{bu}(G)$）上所有不变均值的集合。

2020年数学主题分类。主要分类 40H05；次要分类 22B05。关键词和短语：几乎收敛、拓扑不变均值、陶伯定理。

现在，我们引入另一类定义在 $L^\infty(G)$ 上的均值；对于我们的目的而言，这类均值更为重要。给定 $f \in L^1(G)$ 和 $\psi \in L^\infty(G)$，其卷积 $f * \psi$ 定义为

$$f * \psi(x) = \int_G f(t)\psi(x-t)dm(t), \quad x \in G,$$

其中 m 是 G的哈尔测度。令 $P(G)$ 表示 $L^1(G)$ 中满足 $\int_G f(x)dm(x) = 1$ 的正元素 f 的集合。若均值 φ 在 $L^\infty(G)$ 上满足以下条件（[7]），则称其为拓扑不变均值:

(4) $\varphi(f * \psi) = \varphi(\psi)\ \forall \psi \in L^\infty(G)\ \forall f \in P(G).$

我们用 $\mathcal{T}(G)$ 表示 $L^\infty(G)$ 上所有拓扑不变均值的集合。注意，拓扑不变均值是不变均值。事实上，若 φ 是拓扑不变的，则

$$\varphi(\psi_s) = \varphi(f * \psi_s) = \varphi(f_s * \psi) = \varphi(\psi)$$

对每个 $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ 和 $s \in \mathbb{R}$都成立。反过来，对于离散群 G，容易证明 $\mathcal{I}(G) = \mathcal{T}(G)$ 成立。对于任意局部紧阿贝尔群 G，$\mathcal{T}(G) \neq \emptyset$成立；若 G 是连续群，则有 $\mathcal{T}(G) \subsetneq \mathcal{I}(G)$。对于紧阿贝尔群 G，$\mathcal{T}(G)$ 是仅由 G的归一化哈尔测度构成的单元素集合。关于这些结果的更详细论述，请参阅 [6], [14]。

本文的主要目标是研究一种关于（拓扑）不变均值的求和方法。令 l_∞ 为定义在非负整数集上的所有有界函数组成的集合$\mathbb{Z}_+ := \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$。Lorentz（1948）利用 Banach 极限（[12]）在 l_∞ 上定义了一种称为几乎收敛的求和方法。回顾一下，若 φ 属于 l_∞^*（即 l_∞ 的对偶空间），且满足以下条件，则称其为 Banach 极限:

(1) $\varphi \geq 0$; (2) $\varphi(1) = 1$, 其中 1 是处处取值为 1 的常数函数。(3) 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 和 $\psi \in l_\infty$, $\varphi(\psi_n) = \varphi(\psi)$,

也就是说，φ 是 l_∞ 上的右平移不变均值。令 $\mathcal{B}$ 为所有 Banach 极限组成的集合。于是，数列的几乎收敛定义如下。

定义 1.1（Lorentz，1948）。若对每个 $\varphi \in \mathcal{B}$, $\psi \in l_\infty$ 满足 $\varphi(\psi) = \alpha$，则称其几乎收敛于一个（复）数 α。

仅凭这一抽象定义，很难判断给定的数列是否几乎收敛。然而，Lorentz 给出了几乎收敛的解析条件如下（他的推导相当复杂，后来 Sucheston[18]给出了更简单的证明）。

The定理 1.1（Lorentz，1948）。$\psi \in l_\infty$ 几乎收敛到 α 当且仅当

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \psi(n+i) = \alpha$$

关于 $n \in \mathbb{Z}_+$ 一致地。

这一断言可以通过 Hahn-Banach定理加以证明，也是检验给定序列是否确实几乎收敛的基本方法。

注意到，Banach 极限可以看作$L^\infty(\mathbb{Z})$上的一种特殊不变均值，其中 $\mathbb{Z}$ 是整数加法群。因此，自然可以考虑在任意局部紧阿贝尔群或其子半群上定义几乎收敛的概念（注意，阿贝尔群 G 是可平均的，也就是说， $L^\infty(G)$上存在不变均值）。具体而言，可以通过以下方式形式化地定义 $L^\infty(G)$中函数的几乎收敛：

定义 1.2. 设 G 为局部紧阿贝尔群。当且仅当满足以下条件时，我们称 $\psi \in L^\infty(G)$几乎收敛于复数 α：

$$\varphi(\psi) = \alpha$$

对每个 $\varphi \in \mathcal{T}(G)$都成立。在这种情况下，我们记为 $\psi \xrightarrow{ac} \alpha$。

采用拓扑不变均值而非（看似更自然的）不变均值，是因为定理 1.1 的类似结果对非离散群也成立（见 [1], [2]）。

本文旨在为局部紧阿贝尔群上的给定有界函数几乎收敛提供一个新的充要条件。该条件是通过局部紧阿贝尔群上的调和分析理论，尤其是谱综合理论得到的。此外，应用这一结果，我们在 $\mathbb{Z}$和 $\mathbb{R}$上得到了关于几乎收敛的复陶伯定理，这些定理与卡茨内尔森-茨弗里和维纳-池原的著名结果有关。

本文结构如下。第 2 节给出了几乎收敛的一个解析条件。这是 Chow [1]更一般结果在底层群为阿贝尔群时的特殊情形。不过，考虑到该结果的重要性，为了使本文完整且前后一致，我们仍将这一节纳入文中。第 3 节讨论与几乎收敛有关的阿贝尔定理和陶伯定理。

第 4 节中，我们遵循 Forelli [5], 的思路，发展了 $C_{bu}(G)$ 和 $C_{bu}(G)^*$的谱理论，其中描述了 $C_{bu}(G)^*$ 的子空间，这些子空间由谱定义为 $C_{bu}(G)$某个不变子空间的湮灭子。这在某种程度上是将他的结果形式化地推广到一般局部紧阿贝尔群的情形。第 5 节中，作为上一节某个结果的应用，我们给出了由 $L^\infty(G)$上的拓扑不变均值张成的 $L^\infty(G)^*$ 子空间的湮灭子。第 6 节中，利用第 5 节的一个结果，我们得到了几乎收敛的一个新的充要条件。第 7 节讨论特殊群 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}$的正子半群上的几乎收敛。第 8 节讨论 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}$上的几乎收敛复陶伯定理。

2. An analytic condition for almost convergence

设 G 是一个局部紧阿贝尔群。由于 G 是可平均群，存在一个针对 G 的求和网，即由 $\{K_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ 构成的网，其中各项都是 G 的非空紧子集，并满足以下性质（见 [6], [14]）：

(1) $K_\delta \subseteq K_{\delta'}$ 若 $\delta \le \delta'$ (2) $G = \bigcup_{\delta\in\Delta} K_\delta$ (3) $\lim_\delta {}^{m}{}_{(K_\delta \triangle K_{\delta,\ s)}\ m}{}_{(K_\delta)} = 0$ 在 G 的紧子集上关于 s 一致地。

We 固定 G 的一个求和网，并在 $L^\infty(G)$ 上定义一个次线性泛函 a s

$$\overline{p}(\psi) := \limsup_\delta \sup_{x\in G} \frac{1}{m(K_\delta)} \int_{K_\delta} \psi_x(t)dt,$$

其中 $\psi \in L^\infty(G)$。我们还引入泛函 $\underline{p}(\psi) := -\overline{p}(-\psi)$，它可表示为

$$\underline{p}(\psi) := \liminf_\delta \inf_{x\in G} \frac{1}{m(K_\delta)} \int_{K_\delta} \psi_x(t)dt.$$

于是，我们得到如下结果:

定理 2.1. $C_{bu}(G)$ 上的均值 φ 是不变均值，当且仅当

$$\varphi(\psi) \le \overline{p}(\psi)$$

对每个 $\psi \in C_{bu}(G)$ 都成立。

证明。首先证明必要性。设 φ 是 $C_{bu}(G)$ 上的不变均值。注意，由于 ψ 属于 $C_{bu}(G)$，映射 $G \ni t \mapsto \psi_t \in C_{bu}(G)$ 是连续的，因此它是 Bochner 可积的。于是，我们有

$$\varphi(\psi) = \frac{1}{m(K_\delta)} \int_{K_\delta} \varphi(\psi_t)dt = \varphi\left(\frac{1}{m(K_\delta)} \int_{K_\delta} \psi_t(x)dt\right) \le \sup_x \frac{1}{m(K_\delta)} \int_{K_\delta} \psi_x(t)dt$$

对每个 K_δ（见 [19]）。这里我们使用一个基本事实：对于 C_{bu}（$\mathbb{R}$）上的任意均值 φ，以及 C_{bu}（$\mathbb{R}$）中的 ψ，有

$$\varphi(\psi) \le \sup_{x\in\mathbb{R}} \psi(x).$$

事实上，令 $\alpha :=\sup_{x\in\mathbb{R}} \psi(x)$，于是 $\alpha - \psi \ge 0$，因此由 φ 的正性可得

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha - \psi) \ge 0 &\Leftrightarrow \varphi(\alpha) \ge \varphi(\psi) \\ &\Leftrightarrow \alpha \ge \varphi(\psi). \end{aligned}$$

对 $K_\delta's$ 取上极限，我们得到

$$\varphi(\psi) \le \limsup_\delta \sup_x \frac{1}{m(K_\delta)} \int_{K_\delta} \psi_x(t)dt.$$

现在，我们证明充分性。设 φ 满足定理中的条件。那么，对每个属于 $C_{bu}(G)$ 的 ψ，我们有

$$\begin{aligned}
\varphi(\psi-\psi_s) &\le \limsup_{\delta}\sup_{x}\frac{1}{m(K_\delta)}\int_{K_\delta}(\psi_x(t)-\psi_{x+s}(t))dt\\
&=\limsup_{\delta}\sup_{x}\frac{1}{m(K_\delta)}\left(\int_{K_\delta}\psi_x(t)dt-\int_{K_\delta}\psi_{x+s}(t)dt\right)\\
&=\limsup_{\delta}\sup_{x}\frac{1}{m(K_\delta)}\left(\int_{K_\delta}\psi_x(t)dt-\int_{K_{\delta,-s}}\psi_x(t)dt\right)\\
&\le\limsup_{\delta}\sup_{x}\frac{1}{m(K_\delta)}\int_{K_\delta\triangle K_{\delta,-s}}|\psi_x(t)|dt\\
&\le\limsup_{\delta}\frac{m(K_\delta\triangle K_{\delta,-s})}{m(K_\delta)}\|\psi\|_\infty=0.
\end{aligned}$$

对于反向不等式，我们考虑如下关系

$$\varphi(-\psi)\le\overline{p}(-\psi)\Leftrightarrow\varphi(\psi)\ge-\overline{p}(-\psi)=:\underline{p}(\psi).$$

注意，我们可以用与上文相同的论证证明 $\underline{p}(\psi-\psi_s)=0$，从而得到

$$\varphi(\psi-\psi_s)\ge 0.$$

因此，我们得出 $\varphi(\psi-\psi_s)=0$，这意味着 φ 的平移不变性，证明至此完成。

为了得到拓扑不变均值的类似条件，我们需要以下引理。[1] 中以更一般的形式证明了一个等价命题。

引理 2.1. 对任意 $\psi\in L^\infty(G)$ 和 $f\in P(G)$,

$$\overline{p}(\psi-f*\psi)=\underline{p}(\psi-f*\psi)=0$$

成立。

证明。通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}
\overline{p}(\psi-f*\psi)&=\limsup_{\delta}\sup_{x\in G}\frac{1}{m(K_\delta)}\int_{K_\delta}\{\psi_x(t)-(f*\psi)_x(t)\}dt\\
&=\limsup_{\delta}\sup_{x\in G}\frac{1}{m(K_\alpha)}\int_{K_\delta}\int_{G}\{\psi_x(t)-\psi_x(t-u)\}f(u)dudt\\
&=\limsup_{\delta}\sup_{x\in G}\int_{G}f(u)du\frac{1}{m(K_\delta)}\int_{K_\delta}\{\psi_x(t)-\psi_x(t-u)\}dt.
\end{aligned}$$

积分

$$\frac{1}{m(K_\delta)}\int_{K_\delta}\{\psi_x(t)-\psi_x(t-u)\}dt$$

可以用两种方法求值:

$$\frac{1}{m(K_\delta)}\int_{K_\delta}\{\psi_x(t)-\psi_x(t-u)\}dt \le \left|\frac{1}{m(K_\delta)}\int_{K_\delta\triangle K_{\delta,-u}}\psi_x(t)dt\right| \le \frac{m(K_\delta\triangle K_{\delta,-u})}{m(K_\delta)}\|\psi\|_\infty. \quad (1)$$

此外，我们得到

$$\frac{1}{m(K_\delta)}\int_{K_\delta}\{\psi_x(t)-\psi_x(t-u)\}dt \le \frac{1}{m(K_\delta)}2\|\psi\|_\infty m(K_\delta)=2\|\psi\|_\infty. \quad (2)$$

设给定 $\varepsilon>0$。取一个紧子集 C_ε，使得 $\int_{G\setminus C_\varepsilon}|f(t)|dt<\varepsilon$。于是，我们可以选取 γ，使得 $^{m}{}_{(K_\delta\triangle K_{\delta,\ -u)}}\ m(K_\delta)\le\varepsilon$ 对每个 $\delta\ge\gamma$ 和 $u\in C_\varepsilon$ 都成立。由 (1) 和 (2)，我们有

$$\begin{aligned}
&\limsup_\delta\sup_{x\in G}\int_G f(u)du\frac{1}{m(K_\delta)}\int_{K_\delta}\{\psi_x(t)-\psi_x(t-u)\}dt\\
&=\limsup_\delta\sup_{x\in G}\left\{\int_{C_\varepsilon}f(u)du\frac{1}{m(K_\delta)}\int_{K_\delta}\{\psi_x(t)-\psi_x(t-u)\}dt\right.\\
&\left.+\int_{G\setminus C_\varepsilon}f(u)du\frac{1}{m(K_\delta)}\int_{K_\delta}\{\psi_x(t)-\psi_x(t-u)\}dt\right\}\\
&\le\limsup_\delta\sup_{x\in G}\int_{C_\varepsilon}|f(u)|\frac{m(K_\delta\triangle K_{\delta,-u})}{m(K_\delta)}\|\psi\|_\infty du+2\|\psi\|_\infty\int_{G\setminus C_\varepsilon}|f(u)|du\\
&\le\varepsilon\|\psi\|_\infty\int_{C_\varepsilon}|f(u)|du+2\varepsilon\|\psi\|_\infty\le 3\varepsilon\|\psi\|_\infty.
\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon>0$ 可以任意取值，我们得到 $\overline{p}(\psi-f*\psi)\le 0$。方程 $\underline{p}(\psi-f*\psi)\ge 0$ 可用类似的方法证明。由于对每个 $\psi\in L^\infty(G)$，$\underline{p}(\psi)\le\overline{p}(\psi)$ 都成立，因此我们有$\overline{p}(\psi-f*\psi)=\underline{p}(\psi-f*\psi)=0$。证明完毕。

结合定理 2.1 和引理 2.1，我们得到以下结果 .

定理 2.2. $L^\infty(G)$ 上的均值 φ 是拓扑不变均值，当且仅当

$$\varphi(\psi)\le\overline{p}(\psi)$$

对每个 $\psi\in L^\infty(G)$ 都成立。

证明。首先，我们证明必要性。假设 φ 属于 $\mathcal{T}(G)$。那么，对于任意 $\psi\in L^\infty(G)$ 和 $f\in P(G)$，我们有

$$\varphi(f*\psi)=\varphi(\psi).$$

注意，如前所述，φ 是 $C_{bu}(G)$上的不变均值。由于 $f*\psi\in C_{bu}(G)$，由定理 2.1 可得

$$\varphi(f*\psi)\le\overline{p}(f*\psi).$$

此外，由引理 2.1，$\overline{p}(f*\psi) = \overline{p}(\psi)$成立，因此我们得到

$$\varphi(\psi) = \varphi(f*\psi) \le \overline{p}(f*\psi) = \overline{p}(\psi).$$

现在证明充分性。假设对每个 $\psi \in L^\infty(G)$，$\varphi(\psi) \le \overline{p}(\psi)$ 都成立。那么，由引理 2.1，对于任意 $f \in P(G)$，我们有

$$0 = \underline{p}(\psi - f*\psi) \le \varphi(\psi - f*\psi) \le \overline{p}(\psi - f*\psi) = 0.$$

因此，我们得到 $\varphi(\psi - f*\psi) = 0$，并且 φ 是拓扑不变的。

定理 2.3. 设 $\psi \in L^\infty_{\mathbb{R}}(G)$。那么，$\psi$ 几乎收敛到 α，当且仅当

$$\lim_\delta \frac{1}{m(K_\delta)} \int_{K_\delta} \psi(x+s)dx = \alpha$$

在 $s \in G$ 上一致地。

证明。注意，对于任意 $\varphi \in \mathcal{T}(G)$ 和 $\psi \in L^\infty(G)$，我们有

$$\underline{p}(\psi) \le \varphi(\psi) \le \overline{p}(\psi).$$

反过来，对于任意满足 $\underline{p}(\psi) \le \alpha \le \overline{p}(\psi)$ 的实数 α，存在某个 $\varphi \in \mathcal{T}(G)$，使得 $\varphi(\psi) = \alpha$。事实上，我们在 $\mathbb{R}\psi = \{c\psi : c \in \mathbb{R}\}$ 上定义 φ_0：令 $\varphi_0(c\psi) = c\alpha$，然后可由 Hahn-Banach定理将其扩张到整个 $L^\infty(G)$，使得对每个 $\psi \in L^\infty(G)$，$\varphi(\psi) \le \overline{p}(\psi)$ 都成立。根据定理 2.2，这个扩张后的 φ 是一个拓扑不变均值。

因此，我们证明了对于每个 $\varphi \in \mathcal{T}$，$\varphi(\psi) = \alpha$ 当且仅当 $\underline{p}(\psi) = \overline{p}(\psi) = \alpha$。现在，我们证明这等价于定理中给出的条件。首先，必要性显然成立。回想一下，泛函 $\overline{p}$ 和 $\underline{p}$ 表示如下:

$$\overline{p}(\phi) = \limsup_\delta \sup_{s\in G} \frac{1}{m(K_\delta)} \int_{K_\delta} \psi(x+s)dx,$$

$$\underline{p}(\psi) = \liminf_\delta \inf_{s\in G} \frac{1}{m(K_\delta)} \int_{K_\delta} \psi(x+s)dx.$$

令 $\varepsilon > 0$ 为任意正数。那么，存在指标 δ_0 和 δ_1，使得

$$\sup_{s\in G} \frac{1}{m(K_\delta)} \int_{K_\delta} \psi(x+s)dx < \alpha + \varepsilon$$

只要 $\delta \ge \delta_0$ 且

$$\inf_{s\in G} \frac{1}{m(K_\delta)} \int_{K_\delta} \psi(x+s)dx > \alpha - \varepsilon$$

只要 $\delta \ge \delta_1$。因此，令 $\delta_2 =$ 为 $\max(\delta_0, \delta_1)$，便有

$$-\varepsilon < \frac{1}{m(K_\delta)} \int_{K_\delta} \psi(x+s)dx - \alpha < \varepsilon$$

对于每个 $s \in G$，只要 $\delta \ge \delta_2$。这意味着所讨论的网一致收敛。证明完毕。

现在，我们将上述结果推广到复值函数。

定理 m 2.4. 设 $\psi \in L^\infty(G)$。那么， ψ 当且仅当几乎收敛于 α

$$\lim_\delta \frac{1}{m(K_\delta)} \int_{K_\delta} \psi(x+s)dx = \alpha$$

在 $s \in G$ 中一致地。

证明。记 $\psi(x) = u(x)+iv(x)$，其中 u、v 是 $L^\infty_{\mathbb{R}}(G)$ 中 ψ 的实部和虚部，且令 $\alpha = \beta + i\tau$ 为一个复数。那么，

$$\varphi(\psi) = \alpha = \beta + i\tau$$

对每个 $\varphi \in \mathcal{T}(G)$ 都成立，当且仅当

$$\varphi(u) = \beta, \quad \varphi(v) = \tau$$

对每个 $\varphi \in \mathcal{T}(G)$ 都成立。根据定理 2.3，这等价于

$$\lim_\delta \frac{1}{m(K_\delta)} \int_{K_\delta} u(x+s)dx = \beta, \quad \lim_\delta \frac{1}{m(K_\delta)} \int_{K_\delta} v(x+s)dx = \gamma$$

在 $s \in G$ 中一致地，这等价于定理的断言。

我们给出求和网的例子。容易验证

$$K_k = [-k, k] \ (k \in \mathbb{N}),$$

$$K_\theta = [-\theta, \theta] \ (\theta > 0)$$

分别是 $G = \mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}$ 上的求和网。于是，我们得到 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}$ 上几乎收敛的如下表述:

$\psi \in L^\infty(\mathbb{Z})$ 几乎收敛到 α，当且仅当

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{i=n-k}^{n+k} \psi(i) = \alpha$$

关于 $n \in \mathbb{Z}$ 一致地成立。类似地， $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ 几乎收敛到 α，当且仅当

$$\lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{2\theta} \int_{x-\theta}^{x+\theta} \psi(t)dt = \alpha$$

关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致地成立。

我们注意到，前者是 Sucheston 结果（定理 1.1）的双侧版本，而后者由 Raimi 给出 [15] （另见 [16]）。关于 $\mathbb{R}$ 上几乎收敛的另一种解析表达式见 [11]。

3. Tauberian theorems concerning almost convergence

本节中，我们介绍局部紧阿贝尔群上的另外两种收敛，并确立这些收敛与几乎收敛之间的关系。

设 $\psi \in L^\infty(G)$。我们写作 $\psi \xrightarrow{w^*c} \alpha$ 当且仅当 $w^*\text{-}\lim_{x\to\infty} \psi_x = \alpha$，其中符号 $w^*\text{-}\lim$ 表示 $L^\infty(G)$ 中的弱 * 收敛。也就是说，$\psi \xrightarrow{w^*c} \alpha$ 当且仅当

$$\lim_{x\to\infty} \int f(t)\psi(x-t)dt = \alpha \int_G f(t)dt$$

对每个 $f \in L^1(G)$ 都成立。我们写作 $\psi \xrightarrow{c} \alpha$ 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$，都存在 G 的一个紧子集 C，使得当 $x \notin C$ 时，$|\psi - \alpha| < \varepsilon$。注意，根据著名的维纳陶伯定理，要使 $\psi \xrightarrow{w^*c} \alpha$ 成立，只需上述等式对单个 $f \in L^1(G)$ 成立，且 $\hat{} f$ 在 Γ 上不为零（见[17]）。

我们很容易看出，以下蕴含关系成立：

$$\psi \xrightarrow{c} \alpha \Rightarrow \psi \xrightarrow{w^*c} \alpha \Rightarrow \psi \xrightarrow{ac} \alpha$$

事实上，前半部分显而易见。假设 $\psi \xrightarrow{w^*c} \alpha$。这意味着，对于任意固定的$f \in P(G)$，都有 $f * \psi \xrightarrow{c} \alpha$。由引理 2.1 及定理 2.3 的证明可知，$\psi \xrightarrow{ac} \alpha$当且仅当 $f * \psi \xrightarrow{ac} \alpha$。由于 $f * \psi \xrightarrow{c} \alpha$ 显然蕴含 $f * \psi \xrightarrow{ac} \alpha$，因此我们得到$\psi \xrightarrow{ac} \alpha$。

现在我们来讨论陶伯定理，即上述蕴含关系的条件逆命题。若对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个包含 0 的紧邻域 U和 G的一个紧子集 C，使得当 $x - y \in U$且 $x \notin C$ 时，$\psi \in L^\infty(G)$ 慢振荡：$|\psi(x) - \psi(y)| < \varepsilon$。于是我们得到以下结果（证明见 [17]）：

定理 3.1。设 $\psi \in L^\infty(G)$。如果 $\psi \xrightarrow{w^*c} \alpha$ 且 ψ 是慢振荡的，那么 $\psi \xrightarrow{c} \alpha$。

现在我们给出一个由几乎收敛推出弱*收敛的陶伯定理。

定理 3.2。设 $\psi \in L^\infty(G)$。如果对于每个 $s \in G$，$\psi \xrightarrow{ac} \alpha$ 且 $\psi - \psi_s \xrightarrow{w^*c} 0$，那么 $\psi \xrightarrow{w^*c} \alpha$。

证明。首先，我们证明该断言对 $C_{bu}(G)$ 中的一个元素成立；在这种情况下，条件 $\psi - \psi_s \xrightarrow{w^*c} 0$ 等价于 $\psi - \psi_s \xrightarrow{c} 0$。假设 $\psi \in C_{bu}(G)$ 且 $\psi \xrightarrow{ac} \alpha$，并且对每个 $s \in G$ 都有 $\psi - \psi_s \xrightarrow{c} 0$。固定一个正数 $\varepsilon > 0$。令 K_{δ_0} 为 G 的求和网 $\{K_\delta\}$ 中的一个元素，使得

$$\left| \frac{1}{m(K_{\delta_0})} \int_{K_{\delta_0}} \psi_x(t)dt - \alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

对每个 $x \in G$ 都成立。令 U 为 0 的一个开邻域，使得 $x - y \in U$ 蕴含 $|\psi(x) - \psi(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$。我们考察开集族 $\{U_x\}_{x \in K_{\delta_0}}$，其中 $U_x = x + U = \{x + y : \ y \in U\}$。这是 K_{δ_0} 的一个开覆盖，因此，由于 K_{δ_0} 是紧的，我们可以从中选出 K_{δ_0} 的有限开子覆盖 $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$：

$$K_{\delta_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}.$$

对每个 x_i $(1 \leq i \leq n)$，选取 G 的一个紧子集 C_i，使得

$$x \notin C_i \Rightarrow |\psi(x) - \psi(x + x_i)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

设 $C = \cup_{i=1}^n C_i$。那么，我们有

$$x \notin C \Rightarrow |\psi(x) - \psi(x + y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

对每个 $y \in K_{\delta_0}$ 都成立。事实上，假设 y 属于 U_{x_j}，那么我们有

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi(x + y)| &= |\psi(x) - \psi(x + x_j) + \psi(x + x_j) - \psi(x + y)| \\ &\leq |\psi(x) - \psi(x + x_j)| + |\psi(x + x_j) - \psi(x + y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

现在注意到，对任意 $x \notin C$，我们有

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \alpha| &\leq \left| \frac{1}{m(K_{\delta_0})} \int_{K_{\delta_0}} \psi(x + t)dt - \psi(x) \right| + \left| \frac{1}{m(K_{\delta_0})} \int_{K_{\delta_0}} \psi(x + t)dt - \alpha \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{m(K_{\delta_0})} \int_{K_{\delta_0}} \psi(x + t)dt - \frac{1}{m(K_{\delta_0})} \int_{K_{\delta_0}} \psi(x)dt \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{1}{m(K_{\delta_0})} \int_{K_{\delta_0}} |\psi(x + t) - \psi(x)|dt + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

这意味着 $\psi \xrightarrow{c} \alpha$。

接下来考虑一般情形。设 $\psi \in L^\infty(G)$。取一个函数 $f \in P(G)$，使得 $\hat{} f$ 在 Γ 上不消失，并考虑 $f * \psi \in C_{bu}(G)$。那么，由 $\psi \xrightarrow{ac} \alpha$，我们有 $f * \psi \xrightarrow{ac} \alpha$。假设 $\psi - \psi_s \xrightarrow{w^*c} 0$ 意味着 $(f * \psi) - (f * \psi)_s \xrightarrow{c} 0$。因此，由上述结果可得 $f * \psi \xrightarrow{c} \alpha$，进而由维纳陶伯定理推出 $\psi \xrightarrow{w^*c} \alpha$。证明完毕。

注3.1. 在定理3.1和3.2中，ψ 慢振荡以及对每个 $s \in G$ 都有$\psi - \psi_s \xrightarrow{w^*c} 0$，分别也是满足 $\psi \xrightarrow{c} \alpha$ 和 $\psi \xrightarrow{w^*c} \alpha$ 的充分条件。

4. Spectral synthesis of bounded measurable functions

设 G 是一个局部紧阿贝尔群， Γ 是其对偶群。当将 λ 视为 G 上的特征标时，记作 $\chi_\lambda(x)$，其中 λ 属于 Γ 。对于函数 f 属于$L^1(G)$，其傅里叶变换 $\hat{}\, f$ 定义为

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G f(x)\chi_\lambda(-x)dm(x), \quad \lambda \in \Gamma.$$

本节旨在发展 $C_{bu}(G)$ 和 $C_{bu}(G)^*$ 的谱理论。关于以下内容，请读者参阅 [17] ，作为基础文献。

对于 $f \in L^1(G)$，令 $Z(f)$ 为 f 的傅里叶变换的零点集。令 I 为 $L^1(G)$ 的一个闭理想。我们用 $Z(I)$ 表示其中元素的傅里叶变换的零点集之交，即，

$$Z(I) = \bigcap_{f\in I} Z(f).$$

根据定义，每个 $Z(I)$ 都是 Γ 的闭集。注意，一般而言， $Z(I)$ 并不能唯一确定 I。换言之，存在不同的闭理想 I 和 I' ，使得 $Z(I) = Z(I')$ 成立。然而， Γ 中存在一个闭集 C ，它是 $L^1(G)$ 的某个唯一闭理想的零点集。这样的闭集称为谱综合集。以下结果是谱综合理论中的一个基本结果。

定理 4.1. 设 I 是 $L^1(G)$ 的闭理想，且 $f \in L^1(G)$。若 $Z(f)$ 的内部包含 $Z(I)$，则 $f \in I$ 成立。

对于 Γ 的闭集 C ，令 $I_1(C)$ 为所有满足 $C \subseteq Z(f)$ 的 $f \in L^1(G)$ 所构成的集合，并令 $I_0(C)$ 为所有满足 $C \subseteq \mathrm{Int}_\Gamma Z(f)$ 的 $f \in L^1(G)$ 所构成集合的闭包，其中 $Z(f)$ 的内部取自 Γ。于是，根据定义， $I_1(C)$ 是 $L^1(G)$ 中满足 $Z(I) = C$ 的最大闭理想；而根据定理 3.1， $I_0(C)$ 是 $L^1(G)$ 中满足$Z(I) = C$的最小闭理想。注意，当且仅当 $I_0(C) = I_1(C)$ 时， C 是谱综合集。

现在，按照经典理论，我们定义 $L^\infty(G)$ 的子空间和元素的谱。令 Φ 为 $L^\infty(G)$ 的弱*闭不变子空间，也就是说， Φ 是 $L^\infty(G)$ 中关于弱*拓扑闭合的子空间，并且对每个$s \in G$， $\psi \in \Phi$ 蕴含 $\psi_s \in \Phi$ 。与 Φ相关，我们将 $J(\Phi)$ 定义为 $L^1(G)$ 的闭理想，它由 $L^1(G)$ 中所有满足对每个 $\psi \in \Phi$ 都有 $f * \psi = 0$ 的函数f 组成：

$$J(\Phi) = \{f \in L^1(G) : f * \psi = 0 \ \forall \psi \in \Phi\}.$$

于是，我们将 Φ 的谱 $\mathrm{sp}(\Phi)$ 定义为 $Z(J(\Phi))$。

同理，我们定义 $L^\infty(G)$ 中每个元素的谱。对于 $L^\infty(G)$ 中的每个 ψ ，令 $J(\psi)$ 为所有满足 $f * \psi = 0$ 的函数 $f \in L^1(G)$ 的集合。于是，我们将 ψ 的谱 $\mathrm{sp}(\psi)$ 定义为 $Z(J(\psi))$。容易验证，$\mathrm{sp}(\psi) = \mathrm{sp}(\Phi(\psi))$，其中 $\Phi(\psi)$ 是由 ψ 生成的 $L^\infty(G)$ 的弱*闭不变子空间。

我们给出 Φ 的谱的另一种描述。设 $\langle X, X^*\rangle$ 是任意一对局部凸空间构成的对偶对。对于 X 的子空间 E 和 X^* 的子空间 E^* ，定义它们的湮灭子如下：

:

$$E^{\perp} = \{\varphi \in X^* : \varphi(x) = 0 \ \forall x \in E\},$$
$$E^{*\perp} = \{x \in X : \varphi(x) = 0 \ \forall \varphi \in E^*\}.$$

注意到 $E^{\perp}$ 是 X^* 的弱*闭子空间，而 $E^{*\perp}$ 是 X的闭子空间。根据Hahn-Banach定理,

$$(E^{\perp})^{\perp} = E, \quad (E^{*\perp})^{\perp} = E^*$$

当 E 和 E^* 分别是 X 和 X^* 的闭子空间时，关系成立。对偶对 $\langle L^1(G)\ L^\infty(G)\rangle$ 的一个重要事实是： $L^1(G)$的闭理想与 $L^\infty(G)$的弱*不变子空间之间存在对应关系；设 I 是 $L^1(G)$的闭理想，则其湮灭子 $\Phi = I^{\perp}$ 是 $L^\infty(G)$的闭不变子空间，反之亦然。

定理 4.2. 设 Φ 是 $L^\infty(G)$的弱*闭不变子空间。那么，sp(Φ)是包含于 Φ 中的所有特征的集合:

$$\mathrm{sp}(\Phi) = \{\lambda \in \Gamma : \chi_\lambda \in \Phi\}.$$

Proof . 首先，假设 $\chi_\lambda \in \Phi$。设 f 属于 $J(\Phi)$。那么，特别地，我们有 e

$$\begin{aligned} f * \chi_\lambda(x) &= \int_G f(t)\chi_\lambda(x-t)dm(t) \\ &= \int_G f(t)\chi_\lambda(x)\chi_\lambda(-t)dm(t) \\ &= \chi_\lambda(x)\hat{f}(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

ˆ 对每个 $x \in G$均成立。因此， $f(\lambda) = 0$且 $\lambda \in Z(J(\Phi))$ =sp(Φ)。

另一方面，假设 $\chi_\lambda \notin \Phi$。因此，根据 Hahn-Banach定理，存在某个 $f \in L^1(G)$, 使得 $\langle f^*, \psi\rangle = 0$对每个 $\psi \in \Phi$和 $\langle f^*, \chi_\lambda\rangle = 1$都成立，其中 $f^*(x) = f(-x)$。也就是说,

$$\int_G f^*(t)\psi(t)dt = \int_G f(-t)\psi(t)dm(t) = f * \psi(0) = 0$$

对每个 $\psi \in \Phi$ 和

$$\int_G f^*(t)\chi_\lambda(t)dt = \int_G f(-t)\chi_\lambda(t)dm(t) = \hat{f}(\lambda) = 1$$

都成立。由于 Φ 是平移不变的，第一个等式对 ψ的任意平移 ψ_x也成立，因此我们得到 $f * \psi = 0$。因此， f属于 $J(\Phi)$，且 $f(\lambda) = 1$，于是有$\lambda \notin$sp(Φ)。证毕。

显然，在 $L^\infty(G)$ 中，满足 sp(Φ) $= C$ 的最小弱*闭子空间是由特征标 $\{\chi_\lambda\}_{\lambda \in C}$ 生成的子空间 $\Phi_1(C)$。注意，若 $I = \Phi^{\perp}$，或者等价地，若 $I^{\perp} = \Phi$，则 sp(Φ) $= Z(I)$ 成立。这意味着 $\Phi_1(C) = I_1(C)^{\perp}$。此外，令 $\Phi_0(C)$ 为 $I_0(C)$ 的湮灭子，即 $\Phi_0(C) = I_0(C)^{\perp}$，那么 $\Phi_0(C)$ 是满足 sp(Φ) $= C$ 的最大弱*闭不变子空间。我们有 $\Phi_0(C) = \Phi_1(C)$

当且仅当 sp(Φ) 是一个谱综合集。这个观察得出以下断言：

定理 4.3。设 Φ 是 $L^\infty(G)$ 的弱*闭不变子空间。若 sp(Φ) 是谱综合集，则 Φ 可由其谱综合而成。也就是说，Φ 中的每个元素 ψ 都是一个三角多项式网的弱*极限

$$\psi_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n_\alpha} c_k^\alpha e^{it_k^\alpha x}$$

其中，对于每个 α 和 $1 \le k \le n_\alpha$，$c_k^\alpha \in \mathbb{C}$ 和 $t_k^\alpha \in$ sp(Φ)。

按照 [5], ，我们也可以为 $C_{bu}(G)^*$ 中的元素定义谱。设 $\varphi \in C_{bu}(G)^*$ 和 $f \in L^1(G)$。我们定义它们的卷积 $f * \varphi$，它也是 $C_{bu}(G)^*$ 的一个元素，定义如下：

$$f * \varphi(\psi) = \varphi(f * \psi), \quad \psi \in L^\infty(G).$$

对于每个 $\varphi \in C_{bu}(G)^*$，令 $J(\varphi)$ 为 $L^1(G)$ 中由满足 $f * \varphi = 0$ 的那些元素 f 构成的闭理想。于是，我们将 φ 的谱 sp(φ) 定义为 $Z(J(\varphi))$。

下面的引理是后续论证的基础。

引理 4.1. 设 ψ 属于 $L^\infty(G)$，φ 属于 $C_u(\mathbb{R})^*$，且 f 属于 $L^1(\mathbb{R})$。则下列结论成立。

(i) sp($f * \psi$) $\subseteq$ sp(ψ) $\cap$ supp $\hat{f}$，

(ii) sp($f * \varphi$) $\subseteq$ sp(φ) $\cap$ supp $\hat{f}$，其中 supp f 表示 f 的支集。

证明。（i）首先注意到，根据谱的定义，包含关系 sp($f * \psi$) $\subseteq$ sp(ψ) 显然成立。任取 $\lambda \notin$ supp $\hat{f}$。设 g 是 $L^1(G)$ 中的一个函数，使得在 supp f 的一个邻域 $\hat{}$ 上，$\hat{g} = 0$，且 $\hat{g}(\lambda) = 1$。注意，对每个 $\lambda \in \Gamma$，都有 $(f * g)(\lambda) = f(\lambda)\hat{g}(\lambda) = 0$，这意味着，根据傅里叶变换的唯一性定理，$f * g = 0$。因此，我们得到 $g * (f * \psi) = (g * f) * \psi = 0$，从而 g 属于 $J(f * \psi)$。由于 $\lambda \notin Z(g)$，我们得出 $\lambda \notin$ sp($f * \psi$)。

(ii) 这一断言可以用与 (i) 相同的方法证明，证明从略。

引理 4.2. 设 ψ 属于 $L^\infty(G)$，且 φ 属于 $C_{bu}(G)^*$。则有以下结论。

(i) 若 sp(ψ) $= \emptyset$，则 $\psi = 0$;

(ii) 若 sp(φ) $= \emptyset$，则 $\varphi = 0$。

证明。(i) 假设 sp(ψ) $= \emptyset$ 成立。根据谱的定义和维纳陶伯定理（该定理断言：若 I 是 $L^1(G)$中的闭理想，且满足 $Z(I) = \emptyset$，则 $I = L^1(G)$），我们得出，对于每个 f 属于 $L^1(G)$的元素，都有 $f * \psi = 0$。这意味着，根据 Hahn-Banach定理，$\psi = 0$。

(ii) 假设 sp(φ) $= \emptyset$，也就是说，对于每个 $\psi \in C_u(G)$，都有 $f * \varphi(\psi) = \varphi(f * \psi) = 0$。取 $L^1(G)$ 的一个近似单位 $\{f_\alpha\}$，注意到

$$\lim_\alpha \| f_\alpha * \psi - \psi \|_\infty = 0$$

对每个 $\psi \in C_u(G)$ 都成立。因此，对于任意 $\psi \in C_u(G)$，我们有

$$\begin{aligned} |\varphi(\psi)| &\leq |\varphi(\psi - f_\alpha * \psi)| + |\varphi(f_\alpha * \psi)| \\ &= |\varphi(\psi - f_\alpha * \psi)|, \end{aligned}$$

其趋于 0，当 $\alpha \to \infty$。因此可得 $\varphi(\psi) = 0$，证明完毕。

我们如下定义 $C_{bu}(G)$ 和 $C_{bu}(G)^*$ 的子空间：

$$E_A = \{\psi \in C_{bu}(G) : \mathrm{sp}(\psi) \subseteq A\};$$
$$E_A^* = \{\varphi \in C_{bu}(G)^* : \mathrm{sp}(\varphi) \subseteq A\},$$

其中，A 是 Γ 的子集。注意，如果 A 是 Γ 的闭子集，则 $E_A = \Phi_0(A) \cap C_{bu}(G)$ 成立，从而 E_A 是 $C_{bu}(\mathbb{R})$ 的闭子空间。对于空间 E_A^*，我们有以下结果。

引理 4.3。设 A 是 Γ 的闭子集。则 E_A^* 是 $C_{bu}(G)^*$ 的弱*闭子空间。特别地，它是范数闭的。

证明。设 $\{\varphi_\alpha\}$ 是 E_A^* 中满足 $w^*\text{-}\lim_\alpha \varphi_\alpha = \varphi$ 的元素网。我们证明 $\varphi \in E_A^*$，即 $\mathrm{sp}(\varphi) \subseteq A$。任取 $\lambda \notin A$。则存在函数 f 属于 $L^1(G)$，使得 $\hat{f} = 0$ 在 A 的某个邻域上且 $\hat{f}(\lambda) = 1$。注意，对于每个 α，都有 $f * \varphi_\alpha = 0$。于是，对于任意 ψ 属于 $L^\infty(G)$，我们有

$$(f * \varphi)(\psi) = \varphi(f * \psi) = \lim_\alpha \varphi_\alpha(f * \psi) = \lim_\alpha f * \varphi_\alpha(\psi) = 0.$$

因此，我们得到 $f * \varphi = 0$，进而得到 $f \in J(\varphi)$。由于 $\lambda \notin Z(f)$，我们有 $\lambda \notin \mathrm{sp}(\varphi)$，证明完毕。

下面的结果将在第 8 节中使用，它说明了谱关于弱*拓扑的连续性。

引理 4.4. 设 A 是 Γ 的一个闭子集。假设 $\{\psi_\alpha\}$ 是 $L^\infty(G)$ 的一个网，且对于每个 α，都有 $\mathrm{sp}(\psi_\alpha) \subseteq A$。若 $w^*\text{-}\lim_\alpha \psi_\alpha = \psi$，即 $\{\psi_\alpha\}$ 在弱*意义下收敛到 ψ，则有 $\mathrm{sp}(\psi) \subseteq A$。

证明。事实上，对于每个满足 $A \subseteq \mathrm{Int}_\Gamma Z(f)$ 的 $f \in L^1(G)$，换言之，对于 $f \in I_0(A)$，我们对每个 α 都有 $f * \psi_\alpha = 0$。因此，我们有

$$f * \psi = \lim_\alpha f * \psi_\alpha = 0,$$

$\hat{}\,\hat{}$ 这意味着 $f \in J(\psi)$。由于 $\cap_{f \in I_0(A)} Z(f) = A$，我们得到 $\mathrm{sp}(\psi) = \cap_{f \in J(\psi)} Z(f) \subseteq A$。证明至此完成。

下面，我们将用空间 E_A 来描述空间 E_A^*。注意，我们考虑对偶对 $\langle C_{bu}(G)\ C_{bu}(G)^* \rangle$。

定理 4.4。设 A 是 Γ 的一个闭子集。那么，我们有

$$E_A^{*\perp} = \mathrm{cl}_{C_{bu}(G)} E_{A^c},$$

其中，符号 $\mathrm{cl}_{C_{bu}(G)} E$ 表示 $C_{bu}(G)$ 中一个子空间 E 的闭包（相对于范数拓扑）。

证明。对于每个 $\psi \in C_{bu}(G)$ 和 $\varphi \in C_{bu}(G)^*$，定义 $\psi'(x) \in C_{bu}(G)$ 如下：$\psi'(x) = \varphi(\psi_x)$。对于任意 $f \in L^1(G)$，根据定理 2.1 的证明中提到的事实，我们有

$$\varphi(f * \psi) = \int_G \varphi(\psi_{-t}) f(t) dt.$$

将 ψ 替换为 ψ_x，其中 $x \in G$，我们得到

$$f * \varphi(\psi_x) = \varphi(f * \psi_x) = \int_G \varphi(\psi_{x-t}) f(t) dt = \int_G \psi'(x-t) f(t) dt = f * \psi'(x). \tag{3}$$

由此方程，我们可以推出以下结果：

$$\mathrm{sp}(\psi') \subseteq \mathrm{sp}(\psi) \cap \mathrm{sp}(\varphi). \tag{4}$$

事实上，假设 $f \in J(\psi)$，即 $f * \psi = 0$。那么，对任意 $x \in G$，都有$f * \psi_x = (f * \psi)_x = 0$。因此，由方程 (3)，若 $f \in J(\psi)$，则有 $f * \psi' = 0$，即 $f \in J(\psi')$。于是，由于 $J(\psi) \subseteq J(\psi')$，我们得到 $\mathrm{sp}(\psi') \subseteq \mathrm{sp}(\psi)$。

接下来，假设 $f \in J(\varphi)$，即 $f * \varphi = 0$。同样，由方程 (3)，我们得到 $f * \psi' = 0$，即 $f \in J(\psi')$。这表明 $\mathrm{sp}(\psi') \subseteq \mathrm{sp}(\varphi)$。由此我们得到了所需的关系 (4)。

现在假设 $\varphi \in E_A^*(G)$ 和 $\psi \in E_{A^c}(G)$。那么，由 (4) 可得 $\mathrm{sp}(\psi') \subseteq \mathrm{sp}(\psi) \cap \mathrm{sp}(\varphi) \subseteq A \cap A^c = \emptyset$。因此，$\mathrm{sp}(\psi') = \emptyset$ 成立。接着，由引理 4.2 (1)，可得 $\psi' = 0$ 和 $\varphi(\psi) = 0$，也就是说，$\psi \in {E_A^*}^{\perp}$。现在我们得到

$$E_{A^c} \subseteq {E_A^*}^{\perp},$$

这意味着

$$\mathrm{cl}_{C_{bu}(G)} E_{A^c} \subseteq {E_A^*}^{\perp}.$$

现在我们证明反向包含。假设对于每个 $\psi \in E_{A^c}$，都有 $\varphi(\psi) = 0$。我们证明 $\mathrm{sp}(\varphi) \subseteq A$。设 $\lambda \notin A$，并取 $f \in L^1(G)$，使得在 A 的某个 $\hat{}$ 邻域 U 上，$\hat{} f = 0$，其中 $\lambda \notin U$ 且 $f(\lambda) = 1$。那么，对于 $\hat{}$ 每个 $\psi \in C_{bu}(G)$，都有 $f * \varphi(\psi) = \varphi(f * \psi) = 0$，因为 $\mathrm{sp}(f * \psi) \subseteq \mathrm{supp} f \subseteq U^c \subseteq A^c$。因此，$f$ 是 $J(\varphi)$ 中的一个函数，$\hat{}$且满足 $f(\lambda) = 1$，由此可得 $\lambda \notin \mathrm{sp}(\varphi)$。因此，我们已经证明

$${E_{A^c}}^{\perp} \subseteq E_A^*.$$

考察上述等式两边的湮灭子，然后取闭包，我们得到包含关系

$${E_A^*}^{\perp} \subseteq \mathrm{cl}_{C_{bu}(G)} E_{A^c}.$$

证明至此完成。

5. An application to topologically invariant means

我们将定理 4.4 应用于 $C = \{0\}$ 的情形，也就是说，应用于仅由 G 的单位元组成的单元素集。以下结果本质上归功于 Muhly [13], ，他证明了 $G = \mathbb{R}$ 的特殊情形。

定理 5.1. 对于 $\varphi \in C_{bu}(G)^*$，φ 是不变均值，当且仅当 $\mathrm{sp}(\varphi) = \{0\}$。

证明。首先，假设 φ 是不变的。那么，对于任意满足 $Z(f)$ 包含 $\{0\}$ 的 $f \in L^1(G)$，即 $\int_G f(x)dm(x) = 0$，我们有

$$f * \varphi(\psi) = \varphi(f * \psi) = \int_G \varphi(\psi_{-t}) f(t)dt$$
$$= \int_G \varphi(\psi) f(t)dt = \varphi(\psi) \int_G f(t)dt = 0.$$

因此，我们得出 $\mathrm{sp}(\varphi) \subseteq \{0\}$。注意，若 $\mathrm{sp}(\varphi) = \emptyset$，根据引理 4.2，$\varphi = 0$成立。因此，我们得出 $\mathrm{sp}(\varphi) = \{0\}$。

反过来，假设 $\mathrm{sp}(\varphi) = \{0\}$。那么，对于任意 $f \in I_0(\{0\})$ 和 $\psi \in C_{bu}(G)$，我们有

$$f * \varphi(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\psi_{-t}) f(t)dt = 0.$$

对于任意 $x \in G$，令 $\psi'(x) = \varphi(\psi_x)$，则有

$$f * \varphi(\psi_x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\psi_{x-t}) f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \psi'(x-t) f(t)dt = 0.$$

这意味着 $\mathrm{sp}(\psi') = \{0\}$。由于 $\{0\}$ 是一个谱综合集（见 [17]），我们有$\Phi(\psi') = \Phi_1(\{0\}) = \mathbb{R}$。因此，$\psi'(x)$ 是一个常数函数，这意味着 φ 是平移不变的。证毕。

令 $T(G)$ 为由 $\mathcal{T}(G)$ 张成的 $L^\infty(G)^*$ 闭子空间。我们通过定理 4.4 确定 $T(G)$ 的湮灭子。对于 Γ 的任意子集 A，定义 $L^\infty(G)$ 的子空间E'_A 如下：

$$E'_A = \{\psi \in L^\infty(G) : \mathrm{sp}(\psi) \subseteq A\}.$$

定理 5.2. 对于局部紧阿贝尔群 G，以下断言成立。

$$T(G)^\perp = cl_{L^\infty(G)} E'_{G\setminus\{0\}}.$$

证明。令 $\varphi \in T(G)$。固定 $\psi \in E'_{G\setminus\{0\}}$。对于任意 $f \in P(G)$，我们有 $f * \psi \in C_{bu}(G)$，且根据引理 4.1，$\mathrm{sp}(f * \psi) \subseteq G \setminus \{0\}$。因此，对于每个 $\varphi \in T(G)$，我们有

$$\varphi(\psi) = \varphi(f * \psi) = 0$$

根据定理 4.4 和定理 5.1。现在，我们得到

$$T(G)^\perp \supseteq cl_{L^\infty(G)} E'_{G\setminus\{0\}}.$$

我们证明反向包含。假设 $\varphi \in L^\infty(G)$ 在 $E'_{G\setminus\{0\}}$ 上为零。我们证明φ属于 $T(G)$，也就是说，对于每个 $f \in P(G)$ 和 $\psi \in L^\infty(G)$，都有 $\varphi(\psi - f * \psi) = 0$。首先注意，对于满足 $\hat{g} = 1$ 在 0 的某个邻域 U 内的函数 $g \in L^1(G)$，对每个 $\psi \in L^\infty(G)$，都有$\varphi(\psi - g * \psi) = 0$。事实上，要证明这一点，只需证明 $\psi - g * \psi \in E'_{G\setminus\{0\}}$，换言之，$\mathrm{sp}(\psi - g * \psi) \subseteq G \setminus \{0\}$。取一个函数 $h \in L^1(G)$，使得 $\hat{h} = 0$ 在 U 外，且 $\hat{h}(0) = 1$。注意到

$$h * (\psi - g * \psi) = (h - g * h) * \psi.$$

这里，对于每个 $\lambda \in \Gamma$，有 $(h-g*h)\hat{}(\lambda) = \hat{}h(\lambda)(1-\hat{}g(\lambda)) = 0$。因此，$h-g*h=0\hat{}$，进而 $h \in J(\psi - g*\psi)$。由于 $h(0) = 1$，我们得出 $0 \notin \mathrm{sp}(\psi - g*\psi)$。由此得到所需结论。

对于任意的 $f \in P(G)$ 和 $\varepsilon > 0$，存在一个函数 h，属于 $L^1(G)$，使得 $\|h-f\|_1 < \varepsilon$。因此，我们有

$$
\begin{aligned}
|\varphi(\psi - f*\psi)| &= |\varphi(\psi - h*\psi) + \varphi(h*\psi - f*\psi)| \\
&\le |\varphi(\psi - h*\psi)| + |\varphi(h*\psi - f*\psi)| \\
&= |\varphi(h*\psi - f*\psi)| \\
&= |\varphi((h-f)*\psi))| \\
&\le \|\varphi\|\|h-f\|_1\|\psi\|_\infty \\
&\le \|\varphi\|\|\psi\|_\infty \varepsilon.
\end{aligned}
$$

由于 $\varepsilon > 0$ 可以任意选取，我们得到 $\varphi(\psi - f*\psi) = 0$，这意味着 ψ 属于 $T(G)$。证明至此完成。

6. A functional analytic condition for almost convergence

本节应用定理 5.2，得到关于几乎收敛的第二个必要充分条件。我们将 $L^\infty(G)$ 的子空间定义如下：

$$
\begin{aligned}
E(G) &:= \{\psi \in L^\infty(G) : \psi \text{ is almost convergent}\} \\
E_0(G) &:= \{\psi \in L^\infty(G) : \psi \text{ is almost convergent to } 0\}
\end{aligned}
$$

显然，以下分解成立：

$$
E(G) = \mathbb{R} \oplus E_0(G), \quad \psi \mapsto \alpha + (\psi - \alpha),
$$

其中，α 是 ψ 几乎收敛到的数。定理 5.2可用几乎收敛重新表述如下：

定理 6.1. 设 G 是一个局部紧阿贝尔群。若 $\psi \in L^\infty(G)$几乎收敛到 0，当且仅当

$$
\psi \in cl_{L^\infty(G)} E'_{G\setminus\{0\}}.
$$

换言之，ψ 几乎收敛到 0，当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$，存在$\psi_1 \in L^\infty(G)$，其谱不与 0 的某个邻域相交，使得 $\|\psi - \psi_1\|_\infty < \varepsilon$。

下面我们给出该定理的一些应用。关于以下结果的证明，参见 [17]。

引理 6.1. 设 $\mu \in M(\Gamma)$。定义 $\hat{}\mu^*(x) \in C_{bu}(G)$如下：

$$
\hat{\mu}^*(x) = \int_G \chi_\lambda(x) d\mu(\lambda), \quad x \in G.
$$

于是，$\mathrm{sp}(\hat{}\mu^*) = \mathrm{supp}\ \mu$ 成立，其中 $\mathrm{supp}\ \mu$ 是测度的支撑 μ。

以下结果归功于 Eberlein [4]。他证明了每个定义在 $\mathbb{R}$上的弱几乎周期函数都几乎收敛，并且上述定义的函数 $\hat{}\mu^*$ 是弱几乎周期函数。这里，我们将利用定理 6.1 给出一个更直接的证明。

定理 6.2. 对每个 $\mu \in M(G)$，$\hat{}\mu^*$ 几乎收敛到 $\mu(\{0\})$.

证明. 设 $\mu_0 = \mu - \mu(\{0\})$。那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 0 的邻域 U，使得 $|\mu_0|(U) < \varepsilon$。定义 $\mu_{U^c}(A) = \mu(A \cap U^c)$。根据引理 6.1，$\mathrm{sp}(\hat{}\mu^*_{U^c}) \cap U = \emptyset$，于是我们有

$$|\hat{\mu}^*_0(x) - \hat{\mu}^*_{U^c}(x)| \leq \int_U |\chi_\lambda(x)| d|\mu|(x) = |\mu_0|(U) < \varepsilon.$$

因此，根据定理 6.1，我们有 $\hat{}\mu^*_0 \xrightarrow{ac} 0$，进而可得 $\hat{}\mu^* \xrightarrow{ac} \mu(\{0\})$，证毕。

定理 6.3. 设 $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ 是一个 Γ 的序列。设 $\psi \in L^\infty(G)$ 定义为

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n \chi_{\lambda_n}(x) \ (uniformly\ bounded\ and\ pointwise\ convergence).$$

那么，我们有 $\mathrm{sp}(\psi) \subseteq cl_\Gamma\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$。

证明。令 Φ 为由 $\{\chi_{\lambda_n}\}_{n=1}^\infty$ 生成的 $L^\infty(G)$ 的弱*闭不变子空间。那么显然有 $\mathrm{sp}(\Phi) = cl_\Gamma\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$。由于 $\psi \in \Phi$，根据 ψ 的上述表达式，$\Phi(\psi) \subseteq \Phi$ 成立。因此，我们得到

$$\mathrm{sp}(\psi) = \mathrm{sp}(\Phi(\psi)) \subseteq \mathrm{sp}(\Phi) = cl_\Gamma\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty.$$

证明完毕。

定理 6.4. 设 $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ ($\lambda_0 = 0$) 是一个不收敛到 0 的 Γ 序列。如果 $\psi \in L^\infty(G)$ 表示为

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n \chi_{\lambda_n}(x) \ (uniformly\ bounded\ and\ pointwise\ convergence).$$

那么，ψ 几乎收敛到 c_0。

证明。根据定理 6.3，$\mathrm{sp}(\psi_0) \subseteq cl_\Gamma\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$，其中 $\psi_0(x) = \psi(x) - c_0$。由假设 $\{\chi_{\lambda_n}\}_{n=1}^\infty$ 不收敛到 0，存在 0 的某个邻域U，使得 $U \cap \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty = \emptyset$。因此，我们有 $\mathrm{sp}(\psi_0) \subseteq U^c$，并且根据定理 6.1，有 $\psi_0 \xrightarrow{ac} 0$，这就证明了所需结论。

我们给出 $G = \mathbb{R}$ 情形下的一个例子。狄利克雷级数是定义在 $\mathbb{R}$ 上、由指数函数之和表示的一类重要函数。

推论 6.1. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个复数序列，且 $\psi(s)$ 是系数为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的狄利克雷级数。

$$\begin{aligned}\psi(s) &= \frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \cdots \frac{a_n}{n^s} + \cdots \\ &= \frac{a_1}{1^\sigma} e^{-it\log 1} + \frac{a_2}{2^\sigma} e^{-it\log 2} + \cdots \frac{a_n}{n^\sigma} e^{-it\log n} + \cdots \ (s = \sigma + it).\end{aligned}$$

若 $\psi(s)$ 在直线 $Re(s) = \sigma$ 上一致有界且逐点收敛，则 $\psi_\sigma(t) = \psi(\sigma + it)$ 几乎收敛于 a_1。

7. One-sided almost convergence

在接下来的两节中，我们考察 $G = \mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}$ 的特殊群。对于这些群，方便起见，我们将定义在正数 $\mathbb{Z}_+$ 和 $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ 上的函数的几乎收敛。在下文中，符号 G表示 $\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{R}$，而 G_+ 表示 $\mathbb{Z}_+$ 或 $\mathbb{R}_+$。

我们如下定义 $L^\infty(G)$ 的三个闭子空间:

$$L_0^\infty(G) := \{\phi \in L^\infty(G) : \lim_{|x|\to\infty} \phi(x) = 0\},$$

$$L_{0,+}^\infty(G) := \{\phi \in L^\infty(G) : \lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0\},$$

$$L_{0,-}^\infty(G) := \{\phi \in L^\infty(G) : \lim_{x\to-\infty} \phi(x) = 0\}.$$

为简便起见，我们还将使用符号 L^∞、L_0^∞、$L_{0,+}^\infty$ 和 $L_{0,-}^\infty$，分别作为$L^\infty(G)$ $L_0^\infty(G)$$L_{0,+}^\infty(G)$ 和 $L_{0,-}^\infty(G)$ 的缩写。现在注意到，同构

$$\begin{aligned}L^\infty/L_0^\infty &\cong L^\infty/(L_{0,+}^\infty \cap L_{0,-}^\infty) \\ &\cong (L^\infty/L_{0,+}^\infty) \oplus (L^\infty/L_{0,-}^\infty)\end{aligned}$$

成立。这里，$[\psi]$ 在 L^∞/L_0^∞中的等价类的像由 $[\psi_+] + [\psi_-]$给出，其中 $\psi_+ := \psi \cdot I_{G_+}$ 且 $\psi_- := \psi \cdot I_{-G_+}$，其中 I_E 表示子集 E of G的特征函数。

因此，对于任意在 $L^\infty(G)^*$ 中的 φ，若其在 L_0^∞上满足 $\varphi = 0$，则 φ可分解如下:

$$(L^\infty/L_0^\infty)^* \cong (L^\infty/L_{0,+}^\infty)^* \oplus (L^\infty/L_{0,-}^\infty)^*, \quad \varphi = \varphi_+ + \varphi_-,$$

其中，对每个 $\psi \in L^\infty$，$\varphi_+(\psi) := \varphi(\psi_+)$且 $\varphi_-(\psi) := \varphi(\psi_-)$。注意，空间$(L^\infty/L_{0,\pm}^\infty)^*$ 分别可视为 $L^\infty(G)^*$ 的子空间，其中的元素在$L_{0,\pm}^\infty$上消失。

根据定理 2.2，对每个 $\varphi \in \mathcal{T}$，我们在 L_0^∞上有 $\varphi = 0$，因此，φ 可分解为 $\varphi_+ \in (L^\infty/L_{0,+}^\infty)^*$ 与 $\varphi_- \in (L^\infty/L_{0,-}^\infty)^*$之和。我们使用以下符号

$$\mathcal{T}_+ := \mathcal{T} \cap (L^\infty/L_{0,+}^\infty)^*, \quad \mathcal{T}_- := \mathcal{T} \cap (L^\infty/L_{0,-}^\infty)^*.$$

那么，$\mathcal{T}$等于 co（$\mathcal{T}_+ \cup \mathcal{T}_-$），即 $\mathcal{T}_+ \cup \mathcal{T}_-$的凸包。

现在我们定义 $L^\infty(G)$ 中元素的单侧几乎收敛。

定义 7.1. 我们称 ψ 单侧几乎收敛于数 α，如果对每个 $\varphi \in \mathcal{T}_+$，都有 $\varphi(\psi) = \alpha$。

在这种情况下，我们记作 $\psi \xrightarrow{\text{oac}} \alpha$。我们还通过将 ψ 在 $L^\infty(G_+)$ 中视为定义在 G 上的函数，来定义 $L^\infty(G_+)$ 中函数的单侧几乎收敛； $L^\infty(G_+)$ 是定义在 G_+ of G 的正部上的本质有界函数空间，其定义为

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

引理 7.1。设 ψ 属于 $L^\infty(G)$，且在 $-G_+$ of G 的负部上为零。那么，$\psi \xrightarrow{oac} 0$ 当且仅当 $\psi \xrightarrow{ac} 0$ 成立。

证明。必要性显然。设 $\psi \in L^\infty(G)$ 单侧几乎收敛于 0，即对于每个 $\varphi \in \mathcal{T}_+$， $\varphi(\psi) = 0$。由于 ψ 属于 $L_0^{\infty,-}(G)$，对于每个 $\mathcal{T}_-$，我们有 $\varphi(\psi) = 0$。因此，由于 $\mathcal{T} = co(\mathcal{T}_+ \cup \mathcal{T}_-)$，可得 $\psi \xrightarrow{ac} 0$。

对于给定的 $\psi \in L^\infty(G)$，我们可以给出一个类似于定理 2.3 的条件，以判定其是否单侧几乎收敛。为此，我们需要以下关于 $(L^\infty/L_0^{\infty,+})^*$ 中均值极值的初等引理。

引理 7.2. 设 φ 是 $L^\infty(G)$ 上的一个均值，并且在 $L_0^{\infty,+}(G)$ 上为零。那么，

$$\varphi(\psi) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \psi(x)$$

对每个 $\psi \in L^\infty(G)$ 都成立。

定理 7.1. $L^\infty(G)^*$ 上的一个均值 φ 属于 $\mathcal{T}_+$，当且仅当

(i) $G = \mathbb{Z}$

$$\varphi(\psi) \leq \overline{p}_+(\psi) := \limsup_{k \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \psi(n+i)$$

对每个 $\psi \in L^\infty(\mathbb{Z})$ 都成立。

(ii) $G = \mathbb{R}$

$$\varphi(\psi) \leq \overline{p}_+(\psi) := \limsup_{\theta \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \frac{1}{\theta} \int_x^{x+\theta} \psi(t)dt$$

对每个 $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ 都成立。

证明。利用引理 7.2，必要性的证明可采用与定理 2.1 类似的方法。对于充分性，注意到对于每个 $\psi \in L^\infty(G)$，$\overline{p}_+(\psi) \leq \overline{p}(\psi)$，因此由定理 2.2 可知，满足定理中条件的均值 φ 属于 $\mathcal{T}$。此外，显然对于每个 $,+(G)$，$\overline{p}_+(\psi) = \underline{p}_+(\psi) (:= -\overline{p}_+(-\psi)) = 0$ 成立，因此这样的 φ 属于 $(L^\infty/L_0^{\infty,+})^*$。由此可得， φ 属于 $\mathcal{T}_+ = \mathcal{T} \cap (L^\infty/L_0^{\infty,+})^*$。证毕。

现在，我们可以像由定理 2.2 推导出定理 2.3 那样，证明以下结果。

定理 7.2. 设 ψ 属于 $L^\infty(G_+)$。那么， ψ 单侧几乎收敛到 α 当且仅当

(i) $G = \mathbb{Z}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \psi(n+i) = \alpha$$

在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 中一致地。

(ii) $G = \mathbb{R}$

$$\lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta} \int_x^{x+\theta} \psi(t)dt = \alpha$$

在 $x \in \mathbb{R}_+$ 中一致地。

我们指出，对于 $l_\infty = L^\infty(\mathbb{Z}_+)$，单侧几乎收敛等价于 Lorentz 几乎收敛，而上述定理的 (i) 正是 Lorentz 证明的结果（定理 1.1）。

8. Complex Tauberian Thoerems for almost convergence

本节中，我们研究群 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}$上几乎收敛的所谓复陶伯定理。本节的主要定理之一（定理 8.6）可视为著名的 Wiener-Ikehara 定理的一个类似定理。首先，按照[10]，我们引入以下定义。

定义 8.1. 我们称定义在单位圆盘 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上的函数 $f(z)$在点 $z_0 = e^{it_0}$ ($t_0 \in [0, 2\pi]$)处具有 H^1 边界行为，如果存在一个数 $\delta > 0$和一个属于 $L^1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$的函数 $F(e^{it})$，使得当 $r \to 1^-$时， $f(re^{it})$在 $L^1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$中收敛到$F(e^{it})$。

定理 8.1. 设 ψ 属于 $L^\infty(\mathbb{Z})$，其在负整数上为零，并将 $n \geq 0$ 记为 $\hat{}a_n = \psi(n)$。设 $\psi(z)$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上定义的函数，其定义为

$$\hat{\psi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

如果 $\hat{}\,\psi$ 在 $z = 1$ 处具有 H^1 边界行为，则 ψ 几乎收敛于 0.

证明。对于满足 $0 < r < 1$ 的每个数 r ，定义函数 $\psi_r(n)$，其属于 $L^1(\mathbb{Z})$，并定义 $\hat{}\,\psi_r(\theta)$，其属于 $L^1(\mathbb{T})$，如下：

$$\psi_r(n) := \begin{cases} a_n r^n & (n \geq 0), \\ 0 & (n < 0). \end{cases}$$

$$\hat{\psi}_r(\theta) := \hat{\psi}(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \ (\theta \in \mathbb{T}),$$

分别如此。设 $\delta_0 > 0$ 是一个满足以下条件的数:

$$\lim_{r\to 1^-}\int_{-\delta_0}^{\delta_0}|\hat{\psi}_r(\theta)-\hat{\psi}(\theta)|\frac{d\theta}{2\pi}=0$$

对某个 $\hat{}\ \psi\in L^1(-\delta_0,\delta_0)$ 成立。固定 $\varepsilon>0$，并选择一个数 $0<\delta<\delta_0$，使得

$$\int_{-\delta}^{\delta}|\hat{\psi}_r(\theta)|\frac{d\theta}{2\pi}<\varepsilon$$

对每个 $0<r<1$ 都成立。设 C_δ 是 $L^1(\mathbb{Z})$ 中的一个函数，使得 $\hat{}\ C_\delta=1$ 在 $(-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2})$ 上，$\hat{C}_\delta=0\hat{}$ 在 $[-\delta,\delta]$ 之外，并且 $0\le C_\delta\le 1$ 在 $\mathbb{T}$ 上。对于每个 $0<r<1$，令

$$\hat{\psi}_{r,\delta}(\theta)=\hat{\psi}_r(\theta)(1-\hat{C}_\delta(\theta)),$$

and

$$\psi_{r,\delta}(n)=\widehat{(\hat{\psi}_{r,\delta})}(n),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

于是，我们有

$$\mathrm{sp}(\psi_{r,\delta})\cap\left(-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right)=\emptyset\ (0<r<1).$$

事实上，由引理 6.1，$\mathrm{sp}(\psi_{r,\delta})=\mathrm{supp}\ \hat{}\psi_{r,\delta}\subseteq\mathbb{T}\setminus(-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2})$。根据 $\psi_{r,\delta}$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}\psi_{r,\delta}(n)&=\int_{\mathbb{T}}\hat{\psi}_{r,\delta}(\theta)e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}\\&=\int_{\mathbb{T}}\hat{\psi}_r(\theta)e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}-\int_{\mathbb{T}}\hat{\psi}_r(\theta)\hat{C}_\delta(\theta)e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}\\&=\psi_r(n)-(\psi_r*C_\delta)(n).\end{aligned}$$

令 $r\to 1^-$，即可得到

$$\psi_\delta(n):=\lim_{r\to 1^-}\{\psi_r(n)-(\psi_r*C_\delta)(n)\}=\psi(n)-(\psi*C_\delta)(n)\ (n\in\mathbb{Z})$$

and

$$\mathrm{sp}(\psi_\delta)\cap\left(-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right)=\emptyset$$

由引理 4.4。对于每个 $r\in(0,1)$ 和 $n\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\begin{aligned}|\psi_r*C_\delta(n)|&=\left|\int_{\mathbb{T}}\hat{\psi}_r\hat{C}_\delta(\theta)e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}\right|\\&\le\int_{\mathbb{T}}|\hat{\psi}_r(\theta)\hat{C}_\delta(\theta)|\frac{d\theta}{2\pi}\\&\le\int_{-\delta}^{\delta}|\hat{\psi}_r(\theta)|\frac{d\theta}{2\pi}<\varepsilon.\end{aligned}$$

令 $r\to 1^-$ 趋于极限，我们得到 $|\psi*C_\delta(n)|\le\varepsilon$。于是可得 t

$$|\psi_\delta(n)-\psi(n)|=|\psi*C_\delta(n)|<\varepsilon\ (n\in\mathbb{Z}),$$

这意味着 $\|\psi_\delta - \psi\|_\infty \leq \varepsilon$。因此，根据定理 6.1，我们得出 $\psi \xrightarrow{ac} 0$。证明完毕。

定理 8.2。设 ψ be 属于 $L^\infty(\mathbb{Z})$，且在负整数上为零，并记 $\hat{a}_n = \psi(n)$ 为 $n \geq 0$。设 $\psi(z)$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上定义的函数：

$$\hat{\psi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

若 $\hat{\psi}(z) - \frac{\alpha}{1-z}$ 在 $z = 1$ 处具有 H^1 边界行为，则 ψ 单侧几乎收敛于 α，即

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \psi(n+i) = \alpha$$

对 $n \geq 0$ 一致地。

$\hat{}\,\hat{}$ 证明。设 $\psi_1(n) = \psi(n) - \alpha \cdot I_{\mathbb{Z}_+}(n)$。于是，我们有 $\psi_1(z) = \psi(z) - \frac{\alpha}{1-z}$。因此，由定理 7.1 可得 $\psi_1 \xrightarrow{ac} 0$。由于 $\psi_1(n) = 0$ 对于 $n < 0$，由引理 7.1 可得 $\psi_1 \xrightarrow{oac} 0$。然后，由定理 7.2 可得

$$\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \psi(n+i) = \alpha$$

在 $n \geq 0$ 中一致地成立。证明完毕。

$\hat{}$ 推论 8.1。设 ψ 属于 l_∞，并记 $a_n = \psi(n)$ 为 $n \geq 0$。设 $\psi(z)$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上定义的函数，其定义为

$$\hat{\psi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

若 $\hat{\psi}$ 在 $z = 1$ 处有一阶极点，则 $\psi \xrightarrow{oac} -\alpha$，其中 α 是 $\hat{\psi}(z)$ 在 $z = 1$ 处的留数。

证明。根据假设，在 1 的某个邻域 U 上，我们可以将其写为

$$\hat{f}(z) = \frac{\alpha}{z-1} + g(z),$$

其中 $g(z)$ 是 U 上的正则函数。因此，我们得到

$$\hat{f}(z) - \frac{-\alpha}{1-z} = g(z).$$

$\hat{}$ 由于上述等式右侧在 U 上连续，函数 $f(z) \frac{-\alpha}{1-z}$ 在 $z = 1$ 处具有 H^1 边界行为。由定理 8.2 可得结论。

注 8.1. 注意，利用 [3], 定理 3.1，我们可以将上述定理中系数 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 属于 l_∞ 的假设放宽为以下假设：对于某个常数$C > 0$，$\liminf_{n\to\infty}(b_{n+1} - b_n) \geq -C$ 且 $\liminf_{n\to\infty}(c_{n+1} - c_n) \geq -C$，其中 $a_n = b_n + ic_n$ $(n \geq 0)$。

以下结果可视为经典法图-里斯定理的推广。若存在正常数 $C > 0$，使得对于每个 $n \geq 0$，$b_n \geq -C$ 且 $c_n \geq -C$，其中 b_n 和 c_n 分别是 a_n的实部和虚部，则称复数序列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 有下界。

定理 8.3. 设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 是一个有下界的复数序列。设 $f(z)$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上定义的函数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

若 $f(z)$ 在点 $z = 1$ 处解析，则有 $s_n \xrightarrow{oac} f(1)$，其中 $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$。

证明。首先，注意到根据 [3] 的定理 6.2 (i)，序列 $\{s_n\}_{n\geq 0}$ 有界。接下来，我们证明 $s_n \xrightarrow{oac} f(1)$。注意

$$g(z) = \frac{f(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$$

并且，由于 $f(z)$ 在 $z = 1$ 处解析，$g(z)$ 在 $z = 1$ 处有一个一阶极点，其留数为 $-f(1)$。因此，由推论 8.1 可得 $s_n \xrightarrow{oac} f(1)$。证明完毕。

作为定理 8.3 的推论，我们得到关于幂级数在收敛圆上的收敛性的法图-里斯定理。我们需要以下由定理 3.2 直接推出的初等引理。

引理 8.1. 设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 属于 l_∞，且 α 是一个复数。那么，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 当且仅当 $a_n \xrightarrow{oac} \alpha$，并且 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$。

定理 8.4（法图，1906年）。设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 属于 l_∞，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。令 $f(z)$ 为单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的函数，定义为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

如果 $f(z)$ 在点 $z = 1$ 处解析，那么有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = f(1)$。

证明。由定理 8.3，我们得到 $s_n \xrightarrow{oac} f(1)$，其中 $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$。此外，根据假设，当 $n \to \infty$ 时，有 $s_n - s_{n-1} = a_n \to 0$。结合引理 8.1，可得 $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = f(1)$。

现在我们提及卡茨内尔森和察弗里里的一个有趣结果，它可以视为定理 8.1 的对偶。（参见 [9], [10]）。

定理 8.5（卡茨内尔森和察弗里里，1986年）。设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 是一个有界复数序列。假设解析函数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

具有 H^1 在单位圆上除 $z=1$ 以外的边界行为。那么，方程

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0.$$

成立。

关于 $G=\mathbb{R}$ 可以得到类似的结果。由于证明与上文的情形 $G=\mathbb{Z}$ 类似，下面只陈述结果，不给出证明。首先，我们定义右半平面上函数的 H^1 边界行为。

定义8.2. 若定义在右半平面 $\mathbb{C}^+:=\{z\in\mathbb{C}:\ Re(z)>0\}$ 上的函数 $f(z)$ 在点 $z_0=iy_0$ ($y_0\in\mathbb{R}$) 处具有 H^1 边界行为，则存在一个数 $\delta>0$ 和一个属于 $L^1(y_0-\delta,y_0+\delta)$ 的函数 $F(y)$，使得当 $x\to 0^+$ 时， $f(x+iy)$ 在 $L^1(y_0-\delta,y_0+\delta)$ 中收敛到 $F(y)$。

定理 8.6. 设 ψ 属于 $L^\infty(\mathbb{R})$，且在负实数上为零。设 $\mathcal{L}\psi(s)$ 是 ψ 的拉普拉斯变换，其中 ψ 是右半平面 $\mathbb{C}^+$ 上的解析函数，定义如下:

$$\mathcal{L}\psi(s)=\int_{\mathbb{R}_+}\psi(t)e^{-st}dt,\quad s\in\mathbb{C}^+.$$

若 $\mathcal{L}\psi(s)$ 在 $s=0$ 处具有 H^1 边界行为，则 ψ 几乎收敛到 0。

推论8.2. 设 ψ 属于 $L^\infty(\mathbb{R}_+)$，且 $\mathcal{L}\psi(s)$ 是其拉普拉斯变换。若 $\mathcal{L}\psi(s)-\frac{\alpha}{s}$ 在 $s=0$ 处具有 H^1 边界行为，则 ψ 单侧几乎收敛到 α，即

$$\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}\int_x^{x+\theta}\psi(t)dt=\alpha$$

对 $x\geq 0$ 一致地成立。

推论8.3. 设 ψ 属于 $L^\infty(\mathbb{R}_+)$，且 $\mathcal{L}\psi(s)$ 是其拉普拉斯变换。若 $\mathcal{L}\psi(s)$ 在 $s=0$ 处有一阶极点，则 $\psi\xrightarrow{oac}\alpha$，其中 α 是 $\mathcal{L}\psi(s)$ 在 $s=0$ 处的留数。

注8.2. 再次利用 [3] 的定理 3.1，我们可以将上述定理中 ψ 属于 $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ 的条件放宽为 ψ 有界递减；也就是说，存在某些常数 $C>0$、 $\delta>0$ 和 $x_0>0$，使得当 $x\geq x_0$ 和 $h\in[0,\delta]$时， $Re\,\psi(x+h)-Re\,\psi(x)\geq -C$ 且 $Im\,\psi(x+h)-Im\,\psi(x)\geq -C$。

以下结果可视为连续情形下定理8.3和定理8.4的对应结果。这里，如果存在正常数 $C>0$，使得对于每个 $x\geq 0$， $\psi(x)\geq -C$ 且 $Im\,\psi(x)\geq -C$，我们就称 $\psi(x)$ 有下界。我们注意到，函数 $\Psi(x)$ 在下方有界这一性质可由 [3]的定理 3.1 推出。

定理 8.7. 设 ψ 是定义在 $\mathbb{R}_+$ 上且有下界的局部可积函数。设 $\mathcal{L}\psi(s)$ 是其拉普拉斯变换。若 $\mathcal{L}\psi(s)$ 在右半平面内收敛，且在 $s=0$ 处解析，则 $\Psi\xrightarrow{oac}\mathcal{L}\psi(0)$，其中

$$\Psi(x)=\int_0^x\psi(t)dt\ (x\geq 0).$$

推论 8.4. 设 ψ 是定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的局部可积函数，使得 $\lim_{x\to\infty}\psi(x)=0$，并设 $\mathcal{L}\psi(s)$ 是其拉普拉斯变换。若 $\mathcal{L}\psi(s)$ 在 $s=0$ 处解析，则 $\lim_{x\to\infty}\Psi(x)=\mathcal{L}\psi(0)$，其中函数 Ψ 的定义如上。

最后，我们来说明关于解析函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 或函数 $\mathcal{L}\psi(s)$ 在其边界附近的行为的陶伯定理之间的关系。首先，我们提及以下经典且著名的结果（见 [10]）。

定理 8.8（哈代–李特尔伍德）。设 $\{a_n\}_{n\geq0}$ 是一个有下界的复数序列。假设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $|x|<1$ $(x\in\mathbb{R})$ 时收敛，并且

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)f(x)=\alpha.$$

那么，下列公式成立。

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}a_i=\alpha.$$

设 $H^1(\mathbb{D})$ 是单位圆盘上的哈代空间，$H^1_{\{1\}}(\mathbb{D})$ 是这样一类函数，其元素是在 $\mathbb{D}$ 上于点 $z=1$具有 H^1 边界行为的解析函数。那么，我们可以总结如下：这里设 $\{a_n\}_{n\geq0}$ 是一个有界复数序列，且 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$。

$$\begin{cases} f(x)-\frac{\alpha}{1-x}=o(\frac{1}{1-x})\ (x\to1^-) & \Longrightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}a_i=\alpha, \\ f(z)-\frac{\alpha}{1-z}\in H^1_{\{1\}}(\mathbb{D}) & \Longrightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}a_{n+i}=\alpha \text{ uniformly in } n\in\mathbb{Z}_+, \\ f(z)-\frac{\alpha}{1-z}\in H^1(\mathbb{D}) & \Longrightarrow \lim_{k\to\infty}a_k=\alpha. \end{cases}$$

第一条由定理 8.8 得出。第二条依据定理 8.2。第三条依据黎曼–勒贝格引理。因此，结合引理 8.1 可知，上述第三个断言可分解为定理 8.2 和定理 8.5 的两个断言。

关于 $\mathbb{R}$ 的相应结果如下：首先，哈代–李特尔伍德定理的右半平面版本如下（见 [10]）：

定理 8.9. 设 ψ 是半直线 $\mathbb{R}_+$ 上一个有下界的局部可积函数。若对所有 $x>0$，$\mathcal{L}\psi(x)$ 都存在，且

$$\lim_{x\to0^+}x\mathcal{L}\psi(x)=\lim_{x\to0^+}x\int_0^{\infty}e^{-xt}\psi(t)dt=\alpha,$$

那么我们有

$$\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\psi(t)dt=\alpha.$$

设 $H^1_{\{0\}}(\mathbb{C}^+)$ 和 $H^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^+)$ 分别为右半平面 $\mathbb{C}^+$ 上在 $s=0$ 处及整个直线 $\mathbb{R}$ 上具有 H^1 边界行为的解析函数集合。那么，

以下结果成立。这里， ψ 属于 $L^\infty(\mathbb{R}_+)$。

$$\begin{cases} \mathcal{L}\psi(x) - \frac{\alpha}{x} = o(\frac{1}{x})\,(x \to 0^+) \Longrightarrow \text{极限}_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \psi(t)dt = \alpha, \ \mathcal{L}\psi\ s \quad - \quad \mathbb{C}^+ \quad \Longrightarrow \quad - \quad t \quad () \\ \end{cases}$$

$- \frac{\alpha}{s} \in H^1_{\{0\}}()$ 极限$_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta}\int_x^{x+\theta} \psi()dt = \alpha$ 在 $x \in \mathbb{R}_+$上一致地,

$\mathcal{L}\psi\ s\ - \frac{\alpha}{s} \in H^1_{\mathbb{R}}\ \mathbb{C}^+ \quad \Longrightarrow w^* \quad {}_{x\to\infty}\psi_x = \alpha.$ () () - 极限

我们指出，第三个结论由 Wiener-Ikehara 定理推出（例如参见[8], [10]）。简而言之，可以说，定理 8.6 是 Hardy-Littlewood 定理与 Wiener-Ikehara 定理之间的一个中间结果。

References

[1] C. Chow, 《关于局部紧群上的拓扑不变均值》, 《美国数学学会汇刊》151（1970）, 443-456。[2] C. Chow, 《群上的弱几乎周期函数与几乎收敛函数》, 《美国数学学会汇刊》206（1975）, 175-200。[3] G. Debruyne 和 J.Vindas, 《具有局部伪函数边界行为的拉普拉斯变换的复陶伯定理》, 《数学分析杂志》138（2019）, 799-833。[4] W. F. Eberlein, 《抽象遍历定理与弱几乎周期函数》, 《美国数学学会汇刊》67（1949）, 217-240。[5] F. Forelli, 《解析测度与拟不变测度》, 《数学学报》118（1967）, 33-59。[6] F. D. Greenleaf, 《拓扑群上的不变均值及其应用》, Van Nostrand, 普林斯顿, 新泽西州（1969）。[7] A. Hulanicki, 《局部紧群上的均值与 Folner 条件》, 《数学研究》27（1966）, 87-104。[8] A. E. Ingham, 《陶伯定理中的 Wiener 方法》, 《伦敦数学学会会刊》38（1935）, 458–480。[9] Y. Katznelson, 察弗里里, 《关于幂有界算子》, 《泛函分析杂志》68（1986）, 313-328。[10] J. Korevaar, 《Tauber 理论》, Springer, 柏林, 2004。[11] R. Kunisada, 《 $L^\infty(\mathbb{R}_+)$上的不变线性泛函》, 《数学分析与应用杂志》481（2020）, 123452。[12] G. G. Lorentz, 《对发散级数理论的贡献》, 《数学学报》80（1948）, 167-190。[13] P. Muhly, 《函数代数与流》, 《塞格德数学科学学报》35（1975）, 55-66。[14] A. T. Paterson, 《可均性》, 美国数学学会（1988）。[15] R. A. Raimi, 《平均值与 Banach 极限》, 《美国数学学会会刊》8（1957）, 1029-1036。[16] R. A. Raimi, 《关于 Banach 广义极限》, 《杜克数学杂志》26（1959）, 17-28。[17] W. Rudin, 《群上的傅里叶分析》, Interscience, 纽约（1962）。[18] L. Sucheston, 《Banach 极限》, 《美国数学月刊》74（1967）, 308-311。[19] K. Yosida, 《泛函分析》, Springer, 柏林（1965）。

Faculty of Liberal Arts, Tsuru University, Tsuru-shi, Yamanashi-ken 402-8555, Japan电子邮件地址：tk-waseda@ruri.waseda.jp