arXiv:2301.01678v1 [physics.flu-dyn] 4 Jan 2023

用于隐式大涡模拟的高阶投影型迎风方法

PHILIP L. LED ERER、XAVER MOOSLECHNER 和 JOAC HIM SCHÖBERL

摘要。我们评估了三种基于高阶间断Galerkin方法的不同方法模拟欠分辨湍流的能力。我们考察了质量守恒混合应力方法作为一种结构解析型大涡模拟求解器的性能。通过数值结果，比较了变分多尺度模型与无模型方法或隐式模型方法。此外，我们提出了一种用于壁面约束流动的湍流建模新方法。这项新技术能够更准确地表征近壁区域中的实际亚格子尺度，并在高度欠分辨的流动问题中取得了良好的结果。本文选取湍流通道流和周期丘陵流问题作为数值模拟的基准算例。

1. 引言

1.1. **研究动机**。 通过直接数值模拟（DNS），可以完整捕捉高雷诺数流动中涵盖的广泛时间与长度尺度。采用这种方法模拟湍流的计算成本极高，需要解析出现的最小尺度，因此会产生规模异常庞大的待求解问题。克服这一成本高昂方法的最常见替代方案是大涡模拟（LES） [1]。在 LES 中，只解析流动的大尺度结构，并使用显式亚格子尺度（SGS）模型对精细尺度部分进行建模。如今，LES 模拟已成为计算工程中成熟的领域，至今已开发出许多不同的 SGS 模型。另一种用于解析湍流尺度的改进方法是变分多尺度模拟（VMS）[2]。VMS 方法将湍流流动状态划分为大尺度和小尺度已解析尺度，从而能够对二者采取不同的处理方式。

间断伽辽金（DG）离散方法的引入，在复杂湍流模拟领域受到广泛关注。针对用于大涡模拟的 DG 方法，已有大量研究 [3–10]。由于耗散较低（仅高阶项存在耗散），且具有很强的稳健性和灵活性，DG 方法通常非常适合大涡模拟的多尺度特性。这些特点促成了无模型或隐式大涡模拟（ILES）的发展。传统大涡模拟方法高度依赖亚格子尺度模型的精度，而 ILES（亦称欠分辨直接数值模拟）则利用离散化本身固有的耗散机制作为模型。因此，由于模拟中未引入显式模型，ILES 具有多项优势，并已成功应用于 [3, 11–14]。

在本研究中，我们关注于比较变分多尺度与隐式大涡模拟在不同有壁湍流场景下的表现。我们的主要目标是介绍并分析一种

全新的隐式大涡模拟方法，该方法进一步增强了基础离散格式内置的大涡模拟能力。这种改进后的 ILES 方法采用基于投影的上风项作为对流稳定化手段。

我们考虑了 [15] 中提出的质量守恒混合应力方法（MCS方法），用于求解纳维–斯托克斯方程。该方法可视为 H（div）-协调混合间断伽辽金（HDG）方法的混合形式，该方法具有严格无散性质，见 [16]。与内罚混合间断伽辽金方法相比，MCS方法产生的数值耗散更少（仅为保证底层斯托克斯系统的 inf-sup 稳定性所需的最小耗散），因此非常适合作为基准离散方法。数值结果采用开源有限元框架 NGSolve/Netgen [17]获得。

1.2. **概述**。 本文其余部分的组织结构如下。第 2 节介绍空间离散和时间离散。第 3 节推导不同的建模方法。第 4 节讨论湍流通道流问题，第 5 节讨论周期丘陵流问题。分别研究这些方法对两个流动问题的网格收敛性和精度。最后，第 6 节总结本文的观察结果并给出结论。

1.3. **数学模型**。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个连通有界的利普希茨区域，$[0, T_e]$ 是终止时间为 $T_e \in \mathbb{R}^+$ 的给定时间区间。我们将速度场 $\underline{u}$ 和压力 p 视为不可压缩纳维–斯托克斯方程的解

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \qquad \text{in } \Omega \times [0, T_e], \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} - 2\nu \nabla \cdot \epsilon(\underline{u}) + \nabla p = \underline{f} \qquad \text{in } \Omega \times [0, T_e], \tag{1b}$$

$$\underline{u} = \underline{u}_0 \qquad \text{in } \Omega, t = 0, \tag{1c}$$

$$\underline{u} = 0 \qquad \text{in } \partial\Omega_D \times [0, T_e], \tag{1d}$$

其中 $\underline{u}_0$ 是相容的初始条件。边界分为两部分，使得 $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_P$。在 $\partial\Omega_D$ 上，我们施加零无滑移（狄利克雷）值 $\underline{u} = 0$；在 $\partial\Omega_P$ 上，我们采用周期性边界条件。此外，记 $\underline{f}$为（足够光滑的）外力，$\nu \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ 为常数运动黏度。在 (1b) 中，项 $\epsilon(\underline{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$ 是（对称）应变率张量，而 $\nabla \cdot \epsilon(\underline{u})$ 表示对 $\epsilon(\underline{u})$ 的每一行求散度。

2. 湍流不可压缩流求解器

2.1. **记号**。 令 $\mathcal{T}_h$ 为将区域 Ω 剖分为六面体单元的剖分。骨架 $\mathcal{F}_h$ 表示所有单元面的集合，该集合被划分为两组：$\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^I \cup \mathcal{F}_h^D$，其中 $\mathcal{F}_h^I$ 表示所有内部面和周期面，而$\mathcal{F}_h^D$表示狄利克雷边界上的面。现在令 $\underline{\phi}$ 为一个逐单元光滑的向量值函数。对于任意具有公共面 $E \in \mathcal{F}_h$的单元 T、$T' \in \mathcal{T}_h$，令 $\underline{\phi}^T = \underline{\phi}|_T$和 $\underline{\phi}^{T'} = \underline{\phi}|_{T'}$。我们将跳跃 $[\![\cdot]\!]$和平均 $\langle\cdot\rangle$算子定义为

$$[\![\underline{\phi}]\!] = \underline{\phi}^T|_E - \underline{\phi}^{T'}|_E, \quad \text{and} \quad \langle\underline{\phi}\rangle = \frac{1}{2}(\underline{\phi}^T|_E + \underline{\phi}^{T'}|_E).$$

在单元边界 ∂T 上，切向迹算子定义为

$$\underline{\phi}_t = \underline{\phi} - (\underline{\phi} \cdot \underline{n})\underline{n},$$

其中， $\underline{n}$ 是外指法向量。此外，我们为光滑矩阵值函数 $\underline{\phi}$ 引入法向-法向迹算子和法向-切向迹算子，定义如下：

$$\underline{\underline{\phi}}_{nn} = (\underline{\underline{\phi}}\underline{n}) \cdot \underline{n}, \quad \text{and} \quad \underline{\underline{\phi}}_{nt} = \underline{\underline{\phi}}\underline{n} - (\underline{\underline{\phi}}_{nn})\underline{n}.$$

矩阵的 skew(·) 算子和偏差部分定义如下：

$$\operatorname{skew}(\underline{\underline{\phi}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\phi}} - \underline{\underline{\phi}}^T), \quad \text{and} \quad \operatorname{dev}(\underline{\underline{\phi}}) = \underline{\underline{\phi}} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\underline{\underline{\phi}})I,$$

其中，tr(·) 表示矩阵迹， I 是单位矩阵。

在本文中，我们将值域纳入空间的记号。因此， $H^1(\Omega\ \mathbb{R})$ 表示标准的一阶Sobole夫空间，而 $H^1(\Omega\ \mathbb{R}^3)$ 表示其向量值版本。Sobole夫空间 $H(\mathrm{div})$ 定义为

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \{\underline{v} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) : \nabla \cdot \underline{v} \in L^2(\Omega, \mathbb{R})\}.$$

请注意，对于上述所有 Sobole夫空间，我们用下标 0 表示相应的连续迹在 $\partial\Omega_D$ 上为零，即 $H_0(\mathrm{div},\Omega)$ 表示所有满足 $v_n = 0$ on $\partial\Omega_D$ 的函数 $v \in H(\mathrm{div},\Omega)$。对于 $H(\mathrm{div},\Omega)$ 中函数的协调（即法向连续）近似，我们考虑 Raviart- Thomas 有限元空间 $RT^k(\mathcal{T}_h)$，参见 [18, 19], 其中 k 为给定阶数。此外，我们用 $\mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h,\mathbb{R})$ 表示定义在 $\mathcal{T}_h$ 上、总阶数小于或等于 k 的所有逐单元多项式所构成的空间。

2.2. 离散模型——MCS方法。 本文考虑一种所谓的质量守恒混合应力（MCS）方法的变体，其源自 [15, 20, 21]。下文将讨论其基本思想，并给出该方法及所用有限元空间的精确定义。其主要思想是将不可压Navier-Stokes方程改写为包含（伪）应力和旋转的形式。为此，令 $\omega(\underline{u}) = \operatorname{skew}(\nabla\underline{u})$ 为旋转率张量，则有

$$\nabla\underline{u} = \epsilon(\underline{u}) + \omega(\underline{u}).$$

引入辅助变量 $\underline{\gamma} = \omega(\underline{u})$ 和 $\underline{\sigma} = 2\nu\epsilon(\underline{u})$，我们可以将原系统（1）改写为

$$-\frac{1}{2\nu}\underline{\underline{\sigma}} + \nabla\underline{u} - \underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{0}} \qquad \text{in } \Omega \times [0, T_e], \tag{2a}$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} + \nabla p = \underline{f} \qquad \text{in } \Omega \times [0, T_e], \tag{2b}$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \qquad \text{in } \Omega \times [0, T_e], \tag{2c}$$

$$\operatorname{skew}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \qquad \text{in } \Omega \times [0, T_e], \tag{2d}$$

$$\underline{u} = \underline{u}_0 \qquad \text{in } \Omega, t = 0, \tag{2e}$$

$$\underline{u} = 0 \qquad \text{in } \partial\Omega_W \times [0, T_e]. \tag{2f}$$

请注意，约束 $\operatorname{skew}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ 保证了 $\underline{\underline{\sigma}}$的对称性，并将在下文用于对近似应力也施加弱对称性。这种方法非常

常用于弹性力学的混合有限元方法中，例如参见 [22–24] 以及近期的 [25]。此外，值得注意的是

$$\sigma = \operatorname{dev}(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \text{since} \quad \operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = \nabla \cdot u = 0. \tag{3}$$

在 [20] 该作者展示了如何通过使用一个 $H(\mathrm{div})$-相容的速度近似空间，对（2）中的底层斯托克斯系统进行离散化。我们采用类似的方法，选择如下速度和压力的有限元空间：

$$V_h = RT^k(\mathcal{T}_h) \cap H_0(\mathrm{div}, \Omega), \quad \text{and} \quad Q_h = \mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h) \subset L^2(\Omega). \tag{4}$$

注意，我们满足相容性（或核保持，参见 [19]）条件

$$\nabla \cdot V_h = Q_h. \tag{5}$$

接下来需要定义用于近似应力/应变和旋转的空间。为说明我们的选择，我们考虑在连续层次上，公式（2b）的变分形式在检验函数 $\underline{v} \in H_0(\mathrm{div}, \Omega)$下的适定性。若 $\nabla \cdot \underline{\sigma}$属于 $L^2(\Omega\ \mathbb{R}^3)$，则（2b）中的第二项可写为$(\nabla \cdot \underline{\sigma}, \underline{v})$。遗憾的是，这并不一能得到稳定形式。另一种做法是降低对应力散度的正则性要求，只要求 $\nabla \cdot \underline{\sigma}$能在 $\underline{v}$上连续作用（即作为一个泛函）。这样，第二项可写为 $\langle \nabla \cdot \underline{\sigma}, v \rangle$，其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示对偶配对。事实上，这样可以证明稳定性（参见 [20]），其中 $\underline{\sigma}$ 属于

$$H(\operatorname{curl}\operatorname{div}, \Omega) = \{\underline{\underline{\tau}} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3\times 3}) : \operatorname{tr}(\underline{\underline{\tau}}) = 0, \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \in H_0(\mathrm{div}, \Omega)^*\}.$$

这里 $H_0(\mathrm{div}, \Omega)^*$ 表示对偶空间。无迹条件 $\operatorname{tr}(\underline{\underline{\tau}}) = 0$ 的依据是（3）。为了近似 $H(\mathrm{curldiv}, \Omega)$ 中的函数，随后证明离散函数需要满足法向 - 切向连续性。这促使我们定义有限元空间

$$\{\underline{\underline{\tau}}_h \in \mathbb{P}^{k+1}(\mathcal{T}_h, \mathbb{R}^{3\times 3}) : \operatorname{tr}(\underline{\underline{\tau}}_h) = 0, (\underline{\underline{\tau}}_h)_{nt} \in \mathbb{P}^k(E, \mathbb{R}^3), [\![(\underline{\underline{\tau}}_h)_{nt}]\!] = 0 \,\forall\, E \in \mathcal{F}_h^I\}.$$

这表示由逐单元矩阵迹无迹的、阶数为 $k+1$ 的矩阵值多项式构成的空间，其法向-切向迹（在面上）是阶数为 k 的向量值多项式，且其法向-切向跳跃为零。注意，额外的法向-切向泡函数，即阶数为 $k+1$、但法向-切向迹阶数为 k 的多项式，仅用于保证该方法的稳定性；其证明与 [15, 21] 中的方法相同。与上述将法向-切向连续性纳入空间不同，我们使用一个额外的混合变量（位于骨架 $\mathcal{F}_h$ 上），将其作为拉格朗日乘子，见 [26]。这样做的优点是，应力近似的（局部逐单元）自由度相互解耦，因此可以在局部消去（见 [27] 第 4.2 节）。综上，得到如下定义：

$$\Sigma_h = \{\underline{\underline{\tau}}_h \in \mathbb{P}^{k+1}(\mathcal{T}_h, \mathbb{R}^{3\times 3}) : \operatorname{tr}(\underline{\underline{\tau}}_h) = 0, (\underline{\underline{\tau}}_h)_{nt} \in \mathbb{P}^k(E, \mathbb{R}^3)\ \forall E \in \mathcal{F}_h^I\},$$
$$\hat{V}_h = \{\hat{\underline{v}}_h \in \mathbb{P}^k(\mathcal{F}_h, \mathbb{R}^3) : \hat{\underline{v}}_h \cdot \underline{n} = 0\ \forall E \in \mathcal{F}_h,\ \hat{\underline{v}} = 0\ \forall E \in \mathcal{F}_h^D\}.$$

需要注意的是，根据上述选择，来自“分片”应力空间 Σ_h 的 $\hat{}$ 函数的法向-切向跳跃属于 V_h，即

$$[\![(\underline{\underline{\tau}}_h)_{nt}]\!] \in \hat{V}_h \quad \forall \tau_h \in \Sigma_h, \forall E \in \mathcal{F}_h. \tag{6}$$

此外还需注意，符号 $\hat{}\, V_h$ 用于表示拉格朗日乘子空间（用于纳入应力近似的法向-切向连续性），其选取为$\hat{}$，因为 V_h 中的函数对应于（精确）速度解的切向迹的近似，参见 [26], 或 [19]中的第 7.2.2 节。剩下的工作是定义一个空间来近似 $\underline{\gamma}$，该空间定义如下

$$W_h = \mathbb{P}^k_{skew}(\mathcal{T}_h, \mathbb{R}^{3\times 3}) = \{\underline{\underline{\eta}} \in \mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h, \mathbb{R}^{3\times 3}) : (\underline{\underline{\eta}} + \underline{\underline{\eta}}^T) = 0 \,\forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

采用弱施加对称性的（半）离散混合 MCS 方法可表述如下：求解 $(\underline{\underline{\sigma}}_h, \underline{u}_h, \hat{}\,\underline{u}_h, \underline{\underline{\gamma}}_h, p_h) \in \Sigma_h \times V_h \times \hat{}\,V_h \times W_h \times Q_h$，使得，

$$\text{(7a)}\quad a_h(\underline{\underline{\sigma}}_h, \underline{\underline{\tau}}_h) + b_{2h}(\underline{\underline{\tau}}_h, (\underline{u}_h, \hat{\underline{u}}_h, \underline{\underline{\gamma}}_h)) = 0 \qquad \forall \underline{\underline{\tau}}_h \in \Sigma_h,$$

$$\text{(7b)}\quad (\frac{\partial \underline{u}_h}{\partial t}\underline{v}_h) + b_{2h}(\underline{\underline{\sigma}}_h, (\underline{v}_h, \hat{\underline{v}}_h\ \underline{\underline{\eta}}_h)) + b_{1h}(\underline{v}_h, p_h) + c_h(\underline{u}_h, \underline{u}_h, \underline{v}_h) = (\underline{f}, \underline{v}_h) \quad \forall (\underline{v}_h, \hat{\underline{v}}_h, \underline{\underline{\eta}}_h) \in V_h \times \hat{V}_h \times W_h,$$

$$\text{(7c)}\quad b_{1h}(\underline{u}_h, q_h) = 0 \qquad \forall q_h \in Q_h.$$

双线性形式定义如下。包含应力变量的对称形式以及不可压缩性约束分别为

$$a_h(\underline{\underline{\sigma}}_h, \underline{\underline{\tau}}_h) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T -\frac{1}{2\nu}\,\underline{\underline{\sigma}}_h : \underline{\underline{\tau}}_h \, d\underline{x},$$

$$b_{1h}(\underline{u}_h, q_h) = -\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T (\nabla\cdot\underline{u}_h) q_h \, d\underline{x} = -(\nabla\cdot\underline{u}_h, q_h),$$

分别地，最后一个方程成立是因为 $\underline{u}_h$ 法向连续。注意，由于 (5)，方程 (7c) 对离散速度解 $\underline{u}_h$施加了精确的无散约束。另一个约束为

$$\text{(8)}\quad b_{2h}(\underline{\underline{\sigma}}_h, (\underline{v}_h, \hat{\underline{v}}_h, \underline{\underline{\eta}}_h)) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \Big(-\int_T (\nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}_h)\cdot\underline{v}_h \, d\underline{x} + \int_{\partial T} (\underline{\underline{\sigma}}_h)_{nn}(\underline{v}_h\cdot\underline{n})\, d\underline{s} - \int_T \underline{\underline{\sigma}}_h : \underline{\underline{\eta}}_h \, d\underline{x} + \int_{\partial T} (\underline{\underline{\sigma}}_h)_{nt}\cdot\hat{\underline{v}}_h \, d\underline{s}\Big).$$

前两项可以解释为离散分布散度（另请参见[21]中的说明和方程 (4.2)），即项 $\langle\nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}$的离散版本；$\underline{v}\rangle$ 如上所述，第三个积分强制实现弱对称性。最后一个积分强制实现法向-切向连续性，因为由式 (7b) 可得

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\underline{\underline{\sigma}}_h)_{nt}\cdot\hat{\underline{v}}_h \, d\underline{s} = \sum_{F\in\mathcal{F}_h} \int_F [\![(\underline{\underline{\sigma}}_h)_{nt}]\!]\cdot\hat{\underline{v}}_h \, d\underline{s} = 0 \quad \forall \hat{\underline{v}}_h \in \hat{V}_h,$$

因此，根据（6），我们有 $[\![\,(\underline{\underline{\sigma}}_h)_{nt}]\!] = 0$。

非线性对流项与 [16] 中的相同，并表示为

$$
\begin{aligned}
c_h(\underline{u}_h, \underline{u}_h, \underline{v}_h) = &\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\nabla \underline{u}_h \cdot \underline{u}_h) \cdot \underline{v}_h \, d\underline{x} \\
&+ \sum_{E \in \mathcal{F}_h} \Bigg(- \int_E (\underline{u}_h \cdot \underline{n}) [\![\underline{u}_h]\!] \cdot \langle \underline{v}_h \rangle \, d\underline{s} \\
&+ \frac{1}{2} (\underline{u}_h \cdot \underline{n}) [\![\underline{u}_h]\!] \cdot [\![\underline{v}_h]\!] \, d\underline{s} \Bigg).
\end{aligned} \tag{9}
$$

最后一个积分产生了标准的（DG）上风稳定化，参见例如[28]。如果省略该项，则没有对流稳定化，即采用中心通量。

在（7）中，狄利克雷无滑移条件（2）被分解为切向部分和法向部分。其中，$\underline{u}_h \cdot n = 0$ 被纳入空间 V_h中，参见（4），而消失的ˆ切向迹被纳入 V_h中的面变量。关于边界条件（包括诺伊曼条件和混合边界条件）的详细讨论见[20]第 4 节。

为推导全离散系统，我们采用隐式显式（IMEX）方法中的二阶龙格–库塔格式 ARS(2,2,2)，该方法由 [29] 提出，并且也被用于 [16]。其中，系统的刚性部分，即包含双线性型 a_h（·，·）和 b_{2h}（·，·）的扩散项，以及与不可压缩性约束相关的项 b_{1h}（·，·），均采用隐式处理，而对流项始终采用显式处理。需要注意的是，这是保持离散速度解的精确无散性质所必需的。这种方法的一个重要优势是不需要非线性求解器。相反，我们只需组装并对7）中对应于线性部分的矩阵进行一次分解，从而实现非常高效的实现。正如上文所述，这种消元只有得益于通过ˆ空间 V_h 对系统进行杂交化才成为可能。

最后需要指出的是，所有双线性型均采用数值求积，从而实现精确积分。这对于湍流流动状态下该方法的稳定性至关重要。对于 $a_h(\cdot,\cdot)$，我们在每个方向上使用 k 个高斯求积点；对于 $b_{1h}(\cdot,\cdot)$ 和 $b_{2h}(\cdot,\cdot)$，$k+1$ 个点已足够；而对流项 $\underline{c_h(\cdot,\cdot,\cdot)}$ 则需要 $^3{}_{(k+1)\ 2}$ 个点。

3. 方法论

接下来，我们将介绍本文考虑的三种不同方法。首先，我们讨论经典变分多尺度方法与上一节介绍的 MCS 离散相结合的扩展。然后，我们考虑隐式大涡模拟方法（即不使用显式湍流模型），最后介绍一种新颖的思路，可将其理解为应用于隐式大涡模拟设置内在稳定化机制的 VMS 方法。

3.1. 变分多尺度。 自 [2], 变分多尺度有限元方法提出以来，它已应用于计算流体力学中的若干问题。该框架最初是为解决高雷诺数流动中稳定性无法得到保证的问题而开发的。其起源可追溯到大涡模拟（LES）的提出；大涡模拟旨在解析大尺度结构，并对湍流中无法解析的部分进行建模。这包括

解析大尺度结构，并对湍流中无法解析的部分进行建模。有时，采用滤波纳维–斯托克斯方程后，新出现的亚格子应力张量项会带来闭合问题。这个数学项表示缺失的未解析尺度对已解析尺度的影响。布辛涅斯克假设能够解决闭合问题，并由此引入最常见的一类模型，即涡黏性模型。建模得到的亚格子应力张量在系统中纯粹起到额外耗散机制的作用。

经典的显式大涡模拟框架存在一些缺陷，例如交换误差，以及对无界区域中大涡模拟理论的限制。[1]一个显著的缺点是，某些显式湍流模型可能会在层流状态下产生非物理耗散，此时亚格子尺度并不存在。此外，未解析尺度的建模影响被纳入已解析尺度的整个范围，而将其作用添加到最大的尺度结构上，可能导致流动出现不理想的行为。因此，变分多尺度方法为标准的大涡模拟湍流建模技术提供了一种替代方案。它能够将流动尺度范围分离开来，从而使数值格式可用于不同的尺度子区间。变分多尺度方法的核心思想是，仅将非解析结构的影响施加于较小的已解析尺度，从而使较大的已解析涡不受影响。尽管如此，由于所有尺度之间存在内在耦合，模型仍会间接影响较大范围的尺度。变分多尺度方法避免了传统大涡模拟的许多缺陷（例如交换误差）。大涡模拟结果往往显示出过强的稳定化行为，而变分多尺度方法能够对高频模态实现更精细的稳定化效果。

文献中已提出多种 VMS 类型的实现。本文考虑 [30, 31] 提出的三尺度投影变分多尺度方法，并将在下文进行说明。

为说明基本概念，我们考虑一个标准的 H^1相容离散速度空间 V_h ，随后将说明如何把这些思想扩展到上一节介绍的 MCS方法。其思路是将速度空间拆分为（虚构的）空间，分别用于近似大尺度、小尺度已解析尺度和未解析尺度，即我们考虑

$$V_h = V_h^L \oplus V_h^S \oplus V_h^U.$$

应用这一分解后，我们可以将解函数和测试函数写为

$$\underline{u}_h = \underline{u}_h^L + \underline{u}_h^S + \underline{u}_h^U, \quad \text{and} \quad \underline{v}_h = \underline{v}_h^L + \underline{v}_h^S + \underline{v}_h^U.$$

根据[31],，我们引入一种额外的黏度，称为涡黏度，它出现在与 $\underline{u}_h^S$ 相关的扩散项中，该项位于动量方程内。更具体地说，基于上述空间 V_h 对动量方程（1b）进行有限元近似时，会包含以下附加项

$$(2\nu_t \epsilon(\underline{u}_h^S), \epsilon(\underline{v}_h^S)), \tag{10}$$

该模型描述未解析尺度对较小已解析尺度的影响，并忽略较大已解析结构的直接作用。当然，还需要进一步建模，以得出 ν_t的恰当定义，通常通过亚格子尺度模型实现。由于不希望对 V_h 进行直接分解，因此在考虑 VMS 方法时，一个关键问题是如何纳入（10）。在本文中，我们采用粗空间投影方法，其中（10）写作

$$\big(2\nu_t \epsilon(\underline{u}_h^S), \epsilon(\underline{v}_h^S))\big) \cong \big(2\nu_t \epsilon(\underline{u}_h), \epsilon(\underline{v}_h)\big) - \big(2\nu_t \Pi_{L_h} \epsilon(\underline{u}_h), \epsilon(\underline{v}_h)\big), \tag{11}$$

其中投影算子为 Π_{L_h}。请注意，右侧只包含速度 $\underline{u}_h$，不包含 $\underline{u}_h^S$。Π_{L_h} 的一种常见选择是将 L^2投影到空间 L_h，定义为

$$L_h = \mathbb{P}^m(\mathcal{T}_h, \mathbb{R}^{3\times 3}) \cap L \quad \text{with} \quad L = \{\underline{\underline{l}} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^{3\times 3}) : \underline{\underline{l}} = \underline{\underline{l}}^T\},$$

其可表示为给定固定阶数的逐元素对称矩阵值多项式 m。与传统大涡模拟相比，VMS 方法对亚格子尺度模型（用于定义 ν_t）的选择不那么敏感。这是因为模型只影响可通过空间 m 的阶数 L_h加以控制的部分尺度范围。一方面，如果 $L_h = \{0\}$（即（11）中的最后一项消失），则可恢复经典的大涡模拟模型。另一方面，如果 m 选择足够高，使得$\{\epsilon(\underline{v}_h) : \underline{v}_h \in V^h\} \subset L_h$，则会关闭模型黏度（（11）右端为零），从而重新得到无模型方法。总而言之，较低的阶数 m 会使湍流模型的影响更大，而较高的阶数 m则意味着完全不使用模型。

下面我们讨论如何将变分多尺度方法扩展到上一章介绍的 MCS方法。为此，令 V_h 仍为法向连续的 Raviart–Thomas 空间，见（4）。主要思路是在辅助变量 $\underline{\sigma}$ 的原始定义（2a）中就应用（11）中的基于投影的分解。定义

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\big((\nu + \nu_t)\epsilon(\underline{u}) - \nu_t \underline{\underline{g}}\big),$$

其中 g 是某个附加应变张量。对上述方程重新整理可得

$$\epsilon(\underline{u}) = \frac{1}{2(\nu + \nu_t)}\big(\underline{\underline{\sigma}} + 2\nu_t \underline{\underline{g}}\big), \tag{12}$$

因此，取测试函数 $\underline{\tau}$ 进行测试，并在区域上积分，可得

$$\int_\Omega \frac{1}{2(\nu + \nu_t)}(\underline{\underline{\sigma}} + 2\nu_t \underline{\underline{g}}) : \underline{\underline{\tau}}\, d\underline{x} - \int_\Omega \epsilon(\underline{u}) : \underline{\underline{\tau}}\, d\underline{x} = 0. \tag{13}$$

此外（受（11）中的发现启发），我们定义 g 为 L^2 在 L 中的投影

$$\int_\Omega (\epsilon(\underline{u}) - \underline{\underline{g}}) : \underline{\underline{l}}\, d\underline{x} = 0 \quad \forall \underline{\underline{l}} \in L. \tag{14}$$

注意，这些方程仍是在连续层次上表述的。为推导离散方法，我们继续如下操作。首先，将（12）代入（14），并在 Σ_h 和 L_h中用离散对应函数替换连续函数，得到

$$\sum_{T\in\mathcal{T}} \left(\int_T \frac{1}{2(\nu + \nu_t)}\big(\underline{\underline{\sigma}}_h + 2\nu_t \underline{\underline{g}}_h\big) : (2\nu_t \underline{\underline{l}}_h)\, d\underline{x} - \int_T \underline{\underline{g}}_h : (2\nu_t \underline{\underline{l}}_h)\, d\underline{x} \right) = 0.$$

因此，加入（13）的离散形式，并再次以（离散的）分布方式解释最后一个积分，详见（8）下文的讨论，我们结合双线性形式得到

$$\begin{aligned} a_h^{VMS}((\underline{\underline{\sigma}}_h, \underline{\underline{g}}_h), (\underline{\underline{\tau}}_h, \underline{\underline{l}}_h)) = \sum_{T\in\mathcal{T}} \Bigg(& \int_T \frac{1}{2(\nu + \nu_t)}\big(\underline{\underline{\sigma}}_h + 2\nu_t \underline{\underline{g}}_h\big) : (\underline{\underline{\tau}}_h + 2\nu_t \underline{\underline{l}}_h)\, d\underline{x} \\ & - \int_T \underline{\underline{g}}_h : (2\nu_t \underline{\underline{l}}_h)\, d\underline{x} \Bigg). \end{aligned}$$

以下 MCS VMS公式:
求 $(\underline{\underline{\sigma}}_h, \underline{\underline{g}}_h, \underline{u}_h, \hat{\underline{u}}_h, \underline{\underline{\gamma}}_h, p_h) \in \Sigma_h \times L_h \times V_h \times \hat{V}_h \times W_h \times Q_h$，使得:

$$
\begin{aligned}
&a_h^{VMS}((\underline{\underline{\sigma}}_h, \underline{\underline{g}}_h), (\underline{\underline{\tau}}_h, \underline{\underline{l}}_h)) \\
&\quad + b_{2h}(\underline{\underline{\tau}}_h, (\underline{u}_h, \hat{\underline{u}}_h, \underline{\underline{\gamma}}_h)) = 0 \qquad \forall (\underline{\underline{\tau}}_h, \underline{\underline{l}}_h) \in \Sigma_h \times L_h, \\
&(\frac{\partial \underline{u}_h}{\partial t}, \underline{v}_h) + b_{2h}(\underline{\underline{\sigma}}_h, (\underline{v}_h, \hat{\underline{v}}_h, \underline{\underline{\eta}}_h)) \\
&\quad + b_{1h}(\underline{v}_h, p_h) + c_h(\underline{u}_h, \underline{u}_h, \underline{v}_h) = (\underline{f}, \underline{v}_h) \quad \forall (\underline{v}_h, \hat{\underline{v}}_h, \underline{\underline{\gamma}}_h) \in V_h \times \hat{V}_h \times W_h, \\
&\qquad b_{1h}(\underline{u}_h, q_h) = 0 \qquad \forall q_h \in Q_h.
\end{aligned}
$$

本研究采用[32] 中的 WALE湍流模型来计算湍流黏度 ν_t。WALE 模型基于速度梯度张量的平方，同时考虑了应力张量和旋转张量。该模型考虑了近壁湍流，且无需使用任何动态模型或阻尼函数。为此，我们定义

$$
\nu_t = (C_w \Delta)^2 \frac{S^2(\underline{u}_h)^{\frac{3}{2}}}{\epsilon^2(\underline{u}_h)^{\frac{5}{2}} + S^2(\underline{u}_h)^{\frac{5}{4}}},
$$

其中 $\epsilon^2(\underline{u}_h) = \epsilon(\underline{u}_h) : \epsilon(\underline{u}_h)$，且

$$
\begin{aligned}
S^2(\underline{u}_h) = &\frac{1}{6}\left(\epsilon^2(\underline{u}_h)\epsilon^2(\underline{u}_h) + \omega^2(\underline{u}_h)\omega^2(\underline{u}_h)\right) + \frac{2}{3}\epsilon^2(\underline{u}_h)\omega^2(\underline{u}_h) \\
&+ 2\,\mathrm{tr}\left(\epsilon(\underline{u}_h)\epsilon(\underline{u}_h)\omega(\underline{u}_h)\omega(\underline{u}_h)\right).
\end{aligned}
$$

其中，$C_w = 0.5$是一个模型常数，长度尺度定义为 $\Delta = \frac{\sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z}}{k+1}$。

关于 MCS VMS 方法的数值求积，为了实现精确积分，$a_h^{VMS}(\cdot,\cdot)$ 的多项式阶数必须提高。由于更新矩阵不再具有恒定系数（ν_t 随时间变化），我们会在给定的（固定）时间区间后重新计算相应的系统矩阵。这大幅降低了计算量，并且对模拟的影响已证明可以忽略。为简单起见，定义尺度分离的 L_h空间，其多项式阶数在每个单元中均设为相同。

3.2. **隐式大涡模拟**。 如第 1 节所述，湍流建模面临的普遍问题是如何以最佳方式处理未解析子网格尺度。传统的大涡模拟方法表明，增加耗散可确保稳定性并获得适当的结果。引入更复杂的亚格子尺度模型，可以避免大涡模拟的许多不足，并提高复杂流动计算的精度。变分多尺度方法对所选湍流模型的依赖性不强，因为其内在的尺度分离克服了经典大涡模拟的许多缺点，并减少了系统中额外模型耗散的总量。

DG 离散方法极具灵活性和稳定性，因此稳定化要求，即 LES/VMS 中所使用的湍流模型，已变得不再必要。由此，隐式大涡模拟方法更具吸引力，因为它避免了经典湍流建模在理论和计算方面的复杂性。DG公式通常通过使用迎风黎曼通量来确保稳定性，而迎风黎曼通量会通过额外的跳跃项引入数值耗散，正如对流三线性形式的定义（9）中所示。人们已经认识到，这是在欠解析流动状态下提供稳定性的主要来源。这里的想法是

与层流相比，在欠分辨湍流状态下，跳跃项会显著增大，从而引入额外的（局部）扩散。对 [33] 进行的线性色散-扩散分析证明了一般 DG 方法用于欠分辨湍流模拟的能力。

对于 MCS ILES，采用第（2.2）节中的标准公式。

3.3. **基于高阶投影的上风 ILES**。对于欠解析程度很高的数值模拟，由于湍流边界层的存在，近壁区域会产生大量数值耗散。这种过度耗散并非获得稳定解所必需，而是源于方程（9）中的上风项。该项作为一种对流稳定化手段，用于稳定高涨落湍流。原则上，上风格式是一种各向异性机制；然而，流动的湍流混合特性使其作用趋于各向同性。如果流动中出现任何亚格子尺度，其未解析结构的影响会通过单元界面处的速度跳跃体现出来。请注意，我们采用的是 H（div）相容方法，因此只有速度的切向分量会在单元界面处产生跳跃。

如上所述，式（9）中的最后一个积分项（由所选的上风黎曼求解器产生）会产生与速度跳跃成正比的人工耗散。数值研究表明，通常近壁区域的速度跳跃幅度大于流动外部区域的跳跃幅度。这会导致壁面附近产生过多的额外耗散。为解决这一问题，我们针对隐式大涡模拟引入了所谓的高阶投影型迎风方法（HOPU），其思路与 VMS 方法类似。迎风项会对流动区域内整个范围的已解析尺度施加惩罚。通常，湍动能较高的区域会导致单元界面处的跳跃幅度增大。为避免影响这些区域中的大型已解析结构，我们对跳跃进行基于投影的尺度分离。这样，数值耗散就只作用于流场的高阶部分。具体而言，在式（ $L^2$9）的最后一个积分项中引入了一个额外的投影。因此，速度（跳跃）的低频部分不会纳入考虑。由此，低阶项采用中心通量的处理方式。

为此，我们定义一个额外的空间

$$\hat{V}_h^{proj} = \{\underline{v}_h \in \mathbb{P}^l(\mathcal{F}_h, \mathbb{R}^3) : \underline{v}_h \cdot \underline{n} = 0 \text{ on } E \in \mathcal{F}_h\},$$

其中多项式阶数的选择满足 $0 \leq l \leq k$。于是，对流项变为

$$\begin{aligned} c_h^{HOPU}(\underline{u}_h, \underline{u}_h, \underline{v}_h) = &\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T (\nabla \underline{u}_h \cdot \underline{u}_h) \cdot \underline{v}_h \, d\underline{x} \\ &+ \sum_{E\in\mathcal{F}_h} \Big(- \int_E (\underline{u}_h \cdot \underline{n}) [\![\underline{u}_h]\!] \cdot \langle \underline{v}_h \rangle \, d\underline{s} \\ &+ \int_E \frac{1}{2} (\underline{u}_h \cdot \underline{n}) (I - \Pi_{\hat{V}}^l) [\![\underline{u}_h]\!] \cdot [\![\underline{v}_h]\!] \, d\underline{s} \Big), \end{aligned}$$

其中 $\Pi_{\hat{V}}^l$： $L^2(E) \to \hat{V}_h^{proj}(E)$ 是逐面投影到 $\hat{V}_h^{proj}(E)$ 的 L^2-投影。

若 $l = 0$，我们几乎重新得到标准上风格式。在实践中，最低阶部分无关紧要，因此可以忽略。另一方面，若

$l = k$，则不会发生上风处理，我们将对流采用中心处理。原则上，速度跳跃较大的区域应采用更高阶的迎风投影。速度跳跃较小的区域受对流稳定化的影响不大，因此采用较低阶投影即可，因为随着其收敛，它会趋近于标准隐式大涡模拟方法。请注意，随着分辨率提高、覆盖的尺度范围扩大，迎风机制的影响会逐渐减弱，因为有 $\lim_{h\to 0} [\![\underline{u}_h]\!] = 0$。

确定 $\Pi^l_{\hat{V}}$ 中所采用的局部多项式阶数的一种简单方法，是将区域划分为两个区域。因此，我们使用 HOPU 处理近壁区域，而在外区则采用标准迎风技术。这种方法适用于简单几何形状，例如槽道流问题，但在更复杂的区域以及存在复杂流动现象时，预测则相当困难。简单壁面层无法解决的另一个问题是，外部流场中也可能出现湍动能较高的区域。

解决这一问题的一种更内在的方法，是采用自适应局部阶数版本。为此，我们定义一个参数，用于估计跨单元界面的跳跃幅度。高阶平均绝对值跳跃表示为

$$\eta = \frac{\int_E |(I - \Pi^l_{\hat{V}})[\![\underline{u}_h]\!]| \, d\underline{s}}{\int_E |\langle \underline{u}_h \rangle| \, d\underline{s}}.$$

基于这一局部（空间）平均值 η，我们便可以决定采用哪一个多项式阶数。我们选择满足以下条件的值 η_i 使得 $\eta_0 = 0 < \eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_{k+1} = 1$。然后，对于 $\eta_i < \eta_{loc} \leq \eta_{i+1}$，我们采用局部阶数 $l_{loc} = i$。在我们的计算中，局部多项式阶数 l_{loc} 在每个时间步之后确定，并进行适当调整。自适应 HOPU 变体将在第 4 节中作更详细的介绍。

4. 湍流通道流

三维湍流槽道流问题是常见的测试算例，用于评估能够解析流动结构的求解器处理壁面湍流现象的能力。对于所有流动数值模拟，我们考虑尺寸为 $\Omega = (0, 2\pi) \times (0, 2) \times (0, \pi)$ 的长方体区域。在 x 方向和 z 方向上采用周期性边界条件。对于 $y = 0$ 和 $y = 2$，我们采用无滑移边界条件，以模拟刚性壁面。采用时间步长 $\Delta t = 0.001$。网格在每个方向上均由 N 个六面体单元组成，因此每个区域内的单元总数为 N^3。此外，按照常见做法，网格沿 y 方向进行拉伸，以便通过拉伸函数解析边界层中的急剧速度梯度

$$\Phi(y) = \frac{\tanh(1.8(y-1))}{\tanh(1.8)} + 1.$$

对于所有槽道流计算，流动特性均由摩擦雷诺数 $Re_t = u_t L_y/\nu$ =392.24 指定，其中 $L_y = 1$ 为槽道高度的一半，$u_t = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$为摩擦速度，壁面剪切应力为 τ_w，流体密度为$\rho = 1$。

N/k	6/3	12/3	16/3	4/6	6/6	8/6
自由度·10^{-3}	43.2	331.0	775.7	63.6	208.1	485.6
Δy_W^+	11.8	4.3	3.0	13.6	6.7	4.3

表 1. 湍流通道流的模拟参数。

通常，流体运动由体力 $\underline{f} = (f_x, 0, 0)^T$驱动，而$f_x$ 会进行动态调整，以匹配目标摩擦雷诺数流动。然而，对于 MCS方法而言，这通常并非必要，因为它会在每个时间步自然保持壁面应力。通过选择测试函数$v_h = (1,0,0)^T \in V_h$，可以简单地证明

$$\sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T f_x \, d\underline{x} = \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_{\partial T\cap\partial\Omega_D} (\underline{\underline{\sigma}}_h)_{nt,x} \, d\underline{s},$$

其中$(\underline{\underline{\sigma}}_h)_{nt,\ x}$ 是向量 的 $(\underline{\underline{\sigma}}_h)_{nt}$分量。注意，由于式 (2a)，我们有 $(\underline{\underline{\sigma}}_h)_{nt,\ x} = \tau_w$，因此 MCS方法自然地保持壁面应力。因此，为了获得某个时间区间内的平均摩擦雷诺数，求解问题时无需使用任何体积平均速度或壁面应力控制机制，只需将 f_x 设为相应的值即可。

我们关注的相关量是三个速度分量 $\underline{u}_h = (u, v, w)^T$，为便于阅读，我们省略了 h 下标。流动达到统计稳态后，对速度解进行采样。我们主要关注速度的归一化平均值 $\overline{\underline{u}}^+ = \overline{\underline{u}_h}/u_t$ 以及归一化雷诺应力 $\overline{\underline{u}_i'\underline{u}_j'}^+ = (\overline{\underline{u}_i\underline{u}_j} - \overline{\underline{u}}_i\overline{\underline{u}}_j)/u_t^2$，其中 $\underline{u}_i$，$i = 1.....3$ 是 $\underline{u}_h$ 的速度分量。平均算子 $(*)$ 包含对时间和齐次空间方向的平均。这样，这两个量都可以表示为关于 y 的函数。此外，还采用壁面单位 $y^+ = yu_t/\nu$。能谱 E^+ 通过对垂直于 y 的平面上的 $\underline{u}_h$ 进行离散傅里叶变换得到，并在时间上取平均，再用 u_t^2归一化。

4.1. **结果比较**。 我们通过将湍流通道流的统计量和谱量与 [34]中的直接数值模拟参考数据进行比较，来考察不同方法（ILES、VMS、HOPU）的准确性。我们选取了两种不同的多项式次数。数值模拟的参数见表 1。其中，Δy_W^+ 表示最近壁面单元的分辨率。全局耦合自由度（gDOF）定义为消去与变量 $\underline{\underline{\sigma}}_h$ 和 $\underline{\underline{\gamma}}_h$相关的局部自由度（静态凝聚）后，系统中保留的自由度数。需要指出的是，我们未将 VMS 额外的计算成本纳入考虑（由于涡黏度并非常数，矩阵需要进行多次分解），而是让每种方法都采用相同的网格和近似阶数进行比较。请注意，尽管这在准确性与效率的权衡方面有利于 VMS，但从下面的比较中看不出显著的改进。

总体而言，对于所有测试算例（见图 1、图 4 和表 2），我们观察到，随着空间分辨率的提高，结果会逐渐收敛至参考数据。值得注意的是，即使在高度欠分辨的设置下，也能对相关物理量作出有意义的预测。高阶算例 $k = 6$ 总体上表现更好

于低阶算例。这主要有两个原因。首先，如果比较自由度数量大致相同的低阶和高阶方法（因此低阶方法采用更高的空间分辨率），高阶模拟能够捕捉更广范围的精细尺度，即频率。其次，间断伽辽金方法内置的高阶耗散机制只会对高频模态产生耗散。尽管自由度数量大致相同，$k=3$算例通常会比 $k=6$ 算例在更大尺度上为该格式引入更多数值耗散。下文将更详细地讨论这些结果。

VMS 与隐式大涡模拟的比较：对于 VMS 计算，我们采用多项式阶数 $m=1$（对应 $k=3$）以及 $m=3$（对应 $k=6$），用于大尺度应变率张量空间 L_h。通过比较图1中的隐式大涡模拟和 VMS 数值模拟，我们发现 $N=\{12,16\}/k=3$ 与$N=\{6,8\}/k=6$ 算例所得数据大致相同。这主要是因为随着分辨率提高，涡黏度逐渐消失，因此 VMS 方法收敛至隐式大涡模拟。

$y^+<5$的黏性底层对于 $\overline{u}^+$ 而言，可由所有测试算例准确近似。在层流子区，模型不施加涡黏度。在对数层和外区（$y^+>40$），对于高度欠分辨的算例 $N=6/k=3$ 和 $N=4/k=6$，结果存在一些差异。在这两种设置下，VMS 数值模拟对所有量的预测结果都略差。此外，后一种方法会减少已解析湍流输运，总体上比隐式大涡模拟具有更强的阻尼作用。因此，缓冲层（$10<y^+<40$）未能得到良好分辨，并导致$\overline{u}^+$出现微小偏差。

HOPU 与隐式大涡模拟的比较：如第 3.3 节末尾所述，可以选择标准或自适应 HOPU 方法。为说明采用后者的理由，我们在图 2 中绘出了采用分辨率为 η的隐式大涡模拟方法求解槽道流问题时，平均值跳跃的绝对值 $N=6/k=3$。参数 η 经过时间平均，并沿 z方向平均后，在所有面片的中点处进行可视化。可以观察到，靠近下壁和上壁时，η 显著增大。这说明应采用自适应 HOPU 版本：靠近壁面处使用高阶投影，内部区域使用低阶投影。在图 3 中，我们再次绘出了 η，但采用了不同的视角，并且还沿 x方向取了平均值。图中给出了上述自适应 HOPU 方法（局部阶数限值的具体选择见下文）的结果，分辨率与之前相同 $N=6/k=3$（方块），并与之前的隐式大涡模拟结果（圆圈）进行比较。需要强调的是，使用 HOPU 时，η 仅表示平均跳跃中的高阶部分（$l\geq 0$），而对于标准隐式大涡模拟，$\Pi^l_{\hat{V}}$ 则表示完整的平均跳跃（$\Pi^l_{\hat{V}}$ 已被移除）。可以看出，两种近似在槽道内部区域的数值大致相同。由于自适应 HOPU 方法在槽道的这一区域采用低阶投影，因此这一结果符合预期。同样，由于靠近壁面处采用了高阶投影，我们观察到那里的 η 差异更大。这表明，对最高阶函数实施对流稳定化所带来的额外（数值）耗散，在槽道内部区域大致相同；而使用 HOPU 方法时，靠近壁面处的耗散有所降低。

为比较图中给出的速度分布和雷诺应力 4，我们选择了自适应 HOPU 方法，其限值为 $\eta=\{0.025,0.05,0.1\}$，适用于 $k=3$ 以及 $\eta=\{0.005,0.015,0.03,0.07,0.12,0.2\}$，适用于 $k=6$。

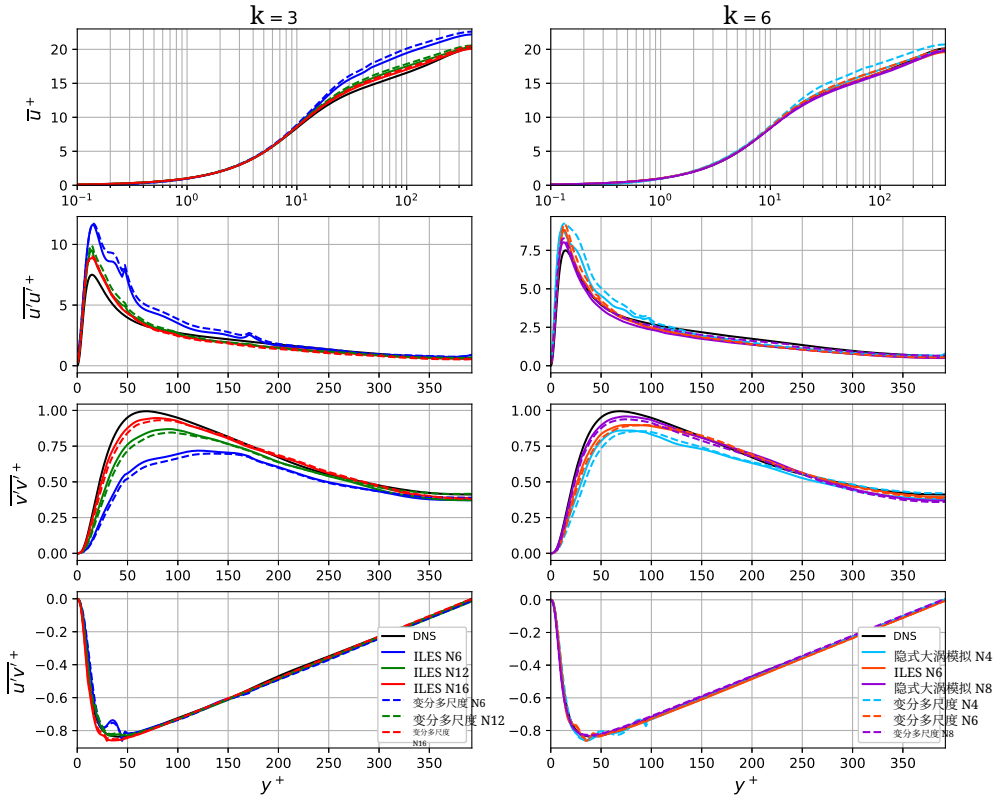

图 1. 归一化平均速度 $\overline{u}^+$ 和归一化雷诺应力 $\overline{u'u'}^+$、$\overline{v'v'}^+$ 和 $\overline{u'v'}^+$ 在 y^+上的分布。

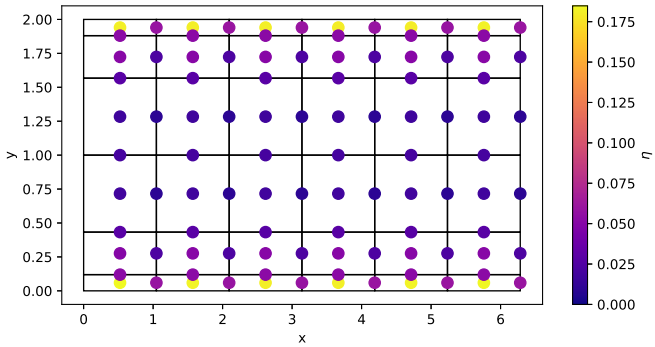

图 2. 槽道流问题的平均绝对值跳跃 η。

对于 $k = 3$ 算例，尤其是 $N = 6$，新方法显著改善了平均速度 $\overline{u}^+$。HOPU 版本能够解析缓冲区，因此对对数区和外部区域的速度场给出了更好的近似。$k = 6$ 测试算例没有显示出显著差异

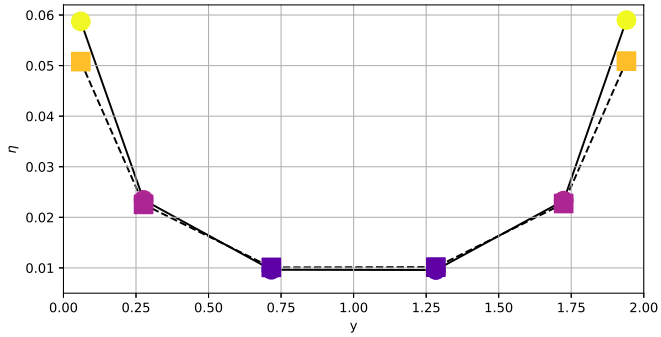

图 3. ILES（圆圈）和 HOPU 变体（方块）的 η 在 yz-面上的平均绝对跳跃值，随 y 的变化。

平均速度方面，所有分辨率下的预测都与 DNS数据吻合良好。这是因为对于高度分辨的近似，跳跃会消失，因此自然消除了 HOPU 引入的额外湍流模型。

对于雷诺应力，除近壁区域略有改善外，未观察到显著差异。图 5 展示了更详细的结果。高度欠分辨的 $N = 6$ 和 $k = 3$ HOPU 算例在近壁处的各阶矩方面与参考数据吻合得更好。

由平均体积速度定义的实际雷诺数 $U_b = 1/(2\pi)\int_{\partial\Omega|_{x=0}} u \, d\underline{s}$ 与目标雷诺数之间的相对误差见表 2。与 ILES 和 VMS 数值模拟相比，HOPU 变体在所有分辨率下的误差都显著更小，范围为 $\leqslant 1\%$ 。这些结果印证了图 1 和 4 中的观察结果。需要注意的是，基于平均速度计算的相对误差只能粗略估计近似的误差。

N/k	$6/3$	$12/3$	$16/3$
ILES	13.4%	3.1%	1.1%
VMS	16.3%	4.7%	2.7%
HOPU	0.7%	1.0%	0.6%

表 2. 目标体平均速度雷诺数的相对误差。

能谱比较：在图 6 中，我们通过比较各方法的能谱（由前文提到的离散傅里叶变换得到）来进行评估。给出了相应方法随波数 E^+ κ 变化的时间平均归一化总能谱。其数值是在两个垂直于 y方向的不同平面上计算得到的。第一个平面位于黏性底层，坐标为 $y^+ = 5$ ；另一个位于缓冲层，坐标为 $y^+ = 40$。用于计算能谱的速度数据来自一个分辨率为 $N = 12/k = 3$ 的模拟。

在所有情况下，我们都观察到低频范围内的谱近似效果良好。随着 κ 增大，能谱在进入耗散区间时逐渐下降。VMS 方法会在

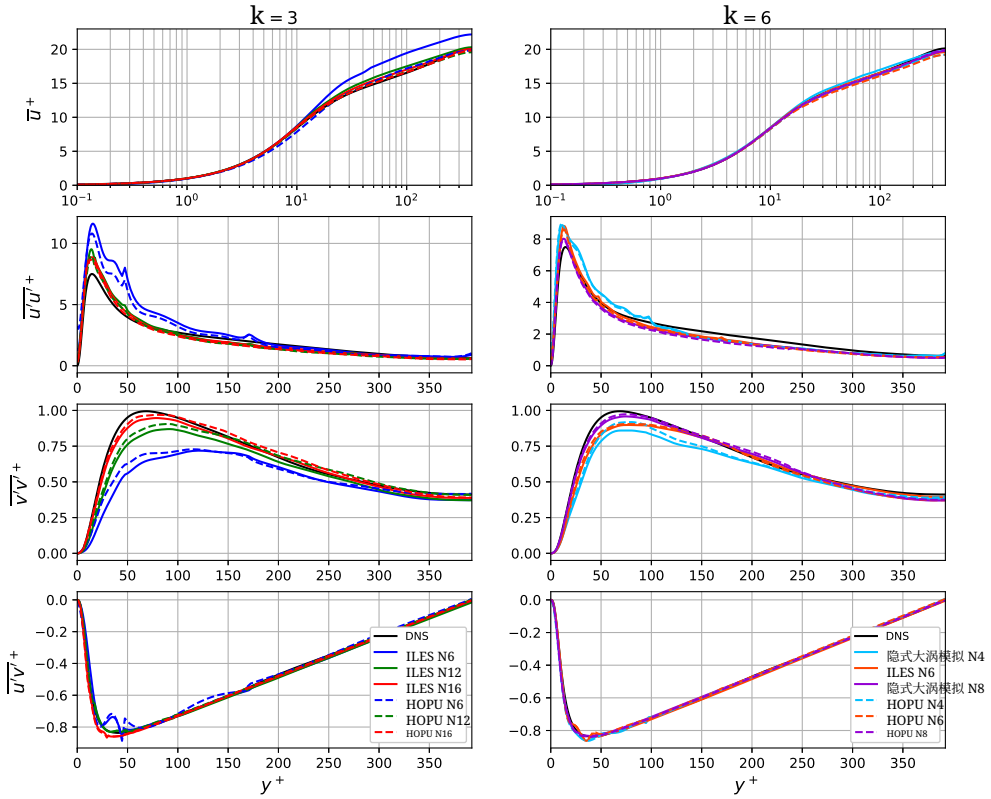

图4. 归一化平均速度 $\overline{u}^+$ 以及归一化雷诺应力 $\overline{u'u'}^+$、$\overline{v'v'}^+$ 和 $\overline{u'v'}^+$，位于 y^+上。

中频至高频范围内引入额外耗散。在该范围内，与隐式大涡模拟方法相比，能谱在较低波数处便开始下降。值得注意的是，与 $y^+ = 5$ 的参考直接数值模拟数据相比，HOPU 变体减轻了过度阻尼，对高波数范围的预测也好得多。

5. 周期性山丘流

采用曲面预测流动量的能力，可通过广为人知的周期性山丘流动测试算例进行评估，该算例最初由 [35]提出。这种流动会产生若干复杂的流动现象，包括再附着、分离以及与外流的强烈相互作用。边界层流动向分离剪切层的转变无法通过壁面律和标准模型假设进行预测。

我们采用与槽道流相同的边界条件。网格由六面体单元组成，这些单元首先使用与第4节相同的拉伸函数（根据高度进行调整）进行拉伸，然后（使用三阶多项式映射）弯曲以贴合几何形状，见图7。区域$\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y) \times (0, L_z)$ 为 $L_x = 9h$, $L_y = 3.0335h$ 且 $L_z = 4.5h$, 其中 $h = 1$ 表示山丘高度。特征流动由以下参数描述：

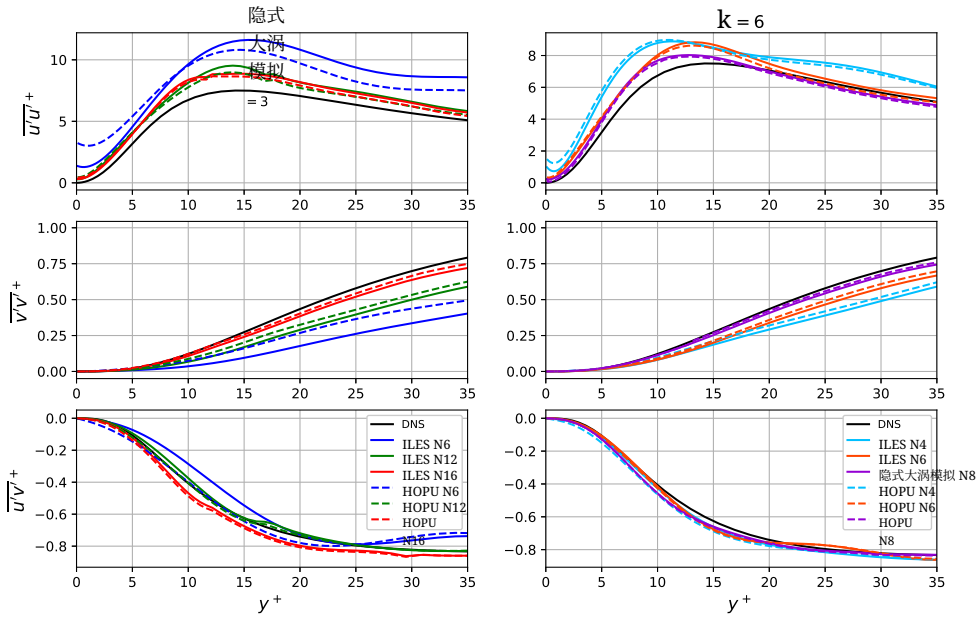

图 5. 测试算例中 $\overline{u'u'}^+$、 $\overline{v'v'}^+$ 和 $\overline{u'v'}^+$在 y^+ 处的归一化雷诺应力。

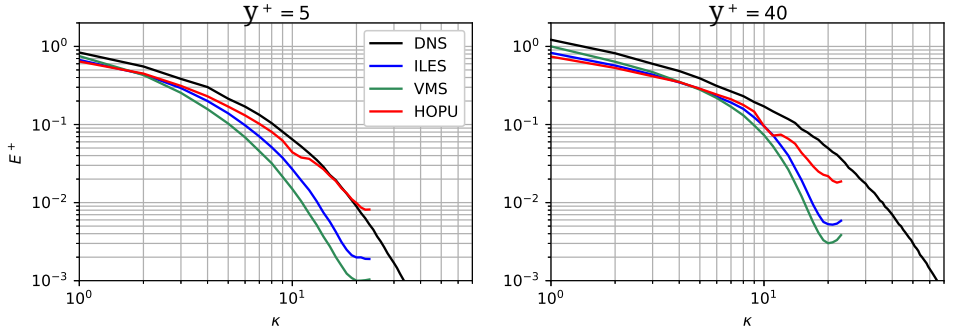

图 6. 两个不同平面上的归一化能谱 E^+，对应波数 κ，分别为 $y^+ = 5$ 和 $y^+ = 40$。

体平均速度雷诺数 $Re = U_b h/\nu$，其中体积平均速度现在定义为

$$U_b = \frac{1}{(L_y - h)L_z} \int_{\partial\Omega|_{x=0}} u \, d\underline{s}.$$

为获得恒定的体平均速度雷诺数（与槽道流中基于 τ_w 定义的雷诺数不同），对方程右端的力进行动态控制。对于我们的结果，所有数值模拟均采用 $Re = 2800$。本研究使用了两种不同的分辨率，具体可

	k	N_x	N_y	N_z	gDOF·10^{-3}
粗网格	3	12	8	6	43.2
fine	3	24	16	12	331.0

表 3. 周期性山丘流的模拟参数。

见表 3。时间步长与槽道流采用的相同。两种情况下的多项式阶数均为 $k = 3$ 。

达到统计稳态后，在给定时间段内测量 x 方向不同平面上的统计特性。所选平面位于 x： $\{h, 2h, 3h, 5h, 8h\}$。所得解与 [36] 提供的参考直接数值模拟数据进行比较。

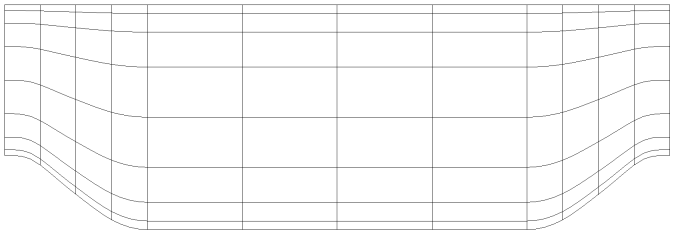

图 7. 周期性山丘问题的曲线网格。

5.1. **结果对比**。图 8 展示了不同方法在所考虑的分辨率下得到的归一化平均速度分量剖面。VMS 方法在空间离散中采用阶数 $m = 1$ ， L_h 自适应 HOPU 则采用限值 $\eta = \{0.025, 0.05, 0.1\}$。可以看出，所有数值模拟都能较好地再现流向速度分量 $\overline{u}^+$ 。在 $\overline{v}^+$的近似方面则观察到明显差异。不出所料，细网格上的数值模拟与参考数据最为吻合。比较 HOPU 与无模型方法可见，在粗网格下，HOPU 对 $\overline{v}^+$ 的模拟在 $x = \{3h, 5h, 8h\}$ 处吻合得更好。新方法在发生流动再附的区域改善了剖面结果。粗网格上的 ILES 和 VMS 方法所得结果并无本质差异。

雷诺应力的剖面如图所示 9。对于速度而言，较细网格所得的解总体上与参考数据吻合良好。粗网格所得结果大多高估了直接数值模拟剖面。对于雷诺应力 $\overline{v'v'}^+$ 和 $\overline{u'v'}^+$而言，HOPU 模拟所得剖面明显优于隐式大涡模拟方法。对于 VMS 方法，根据给出的结果，仅观察到轻微改进，甚至没有改进。

粗网格隐式大涡模拟计算得到的绝对值跳跃平均值如图 10所示。在下壁面附近，尤其是山丘下游区域， η 的值较高。有趣的是，峰值似乎位于分离点的紧邻处。该图粗略展示了受 HOPU 方法影响最大的区域。

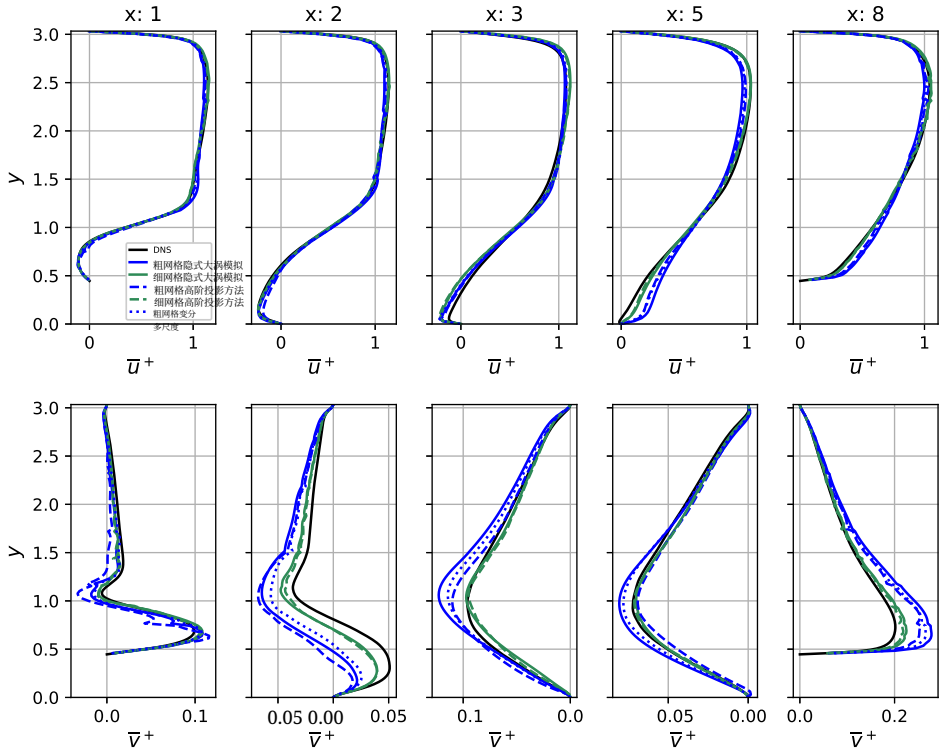

图8. 不同平面上的归一化平均速度 $\overline{u}^+$ 和 $\overline{v}^+$ 在{x方向} y 。

6. 结论

针对两个不同的测试算例，评估了 MCS 方法在壁面约束构型中捕捉结构分辨湍流的能力。除了采用无模型方法和显式 VMS 方法外，还引入了一种名为高阶投影迎风的全新技术，以进一步提升其内置耗散能力。

根据这些结果，我们可以得出结论：使用亚格子尺度模型与无模型方法在本质上似乎并无不同。结合 VMS 方法的 WALE 模型似乎对 DG 离散的实现效果较差。此外，模型引入的人工耗散可能会损害隐式耗散机制，并导致结果略差。

新的高阶投影迎风方法显著改善了 $k = 3$ 许多方面的标准隐式大涡模拟方法的结果，尤其是在湍流通道流算例中。HOPU 可避免近壁区域内由对流稳定化项引入的过度数值耗散问题。它能减轻该区域对湍流输运的抑制作用，并整体改善对已解析结构的影响。采用 $k = 6$ 进行离散所获得的结果表明，HOPU 对其影响并不显著。

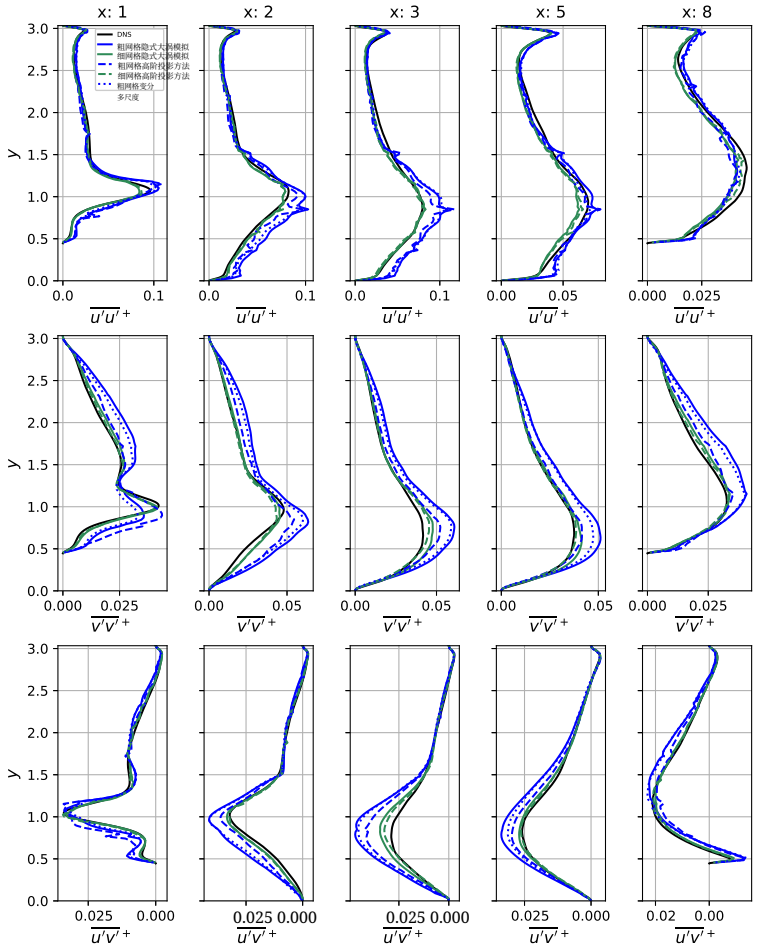

图9。不同x方向平面上的归一化雷诺应力 $\overline{u'u'}^+$、 $\overline{v'v'}^+$ 和 $\overline{u'v'}^+$，位于 y 。

我们认为，自适应局部阶数 HOPU 可被视为标准 DG ILES 离散的一种壁面模型方法。然而，目前尚不清楚将绝对值跳跃用作指示量是否为最佳做法，因此还需要针对自适应性开展更多研究。不过，即使在出现分离的流动中（如周期性山丘算例），HOPU 也在发生再附着的区域展现出改进效果。基于这些发现，未来仍需进一步研究将新颖的 HOPU 方法应用于复杂湍流问题。

7. 致谢

本研究部分由奥地利科学基金（FWF） [F65-P10和P35931-N]资助。为实现开放获取，作者已根据本次投稿产生的任何作者接受稿版本申请CC BY公共版权许可。

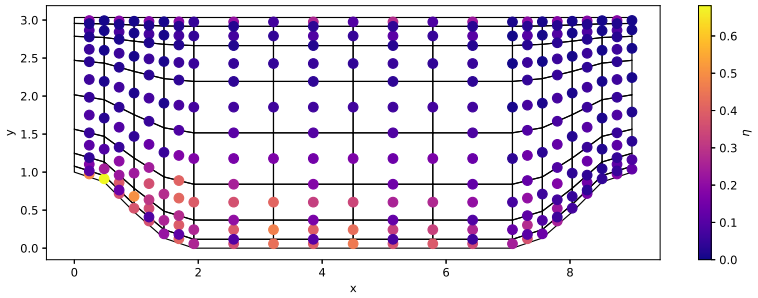

图10. 周期丘陵流问题的平均绝对值跳跃 η

参考文献

[1] P. Sagaut 和 D. Drikakis. “大涡模拟”。载于：航空航天工程百科全书。John Wiley and Sons, Ltd，2010年。[2] T. Hughes、L. Mazzei 和 K. Jansen。“大涡模拟与变分多尺度方法”。载于：《科学中的计算与可视化》3.1（2000年5月），第47–59页。[3] P. Fernandez、N. Nguyen 和 J. Peraire。“基于DG的大涡模拟中的亚格子尺度建模与隐式数值耗散”。载于：第23届AIAA计算流体力学会议论文集。2017-3951。AIAA。美国科罗拉多州丹佛，2017年6月。[4] T. Bolemann、A. Beck、D. Flad、H. Frank、V. Mayer 和 C. Munz。“用于中等雷诺数流动大涡模拟的高阶间断Galerkin格式”。载于：*IDIHOM*：高阶方法的工业化——自顶向下方法：欧盟资助的合作研究项目成果，*2010—2014*。施普林格国际出版，2015年，第435–456页。[5] S. Collis。“用于湍流模拟的间断Galerkin方法”。载于：利用数值模拟数据库研究湍流-*IX*：*2002*年夏季项目论文集（2002年）。[6] M. de la Llave Plata、V. Couaillier 和 M. le Pape。“关于采用高阶间断Galerkin方法对壁面湍流进行直接数值模拟和大涡模拟”。载于：《计算机与流体》176（2018年），第320–337页。[7] C. Carton de Wiart、K. Hillewaert、M. Duponcheel 和 G. Winckelmans。“间断Galerkin方法在高雷诺数涡流模拟中的评估”。载于：《国际流体数值方法杂志》74.7（2014年），第469–493页。[8] F. Zhang、J. Cheng 和 T. Liu。“任意网格上不可压Navier-Stokes方程的高阶间断Galerkin方法”。载于：《国际流体数值方法杂志》90.5（2019年），第217–246页。[9] E. Ferrer 和 R. Willden。“用于不可压缩纳维–斯托克斯方程的高阶间断Galerkin有限元求解器”。载于：《计算机与流体》46.1（2011年）。第10届ICFD流体动力学数值方法会议系列（ICFD 2010），第224–230页。[10] F. Bassi 和 S. Rebay。“用于数值求解可压缩Navier–Stokes方程的高阶精度间断有限元方法”。载于：*Journal of Computational Physics* 131.2（1997年），第267–279页。[11] N. Fehn、M. Kronbichler、C. Lehrenfeld、G. Lube 和 P. Schroeder。“欠分辨湍流不可压缩流动的高阶DG求解器：L^2方法与H(div)方法的比较”。载于：《流体数值方法》91（2019年12月11日），第533–556页。[12] G. Gassner 和 A. Beck。“欠分辨湍流模拟中高阶离散的精度”。载于：《理论与计算流体力学》27.3（2013年），第221–237页。[13] A. Uranga、P. Persson、M. Drela 和 J. Peraire。“采用间断Galerkin方法对低雷诺数下转捩至湍流进行隐式大涡模拟”。载于：《国际工程数值方法杂志》87.1-5（2011年），第232–261页。

[14] R. Moura、G. Mengaldo、J. Peiró 和 S. Sherwin。“高阶间断Galerkin方法对欧拉湍流隐式大涡模拟／欠分辨直接数值模拟的涡解析能力”。载于：*J. Comput. Phys.* 330.C（2017年），615–623。[15] J. Gopalakrishnan、P. Lederer 和 J. Schöberl。“采用弱施加的应力对称性的斯托克斯流质量守恒混合应力公式”。载于：*SIAM J. Numer. Anal.* 58.1（2020年），第706–732页。[16] C. Lehrenfeld 和 J. Schöberl。“用于非定常不可压缩流动的高阶精确无散混合间断Galerkin方法”。载于：《计算机方法与应用力学和工程》307（2016年），第339–361页。[17] J. Schöberl。“C++11在NGSolve中实现有限元”。载于：维也纳工业大学分析与科学计算研究所（2014年9月）。[18] P. Raviart 和 J. Thomas。“二阶椭圆问题的混合有限元方法”。载于：第606卷。2006年11月，第292–315页。[19] D. Boffi、F. Brezzi 和 M. Fortin。混合有限元方法及其应用。第44卷。施普林格计算数学丛书。施普林格，海德堡，2013年，第xiv+685页。[20] P. Lederer。“不可压缩流的质量守恒混合应力公式”。博士论文。维也纳工业大学，2019年。[21] J. Gopalakrishnan、P. Lederer 和 J. Schöberl。“斯托克斯方程的质量守恒混合应力公式”。载于：*IMA J. Numer. Anal.* 40.3（2020年），第1838–1874页。[22] B. Fraeijs de Veubeke。“有限元方法中转动平衡的离散化”。载于：有限元方法的数学方面（会议论文集，意大利国家研究委员会，罗马，*1975*年）。施普林格，柏林，1977年，第87–112页。数学讲义，第606卷。[23] D. Arnold、F. Brezzi 和 J. Douglas。“PEERS：一种用于平面弹性的混合有限元”。载于：*Japan J. Appl. Math.* 1.2（1984年），第347–367页。[24] R. Stenberg。“弹性问题的一族混合有限元”。载于：*Numer. Math.* 53.5（1988年），第513–538页。[25] P. Lederer 和 R. Stenberg。弹性问题混合有限元分析。*II.* 弱应力对称性。2022年。[26] Arnold, D. 和 Brezzi, F。“混合与非协调有限元方法：实现、后处理与误差估计”。载于：*ESAIM: M2AN*19.1（1985年），第7–32页。[27] L. Kogler、P. Lederer 和 J. Schöberl。质量守恒混合应力方法的协调辅助空间预条件器。2022年。[28] G. Karniadakis 和 S. Sherwin。谱／hp 计算流体力学的单元方法。第二版。数值数学与科学计算。牛津大学出版社，纽约，2005年，第xviii+657页。[29] U. Ascher、S. Ruuth 和 R. Spiteri。“时变偏微分方程的隐式－显式Runge-Kutta方法”。载于：《应用数值数学》25（2-3，1997年11月），151–167。[30] B. Pal 和 S. Ganesan。“时变区域上不可压缩纳维–斯托克斯方程的基于投影的变分多尺度方法”。载于：《国际流体数值方法杂志》84.1（2017年），第19–40页。

[31] V. John 和 A. Tambulea. “用于不可压缩湍流的有限元变分多尺度方法”。载于：卷 ECCOMAS CFD 2006。荷兰代尔夫特，2006年9月。[32] F. Ducros、N. Franck 和 T. Poinsot. “用于复杂几何中数值模拟的壁面自适应局部涡黏性模型”。载于：流体动力学数值方法 *VI*（1998年1月）。[33] R. Moura、S. Sherwin 和 J. Peiró. “线性弥散–扩散分析及其在采用间断Galerkin谱/hp方法进行欠分辨湍流模拟中的应用”。载于：*Journal of Computational Physics* 298（2015年），第695–710页。[34] R. Moser、J. Kim 和 N. Mansour. “高达 Re=590 的槽道流湍流直接数值模拟”。载于：*Physics of Fluids* 11（1999年4月），第943–945页。[35] C. Mellen、J. Froehlich 和 W. Rodi. “周期性山丘上方流动的大涡模拟”。载于：第*16*届*IMACS*世界大会，瑞士洛桑。2000年。[36] P. Balakumar 和 G. Ilhwan. “高雷诺数下分离流的DNS/LES模拟”。载于：第*45*届*AIAA*流体动力学会议。

Wiedner Hauptstraße 8-10，1040 维也纳，奥地利电子邮箱地址：philip.lederer@tuwien.ac.at

Wiedner Hauptstraße 8-10，1040 维也纳，奥地利电子邮箱地址：xaver.mooslechner@tuwien.ac.at

Wiedner Hauptstraße 8-10，1040 维也纳，奥地利电子邮箱地址：joachim.schöberl@tuwien.ac.at